Abszolút folytonos valószínűségi változók megoldásai

Elméleti összefoglaló

Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel.
Alapvető összefüggések:

- Eloszlásfüggvény: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$
- Normalizációs feltétel: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
- Valószínűség számítás: $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
- Várható érték: $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$

4.1 Feladat megoldása

Adott: $F(x) = cx^3$ a $[0, 3]$ intervallumon.
Keressük: c és $P(-1 < Y < 1)$.

$$\int_0^3 3cx^2\,dx = 1$$

$$3c\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 1$$

$$9c = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = \frac{1}{27}}$$

$$P(0 \leq Y < 1) = F(1) - F(0) = \frac{1}{27} \cdot 1^3 = \boxed{\frac{1}{27}}$$

4.2 Feladat megoldása

Adott: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2, & 0 \leq x < c \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$.
Keressük: c és $F(x)$.

$$\int_0^c \frac{1}{9}x^2\,dx = 1$$

$$\frac{1}{27}c^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = 3}$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{9}t^2\,dt = \frac{x^3}{27} \quad (0 \le x \le 3)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^3}{27}, & 0 \le x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

4.4 Feladat megoldása

Adott: $f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^4}, & x > 1 \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$.

Keressük: c és $E[X]$.

$$\int_1^\infty \frac{c}{x^4}\,dx = 1$$

$$c\left[-\frac{1}{3x^3}\right]_1^\infty = 1$$

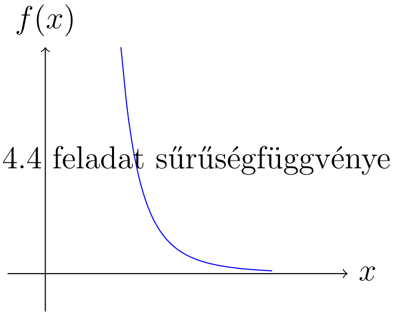
$$\frac{c}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = 3}$$

$$E[X] = \int_1^\infty x \cdot \frac{3}{x^4}\,dx = 3\int_1^\infty x^{-3}\,dx$$

$$= 3\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^\infty = \boxed{\frac{3}{2}}$$

Eredmények összehasonlítása

Feladat	c értéke	Fő eredmény
4.1	$\frac{1}{27}$	$P(-1 < Y < 1) = \frac{1}{27}$
4.2	3	$F(x) = \frac{x^3}{27}$
4.4	3	$E[X] = \frac{3}{2}$


$f(x)$
4.4 feladat sűrűségfüggvénye
x