

Przyczynowe więzy na strukturę korelacji w formalizmie kwantowym

Piotr Krasuń

13 grudnia 2016

Spis treści

1	Wstęp	3
1.1	Historia	3
1.2	Podstawowe informacje	3
2	Macierz Procesu	5
3	Przyczynowa separowalność i przyczynowe nierówności	7
	Bibliografia	9

Spis rysunków

1	Sfera Blocha. Punkty na tej sferze opisują wszystkie możliwe stany $ \psi\rangle$	3
2	Wyrażenia zgodne z formalizmem i ich proponowana graficzna interpretacja	7

Spis tabel

1 Wstęp

1.1 Historia

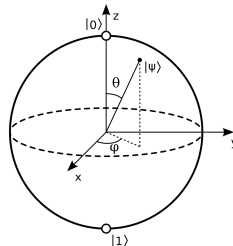
Mechanika kwantowa od samego początku jej badania budziła wiele kontrowersji. Od samego początku wiele osób miało problem z zaakceptowaniem faktu, iż na fundamentalnym poziomie rzeczywistość nie jest deterministyczna, jak nam się wydawało. Losowa natura tej teorii, jak i wiele "dziwnych" cech mechaniki kwantowej była początkowo trudna do zaakceptowania. Rok po opublikowaniu pracy Schrödingera, Einstein w swojej pracy zamieścił zdanie, które kierunkowało badania w tamtym czasie, zaś dziś w raz z innymi popularnymi "powiedzonkami" kwantowymi zakorzeniony w kulturze, a mianowicie, że "Bóg nie gra w kości", która później okazała się być nieprawdziwa - przynajmniej nie w takim stopniu w jakim autor by sobie życzył. Sam formalizm doczekał się wielu interpretacji często bardziej filozoficznych. Dzisiaj najpopularniejszymi jest interpretacja Kopenhaska, teoria wielu światów, czy idei inkorporującej kwantowej grawitacji w mechanizm pomiaru. Mimo tego jest to bardzo matematycznie elegancka teoria, którą można nazwać jednym z największych osiągnięć współczesnej fizyki. Wielokrotnie jej "dziwne" przewidywania zostały potwierdzone eksperymentalnie z wręcz idealną dokładnością (w przeciwieństwie do np. stałej kosmologicznej, która niedokładność przekracza wiele dziesiątek rzędu wielkości).

1.2 Podstawowe informacje

Przechodząc do bardziej konkretnych rzeczy; systemy w mechanice kwantowej opisują się jako elementy przestrzeni Hilberta $\psi \in \mathcal{H}$, a tak zwane obserwable samosprężone operatorów $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, które opisują nam pomiary, jakie możemy wykonać na danym systemie. W przypadku skończonego wymiarowego, bądź policzalnego możemy powiedzieć, że $\mathcal{H}^A = \mathcal{C}^N$ i obserwable są po prostu macierzami hermitowskimi odpowiedniego wymiaru. Przez znak równa się rozumiemy przestrzeń Hilberta zbudowaną na tym zbiorze z odpowiednimi działaniami. Dość standardowym i wygodnym jest wykorzystywanie tak zwanej notacji Diraca a mianowicie przedstawianie $\psi = |\psi\rangle$ i $\psi^\dagger = \langle\psi|$

$$\psi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \equiv |\psi\rangle \quad \psi^\dagger = \begin{pmatrix} a_1^* & a_2^* & a_3^* \end{pmatrix} \equiv \langle\psi| \quad (1)$$

Wygodnie narzucić warunek normalizacji stanów, a mianowicie $\langle\psi||\psi\rangle \equiv \langle\psi|\psi\rangle = 1$, wtedy wartość



Rysunek 1: Sfera Blocha. Punkty na tej sferze opisują wszystkie możliwe stany $|\psi\rangle$.

oczekiwaną obserwabli w danym stanie $|\psi\rangle$ oblicza się tak $\langle A \rangle \equiv \langle\psi|A|\psi\rangle$. Zauważmy, że skoro obserwable opisywane są przez macierze hermitowskie, można skorzystać z twierdzenia spektralnego

i zapisać $A = \sum_i^N \lambda_i |i\rangle\langle i|$, gdzie λ_i opisuje i-tą wartość własną zaś $|i\rangle$ to i-ty wektor własny, który dobrano tak, że $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$, $\{|i\rangle\}$ tworzy ortonormalną bazę w \mathcal{H} . Jednym z postulatów mechaniki kwantowej jest tzw. postulat pomiaru von Neumanna. Mówi on, że wykonując pomiar obserwabla A system w stanie $|\psi\rangle$ otrzymamy wartość λ_i odpowiadającą wektorowi własnemu $|i\rangle$ zapada się w stan $|i\rangle$. Można zapisać go w następujący sposób opisujący warunkową ewolucję po pomiarze

$$|\psi\rangle \mapsto \frac{\Pi_i |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | \Pi_i | \psi \rangle}}, \quad (2)$$

gdzie Π_i jest projektorem odpowiadającym $|i\rangle\langle i|$. Zapisując $|\psi\rangle = \sum_i^N a_i |i\rangle$, $\sum_i^N |a_i|^2 = 1$ prawdopodobieństwo zaobserwowania wyniku λ_i jest równe $|a_i|^2$, lub równoważnie

$$\Pr(\lambda_i) = \langle \psi | \Pi_i | \psi \rangle, \quad (3)$$

co znane jest jako reguła Borna. Fakt, że obserwabla są opisywane przez macierze Hermitowskie zapewnia, że $\sum_i^N |i\rangle\langle i| = \mathbb{1}$, co dalej implikuje, że $\sum_i^N \Pr(\lambda_i) = \sum_i^N \langle \psi | \Pi_i | \psi \rangle = \langle \psi | \sum_i^N \Pi_i | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = 1$. Stan całego systemu składającego się z pewnej ilości systemów opisuje element z

$$\mathcal{H}^{AB\dots} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B \otimes \dots, \quad (4)$$

gdzie \otimes to iloczyn tensorowy. Wraz z wzrostem systemów składających się na system ilość wektorów bazowych rośnie eksponentalnie, co jest fundacją tzw. "kwantowego przyspieszenia", które pozwala heurystycznie/przybliżenie rozwiązać na komputerach kwantowych problemy niektóre klasyczne problemy z eksponentyjnym przyspieszeniem np. faktoryzacja liczb, rozwiązywanie układów liniowych czy odpowiednio sformułowane problemy uczenia maszynowego. Ważną rzeczą do zaobserwowania jest fakt, że istnieją takie systemy, które nie można zapisać, jako iloczyn stanów w poszczególnych podsystemach. Klasycznym przykładem tego jest

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{AB} &= \mathcal{C}^2 \otimes \mathcal{C}^2 \\ |\psi\rangle &= |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B + |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B \equiv |1\rangle|1\rangle + |0\rangle|0\rangle \equiv |11\rangle + |00\rangle \\ a_0|0\rangle + a_1|1\rangle \otimes b_0|0\rangle + b_1|1\rangle &= a_0b_0|00\rangle + a_0b_1|01\rangle + a_1b_0|10\rangle + a_1b_1|11\rangle \\ a_0b_1 &= 0 \implies a_0 = 0 \vee b_1 = 0 \\ a_1b_0 &= 0 \implies a_1 = 0 \vee b_0 = 0 \end{aligned}$$

Powyższe implikują, że $a_0b_0 \neq 1 \vee a_1b_1 \neq 1$.

Takie systemy, które nie da się zapisać w postaci $|\Psi\rangle = |\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B$ nazywa się splątanymi. Splątanie kwantowe jest zasobem, które znalazło zastosowanie w wielu nowatorskich aplikacjach, jak np. kryptografia kwantowa, certyfikowana losowość, teleportacja kwantowa czy wcześniej przytoczone "kwantowe przyspieszenie". Często w rozważaniach ogranicza się do skończonych przestrzeni Hilberta o wybranych rozmiarach. Najmniejszą i niepodzielną jednostką informacji jest kubit ($\mathcal{H} = \mathcal{C}^2$), fizycznie reprezentuje on np. cząstkę ze spinem- $\frac{1}{2}$ (elektron), polaryzację fotonu. W wielu dziedzinach informatyki kwantowej ogranicza się praktycznie wyłącznie do analizy systemów złożonych z kubitów ze względu na pewną prostotę i wygodę analizy takich systemów. Ciekawą interpretacją kubitów prezentuje Sfera Blocha (??). Punkty na tej sferze opisują wszystkie prawidłowo znormalizowane $|\psi\rangle \in \mathcal{C}^2$. Okazuje się jednak, że niewystarczający do opisu zespołów statystycznych (system znajduje się w jakimś z $|\psi_i\rangle$ stanów z prawdopodobieństwem p_i) wynikający z braku pełnej wiedzy o systemie, bądź sposobie jego przygotowania. Do opisu takich sytuacji

korzysta się z macierzy gęstości, definiowanych następująco

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (5)$$

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(A\rho) \quad (6)$$

$$\text{Pr}(\lambda_i) = \text{Tr}(\Pi_i\rho) \quad (7)$$

$$\rho \mapsto \frac{\Pi_i\rho\Pi_i}{\text{Tr}(\Pi_i\rho)} \quad (8)$$

Prócz warunkowej ewolucji podczas pomiaru, systemu kwantowe podlegają również ewolucji czasowej. W obrazie Schrödingera ewoluują stany. Wygląda to następująco

$$U(t)|\psi(0)\rangle = |\psi(t)\rangle \quad (9)$$

$$U(t)^\dagger|\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle \quad (10)$$

Zaś w obrazie Heisenberga ewoluują obserwable

$$A(t) = U^\dagger A(0)U \quad (11)$$

gdzie $U(t)$ jest pewnym unitarnym operatorem ($U^\dagger U = \mathbb{1}$) działającym na \mathcal{H} . Pomiar rzutujący nie jest jedynym pomiarem, który można wykonać. Najogólniejszym pomiarem, który można wykonać w mechanice kwantowej jest *positive valued measurement* (POVM). Opisany jest on przez zbiór takich operatorów $\{E_i\}$, że $E_i > 0$, $\sum_i E_i = \mathbb{1}$. Poprzednie reguły przechodzą w

$$\text{Pr}(x_i) = \langle\psi|E_i|\psi\rangle \quad (12)$$

$$\text{Pr}(x_i) = \text{Tr}(E_i\rho) \quad (13)$$

$$E_i = \sum_j A_{ij}^\dagger A_{ij} \quad (14)$$

$$\rho \mapsto \frac{\sum_j A_{ij}\rho A_{ij}^\dagger}{\text{Tr}(\sum_j A_{ij}\rho A_{ij}^\dagger)}, \quad (15)$$

pomiary takie realizuje się korzystając z *ancilli* (pomocniczy system), ewoluując złożony system odpowiednio dobranym operatorem unitarnym, następnie dokonując pomiaru rzutującego na *ancilli* i po odnotowaniu wyniku odrzuceniu jej. W celu przetworzenia informacji w jedną spójną całość tak pozornie różne możliwe operacje na systemach kwantowych, jak przygotowania stanów, ewolucja czasowa mogąca odpowiadać np. przesłaniu systemu do innego laboratorium, czy interakcji systemu z otoczeniem, czy pomiarów odpowiadają *quantum channel* (kanał kwantowy). Kanały kwantowe opisują mapy $\mathcal{M} : \mathcal{L}(\mathcal{H}^A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}^B)$ mapujące liniowe operatory w przestrzeni wejściowej na liniowe operatory w przestrzeni wyjściowej, gdzie \mathcal{M} jest *completely positive* (CP)¹, $\mathcal{M}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$.

2 Macierz Procesu

Jednym z podejść do eksploracji korelacji nie zachowujących przyczynowego porządku jest rozwinięty w [4] formalizm macierzy procesu. Ewentualną zaletą tego podejścia jest zgodność z mechaniką kwantową na poziomie lokalnych eksperymentów. Jest to niejako rozszerzenie i enkapsulacja

¹Mapę $\phi : A \rightarrow B$ nazywamy nieujemną gdy $\phi(a) \geq 0 \forall a \geq 0 \in A$. Nazywana się ją CP gdy $\phi \otimes \mathcal{I}_n$ również jest nieujemna $\forall n \in \mathcal{N}$

idei POVM i reguły Borna. Podejście te porzuca założenie globalnej struktury czasoprzestrzeni. W celu zachowania zgodności z mechaniką kwantową na poziomie lokalnym opiera się na następujących założeniu, że operacje wykonywane przez poszczególną stronę są opisywane przez mechanikę kwantową w standardowym przyczynowym sformułowaniu, które można opisywać przy pomocy zbioru *quantum instruments* [2] z wejściową przestrzenią Hilberta \mathcal{H}^{A_1} i przestrzenią wyjściową \mathcal{H}^{A_2} . Najogólniej można je realizować przy pomocy zadziałania unitarną transformacją na system wejściowy i *ancilla*, następnie wykonanie rzutującego pomiaru na części systemu pozostawiając pozostałą część systemu jako wyjście. Alicja wykorzystując dany instrument otrzymuje jeden z możliwych wyników x_i , który indukują transformację \mathcal{M}_i^A z wejścia na wyjście. Transformacja ta odpowiada *completely positive* (CP) *trace preserving* mapie

$$\mathcal{M}_i^A : \mathcal{L}(\mathcal{H}^{A_1}) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}^{A_2}) \quad (16)$$

gdzie $\mathcal{L}(\mathcal{H}^X)$ jest przestrzenią macierzy na \mathcal{H}^X , której wymiar to d_X . Jej działanie na macierz gęstości ρ opisuje następująca formuła

$$\mathcal{M}_i^A(\rho) = \sum_{j=1}^m E_{ij}^\dagger \rho E_{ij} \quad (17)$$

gdzie macierze E_{ij} spełniają następujące własności

$$\sum_{i=0}^m E_{ij}^\dagger E_{ij} \leq \mathbb{1}^{A_1} \quad (18)$$

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m E_{ij}^\dagger E_{ij} = \mathbb{1}^{A_1} \quad (19)$$

Prawdopodobieństwo zaobserwowania wyniku realizowanego przez mapę \mathcal{M}_i^A to

$$\Pr(\mathcal{M}_i^A) = \text{Tr}(\mathcal{M}_i^A(\rho)) \quad (20)$$

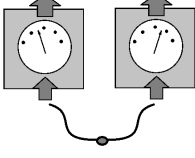
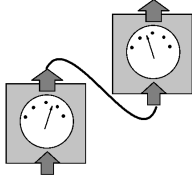
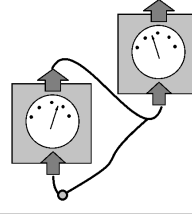
Widzimy od razu, że równanie (19) narzuca, by możliwość zaobserwowania dowolnego wyniku była równa 1. W przypadku, gdy mamy do czynienia z więcej niż jedną stroną *procesem* będziemy nazywać listę $\Pr(\mathcal{M}_i^A, \mathcal{M}_j^B, \dots)$ dla wszystkich możliwych lokalnych wyników. Dalej będę opisywał wyłącznie przypadek dwustronny, jednakże rozszerzenie formalizmu na przypadek wielostronny jest trywialny. Wygodnym sposobem przedstawiania map \mathcal{M}_i^A jest izomorfizm Choi-Jamiołkowski (CJ) [3, 1]. Macierz CJ $M_i^{A_1 A_2} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{A_1} \otimes \mathcal{H}^{A_2}) \geq 0$ jest zdefiniowana jako

$$M_i^{A_1 A_2} := [\mathcal{I} \otimes \mathcal{M}_i^A(|\phi^+\rangle\langle\phi^+|)]^T, \quad (21)$$

$$|\phi^+\rangle = \sum_{i=1}^{d_{A_1}} |ii\rangle, \quad (22)$$

gdzie $\{|j\rangle\}^{d_{A_1}}$ tworzy ortonormalną bazę w \mathcal{H}^{A_1} . Korzystając z tego przejścia można zapisać prawdopodobieństwo dwóch rezultatów, jako

$$\Pr(\mathcal{M}_i^A, \mathcal{M}_j^B) = \text{Tr}(W^{A_1 A_2 B_1 B_2} (M_i^{A_1 A_2} \otimes M_j^{B_1 B_2})). \quad (23)$$

Przyczynowy porządek	Stany	Kanały	Kanały z pamięcią
$A \not\leq B$	$A_1, B_1, A_1 B_1$	$A_1 B_2$	$A_1 B_1 B_2$
$B \not\leq A$	$A_1, B_1, A_1 B_1$	$A_2 B_1$	$A_1 A_2 B_1$
			

Rysunek 2: Wyrażenia zgodne z formalizmem i ich proponowana graficzna interpretacja

Macierz W w $\mathcal{L}(\mathcal{H}^{A_1} \otimes \mathcal{H}^{A_2} \otimes \mathcal{H}^{B_1} \otimes \mathcal{H}^{B_2})$ nazywa się *process matrix* (macierzą procesu). W celu generowania prawidłowego prawdopodobieństwa narzuca się dodatkowe warunki na W

$$W^{A_1 A_2 B_1 B_2} \geq 0. \quad (24)$$

$$\text{Tr} [W^{A_1 A_2 B_1 B_2} (M^{A_1 A_2} \otimes M^{B_1 B_2})] = 1. \quad (25)$$

$$\forall M^{A_1 A_2}, M^{B_1 B_2} \geq 0, \text{Tr}_{A_2} M^{A_1 A_2} = \mathbb{1}^{A_1}, \text{Tr}_{B_2} M^{B_1 B_2} = \mathbb{1}^{B_1}, \quad (26)$$

gdzie $M^{A_1 A_2} = \sum_i M_i^{A_1 A_2}$. Warunek (24) zapewnia, że prawdopodobieństwa nie będą ujemne, a (25) i (26) pewność zaobserwowania dowolnej pary map. Baza Hilberta-Schmidta dla $\mathcal{L}(\mathcal{H}^X)$ dane jest przez zbiór macierzy $\{\sigma_\mu^X\}_{\mu=0}^{d_X^2-1}$, gdzie $\sigma_0^X = \mathbb{1}$, $\text{Tr}(\sigma_\mu^X \sigma_\nu^X) = d_X \delta_{\mu\nu}$, $\text{Tr}(\sigma_{\mu>0}^X) = 0$. Ogólny element przestrzeni $\mathcal{L}(\mathcal{H}^{A_1} \otimes \mathcal{H}^{A_2} \otimes \mathcal{H}^{B_1} \otimes \mathcal{H}^{B_2})$ można zapisać, jako

$$W^{A_1 A_2 B_1 B_2} = \sum_{\mu\nu\lambda\gamma} w_{\mu\nu\lambda\gamma} \sigma_\mu^{A_1} \otimes \sigma_\nu^{A_2} \otimes \sigma_\lambda^{B_1} \otimes \sigma_\gamma^{B_2} w_{\mu\nu\lambda\gamma} \in \mathcal{C}. \quad (27)$$

Wyrażenia zawierające wyłącznie wyrazy $\sigma_i^{A_1} \otimes \mathbb{1}^{reszta}$, ($i > 0$) nazywa się wyrażeniami typu A_1 , wyrażenia zawierające $\sigma_i^{A_1} \otimes \sigma_j^{A_2} \otimes \mathbb{1}^{reszta}$, ($i, j > 0$) nazywa się wyrażeniami typu $A_1 A_2$ etc. Na rysunku 2 przedstawiono wyrażenia spełniające (24) i (25). Najogólniejsza macierz procesu zgodna z założeniami to

$$W^{A_1 A_2 B_1 B_2} = \frac{1}{d_{A_1} d_{B_1}} (\mathbb{1} + \sigma^{B \leq A} + \sigma^{A \leq B} + \sigma^{A \not\leq B}) \quad (28)$$

$$\sigma^{A \leq B} \equiv \sum_{ij>0} a_{ij} \sigma_i^{A_1} \sigma_j^{B_2} + \sum_{ijk>0} b_{ijk} \sigma_i^{A_1} \sigma_j^{B_1} \sigma_k^{B_2} \quad (29)$$

$$\sigma^{B \leq A} \equiv \sum_{ij>0} c_{ij} \sigma_i^{A_2} \sigma_j^{B_1} + \sum_{ijk>0} d_{ijk} \sigma_i^{A_1} \sigma_j^{A_2} \sigma_k^{B_1} \quad (30)$$

$$\sigma^{A \not\leq B} \equiv \sum_{i>0} e_i \sigma_i^{A_1} + \sum_{i>0} f_i \sigma_i^{B_1} + \sum_{ij>0} h_{ij} \sigma_i^{A_1} \sigma_j^{B_1} \quad (31)$$

3 Przyczynowa separowalność i przyczynowe nierówności

Macierzami procesu *casually separable* (przyczynowo separowalnymi) nazywa się takie macierze, które można zapisać jako wypukłą kombinację procesów o konkretnym przyczynowym porządku, a mianowicie

$$W^{A_1 A_2 B_1 B_2} = q W^{B \not\leq A} + (1 - q) W^{A \not\leq B}, \quad 0 \leq q \leq 1 \quad (32)$$

powyższa dekompozycja nie musi być jednoznaczna, jako że wyrazy typu $W^{A \not\prec B}$ można włączyć do wybranego wyrazu. Przed wprowadzeniem *causal inequallity* (przyczynowej nierówności) warto wspomnieć o tzw. nierówności Bella, jest to nieskończona rodzina nierówności, których żaden niesplątany system nie może złamać. Jest to *device independent* (niezależny od implementacji pomiarów) sposób weryfikacji splątania kwantowego.

Przyjmuje się następujące założenia na temat natury rzeczywistości uporządkowanej przyczynowo:

Causal structure (Przyczynowa struktura, CS) Wydarzenia obdarzone są częściowym porządkiem w strukturze czasoprzestrzeni, można wyznaczyć kolejność zdarzeń $A \prec B$, które wyznacza kierunek przesyłania informacji, jeżeli $A \prec B$ to możliwe jest sygnalizowanie ² z A do B, lecz nie na odwrót.

Free choice (Wolny wybór, FC) W przypadku wyboru liczb losowych, możliwe korelacje występują wyłącznie z liczbami z przyszłości.

Closed laboratories (Zamknięte laboratoria, CL) Liczba odgadnięta przez Alicję może być skorelowana z liczbą losową Boba, wyłącznie jeżeli system wysłany do Alicji jest przed (w sensie przyczynowości) generacji liczby Boba, analogicznie w przypadku odwrotnym.

Rozważa się następującą dwu stronna grę realizowaną wielokrotnie przez dwa odległe laboratoria (Alicję i Boba). W każdej iteracji rozgrywki Alicja i Bob otrzymują na wejściu pewien fizyczny system, wykonuje na nim pewne operacje i wysyła dalej system. Każda ze stron może otrzymać sygnał wyłącznie przez system wchodzący do laboratorium, zaś wysłać wyłącznie przez system wychodzący z laboratorium, widać więc jeżeli Alicja otrzyma system, który przeszedł pewną procedurę u Boba, Bob może wysłać informacje, zaś Alicja może ją wyłącznie odebrać co uniemożliwia dwustronna sygnalizację. Każdy z graczy otrzymując system, losuje jeden bit wybraną metodą oznaczany a dla Alicji i b dla Boba. Dodatkowo Bob losuje bit b', który decyduje czy Bob ma zgadywać bit a Alicji, czy Alicja ma zgadywać bit b Boba. Bez utraty ogólności można przyjąć, że obie strony zgadują bit drugiego gracza. W zależności od b' ich predykcja może się nie liczyć. Zakłada się, że bity losowane są z równym prawdopodobieństwem. Prawdopodobieństwo sukcesu w takiej grze zapisuje się następująco

$$\Pr_{sukcesu} \equiv \frac{1}{2} [\Pr(x = b|b' = 0) + \Pr(y = a|b' = 1)] \quad (33)$$

Każda strategia w uporządkowanej strukturze czasu osiąga $\Pr_{sukcesu} \leq \frac{3}{4}$. Opisuje się ją nierygorystycznie następująco: w przypadku $A \prec B$ Alicja może zakodować swój bit w pewien sposób w systemie, który wysła do Boba, dlatego można wybrać taką strategię, że $\Pr(y = a) = 1$, Alicji pozostaje wtedy losowa predykcja co do wartości bitu Boba - $\Pr(x = b) = \frac{1}{2}$. Widać również, że żadna probabilistyczna nie może poprawić wyniku, co daje nam optymalną strategię. Okazuje się, że korzystając z korelacji opisywanych przez formalizm macierzy procesu $\Pr_{sukces} \leq \frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

²W przypadku, gdy $A \prec B$ przez oznacza to, że brzegowy rozkład prawdopodobieństwa otrzymania danego wyniku nie zależy od wejścia drugiej strony. $\Pr(a|x, y) = \Pr(a|x, y') \forall a, x, y, y'$, $\Pr(a|x, y) = \sum_b \Pr(a, b|x, y)$, gdzie przez a, b oznaczamy wyniki otrzymane przez odpowiednie strony, zaś x, y ich wejścia.

Bibliografia

- [1] Man-Duen Choi. Completely positive linear maps on complex matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 10(3):285 – 290, 1975.
- [2] E. B. Davies and J. T. Lewis. An operational approach to quantum probability. *Comm. Math. Phys.*, 17(3):239–260, 1970.
- [3] A. Jamiolkowski. Linear transformations which preserve trace and positive semidefiniteness of operators. *Reports on Mathematical Physics*, 3(4):275–278, December 1972.
- [4] Ognian Oreshkov, Fabio Costa, and Časlav Brukner. Quantum correlations with no causal order. 2011.