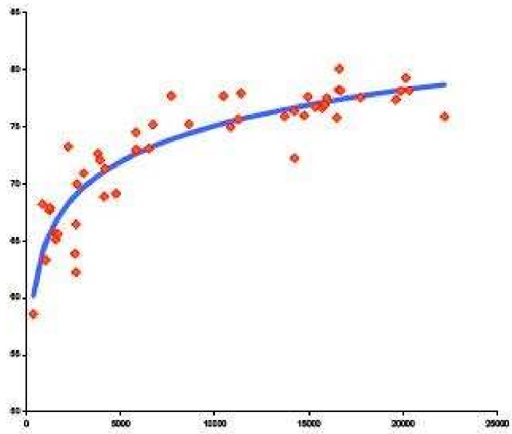
Applet del Método de Mínimos Cuadrados

El método de mínimos cuadrados, es utilizado para obtener la aproximación más adecuada a una función que represente una cierta cantidad de puntos tomados.

Funcionamiento del método



Este método no pretende hacer pasar un polinomio por todos los puntos, sino encontrar la expresión de una curva suave que se encuentre lo más cerca posible del conjunto de puntos. El problema es precisar como media la cercanía de los puntos (que se busca que sea la mayor posible).

Para que la cercanía de la curva a los puntos sea la mayor posible, se busca que el *error* (distancia del punto a la curva) sea el mínimo posible, para lo cual se debe derivar e igualar a 0. Se debe considerar que el error se debe elevar al cuadrado para evitar errores de compensación (puntos por encima y por debajo de la curva). En consecuencia:

Error de un punto: $E_0 = (\alpha_1 + \alpha_2 x_0 - y_0)^2$

Forma general del error: $E_k = (\alpha_1 + \alpha_2 x_k - y_k)^2$

Error completo: $E = \sum_{k=0}^{n} E_k^2 => Minimizar$

El problema radica en hallar α_1, α_2 talque $E(\alpha_1, \alpha_2)$ sea mínimo. Entonces, si hay un punto crítico, este va a ser mínimo porque la función es positiva. Recordemos que un mínimo se halla calculando la derivada una función e igualando dicha derivada a 0. En este caso, E se trata de una función de 2 variables, por lo cual se deben buscar las derivadas parciales e igualarlas a 0.

Entonces:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial \alpha_1} = 0 \quad (1) \\ \dfrac{\partial E(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial \alpha_2} = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Ahora efectuamos las derivadas, recordando que $E = \sum_{k=0}^{n} (\alpha_1 + \alpha_2 x_2 - y_k)^2$

$$(1)\ \frac{\partial E(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial \alpha_1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\alpha_1 + \alpha_2 x_k - y_k\right)^2 = 2\sum_{k=0}^{n} \left(\alpha_1 + \alpha_2 x_k - y_k\right).1 = 0$$

$$(2)\ \frac{\partial E(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial \alpha_2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\alpha_1 + \alpha_2 x_k - y_k\right)^2 = 2\sum_{k=0}^{n} \left(\alpha_1 + \alpha_2 x_k - y_k\right).x_k = 0$$

De esto resulta:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n} \alpha_1 + \sum_{k=0}^{n} \alpha_2 x_k = \sum_{k=0}^{n} y_k \\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_1 x_k + \sum_{k=0}^{n} \alpha_2 x_k^2 = \sum_{k=0}^{n} x_k y_k \end{cases}$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{cases} (n+1)\alpha_1 + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)\alpha_2 = \left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right) \\ \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)\alpha_1 + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^2\right)\alpha_2 = \left(\sum_{k=0}^{n} x_k y_k\right) \end{cases}$$

Cabe destacar que los términos encerrados entre paréntesis, son números conocidos y que el sistema anterior es lo mismo que expresa la forma matricial general, definida más adelante en este documento.

Forma Matricial General

$$A^t.A.\bar{\alpha} = A^t B$$

Donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 x_0 x_0^2 x_0^3 \cdots x_0^{q-1} \\ \vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots \ \cdots \ \vdots \\ 1 x_n x_n^2 x_n^3 \cdots x_n^{q-1} \end{pmatrix} \ A \in \mathbb{R}^{(n+1)\ X\ q}$$

$$B = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \ B \ \in \ \mathbb{R}^{(n+1) X\ 1} \qquad \bar{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_q \end{pmatrix} \ \bar{\alpha} \in \ \mathbb{R}^{q\ X\ 1}$$

$$A^t A \ \in \ \mathbb{R}^{q\ X\ q} \quad y \ A^t B \ \in \ \mathbb{R}^{q\ X\ 1}$$

Por último:

$$y = \ \alpha_1 + \ \alpha_2 x + \ \alpha_3 x^2 + \cdots + \alpha_q x^{q-1}$$

Donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_q$ se hallan resolviendo la ecuación general.

Ajustes no polinomios (Exponencial)

Este tipo de ajuste, se puede realizar siguiendo la forma matricial anteriormente explicada. La diferencia radica en que se debe realizar un cambio de variables.

La forma de este ajuste es la siguiente: $y = \alpha_1 e^{\alpha_2 x}$

Para efectuar el cambio de variables, se debe realizar la siguiente transformación:

$$\ln y = \ln(\alpha_1 e^{\alpha_2 x}) = \ln \alpha_1 + \alpha_2 x$$

Definiremos: $\beta_1 = \ln \alpha_1; \quad \beta_2 = \alpha_2; \quad v = \ln y\,; \quad u = x$

Entonces queda: $v = \beta_1 + \beta_2 u$

Ahora: $A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \ln y_0 \\ \vdots \\ \ln y_n \end{pmatrix} \quad \bar{\beta} = \begin{cases} \alpha_1 = e^{\beta_1} \\ \alpha_2 = \beta_2 \end{cases}$

Luego se resuelve el sistema de ecuaciones utilizando la forma matricial, de manera de obtener β_1 y β_2 para luego transformarlos en $\alpha_1 = \ln(\beta_1)$ y $\alpha_2 = \beta_2$.

Los métodos numéricos no son exactos, son aproximados, entonces es de vital importancia saber el error que tienen los mismos. En este se tienen 2 medidas de error: el *error global* y el *coeficiente de regresión*.

$$error\ global = \sum_{k=0}^{n} (f(x_k) - y_k)^2$$

$$\alpha = \sum_{k=0}^{n} (y_k - \bar{y})^2$$

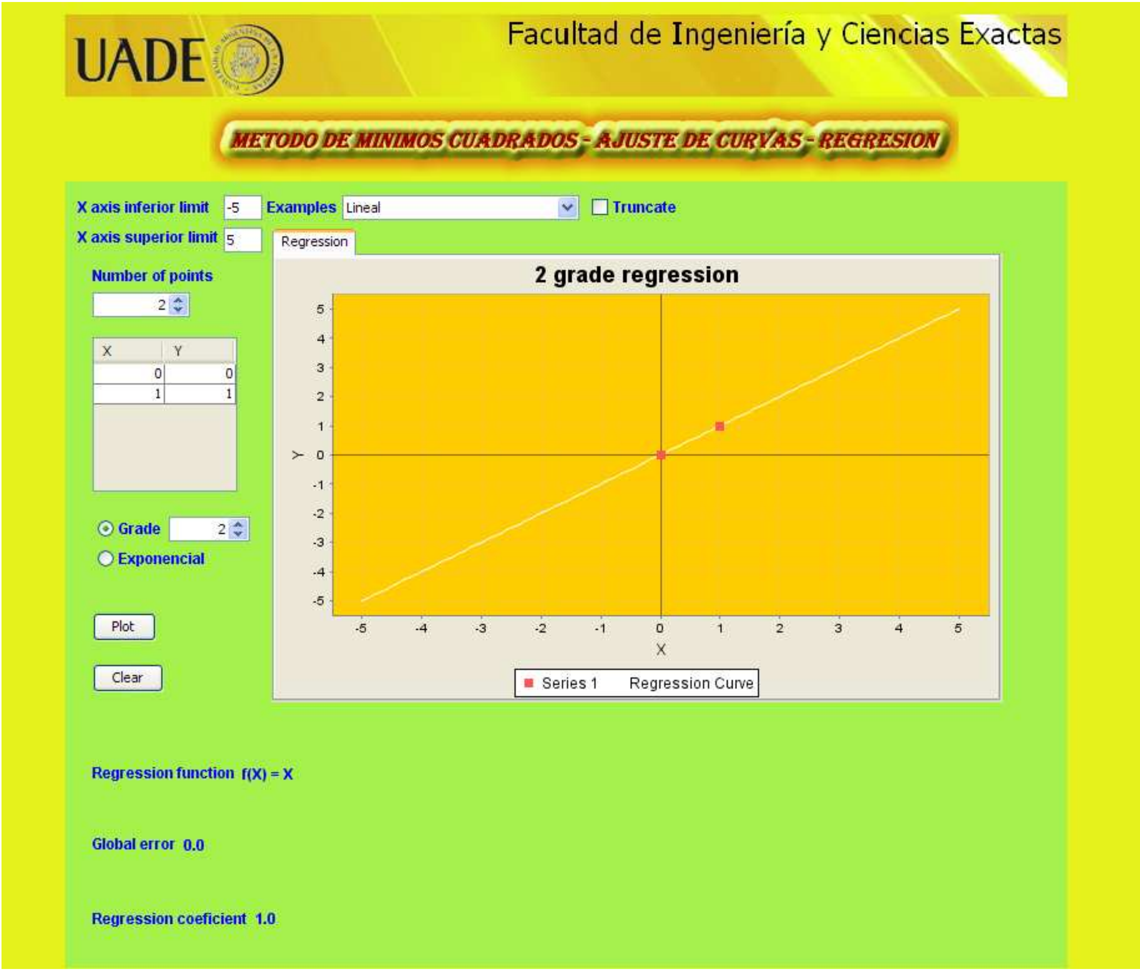
$$Coeficiente\ de\ regresion = 1 - \frac{Error\ global}{\alpha}$$

El error global lo que nos marca, es la distancia que hay entre cada punto ingresado y el obtenido a través de la función de regresión calculada.

El coeficiente de regresión, es un indicador de la fuerza de unión de los valores con la función de regresión calculada, es decir, que tanto se pegan estos valores a la función determinada. Por ejemplo, si se utilizan los puntos (0,0), (1,1), (2,4), (3,9) y se lo aproxima con grado 2, la función obtenida es $f(x) = x^2$, con lo cual este coeficiente dará 1. Mientras más cerca de 1 se encuentre, mejor va a ser el ajuste.

Applet

Un Applet es una aplicación programada en el lenguaje de programación Java que se ejecuta en el entorno de otro programa, como ser un navegador web, es decir, que no puede ejecutarse de forma independiente. Una característica importante de un Applet, es que es independiente de la plataforma del usuario, es decir, que puede ejecutarse tanto en entorno Windows, como en entornos UNIX o Mac.



Este Applet automatiza el método anteriormente descripto utilizando la forma matricial general.

En la pantalla anterior, se presenta la imagen inicial de la aplicación, en esta se encuentran varias opciones y botones cuyo funcionamiento se detalla a continuación.

En la lista desplegable de la parte superior de la pantalla, se pueden seleccionar ejemplos que ya se encuentran ingresados, para que el usuario pueda observar y comprender el funcionamiento de la aplicación. Estos ejemplos son modificables y configurables, ya sea en la misma aplicación (cuya modificación solo perdurara en la ejecución del Applet) o mediante parametrización por HTML (en este caso los cambios serán observables en forma permanente todas las veces que se ejecute).

Situada en el sector superior izquierdo, se encuentra un selector de cantidad de puntos, por el cual se podrá definir cuál es la cantidad que se desea ingresar. Debajo de esto se puede observar una tabla en la que se pueden ingresar las coordenadas de esos puntos.

Es posible especificar el grado de la curva por la cual se desea realizar la aproximación de esos puntos, como así también se puede indicar que el programa aproxime a través de una función exponencial.

Por último, cuando se clickea en el botón graficar, se genera el grafico correspondiente, se muestra la función de regresión calculada, el error global y coeficiente de regresión.

La aplicación puede ser personalizada por medio de parámetros fijos, los cuales se enumeran a continuación, especificando entre paréntesis el nombre que reciben en la aplicación:

- Fondo de la aplicación (fondoForm)
- Fondo del grafico (fondoGrafico)
- Fuente (font)
- Tamaño de fuente (fontSize)
- Color de fuente (fontColor)
- Mínimo valor del eje X (xMin)
- Máximo valor del eje X (xMax)
- Idioma (Idioma [EN | ES])
- Cantidad de decimales (cantDecimales)
- Color de la curva (colorTrazo)
- Grado de los ejemplos ([numero | exp])
- Cantidad de ejemplos (cantEjemplos)
- Titulo del ejemplo (nombreEjemplo)
- Puntos del ejemplo (puntos*orden* [colección de puntos])

Los parámetros se especifican en el archivo HTML del Applet, de la siguiente forma:

```
<param name="xMax" value="5" valuetype="Integer"> </param>
```

Donde *param* es una palabra reservada para especificar un parámetro, *name* se utiliza para especificar el nombre del parámetro, *value* es el valor que recibe el parámetro y *valuetype* indica de qué tipo de dato es el parámetro; String para palabras e Integer para enteros.

Un detalle importante a tener en cuenta desde el punto de vista estético, son los colores. Estos se ingresan utilizando la codificación hexadecimal, de la siguiente forma:

<param name="colorTrazo" value="ffffff" valuetype="String"></param>

Donde ffffff es el código hexadecimal para el color blanco.

Una característica importante de la aplicación, es la posibilidad de que el usuario ingrese sus propios ejemplos. Eso se realiza de la siguiente forma:

<param name="grado" value="2" valuetype="String"> </param

<param name="cantEjemplos" value="3" valuetype="Integer"></param>

<param name="nombreEjemplo1" value="EJEMPLO PARAM"valuetype="String"></param>

<param name="puntos1" value="(1.3,5);(3,4);(4,5.4)" valuetype="String"></param>

<param name="nombreEjemplo2" value="Lineal" valuetype="String"></param>

<param name="puntos2" value="(0,0);(1,1)" valuetype="String"></param>

<param name="nombreEjemplo3" value="EJEMPLO PARAM2" valuetype="String"></param>

<param name="puntos3" value="(1.3,5);(3,4);(4,5.4);(10,10)" valuetype="String"></param>

El parámetro *grado* específica el grado del polinomio que se desea utilizar para aproximar los ejemplos. Dicho parámetro puede tomar tanto un número como así también la palabra *exp* para especificar que se desea aproximar por exponencial. En este caso, el grado del polinomio será 2.

El parámetro *cantEjemplos* especifica el número de ejemplos que usted va a ingresar. Este parámetro es de vital importancia, debido a que si usted los inicializa en 0, no se cargará ningún ejemplo por los ingrese debajo. Como se puede observar, en este caso, este parámetro tiene valor 3 y debajo hay 3 ejemplos.

El parámetro *nombreEjemplo* representa el titulo que va a tener dicho ejemplo. En este caso el ejemplo se llama “EJEMPLO PARAM”.

El parámetro *puntos* permite ingresar la serie de puntos que se desea aproximar. Aquí es importante el formato de ingreso, que es el siguiente: (x,y);(x,y)…..(El separador de decimales es el punto “.”).

Un punto muy importante, es que los parámetros *puntos* y *nombreEjemplo*, deben terminar con su número de orden. Por ejemplo, en el ejemplo 1, se puede observar que el parámetro *puntos*, termina en 1 y que el parámetro *nombreEjemplo*, también termina en 1.