Przyczynowe więzy na strukturę korelacji w formalizmie kwantowym

Piotr Krasuń

29 listopada 2016

Spis treści

Spis rysunków

Spis tabel

1 Wstęp

Tekst wstępu

2 Macierz Procesu

Jednym z podejść do eksploracji korelacji nie zachowujących przyczynowego porządku jest rozwinięty w [4] formalizm macierzy procesu. Ewidentną zaletą tego podejścia jest zgodność z mechanika kwantową na poziomie lokalnych eksperymentów. Jest to nijakie rozszerzenie i enkapsulacja idei POVM i reguły Borna. Podejście te porzuca założenie globalnej struktury czasoprzestrzeni. W celu zachowania zgodności z mechaniką kwantową na poziomie lokalnym opiera się na następujących założeniu, że operacje wykonywane przez poszczególną stronę są opisywane przez mechanikę kwantową w standardowym przyczynowym sformułowaniu, które można opisywać przy pomocy zbioru *quantum instruments* [2] z wejściową przestrzenią Hilberta $\mathcal{H}^{A_1}$ i przestrzenią wyjściową $\mathcal{H}^{A_2}$. Najogólniej można je realizować przy pomocy zadziałania unitarną transformacją na system wejściowy i *ancilla*, następnie wykonanie rzutującego pomiaru na części systemu pozostawiając pozostała część systemu jako wyjście. Alicja wykorzystując dany instrument otrzymuje jeden z możliwych wyników x_i, który indukuję transformację $\mathcal{M}_i^A$ z wejścia na wyjście. Transformacja ta odpowiada *completely positive* (CP) *trace preserving* mapie[1]

$$\mathcal{M}_i^A : \mathcal{L}(\mathcal{H}^{A_1}) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}^{A_2}) \tag{1}$$

gdzie $\mathcal{L}(\mathcal{H}^X)$ jest przestrzenią macierzy na $\mathcal{H}^X$, której wymiar to d_X. Jej działanie na macierz gęstości ρ opisuje następująca formuła

$$\mathcal{M}_i^A(\rho) = \sum_{j=1}^{m} E_{ij}^\dagger \rho E_{ij} \tag{2}$$

gdzie macierze E_{ij} spełniają następujące własności

$$\sum_{i=0}^{m} E_{ij}^\dagger E_{ij} \leqslant \mathbb{1}^{A_1} \tag{3}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} E_{ij}^\dagger E_{ij} = \mathbb{1}^{A_1} \tag{4}$$

Prawdopodobieństwo zaobserwowania wyniku realizowanego przez mapę $\mathcal{M}_i^A$ to

$$\Pr(\mathcal{M}_i^A) = \mathrm{Tr}(\mathcal{M}_i^A(\rho)) \tag{5}$$

[1] Liniową mapę ϕ nazywamy CP, gdy $a \geqslant 0 \implies \phi(a) \geqslant 0$ oraz $\forall_{k\in\mathcal{N}}\ \mathcal{I}_k \otimes \phi$ również jest CP

Widzimy od razu, że równanie (4) narzuca, by możliwość zaobserwowania dowolnego wyniku była równa 1. W przypadku, gdy mamy do czynienia z więcej niż jedną stroną *procesem* będziemy nazywać listę $\Pr(\mathcal{M}_i^A, \mathcal{M}_j^B, \dots)$ dla wszystkich możliwych lokalnych wyników. Dalej będę opisywał wyłącznie przypadek dwustronny, jednakże rozszerzenie formalizmu na przypadek wielostronny jest trywialny. Wygodnym sposobem przedstawiania map $\mathcal{M}_i^A$ jest izomorfizm Choi-Jamiołkowsky (CJ) [3, 1]. Macierz CJ $M_i^{A_1 A_2} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{A_1} \otimes \mathcal{H}^{A_2}) \geqslant 0$ jest zdefiniowana jako

$$M_i^{A_1 A_2} := [\mathcal{I} \otimes \mathcal{M}_i^A(|\phi^+\rangle\langle\phi^+|)]^T, \tag{6}$$

$$|\phi^+\rangle = \sum_{i=1}^{d_{A_1}} |ii\rangle, \tag{7}$$

gdzie $\{|j\rangle\}^{d_{A_1}}$ tworzy ortonormalna bazę w $\mathcal{H}^{A_1}$. Korzystając z tego przejścia można zapisać prawdopodobieństwo dwóch rezultatów, jako

$$\Pr(\mathcal{M}_i^A, \mathcal{M}_j^B) = \mathrm{Tr}(W^{A_1 A_2 B_1 B_2}(M_i^{A_1 A_2} \otimes M_j^{B_1 B_2})). \tag{8}$$

Macierz W w $\mathcal{L}(\mathcal{H}^{A_1} \otimes \mathcal{H}^{A_2} \otimes \mathcal{H}^{B_1} \otimes \mathcal{H}^{B_2})$ nazywa się *process matrix* (macierzą procesu). W celu generowania prawidłowego prawdopodobieństwa narzuca się dodatkowe warunki na W

$$W^{A_1 A_2 B_1 B_2} \geqslant 0. \tag{9}$$

$$\mathrm{Tr}\left[W^{A_1 A_2 B_1 B_2}\left(M^{A_1 A_2} \otimes M^{B_1 B_2}\right)\right] = 1. \tag{10}$$

$$\forall M^{A_1 A_2}, M^{B_1 B_2} \geqslant 0, \mathrm{Tr}_{A_2} M^{A_1 A_2} = \mathbb{1}^{A_1}, \mathrm{Tr}_{B_2} M^{B_1 B_2} = \mathbb{1}^{B_1}, \tag{11}$$

gdzie $M^{A_1 A_2} = \sum_i M_i^{A_1 A_2}$. Warunek (9) zapewnia, że prawdopodobieństwa nie będą ujemne, a (10) i (11) pewność zaobserwowania dowolnej pary map.

Bibliografia

[1] Man-Duen Choi. Completely positive linear maps on complex matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 10(3):285 − 290, 1975.

[2] E. B. Davies and J. T. Lewis. An operational approach to quantum probability. *Comm. Math. Phys.*, 17(3):239–260, 1970.

[3] A. Jamiolkowski. Linear transformations which preserve trace and positive semidefiniteness of operators. *Reports on Mathematical Physics*, 3(4):275–278, December 1972.

[4] Ognyan Oreshkov, Fabio Costa, and Caslav Brukner. Quantum correlations with no causal order. 2011.