

# Przyczynowe więzy na strukturę korelacji w formalizmie kwantowym

Piotr Krasuń

3 stycznia 2017

## Spis treści

1	Wstęp	3
1.1	Historia . . . . .	3
1.2	Podstawowe informacje . . . . .	3
2	Macierz Procesu	6
3	Przyczynowa separowalność i przyczynowe nierówności	8
3.1	Procesy z przyczynowym modelem . . . . .	10
4	Świadek przyczynowości	11
4.1	Sformułowanie macierzy procesu niezależne od bazy . . . . .	12
4.2	Poszukiwanie i implementacja świadka przyczynowości . . . . .	12
5	Postulat puryfikacyjny	14
	Bibliografia	16

## Spis rysunków

1	Sfera Blocha. Punkty na tej sferze opisują wszystkie możliwe stany $ \psi\rangle$ . . . . .	3
2	Wyrażenia zgodne z formalizmem i ich proponowana graficzna interpretacja . . . . .	7

## Spis tabel

# 1 Wstęp

## 1.1 Historia

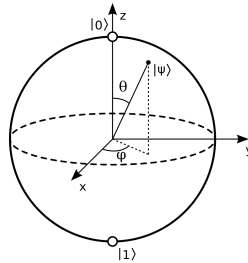
Mechanika kwantowa od samego początku jej badania budziła wiele kontrowersji. Od samego początku wiele osób miało problem z zaakceptowaniem faktu, iż na fundamentalnym poziomie rzeczywistość nie jest deterministyczna, jak nam się wydawało. Losowa natura tej teorii, jak i wiele "dziwnych" cech mechaniki kwantowej była początkowo trudna do zaakceptowania. Rok po opublikowaniu pracy Schrödingera, Einstein w swojej pracy zamieścił zdanie, które kierunkowało badania w tamtym czasie, zaś dziś w raz z innymi popularnymi "powiedzonkami" kwantowymi zakorzeniony w kulturze, a mianowicie, że "Bóg nie gra w kości", która później okazała się być nieprawdziwa - przynajmniej nie w takim stopniu w jakim autor by sobie życzył. Sam formalizm doczekał się wielu interpretacji często bardziej filozoficznych. Dzisiaj najpopularniejszymi jest interpretacja Kopenhaska, teoria wielu światów, czy idei inkorporującej kwantowej grawitacji w mechanizm pomiaru. Mimo tego jest to bardzo matematycznie elegancka teoria, którą można nazwać jednym z największych osiągnięć współczesnej fizyki. Wielokrotnie jej "dziwne" przewidywania zostały potwierdzone eksperymentalnie z wręcz idealną dokładnością (w przeciwieństwie do np. stałej kosmologicznej, która niedokładność przekracza wiele dziesiątek rzędu wielkości).

## 1.2 Podstawowe informacje

Przechodząc do bardziej konkretnych rzeczy; systemy w mechanice kwantowej opisują się jako elementy przestrzeni Hilberta  $\psi \in \mathcal{H}$ , a tak zwane obserwable samosprężone operatorów  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , które opisują nam pomiary, jakie możemy wykonać na danym systemie. W przypadku skończonego wymiaru, bądź policzalnym możemy powiedzieć, że  $\mathcal{H}^A = \mathcal{C}^N$  i obserwable są po prostu macierzami hermitowskimi odpowiedniego wymiaru. Przez znak równa się rozumiemy przestrzeń Hilberta zbudowaną na tym zbiorze z odpowiednimi działaniami. Dość standardowym i wygodnym jest wykorzystywanie tak zwanej notacji Diraca a mianowicie przedstawianie  $\psi = |\psi\rangle$  i  $\psi^\dagger = \langle\psi|$

$$\psi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} := |\psi\rangle \quad \psi^\dagger = (a_1^* \ a_2^* \ a_3^*) := \langle\psi| \quad (1)$$

Wygodnie narzucić warunek normalizacji stanów, a mianowicie  $\langle\psi||\psi\rangle := \langle\psi|\psi\rangle = 1$ , wtedy wartość



Rysunek 1: Sfera Blocha. Punkty na tej sferze opisują wszystkie możliwe stany  $|\psi\rangle$ .

oczekiwaną obserwabli w danym stanie  $|\psi\rangle$  oblicza się tak  $\langle A \rangle := \langle\psi|A|\psi\rangle$ . Zauważmy, że skoro obserwable opisywane są przez macierze hermitowskie, można skorzystać z twierdzenia spektralnego i zapisać  $A = \sum_i^N \lambda_i |i\rangle\langle i|$ , gdzie  $\lambda_i$  opisuje i-tą wartość własną zaś  $|i\rangle$  to i-ty wektor własny, który dobrano tak, że  $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$ ,  $\{|i\rangle\}$  tworzy ortonormalną bazę w  $\mathcal{H}$ . Jednym z postulatów mechaniki kwantowej jest tzw.

postulat pomiaru von Neumanna. Mówi on, że wykonując pomiar obserwabla A system w stanie  $|\psi\rangle$  otrzymamy wartość  $\lambda_i$  odpowiadającą wektorowi własnemu  $|i\rangle$  zapada się w stan  $|i\rangle$ . Można zapisać go w następujący sposób opisujący warunkową ewolucję po pomiarze

$$|\psi\rangle \mapsto \frac{\Pi_i|i\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\Pi_i|\psi\rangle}}, \quad (2)$$

gdzie  $\Pi_i$  jest projektorem odpowiadającym  $|i\rangle\langle i|$ . Zapisując  $|\psi\rangle = \sum_i^N a_i|i\rangle$ ,  $\sum_i^N |a_i|^2 = 1$  prawdopodobieństwo zaobserwowania wyniku  $\lambda_i$  jest równe  $|a_i|^2$ , lub równoważnie

$$\Pr(\lambda_i) = \langle\psi|\Pi_i|\psi\rangle, \quad (3)$$

co znane jest jako reguła Borna. Fakt, że obserwabla są opisywane przez macierze Hermitowskie zapewnia, że  $\sum_i^N |i\rangle\langle i| = \mathbb{1}$ , co dalej implikuje, że  $\sum_i^N \Pr(\lambda_i) = \sum_i^N \langle\psi|\Pi_i|\psi\rangle = \langle\psi|\sum_i^N \Pi_i|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = 1$  Stan całego systemu składającego się z pewnej ilości systemów opisuje element z

$$\mathcal{H}^{AB\dots} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B \otimes \dots, \quad (4)$$

gdzie  $\otimes$  to iloczyn tensorowy. Wraz z wzrostem systemów składających się na system ilość wektorów bazowych rośnie eksponentalnie, co jest fundacją tzw. "kwantowego przyspieszenia", które pozwala heurystycznie/przybliżenie rozwiązać na komputerach kwantowych problemy niektóre klasyczne problemy z eksponentyjnym przyspieszeniem np. faktoryzacja liczb, rozwiązywanie układów liniowych czy odpowiednio sformułowane problemy uczenia maszynowego. Ważną rzeczą do zaobserwowania jest fakt, że istnieją takie systemy, które nie można zapisać, jako iloczyn stanów w poszczególnych podsystemach. Klasycznym przykładem tego jest

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{AB} &= \mathcal{C}^2 \otimes \mathcal{C}^2 \\ |\psi\rangle &= |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B + |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B := |1\rangle|1\rangle + |0\rangle|0\rangle := |11\rangle + |00\rangle \\ a_0|0\rangle + a_1|1\rangle \otimes b_0|0\rangle + b_1|1\rangle &= a_0b_0|00\rangle + a_0b_1|01\rangle + a_1b_0|10\rangle + a_1b_1|11\rangle \\ a_0b_1 &= 0 \implies a_0 = 0 \vee b_1 = 0 \\ a_1b_0 &= 0 \implies a_1 = 0 \vee b_0 = 0 \end{aligned}$$

Powyższe implikują, że  $a_0b_0 \neq 1 \vee a_1b_1 \neq 1$ .

Takie systemy, które nie da się zapisać w postaci  $|\Psi\rangle = |\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B$  nazywa się splątanymi. Splątanie kwantowe jest zasobem, które znalazło zastosowanie w wielu nowatorskich aplikacjach, jak np. kryptografia kwantowa, certyfikowana losowość, teleportacja kwantowa czy wcześniej przytoczone "kwantowe przyspieszenie". Często w rozważaniach ogranicza się do skończonych przestrzeni Hilberta o wybranych rozmiarach. Najmniejszą i niepodzielną jednostką informacji jest kubit ( $\mathcal{H} = \mathcal{C}^2$ ), fizycznie reprezentuje on np. cząstkę ze spinem- $\frac{1}{2}$  (elektron), polaryzację fotonu. W wielu dziedzinach informatyki kwantowej ogranicza się praktycznie wyłącznie do analizy systemów złożonych z kubitów ze względu na pewną prostotę i wygodę analizy takich systemów. Ciekawą interpretacją kubitów prezentuje Sferta Blocha (??). Punkty na tej sferze opisują wszystkie prawidłowe znormalizowane  $|\psi\rangle \in \mathcal{C}^2$ . Okazuje się jednak, że niewystarczający do opisu zespołów statystycznych (system znajduje się w jakimś z  $|\psi_i\rangle$  stanów z prawdopodobieństwem  $p_i$ ) wynikający z braku pełnej wiedzy o systemie, bądź sposobie jego przygotowania.

Do opisu takich sytuacji korzysta się z macierzy gęstości, definiowanych następująco

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (5)$$

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(A\rho) \quad (6)$$

$$\text{Pr}(\lambda_i) = \text{Tr}(\Pi_i\rho) \quad (7)$$

$$\rho \mapsto \frac{\Pi_i\rho\Pi_i}{\text{Tr}(\Pi_i\rho)} \quad (8)$$

Prócz warunkowej ewolucji podczas pomiaru, systemu kwantowe podlegają również ewolucji czasowej. W obrazie Schrödingera ewoluują stany. Wygląda to następująco

$$U(t)|\psi(0)\rangle = |\psi(t)\rangle \quad (9)$$

$$U(t)^\dagger|\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle \quad (10)$$

Zaś w obrazie Heisenberga ewoluują obserwable

$$A(t) = U^\dagger A(0)U \quad (11)$$

gdzie  $U(t)$  jest pewnym unitarnym operatorem ( $U^\dagger U = \mathbb{1}$ ) działającym na  $\mathcal{H}$ . Pomiar rzutujący nie jest jedynym pomiarem, który można wykonać. Najogólniejszym pomiarem, który można wykonać w mechanice kwantowej jest *positive valued measurement* (POVM). Opisywany jest on przez zbiór takich operatorów  $\{E_i\}$ , że  $E_i > 0$ ,  $\sum_i E_i = \mathbb{1}$ . Poprzednie reguły przechodzą w

$$\text{Pr}(x_i) = \langle\psi|E_i|\psi\rangle \quad (12)$$

$$\text{Pr}(x_i) = \text{Tr}(E_i\rho) \quad (13)$$

$$E_i = \sum_j A_{ij}^\dagger A_{ij} \quad (14)$$

$$\rho \mapsto \frac{\sum_j A_{ij}\rho A_{ij}^\dagger}{\text{Tr}(\sum_j A_{ij}\rho A_{ij}^\dagger)}, \quad (15)$$

pomiary takie realizuje się korzystając z *ancilli* (pomocniczy system), ewoluując złożony system odpowiednio dobranym operatorem unitarnym, następnie dokonując pomiaru rzutującego na *ancilli* i po odnotowaniu wyniku odrzuceniu jej. Ważnym narzędziem w formalizmie kwantowym są tak zwane kanały kwantowe *quantum channel* opisują one fizyczne połączenia, ich działania na fizyczny system. Klasycznym analogiem może być np. linia telefoniczna czy światłowód transmituje internet. Przykładem fizycznej implementacji może znów być światłowód, który transmituje fotony, opisywany jako kubit. Kanały kwantowe opisują mapy  $\mathcal{M} : \mathcal{L}(\mathcal{H}^A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}^B)$  mapujące liniowe operatory w przestrzeni wejściowej na liniowe operatory w przestrzeni wyjściowej, gdzie  $\mathcal{M}$  jest *completely positive* (CP)<sup>1</sup>,  $\mathcal{M}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ . Najogólniej kanały idealne czyli takie z których możemy otrzymać pełną informację o przychodzącym systemie opisuje się  $\mathcal{M}(\rho) = U^*\rho U$ , gdzie  $U$  jest pewną macierzą unitarną. W rzeczywistych sytuacjach jednakże nie da się uniknąć oddziaływania z otoczeniem, który posiada dodatkowe niemierzalne stopnie swobody takie zaszumione kanały opisuje ogólnie  $\mathcal{M}(\rho) = \text{Tr}_{\text{otoczenie}}(U * \rho \otimes \rho_0 U)$ , gdzie  $\text{Tr}_{\text{otoczenie}}$  opisuje operację śladu częściowego po stopniach swobody otoczenia, zaś operator unitarny  $U$  opisuje ewolucję czasową systemu i otoczenia, zaś  $\rho_0$  jest stanem początkowym otoczenia [9]. Jasnym jest, że posiadając wyłącznie wiedzę na temat systemu  $\rho$  nie jesteśmy w stanie w ogólności odtworzyć informacji wysłanych. Typowym przykładem takiego zaszumionego kanału może być kanał depolaryzujący, który z prawdopodobieństwem

<sup>1</sup>Mapę  $\phi : A \rightarrow B$  nazywa się nieujemną gdy  $\phi(a) \geq 0 \forall a \geq 0 \in A$ . Nazywana się ją CP gdy  $\phi \otimes \mathcal{I}_n$  również jest nieujemna  $\forall n \in \mathcal{N}$

$\eta$  idealnie transmituje system zaś  $1 - \eta$  prawdopodobieństwa depolaryzacji,  $\mathcal{M}(\rho) = \eta\rho + (1 - \rho)\mathbb{1}$ . Najogólniejszym modelem kanałów kwantowych jest tzw. *quantum channel with memory* (kwantowy kanał z pamięcią) opisany np. w [10].

## 2 Macierz Procesu

Jednym z podejść do eksploracji korelacji nie zachowujących przyczynowego porządku jest rozwinięty w [11] formalizm macierzy procesu. Ewentualną zaletą tego podejścia jest zgodność z mechaniką kwantową na poziomie lokalnych eksperymentów. Jest to niejako rozszerzenie i enkapsulacja idei POVM i reguły Borna. Podejście to porzuca założenie globalnej struktury czasoprzestrzeni. W celu zachowania zgodności z mechaniką kwantową na poziomie lokalnym opiera się na następującym założeniu, że operacje wykonywane przez poszczególną stronę są opisywane przez mechanikę kwantową w standardowym przyczynowym sformułowaniu, które można opisywać przy pomocy zbioru *quantum instruments* [6] z wejściową przestrzenią Hilberta  $\mathcal{H}^{A_1}$  i przestrzenią wyjściową  $\mathcal{H}^{A_2}$ . Najogólniej można je realizować przy pomocy zadziałania unitarną transformacją na system wejściowy i *ancilla*, następnie wykonanie rzutującego pomiaru na części systemu pozostawiając pozostałą część systemu jako wyjście. Alicja wykorzystując dany instrument otrzymuje jeden z możliwych wyników  $x_i$ , który indukują transformację  $\mathcal{M}_i^A$  z wejścia na wyjście. Transformacja ta odpowiada *completely positive* (CP) *trace preserving* mapie

$$\mathcal{M}_i^A : \mathcal{L}(\mathcal{H}^{A_1}) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}^{A_2}) \quad (16)$$

gdzie  $\mathcal{L}(\mathcal{H}^X)$  jest przestrzenią macierzy na  $\mathcal{H}^X$ , której wymiar to  $d_X$ . Jej działanie na macierz gęstości  $\rho$  opisuje następująca formuła

$$\mathcal{M}_i^A(\rho) = \sum_{j=1}^m E_{ij}^\dagger \rho E_{ij} \quad (17)$$

gdzie macierze  $E_{ij}$  spełniają następujące własności

$$\sum_{i=0}^m E_{ij}^\dagger E_{ij} \leq \mathbb{1}^{A_1} \quad (18)$$

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m E_{ij}^\dagger E_{ij} = \mathbb{1}^{A_1} \quad (19)$$

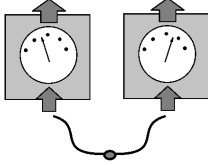
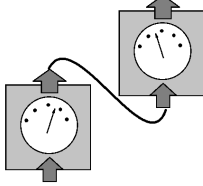
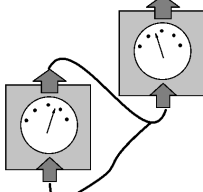
Prawdopodobieństwo zaobserwowania wyniku realizowanego przez mapę  $\mathcal{M}_i^A$  to

$$\Pr(\mathcal{M}_i^A) = \text{Tr}(\mathcal{M}_i^A(\rho)) \quad (20)$$

Widzimy od razu, że równanie (19) narzuca, by możliwość zaobserwowania dowolnego wyniku była równa 1. W przypadku, gdy mamy do czynienia z więcej niż jedną stroną *procesem* będziemy nazywać listę  $\Pr(\mathcal{M}_i^A, \mathcal{M}_j^B, \dots)$  dla wszystkich możliwych lokalnych wyników. Dalej w tym rozdziale będzie opisywany wyłącznie przypadek dwustronny, jednakże rozszerzenie formalizmu na przypadek wielostronny jest trywialny. Wygodnym sposobem przedstawiania map  $\mathcal{M}_i^A$  jest izomorfizm Choi-Jamiołkowski (CJ) [8, 5]. Macierz CJ  $M_i^{A_1 A_2} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{A_1} \otimes \mathcal{H}^{A_2}) \geq 0$  jest zdefiniowana jako

$$M_i^{A_1 A_2} := [\mathcal{I} \otimes \mathcal{M}_i^A(|I\rangle\langle I|)]^T, \quad (21)$$

$$|I\rangle = \sum_{i=1}^{d_{A_1}} |ii\rangle, \quad (22)$$

Przyczynowy porządek	Stany	Kanały	Kanały z pamięcią
$A \not\leq B$	$A_1, B_1, A_1 B_1$	$A_1 B_2$	$A_1 B_1 B_2$
$B \not\leq A$	$A_1, B_1, A_1 B_1$	$A_2 B_1$	$A_1 A_2 B_1$
			

Rysunek 2: Wyrażenia zgodne z formalizmem i ich proponowana graficzna interpretacja

gdzie  $\{|j\rangle\}^{d_{A_1}}$  tworzy ortonormalną bazę w  $\mathcal{H}^{A_1}$ . Korzystając z tego przejścia można zapisać prawdopodobieństwo dwóch rezultatów, jako

$$\Pr(\mathcal{M}_i^A, \mathcal{M}_j^B) = \text{Tr}(W^{A_1 A_2 B_1 B_2} (M_i^{A_1 A_2} \otimes M_j^{B_1 B_2})). \quad (23)$$

Macierz  $W$  w  $\mathcal{L}(\mathcal{H}^{A_1} \otimes \mathcal{H}^{A_2} \otimes \mathcal{H}^{B_1} \otimes \mathcal{H}^{B_2})$  nazywa się *process matrix* (macierzą procesu). W celu generowania prawidłowego prawdopodobieństwa narzuca się dodatkowe warunki na  $W$

$$W^{A_1 A_2 B_1 B_2} \geq 0. \quad (24)$$

$$\text{Tr} [W^{A_1 A_2 B_1 B_2} (M^{A_1 A_2} \otimes M^{B_1 B_2})] = 1. \quad (25)$$

$$\forall M^{A_1 A_2}, M^{B_1 B_2} \geq 0, \text{Tr}_{A_2} M^{A_1 A_2} = \mathbb{1}^{A_1}, \text{Tr}_{B_2} M^{B_1 B_2} = \mathbb{1}^{B_1}, \quad (26)$$

gdzie  $M^{A_1 A_2} = \sum_i M_i^{A_1 A_2}$ . Warunek (24) zapewnia, że prawdopodobieństwa nie będą ujemne, a (25) i (26) pewność zaobserwowania dowolnej pary map. Baza Hilberta-Schmidta dla  $\mathcal{L}(\mathcal{H}^X)$  dane jest przez zbiór macierzy  $\{\sigma_\mu^X\}_{\mu=0}^{d_X^2-1}$ , gdzie  $\sigma_0^X = \mathbb{1}$ ,  $\text{Tr}(\sigma_\mu^X \sigma_\nu^X) = d_X \delta_{\mu\nu}$ ,  $\text{Tr}(\sigma_{\mu>0}^X) = 0$ . Ogólny element przestrzeni  $\mathcal{L}(\mathcal{H}^{A_1} \otimes \mathcal{H}^{A_2} \otimes \mathcal{H}^{B_1} \otimes \mathcal{H}^{B_2})$  można zapisać, jako

$$W^{A_1 A_2 B_1 B_2} = \sum_{\mu\nu\lambda\gamma} w_{\mu\nu\lambda\gamma} \sigma_\mu^{A_1} \otimes \sigma_\nu^{A_2} \otimes \sigma_\lambda^{B_1} \otimes \sigma_\gamma^{B_2} \quad (27)$$

$$w_{\mu\nu\lambda\gamma} \in \mathcal{C}.$$

Wyrażenia zawierające wyłącznie wyrazy  $\sigma_i^{A_1} \otimes \mathbb{1}^{reszta}$ , ( $i > 0$ ) nazywa się wyrażeniami typu  $A_1$ , wyrażenia zawierające  $\sigma_i^{A_1} \otimes \sigma_j^{A_2} \otimes \mathbb{1}^{reszta}$ , ( $i, j > 0$ ) nazywa się wyrażeniami typu  $A_1 A_2$  etc. Na rysunku 2 przedstawiono wyrażenia spełniające (24) i (25). Najogólniejsza macierz procesu zgodna z założeniami to

$$W^{A_1 A_2 B_1 B_2} = \frac{1}{d_{A_1} d_{B_1}} (\mathbb{1} + \sigma^{B \leq A} + \sigma^{A \leq B} + \sigma^{A \not\leq B}) \quad (28)$$

$$\sigma^{A \leq B} := \sum_{ij>0} a_{ij} \sigma_i^{A_1} \sigma_j^{B_2} + \sum_{ijk>0} b_{ijk} \sigma_i^{A_1} \sigma_j^{B_1} \sigma_k^{B_2} \quad (29)$$

$$\sigma^{B \leq A} := \sum_{ij>0} c_{ij} \sigma_i^{A_2} \sigma_j^{B_1} + \sum_{ijk>0} d_{ijk} \sigma_i^{A_1} \sigma_j^{A_2} \sigma_k^{B_1} \quad (30)$$

$$\sigma^{A \not\leq B} := \sum_{i>0} e_i \sigma_i^{A_1} + \sum_{i>0} f_i \sigma_i^{B_1} + \sum_{ij>0} h_{ij} \sigma_i^{A_1} \sigma_j^{B_1} \quad (31)$$

$$\forall_{ij} a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, e_{ij}, f_{ij}, g_{ij}, h_{ij} \in \mathcal{R}.$$

### 3 Przyczynowa separowalność i przyczynowe nierówności

Macierzami procesu *casually separable* (przyczynowo separowalnymi) nazywa się takie macierze, które można zapisać jako wypukłą kombinację procesów o konkretnym przyczynowym porządku, a mianowicie

$$W^{A_1 A_2 B_1 B_2} = qW^{B \not\prec A} + (1 - q)W^{A \not\prec B}, \quad 0 \leq q \leq 1 \quad (32)$$

powyższa dekompozycja nie musi być jednoznaczna, jako że wyrazy typu  $W^{A \not\prec B}$  można włączyć do wybranego wyrazu. Przed wprowadzeniem *causal inequality* (przyczynowej nierówności) warto wspomnieć o tzw. nierówności Bella, jest to nieskończona rodzina nierówności, których żaden niesplątany system nie może złamać. Jest to *device independent* (niezależny od implementacji pomiarów) sposób weryfikacji splątania kwantowego.

Przyjmuje się następujące założenia na temat natury rzeczywistości uporządkowanej przyczynowo:

**Causal structure (Przyczynowa struktura, CS)** Wydarzenia obdarzone są częściowym porządkiem w strukturze czasoprzestrzeni, można wyznaczyć kolejność zdarzeń  $A \prec B$ , które wyznaczają kierunek przesyłania informacji, jeżeli  $A \prec B$  to możliwe jest sygnalizowanie<sup>2</sup> z A do B, lecz nie na odwrót.

**Free choice (Wolny wybór, FC)** W przypadku wyboru liczb losowych, możliwe korelacje występują wyłącznie z liczbami z przyszłości.

**Closed laboratories (Zamknięte laboratoria, CL)** Liczba odgadnięta przez Alicję może być skorelowana z liczbą losową Boba, wyłącznie jeżeli system wysłany do Alicji jest przed (w sensie przyczynowości) generacji liczby Boba, analogicznie w przypadku odwrotnym.

Rozważa się następującą dwustronną grę realizowaną wielokrotnie przez dwa odległe laboratoria (Alicję i Boba). W każdej iteracji rozgrywki Alicja i Bob otrzymują na wejściu pewien fizyczny system, wykonuje na nim pewne operacje i wysyła dalej system. Każda ze stron może otrzymać sygnał wyłącznie przez system wchodzący do laboratorium, zaś wysłać wyłącznie przez system wychodzący z laboratorium, widać więc jeżeli Alicja otrzyma system, który przeszedł pewną procedurę u Boba, Bob może wysłać informacje, zaś Alicja może ją wyłącznie odebrać co uniemożliwia dwustronną sygnalizację. Każdy z graczy otrzymując system, losuje jeden bit wybraną metodą oznaczany a dla Alicji i b dla Boba. Dodatkowo Bob losuje bit b', który decyduje czy Bob ma zgadywać bit a Alicji, czy Alicja ma zgadywać bit b Boba. Bez utraty ogólności można przyjąć, że obie strony zgadują bit drugiego gracza. W zależności od b' ich predykcja może się nie liczyć. Zakłada się, że bity losowane są z równym prawdopodobieństwem. Prawdopodobieństwo sukcesu w takiej grze zapisuje się następująco

$$\Pr_{\text{sukcesu}} := \frac{1}{2} [\Pr(x = b|b' = 0) + \Pr(y = a|b' = 1)] \quad (33)$$

Każda strategia w uporządkowanej strukturze czasu osiąga  $\Pr_{\text{sukcesu}} \leq \frac{3}{4}$ . Optymalna strategia opisuje się nierygorystycznie następująco: w przypadku  $A \prec B$  Alicja może zakodować swój bit w pewien sposób w systemie, który wysłany do Boba, dlatego można wybrać taką strategię, że  $\Pr(y = a) = 1$ , Alicji pozostaje wtedy losowa predykcja co do wartości bitu Boba -  $\Pr(x = b) = \frac{1}{2}$ . Widać również, że żadna probabilistyczna nie może poprawić wyniku, co daje nam optymalną strategię. Okazuje się, że korzystając z

<sup>2</sup>W przypadku, gdy  $A \prec B$  przez oznacza to, że brzegowy rozkład prawdopodobieństwa otrzymania danego wyniku nie zależy od wejścia drugiej strony.  $\Pr(a|x, y) = \Pr(a|x, y') \forall a, x, y, y'$ ,  $\Pr(a|x, y) = \sum_b \Pr(a, b|x, y)$ , gdzie przez a, b oznaczamy wyniki otrzymane przez odpowiednie strony, zaś x, y ich wejścia.



korelacji opisywanych przez formalizm macierzy procesu  $\Pr_{\text{sukces}} \leq \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ . Można rozważyć następującą macierz procesu

$$W^{A_1 A_2 B_1 B_2} = \frac{1}{4} \left[ \mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1}\mathbb{Z}\mathbb{Z}\mathbb{1} + q\mathbb{Z}\mathbb{1}\mathbb{X}\mathbb{Z} + \frac{(1-q)}{2}\mathbb{Z}\mathbb{1}\mathbb{X}\mathbb{1}) \right], \quad 0 \leq q \leq 1, \quad (34)$$

gdzie,  $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$  są macierzami Pauliego, które z  $\mathbb{1}$  tworzą bazę Hilberta-Schmidta, zaś w celu skrócenia zapisu pominięto indeks górny, który jest indukowany przez pozycje wyrazu.  $\mathbb{1}^{A_1} \otimes \mathbb{X}^{A_2} \otimes \mathbb{Y}^{B_1} \otimes \mathbb{Z}^{B_2} := \mathbb{1}\mathbb{X}\mathbb{Y}\mathbb{Z}$ . Przedstawiona macierz z  $q = 1$  wraz z dalej przedstawioną procedurą komunikacji wprowadzono w [11], jako zasób, który pozwala złamać przyczynową nierówność. W [4] pokazano, że przy odpowiednich założeniach o dozwolonych operacjach jest to maksymalne przekroczenie nierówności wynikającej z tego zadania. Z drugiej strony widać od razu, że przy  $q = 0$  mamy  $A \prec B$  oczywistym jest, że taki zasób nie pozwala złamać przyczynowej nierówności. Sterując wartością  $q$  można zaobserwować odpowiednio przejścia macierzy z ustalonej przyczynowości poprzez separowalną do nieseparowalnej. Macierze separowalne nie mogą łamać żadnej nierówności przyczynowej, nieseparowalne zostaną dokładniej opisane dalej. Procedura komunikacji wygląda następująco. Za każdym razem Alicja mierzy swój w bazie  $z$  i przypisuje  $x = 0$  dla  $|z_+\rangle$  zaś  $x = 1$  dla  $|z_-\rangle$  następnie przygotowuje na nowo kubit i zakodowuje  $a$  w tej samej bazie. Mapa CP odpowiadająca wykryciu stanu  $|\psi\rangle$  i przygotowaniu innego stanu  $|\phi\rangle$  to  $|\psi\rangle\langle\psi|^{A_1} \otimes |\phi\rangle\langle\phi|_2^A$ , dlatego mapa CP Alicji wygląda następująco

$$\xi(x, a) = \frac{1}{4} [\mathbb{1} + (-1)^x \mathbb{Z}] \otimes [\mathbb{1} + (-1)^a \mathbb{Z}]. \quad (35)$$

Natomiast Bob jako posiadacz bitu  $b'$ , gdy chce odczytać bit Alicji mierzy przychodzący kubit w bazie  $z$  przypisuje wyniki tego pomiaru do  $y$  analogicznie jak Alicja. W tym przypadku nieistotne jest jaki stan przygotowuje Bob, przygotowuje dowolny stan  $\rho^{B_2}$  znormalizowany do  $\text{Tr}(\rho)^{B_2} = 1$ . W przypadku  $b' = 0$ , Bob chce wysłać swój bit do Alicji. Dokonuje pomiaru w bazie  $x$ , następnie w przypadku wyniku  $y = |x_+\rangle$  zakodowuje swój bit następująco  $0 \rightarrow |z_+\rangle, 1 \rightarrow |z_-\rangle$  w drugim kodowanie wygląda odwrotnie  $1 \rightarrow |z_+\rangle, 0 \rightarrow |z_-\rangle$ . Jego mapa wygląda następująco

$$\eta(y, b, b') = \begin{cases} \frac{1}{2} (\mathbb{1} + (-1)^y \mathbb{Z}) \otimes \rho & b' = 1 \\ \frac{1}{4} [\mathbb{1} + (-1)^y \mathbb{X}] \otimes [\mathbb{1} + (-1)^{b+y} \mathbb{Z}] & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases} \quad (36)$$

Prawdopodobieństwo zaobserwowania danej pary map dane jest następująco

$$\Pr(x, y|a, b, b') = \text{Tr} \{ W^{A_1 A_2 B_1 B_2} [\eta(x, a) \otimes \xi(y, b, b')] \} \quad (37)$$

Przypominając, że prawdopodobieństwo sukcesu w tej grze dane jest jako

$$\Pr_{\text{sukcesu}} := \frac{1}{2} [\Pr(x = b|b' = 0) + \Pr(y = a|b' = 1)] \quad (38)$$

Oblicza się, że

$$\Pr(x = b|b' = 0)_q = \frac{\sqrt{2}q + 2}{4} \quad (39)$$

$$\Pr(y = a|b' = 1)_q = \frac{\sqrt{2} + 2}{4} \quad (40)$$

$$\Pr_{\text{sukcesu}_q} = \frac{\sqrt{2}q + \sqrt{2} + 4}{8}, \quad (41)$$

gdzie indeks odnotowuje zależność prawdopodobieństwa od  $q$ . Tak jak się spodziewano prawdopodobieństwo sukcesu Alicji rośnie wraz zwiększaniem współczynnika przy członie  $\mathbb{Z}\mathbb{1}\mathbb{X}\mathbb{Z}$  rozumiany jako reprezentacja kanału kwantowego z pamięcią, który odpowiada za sygnalizujące korelacje  $A \preceq B$ . Przy  $q = 0$

Alicja ma dostęp wyłącznie niesygnalizujących nietrywialnych (wyraz  $\mathbb{Z}\mathbb{1}\mathbb{X}\mathbb{1}$ ), który nie może zwiększyć prawdopodobieństwa sukcesu w tej grze, która wymaga zasobów sygnalizujących. Argument ten został rygorystycznie pokazany np. w [1]. Wraz z zwiększaniem  $q$  Alicja ma dostęp do coraz większej ilości sygnalizujących zasobów, co częściej wygrywać w owej grze. Ważnym jest zauważyć, że macierz ta jest nieujemna  $W^{A_1 A_2 B_1 B_2} \geq 0$  dla  $0 \leq q \leq 1$ , korzystając z tego protokołu łamie się przyczynową nierówność dla  $q \geq \sqrt{2} - 1$ , zaś jest nieseparowalny dla  $q \geq q_0$ ,  $q_0 \approx 0.365$ . Separowalność przybliżono numerycznie. Widać, że niewystarczający zasobem w tej procedurze jest nieseparowalność do złamania przyczynowej nierówności, w tym przypadku może to być wina nieoptymalnej metody dla danego zasobu, lecz ilustruje fakt, iż niewystarczającym zasobem jest nieseparowalność do złamania przyczynowej nierówności, co zostanie dalej rygorystycznie pokazane.

### 3.1 Procesy z przyczynowym modelem

Ważną klasą procesów pokazano w [7] jest tak zwana klasa procesów przyczynowo nieseparowalnych podlegająca przyczynowemu modelowi, czyli takie procesy, które są nieseparowalne, lecz produkują wyłącznie korelacje, które są zgodne z przyczynowym porządkiem. Procesy takie oczywiście nie mogą łamać przyczynowych nierówności niezależnie od przyjętej strategii. Przykładem takiego procesu jest

$$W^{A \prec B} := \mathbb{1}^\circ + \frac{1}{12}(\mathbb{1}\mathbb{Z}\mathbb{Z}\mathbb{1} + \mathbb{1}\mathbb{X}\mathbb{X}\mathbb{1} + \mathbb{1}\mathbb{Y}\mathbb{Y}\mathbb{1}) \quad (42)$$

$$W^{B \prec A} := \mathbb{1}^\circ + \frac{1}{4}(\mathbb{Z}\mathbb{1}\mathbb{X}\mathbb{Z}) \quad (43)$$

$$W := qW^{A \prec B} + (1 - q + \epsilon)W^{B \prec A} - \epsilon\mathbb{1}^\circ, \quad (44)$$

gdzie  $\mathbb{1}^\circ = \frac{1}{d_{A_1} d_{B_1}} \mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}$ . Zauważa się, że  $W \geq 0$  dla  $\epsilon \leq q - 1 + \sqrt{\frac{(1-q)(q+3)}{3}}$  i przyczynowo nieseparowalne dla  $\epsilon \geq 0$ . Dowód faktu, że ten proces nie może złamać żadnej przyczynowej nierówności niezależnie od strategii przebiega następująco. Pokazuje się najpierw, że proces ten produkuje te same korelacje co  $W^{T_B}$ , gdzie  $T_B$  oznacza częściową transpozycję systemów  $\mathcal{H}^{B_1} \otimes \mathcal{H}^{B_2}$  względem *computational basis* (bazy obliczeniowej). Natomiast  $W^{T_B}$  jest przyczynowo separowalna i nie może złamać przyczynowych nierówności. Co razem dowodzi tezę. Pierwsza część dowodu przebiega następująco

$$\begin{aligned} \Pr(x, y|a, b) &= \text{Tr} [W^{T_B} \xi(x, a) \otimes \eta(y, b)^T] \\ &= \sum_{\mu\nu\lambda\gamma} w_{\mu\nu\lambda\gamma} \text{Tr} [(\sigma_\mu^{A_1} \otimes \sigma_\nu^{A_2}) \otimes (\sigma_\lambda^{B_1} \otimes \sigma_\gamma^{B_2})^T \xi(x, a) \otimes \eta(y, b)^T] \\ &= \sum_{\mu\nu\lambda\gamma} w_{\mu\nu\lambda\gamma} \text{Tr} [(\sigma_\mu^{A_1} \otimes \sigma_\nu^{A_2}) \xi(x, a) \otimes (\sigma_\lambda^{B_1} \otimes \sigma_\gamma^{B_2})^T \eta(y, b)^T] \\ &= \sum_{\mu\nu\lambda\gamma} w_{\mu\nu\lambda\gamma} \text{Tr} [(\sigma_\mu^{A_1} \otimes \sigma_\nu^{A_2}) \xi(x, a)] \text{Tr} [(\sigma_\lambda^{B_1} \otimes \sigma_\gamma^{B_2})^T \eta(y, b)^T] \\ &= \sum_{\mu\nu\lambda\gamma} w_{\mu\nu\lambda\gamma} \text{Tr} [(\sigma_\mu^{A_1} \otimes \sigma_\nu^{A_2}) \xi(x, a)] \text{Tr} [(\sigma_\lambda^{B_1} \otimes \sigma_\gamma^{B_2}) \eta(y, b)] \\ &= \text{Tr} [W \xi(x, a) \otimes \eta(y, b)] \end{aligned} \quad (45)$$

Ta równość jest spełniona nawet wtedy, gdy  $W^{T_B} \leq 0$ , czyli opisuje niefizyczna macierz procesu, taki proces generuje dodatnie prawdopodobieństwo dla lokalnych pomiarów, lecz może generować ujemne prawdopodobieństwa, gdy laboratoria dzielą splątane cząsteczki, takie rozszerzenie jest ma fizyczny sens, taka klasa procesów zostanie dalej opisana. Trzeba zauważyć, że dla każdego kwantowego instrumentu  $\{\eta(y, b)\}$ , instrument  $\{\eta(y, b)^T\}$  również jest prawidłowy, jako że transpozycja mapuje mapy CP do map CP i mapy *trace preserving* (TP, zachowujące ślad) do map zachowujących ślad. Następnie pokazuje się

w sposób jawny przyczynową separację  $W^{T_B}$ . Widać, że

$$\left[ \mathbb{1}^\circ + \frac{1}{12} (\mathbb{1}ZZ\mathbb{1} + \mathbb{1}XX\mathbb{1} + \mathbb{1}YY\mathbb{1}) \right]^{T_B} = \mathbb{1}^\circ + \frac{1}{12} \mathbb{1}ZZ\mathbb{1} + \mathbb{1}XX\mathbb{1} - \mathbb{1}YY\mathbb{1}, \quad (46)$$

po prawej stronie nierówności można rozpoznać macierz procesu opisujący kanał depolaryzacyjny, krótko opisany we wstępie, z prawdopodobieństwem  $\frac{2}{3}$  depolaryzacji oraz  $\frac{1}{3}$  idealnej transmisji systemu. Z definicji procesu depolaryzacyjnego pisze się

$$D_{\frac{2}{3}}^{A \prec B} = \frac{2}{3} \mathbb{1}^\circ + \frac{1}{3} I^{A \prec B} \quad (47)$$

$$I^{A \prec B} = \frac{\mathbb{1}|I\rangle\rangle\langle\langle I|\mathbb{1}}{2}. \quad (48)$$

Dodając do tego  $(W^{B \prec A})^{T_B} = W^{B \prec A}$  wynika, że

$$\begin{aligned} W^{T_B} &= \frac{2q}{3} \mathbb{1}^\circ + \frac{q}{3} I^{A \prec B} + (1 - q + \epsilon) W^{B \prec A} - \epsilon \mathbb{1}^\circ \\ &= \frac{q}{3} I^{A \prec B} + (1 - q + \epsilon) W^{B \prec A} - \left( \frac{2q}{3} - \epsilon \right) \mathbb{1}^\circ, \end{aligned} \quad (49)$$

co jest kombinacją wypukłą procesów uporządkowanych przyczynowo tak długo jak  $\epsilon < \frac{2q}{3}$  można jednakże sprawdzić, że  $q - 1 + \sqrt{\frac{(1-q)(3+q)}{3}} \leq \frac{2q}{3}$  więc poprzedni warunek jest zawsze spełniony, co kończy dowód, pokazano, że każdy prawidłowy proces (44) ma przyczynowy model. Autorzy [?] sugerują, że biorąc rozkład na kombinacje wypukłe  $W$  jako transpozycje względem systemu Boba równania (49). Można dalej zauważyć, że wyraz  $\frac{q}{3} (I^{A \prec B})^{T_B}$  stanie się nieujemny, gdy doda się do niego  $\frac{2q}{3}$  białego szumu, a ilość dostępnego szumu, który można zabrać z wyrazu  $(\frac{2q}{3} - \epsilon) \mathbb{1}^\circ$  jest ostro mniejszy od wymaganego. Narzuca się interpretacja, że proces  $W$  jest kombinacją wypukłą niefizycznego kanału od Alicji do Boba i fizycznego kanału od Boba do Alicji co może być wskazówką, że proces  $W$  jest nieimplementowalny fizycznie.

## 4 Świadek przyczynowości

Poprzedni rozdział sugeruje, że istnieje klasa procesów, która nie może złamać żadnej przyczynowej nierówności, zaś jest nieseparowalna przyczynowo. Istnieje więc motywacja do poszukiwania metody, która sklasyfikuje czy dany stan jest separowalny czy nie. Wprowadzono w [2] *causal witness* (świadek przyczynowości) jest to analog do *entanglement witness* (świadka splątania), który pozwala klasyfikować splątanie danego układu niezależnie od jego zdolności do łamania nierówności Bella. Ściśle mówiąc świadek przyczynowości to taki operator  $S$ , że

$$\text{Tr}[SW^{sep}] \geq 0, \quad (50)$$

dla każdego przyczynowo separowalnego procesu  $W^{sep}$ . Taka definicja jest zmotywowana twierdzeniem o separującej hiperpłaszczyźnie, które mówi, że każde dwa wypukłe zbiory w  $\mathbb{R}^n$ , albo ich przecięcie nie jest zbiorem pustym, albo istnieje taka hiperpłaszczyzna, że zbiory leżą po dwóch stronach owej hiperpłaszczyzny, nierygorystycznie mówiąc. Co można łatwo sobie zobrazować geometrycznie. Jako, że zbiory macierzy separowalnych jest wypukły i zamknięty dla każdego nieseparowalnego procesu  $W^{nsep}$  istnieje taki świadek przyczynowości, że

$$\text{Tr}[S_{W^{nsep}} W^{nsep}] < 0. \quad (51)$$

## 4.1 Sformułowanie macierzy procesu niezależne od bazy

Przed dalszym charakteryzowaniem świadków przyczynowości wygodnie jest wprowadzić niezależne od wyboru bazy sformułowanie macierzy procesu. Definiuje się następująca operację

$${}_X W = \frac{\mathbb{1}^X}{d_X} \otimes \text{Tr}_X W, \quad (52)$$

która opisuje operację wzięcia śladu i zastąpienia tego systemu znormalizowaną macierzą jednostkową. Warunki wprowadzone w rozdziale 2 są równoważne z następującymi

$$W \geq 0 \quad (53)$$

$$\text{Tr } W = d_O \quad (54)$$

$$W = L_V(W), \quad (55)$$

gdzie  $d_0 = d_{A_2} d_{B_2} \dots$  jest iloczynem wymiaru wszystkich systemów wyjściowych, a  $L_V$  jest projektorem, zdefiniowanym w [2], na pewną podprzestrzeń  $\mathcal{L}_V \subset \mathcal{H}^{A_1} \otimes \mathcal{H}^{A_2} \otimes \mathcal{H}^{B_1} \otimes \mathcal{H}^{B_2} \dots$ . W sposób jawny projektor dla przypadku dwustronnego  $L_V$  wyraża się następująco:

$$L_V = A_2 W + B_2 W - A_2 B_2 W - B_1 B_2 W + A_O B_1 B_2 W - A_1 A_2 W + A_1 A_2 B_2 W. \quad (56)$$

Warto tutaj porównać powyższe równanie do poprzedniego sformułowania macierzy procesu. Zauważa się, że w przypadku wybranej bazy Hilberta-Schmidta operacja

$${}_X [\sigma_\mu^X \otimes \sigma_\nu^Y] = \delta_{\mu 0} \quad (57)$$

Przypomina się, że  $\sigma_0 = \mathbb{1}$ . Wynika to oczywiście z faktu, że reszta wyrazów jest bezśladowa i  $\frac{\text{Tr } \mathbb{1}^X}{d_X} = 1$ . Co daje następującą interpretację dla wyrazów występujących w (56) są to wyrazy zakazane w tym formalizmie. Wyrazy, które tu występują odpowiadają sytuacji, które generują niejednostkowe prawdopodobieństwa na poziomie lokalnych pomiarów. np. wyraz typu  $A_1 A_2$  można interpretować jako pętla czasowa. Ważna jest obserwacja, że posiadając jawną reprezentację projektora trywialnym zadaniem jest stwierdzić jakie wyrazy z bazy Hilberta-Schmidta są dozwolone - generują prawidłowe prawdopodobieństwa. Jawna postać takiego projektora dla przypadku  $n$  stron została wyprowadzona w oryginalnym artykule.

## 4.2 Poszukiwanie i implementacja świadka przyczynowości

Zauważa się, że warunek (4.2) jest równoważny z następującymi dwoma

$$\text{Tr } [W^{A \prec B} S] \geq 0 \quad (58)$$

$$\text{Tr } [W^{B \prec A} S] \geq 0. \quad (59)$$

Co oczywiście wynika z definicji stanów separowalnych, jako kombinacji wypukłej macierzy o określonej przyczynowości. Łatwo można zaobserwować, że pozbywając się wyrazów zawierających wyrazy typu  $\dots B_2$  usuwamy korelacje wyjścia Boba z pomiarami Alicji co implikuje, że  $A \prec B$ . Co zapisuje się

$${}_{B_2} W = W^{A \prec B}, \quad (60)$$

lub analogicznie

$${}_{A_2} W = W^{B \prec A}. \quad (61)$$

Wykorzystując to, równanie (59) możemy zapisać następująco

$$\text{Tr } [{}_{A_2} W S] \geq 0 \quad (62)$$

Traktując ślad jako iloczyn skalarny  $\langle MS \rangle = \text{Tr } MS$  oraz zauważając, że  $X$  jest operatorem samosprężonym równoważne z powyższym równaniem jest

$$\text{Tr } [W_{A_2} S] \geq 0 \quad (63)$$

Dla prawidłowych macierzy procesu wystarczającym dla  $S$  do bycia świadkiem przyczynowości jest

$$_{A_2} S \geq 0 \quad (64)$$

$$_{B_2} S \geq 0. \quad (65)$$

Zauważa się dodatkowo dowolność dodania dowolnego elementu  $S^\perp$  z przestrzeni ortogonalnej do  $\mathcal{L}_V$ , który nie zmienia wartości, a mianowicie

$$\text{Tr } [W (S + S^\perp)] = \text{Tr } [W S] \quad (66)$$

Okazuje się, że powyższe warunki charakteryzują wszystkich świadków przyczynowości. Co zbierając razem daje.

Macierz hermitowska  $S$  jest świadkiem przyczynowości wtedy i tylko wtedy gdy da się ją zapisać, jako

$$S = S_P + S^\perp \quad (68)$$

gdzie  $S_P$  i  $S^\perp$  są takimi macierzami hermitowskimi, że

$$_{A_2} S_P \geq 0, _{B_2} S_P \geq 0, L_V(S^\perp) = 0. \quad (70)$$

Pokazuje się, że zbiór tak zdefiniowanych świadków przyczynowości jest domkniętym stożkiem wypukłym. Można jednak, że ograniczyć się z  $S$  do przestrzeni  $\mathcal{L}_V$ . Wybierając  $S^\perp = L_V(S_P) - S_P$ , który może być dowolny. Mamy  $L_V(S) = S$ . Okazuje się, że taki ograniczony zbiór świadków przyczynowości:  $\mathcal{S}_V = S \cap \mathcal{L}_V$ , również jest domkniętym wypukłym stożkiem. Jako, że wybrane elementy ortogonalne do  $\mathcal{L}_V$  nie zmieniają wartości  $\text{Tr } WS$  nie zmieniają one też dlatego zdolności  $S$  do wykrywania separowalności. Dostając pewną macierz  $W$  i chcąc zbadać czy jest ona separowalna. Można spróbować znaleźć minimalną wartość  $\text{Tr } WS$ . W przypadku możliwości znalezienia minimum globalnego takiego wyrażenia widzimy, że jeżeli nie uda nam się znaleźć takiego  $S$ , że  $\text{Tr } WS < 0$  oznacza to, że nie istnieje taka hiperpłaszczyzna oddzielająca procesy separowalne, więc ten proces też jest separowalny w przeciwnym wypadku proces jest nieseparowalny. W ograniczenia od dołu skończoną wartością, by możliwe było rozwiązanie problemu numerycznie,  $\text{Tr } SW$  należy narzucić pewien dowolny warunek normujący autorzy oryginalnego artykułu proponują następujący:

$$\text{Tr } \Omega S \leq 1, \quad (71)$$

gdzie  $\Omega$  jest znormalizowaną macierzą procesu. Poszerzając powyższy warunek do nieznormalizowanych macierzy procesu, mamy

$$\text{Tr } \Omega S \leq \frac{\text{Tr } \Omega}{d_O} \quad (72)$$

Co można przepisać, jako

$$\text{Tr } \left[ \Omega \left( \frac{\mathbb{1}}{d_O} - S \right) \right] \geq 0 \quad (73)$$

Łatwo zauważyć, że powyższy warunek jest warunkiem, który muszą spełniać operatory  $\frac{\mathbb{1}}{d_O} - S$ , by należały do stożka dualnego macierzy procesu, czyli takiego, że ich iloczyn skalarny jest nieujemny z macierzami procesu. Co sprowadza problem optymalizacyjny do:

$$\min \text{Tr } [W S] \quad (74)$$

$$\text{tak, aby } S \in \mathcal{S}_V, \frac{\mathbb{1}}{d_O} - S \in \mathcal{W}_V^*, \quad (75)$$

gdzie  $\mathcal{W}_{\mathcal{V}}^* := \mathcal{W}^* \cap \mathcal{L}_{\mathcal{V}}$ .  $\mathcal{W}^*$  jest wcześniej wspomnianym stożkiem dualnym do macierzy procesu, zaś człon  $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$  wynika z wcześniej narzuconego warunku na  $S \in \mathcal{L}_{\mathcal{V}}$ . Problem ten okazuje się być prawidłowym problemem SDP (*semidefinite programming*) - programowaniem liniowym po stożku, którego numeryczne rozwiązanie jest zbieżne do optimum globalnego. Więc rozwiązanie takiego problemu optymalizacyjnego daje nam kryterium separowalności przyczynowej. Okazuje się dodatkowo, że wartość  $-\text{Tr}[WS^*]$  odpowiada minimalnej wartości  $\lambda$  takiej, że

$$\frac{1}{1+\lambda} (W + \lambda \tilde{\Omega}), \quad (76)$$

zoptymalizowanej po wszystkich znormalizowanych macierzach procesu  $\tilde{\Omega}$ . Wartość ta określa odporność danego procesu do pozostania nieseparowalnym podczas mieszania z "najgorszym" możliwym szumem.  $-\text{Tr}[WS^*]$  nazywa się, analogicznie do podobnej wartości związanej ze splątaniem, *generalized robustness* (uogólnioną wytrzymałość) oznacza się ją

$$R_g(W) = -\text{Tr}[S^*W] \quad (77)$$

Jest to miara nieseparowalności spełniająca standardowe wymagania, a mianowicie

**Dyskryminacja**  $R_g(W) \geq 0$  dla każdej macierzy procesu, przyjmuje wartość 0 wyłącznie dla procesów należących do  $\mathcal{W}^{\cap\vee}$ .

**Wypukłość**  $R_g(\sum_i p_i W_i) \leq \sum_i p_i R_g(W_i)$  dla dowolnych macierzy procesu i  $p_i \geq 0$  takich, że  $\sum_i p_i = 1$ .

**Monotoniczność ze względu na lokalne operacje**  $R_g(\$ (W)) \leq R_g(W)$ , gdzie  $\$(W)$  jest dowolnym procesem, który można otrzymać przez złożenie go z lokalnymi mapami CPTP.

Można wprowadzić również problem w którym poszukujemy minimalnej ilości białego szumu potrzebnego do spowodowania, by proces stał się separowalnym, który może się okazać bardziej adekwatnym modelem szumu, niż przypadek pesymistyczny. Problem optymalizacyjny, który otrzymuje się jest następujący

$$\min \text{Tr}[WS] \quad (78)$$

$$\text{tak, by } S \in \mathcal{S}_{\mathcal{V}}, \text{Tr}[\mathbb{1}^\circ S] \leq 1. \quad (79)$$

Wprowadza się wtedy wielkość nazywaną *random robustness* (losowa wytrzymałość), która jest powiązana z  $S^*$  - optimum powyższego problemu - w następujący sposób.

$$R_r(W) = -\text{Tr}[S^*W] \quad (80)$$

W przeciwieństwie do uogólnionej wytrzymałości nie jest to miara nieseparowalności, w sensie poprzednio przytoczonych postulatów, jako że nie jest monotoniczna pod działaniem lokalnych map CPTP.

## 5 Postulat puryfikacyjny

Ważnym aktualnie nierozwiązanym problemem występujący w tym formalizmie jest brak jasnego kryterium, które procesy są możliwe do zrealizowania fizycznie. Nie wiadomo czy łamanie nierówności przyczynowych jest możliwe fizycznie czy wyłącznie jest matematycznym artefaktem. Jasne jednakże jest, że występowanie nieseparowalności jest fizycznie występującym fenomenem, który został potwierdzony doświadczalnie przy realizacji tzw. *quantum switch* (kwantowego przełącznika) - zasobu który nie może złamać przyczynowych nierówności - wykorzystując wcześniej opisanego świadka przyczynowości np. w [13]. Co może nasuwać postulat, że fizycznie niemożliwe jest naruszenie tych nierówności. Prawdziwość

tego postulatu wciąż stoi pod znakiem zapytania. W [3] autorzy proponują *purification postulate* (postulat puryfikacyjny). Uznają za konieczne, że każda fizycznie poprawna teoria musi być odwracalna. Motywują się faktem, że w każda fundamentalna teoria jest odwracalna i odwracalność była kluczowa w budowaniu teorii kwantowej. Warto jeszcze dodać, że we wstępie zostały opisany pomiar rzutujący jako nieodwracalny rodzaj ewolucji jednakże można modelować pomiar w sposób niewymagający takich pomiarów modelując układ pomiarowy, jako system kwantowy, który ewoluuje unitarnie wraz z mierzonym systemem co pokazano np. w [12]. W celu dalszego opisu postulatu koniecznym jest opisanie jak rozumiana jest odwracalność w kontekście procesów. W tym celu procesy są poszerzone o globalną przeszłość i globalną przyszłość i rozumie się je jako operacje, która mapuje stany w globalnej przeszłości do stanów w globalnej przyszłości, które przechodzą przez region o nieokreślonej przyczynowości lokalnych laboratoriów opisywanych właśnie przez nie. Co sprowadza do definicji *pure processes* (czystych procesów), jako procesów, które w sposób unitarny transformują przyszłość do przeszłości, gdy w lokalnych laboratoriach zostaną zaaplikowane odpowiednie unitarne transformacje. Ta definicja sprowadza do ich postulatu, który mówi, że procesy są puryfikowalne wtedy i tylko wtedy, gdy da się zaprezentować je jako czyste procesy w większej przestrzeni i tylko takie procesy są implementowalne. Autorzy postulatu dodatkowo zauważają, że o ile żaden znany dwustronny proces łamiący nierówności przyczynowe okazał się być puryfikowalnym to istnieje proces trzystronny, który jest puryfikowalny i może łamać przyczynowe nierówności, więc jeżeli niemożność łamania przyczynowych nierówności uznałoby się za prawo natury, a ten postulat za prawdziwy to byłby on konieczny, a nie wystarczający.

## Bibliografia

- [1] M. L. Almeida, J. D. Bancal, N. Brunner, A. Acin, N. Gisin, and S. Pironio. Guess your neighbour's input: a multipartite non-local game with no quantum advantage. 2010.
- [2] Mateus Araújo, Cyril Branciard, Fabio Costa, Adrien Feix, Christina Giarmatzi, and Časlav Brukner. Witnessing causal nonseparability. 2015.
- [3] Mateus Araújo, Adrien Feix, Miguel Navascués, and Časlav Brukner. A purification postulate for quantum mechanics with indefinite causal order, 2016.
- [4] Časlav Brukner. Bounding quantum correlations with indefinite causal order. 2014.
- [5] Man-Duen Choi. Completely positive linear maps on complex matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 10(3):285 – 290, 1975.
- [6] E. B. Davies and J. T. Lewis. An operational approach to quantum probability. *Comm. Math. Phys.*, 17(3):239–260, 1970.
- [7] Adrien Feix, Mateus Araújo, and Časlav Brukner. Causally nonseparable processes admitting a causal model. 2016.
- [8] A. Jamiolkowski. Linear transformations which preserve trace and positive semidefiniteness of operators. *Reports on Mathematical Physics*, 3(4):275–278, December 1972.
- [9] M. Keyl. Fundamentals of quantum information theory. 2002.
- [10] Dennis Kretschmann and Reinhard F. Werner. Quantum channels with memory. 2005.
- [11] Ognian Oreshkov, Fabio Costa, and Časlav Brukner. Quantum correlations with no causal order. 2011.
- [12] Asher Peres. Quantum measurements are reversible. *American Journal of Physics*, 42(10):886–891, 1974.
- [13] Giulia Rubino, Lee A. Rozema, Adrien Feix, Mateus Araújo, Jonas M. Zeuner, Lorenzo M. Procopio, Časlav Brukner, and Philip Walther. Experimental verification of an indefinite causal order, 2016.