Valószínűségszámítás Feladatmegoldások

2025/2. félév

1 Valószínűségek kiszámítása (ismétlés: kombinatorika)

1.3. Feladat:

Ha egy magyarkártya-csomagból (32 lap: piros, zöld, makk, tök) visszatevéssel húzunk három lapot, akkor mi annak a valószínűsége, hogy:

a) pontosan egy piros színű lapot húztunk?

- $A = \{$pontosan 1 db piros színű lapot húztunk$\}$
- $P(A) =?$
- $\Omega = \{$(P1,P1,P1), (P1,P1,P2)...$\}$

$$P(A) = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{8 \cdot 24 \cdot 24 + 24 \cdot 8 \cdot 24 + 24 \cdot 24 \cdot 8}{32^3} = \frac{3}{1} \cdot \frac{8}{32}^1 \cdot \frac{24}{32}^2$$

Megjegyzés: $\frac{3}{1}$ *: 3db-ból választunk,* $\frac{8}{32}^1$ *1db piros* $\frac{24}{32}^2$ *2db nem piros*

b) legalább egy piros színű lapot húztunk?

- $B = \{$legalább 1 db piros színű lapot húztunk$\}$

$$1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{24^3}{32^3}$$

1.4 Feladat

Egy zsákban 10 pár cipő van. 4 db-ot kiválasztva, mi a valószínűsége, hogy van közöttük pár, ha:

a) egyformák a párok

- cipők száma: $2 \cdot 10$ azaz 20 db

$$P(\text{lesz pár}) = 1 - P(\overline{\text{lesz pár}}) = 1 - \frac{2 \cdot \binom{10}{4}}{\binom{20}{4}}$$

1.5. Feladat

n dobozba véletlenszerűen helyezünk el **n** golyót úgy, hogy bármennyi golyó kerülhet az egyes dobozokba.

- **n** doboz **n** golyó

a) Mi a valószínűsége, hogy minden dobozba kerül golyó?

$$\text{P(minden dobozba kerül golyó)} = \frac{n!}{n^n}$$

Megjegyzés: összes lehetséges eset: n^n *mivel egy dobozba több golyó is lehet, kedvező eset:* $n!$ *mivel elősbe n-ből lehet választani, másodikba* $(n-1)$*ből ...*

b) Annak mi a valószínűsége, hogy pontosan egy doboz marad üresen?

$$\text{P(pont egy doboz üres)} = \frac{n(n-1)n!\frac{1}{2}}{n^n}$$

?????

2 Feltételes valószínűség és Bayes-tétel, diszkrét valószínűségi változók

2.12. Feladat

Jelölje X az ötöslottón kihúzott lottószámok legkisebbikét. Adjuk meg X eloszlását!

- 90 szám, 5-öt húzunk ki
- x := a legkisebb kihúzott szám
- eloszlása = ?

$$P_k = \mathbb{P}(x = k) = \frac{\binom{90-k}{4}}{\binom{90}{5}}$$

Megjegzés: a legkisebb szám 1-től 86ig lehet

2.9. Feladat

Tegyük fel, hogy az új internet-előfizetők véletlenszerűen választott 20%-a speciális kedvezményt kap. Mi a valószínűsége, hogy 10 ismerősünk közül, akik most fizettek elő, legalább négyen részesülnek a kedvezményben?

$$P_k = \mathbb{P}(x = k) = \binom{n}{k} p^k (n-p)^n - k$$

$$\mathbb{P}(x \geq k) = \sum_{k=4}^{10} \mathbb{P}(x = k) = \sum_{k=4}^{10} P_k$$

$$1 - \mathbb{P}(x \leq k) = 1 - \sum_{k=0}^{3} P_k$$

2.1. Feladat

Mennyi a valószínűsége, hogy két kockadobásnál mind a két dobás 6-os, feltéve, hogy tudjuk, hogy legalább az egyik dobás 6-os?

- A = {legalább egy hatos}
- B = {mindkettő hatos}

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{1}{11} \qquad (\mathbb{P}(A) > 0)$$

Megjegyzés: A és B esemény független, akkor áll fen az egyenlet vagyis: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$