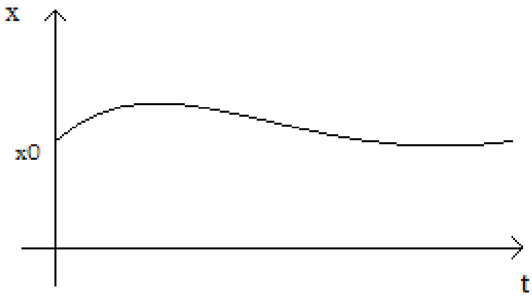
Applet de Sistemas Dinámicos 1D

Los sistemas dinámicos, buscan predecir cómo evoluciona una cierta función en el tiempo, lo que lleva a la definición de una ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x(0) = x_0$$



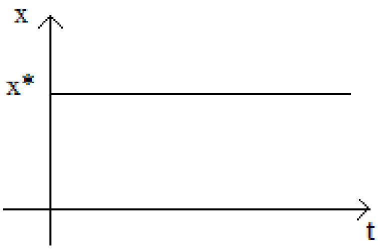
Estos sistemas, pueden tener *escenarios* que van a modificar la evolución. Dichos escenarios son factores externos que afectan al sistema, por ejemplo cuando existe una tasa de pesca en un lago. En este caso, la ecuación diferencial sería de la siguiente forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, k)$$

Otra definición importante en los sistemas dinámicos es si son *autónomos* o no. Un sistema dinámico autónomo no es influenciado por el tiempo, mientras que uno no autónomo, sí es influenciado por este.

Puntos de equilibrio

Se dice que x* es un punto de equilibrio del sistema si y solo si f(x*) = 0.



Donde x* es raíz de la función f.

Clasificación:

- Estable: Un punto de equilibrio es estable si $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ /\ \forall x_0 \colon |x_0 - x^*| < \delta$ es $|x(t) - x^*| < \varepsilon\ \forall\ t > 0$.
- Atractor: Un punto de equilibrio es atractor si es estable y además $w(x_0), \forall x_0 \colon |x_0 - x^*|$ es $\{x^*\}$.
- Inestable: Un punto de equilibrio es inestable si $\forall\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x_0/|x_0 - x^*| < \delta$ y además $|x(t) - x^*| > \varepsilon$.
- Repulsor: Un punto de equilibrio es repulsor si $\forall\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \forall x_0/|x_0 - x^*| < \delta$ y además $|x(t) - x^*| > \varepsilon$.

Teorema:

Sea $\frac{dx}{dt} = f(x), x^*\ es\ P.E$

- Si $f'(x^*) > 0 \Rightarrow x^*$ es repulsor.
- Si $f'(x^*) < 0 \Rightarrow x^*$ es atractor.
- Si $f'(x^*) = 0 \Rightarrow x^*$ no se sabe debido a que es un punto de equilibrio no hiperbólico.

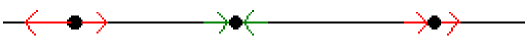
Gráficos

En el modelado de sistemas dinámicos, existen 3 gráficos:

- Función: f(x)
- Fases
- Trayectoria: f(t)

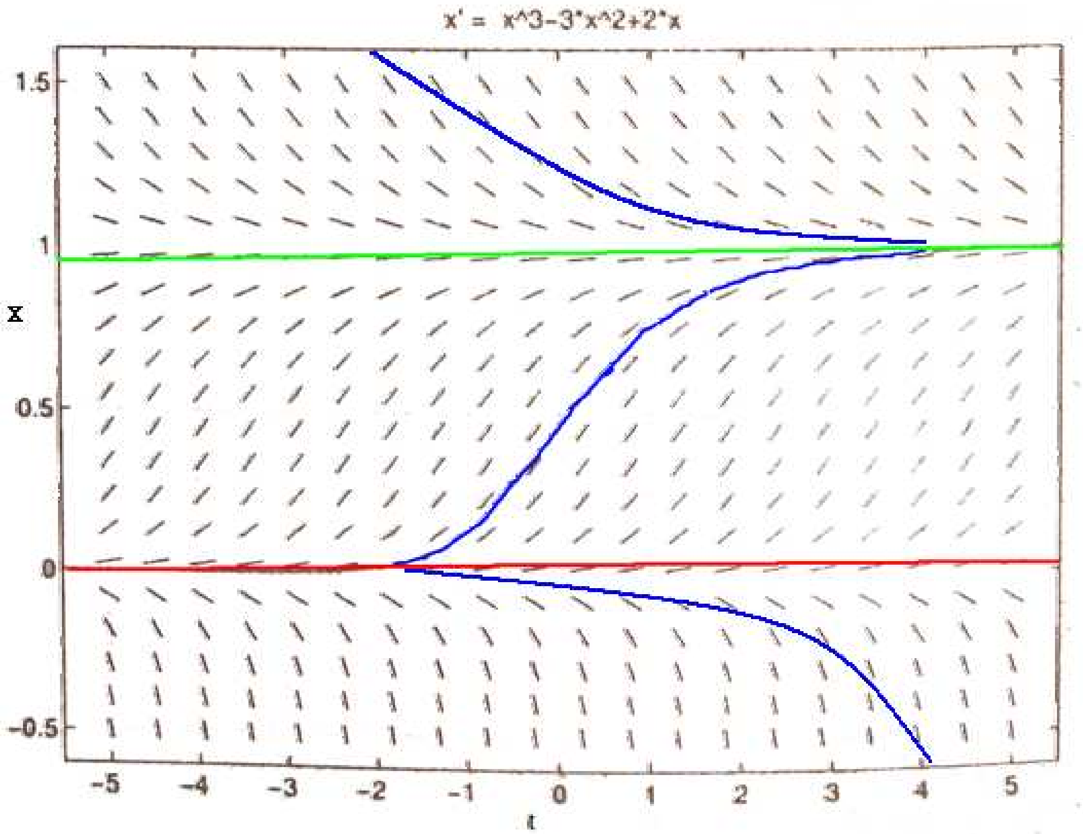
El grafico de la función, es trivial, es el grafico normal de una función f(x).

Diagrama de fases



En este diagrama, se pueden observar los puntos de equilibrio de la función y además, si los mismos son atractores (verdes) o repulsores (rojos). Dicha clasificación se puede realizar mediante el teorema anteriormente expuesto.

Diagrama de trayectoria

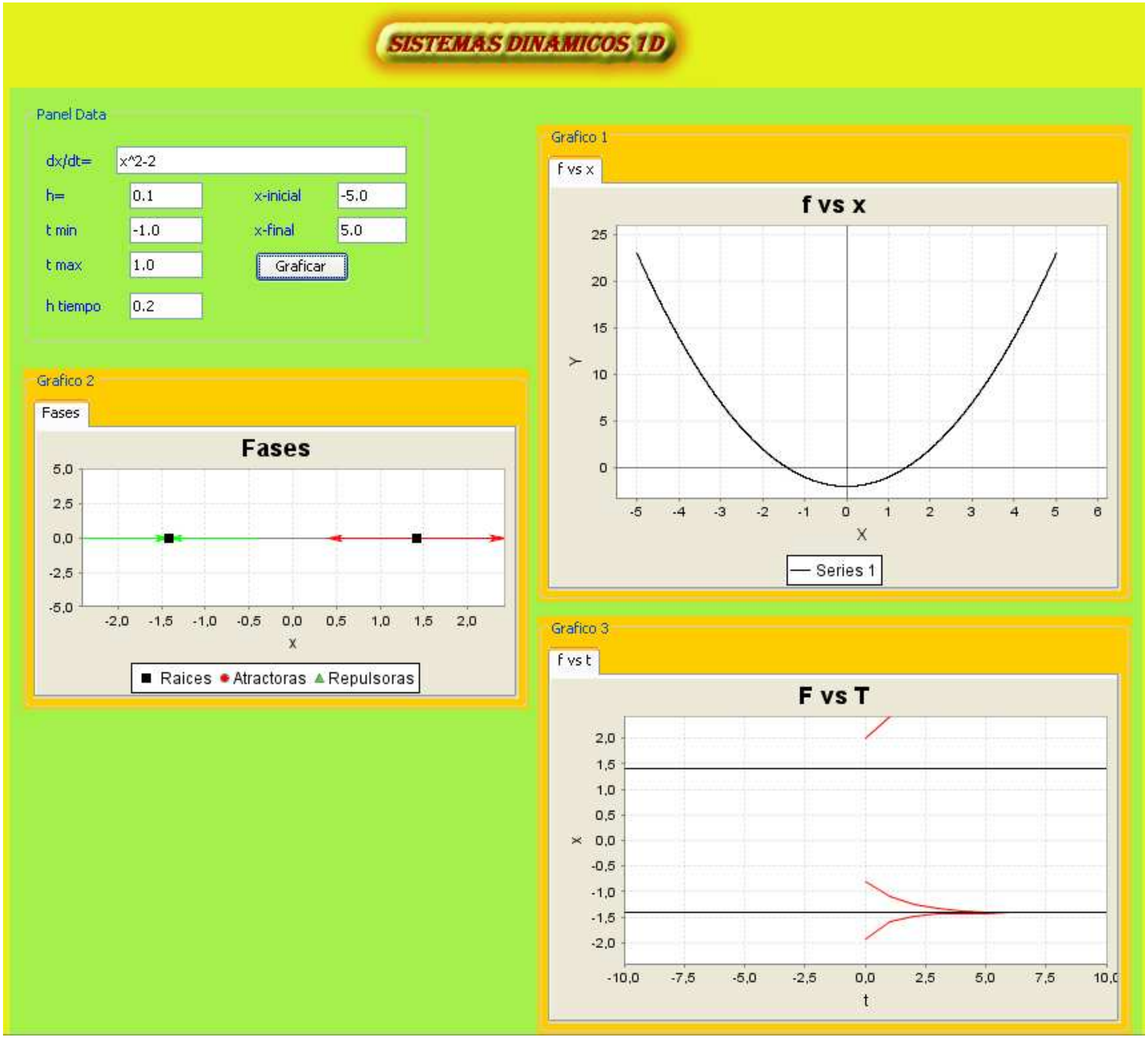


Este gráfico, muestra el comportamiento de la función en el tiempo. Cabe destacar que solo es válido para sistemas autónomos.

Las líneas llenas muestran los puntos de equilibrio (repulsores en rojo, atractores en verde), las líneas punteadas (C.C) muestran cambios de concavidad en la función original. Dichos cambios se producen cuando la derivada de la función se hace 0.

La idea del Applet que ha sido realizado, es la de mostrar los 3 gráficos expuestos anteriormente, permitiéndole al usuario ingresar la función que desee y los parámetros para realizar los gráficos.

Applet



En este Applet, se automatiza la realización de los gráficos expuestos anteriormente. Dicha automatización, surge de los parámetros que el usuario ingresa en el panel correspondiente.

En el panel de datos, el usuario puede ingresar:

- La ecuación diferencial (tomando la letra “x” como variable)
- El intervalo en el que desea graficar f(x) (xFinal y xInicial)
- El paso del método (a un paso más chico, la velocidad disminuye por tener que realizar más evaluaciones, pero a su vez aumenta la precisión)
- El intervalo de tiempo en el que se desea evaluar al sistema.
- El paso del tiempo (hTiempo).

Al hacer click en el botón “graficar”, se mostraran los 3 gráficos mencionados previamente. Primero se realiza el gráfico de f(x) y luego, utilizando métodos numéricos de cálculo de raíces, se realiza el de fases.

Por último, utilizando las raíces calculadas previamente y el método de Euler para aproximar ecuaciones diferenciales en forma numérica, se realiza el gráfico de trayectorias f (t).

La forma en que este Applet fue diseñado, le permite a quien quiera modificar los parámetros iníciales del mismo. Los parámetros que se pueden ingresar son los siguientes:

- Ecuación diferencial (funcion)
- Rango para las X (xInicial, xFinal)
- Rango de tiempo (tMin, tMax)
- Paso del método (h)
- Paso del tiempo (hTiempo)
- Color del fondo del Applet (fondoForm)
- Color del fondo de los paneles de los graficos (fondoGrafico)
- Color de la fuente (fontColor)

La forma en que se ingresan los parámetros es la siguiente:

```
<param name="fondoForm" value="A4F14B" valuetype="String"></param>
<param name="fondoGrafico" value="ffcc00" valuetype="String"></param>
<param name="fontColor" value="0000ff" valuetype="String"></param>

<!--PARAMETROS DEL EJEMPLO -->

<param name="xInicial" value="-5" valuetype="Double"></param>
<param name="xFinal" value="5" valuetype="Double"></param>
<param name="funcion" value="x^2-2" valuetype="String"> </param>
<param name="hTiempo" value="0.2" valuetype="Double"></param>
<param name="h" value="0.1" valuetype="Double"></param>
<param name="tMax" value="1" valuetype="Double"></param>
<param name="tMin" value="-1" valuetype="Double"></param>

<!--FIN PARAMETROS EJEMPLO -->
```

Donde *param* es una palabra reservada para especificar un parámetro, *name* se utiliza para especificar el nombre del parámetro, *value* es el valor que recibe el parámetro y *valuetype* indica de qué tipo de dato es el parámetro; String para palabras e Integer para enteros.

Un detalle importante a tener en cuenta desde el punto de vista estético, son los colores. Estos se ingresan utilizando la codificación hexadecimal, de la siguiente forma:

```
<param name="fondoForm" value="ffffff" valuetype="String"></param>
```

Donde ffffff es el código hexadecimal para el color blanco.

Referencias

- Hale, Jack K. y Koçak, Hüseyin. Dynamics and bifurcations; . New York : Springer, 1996. 568 p. Texts in applied mathematics, n. 3.