集合冪級数

hos

2024 年 10 月 26 日

係数環を R とする．$x_0, \ldots, x_{n-1}$ を不定元として，$I \subseteq [n] := \{0, \ldots, n-1\}$ に対し $x^I = \prod_{i \in I} x_i$ と書く．I と $\sum_{i \in I} 2^i$ をしばしば同一視する．

1 subset convolution

subset convolution とは，$R2^X := R[x_0, \ldots, x_{n-1}]/(x_0^2, \ldots, x_{n-1}^2)$ での積.

不定元 t を導入して，$R[x_0, \ldots, x_{n-1}]/(x_0(x_0 - t), \ldots, x_{n-1}(x_{n-1} - t))$ での積を計算して $t \to 0$ とすることにする．中国剰余定理より，これは $\{0, t\}^n$ で多点評価して各点積をとって補間すればよい．各次元では $(a, b) \mapsto (a, a + bt)$, $(a, b) \mapsto (a, (b - a)/t)$ という変換になるので，t で割るのを後回しにすると考えて，以下のアルゴリズムが得られる：

1. 入力のそれぞれについて，x^I を $x^I t^{|I|}$ に置き換える．
2. 入力のそれぞれについて，累積和をとる：$(a_I)_I \mapsto \left(\sum_{J \subseteq I} a_J \right)_I$
3. t の多項式として各点積をとる．
4. 差分をとる：$(a_I)_I \mapsto \left(\sum_{J \subseteq I} (-1)^{|I|-|J|} c_J \right)_I$
5. $[x^I t^{|I|}]$ をとると出力の $[x^I]$ である．

2, 4 がボトルネックで $O(2^n n^2)$ 時間．3 は FFT で $O(2^n n \log(n))$ 時間にもできるが恩恵が少ない．

メモリアクセスを考慮して，ステップ 2, 3, 4 を再帰で実装する (segment tree 上の DFS).

入力を $A, B \in R2^X$ とする．$2^n \times (n+1)$ 配列 a, b を用意し，$0 \le h < 2^n$, $0 \le k \le n$ について，

- $a[h][k] \leftarrow [|h| = k] \cdot [x^h]A$
- $b[h][k] \leftarrow [|h| = k] \cdot [x^h]B$

として，以下の $\texttt{rec}(n, 0)$ を呼ぶ．すると出力が $[x^h]A(x)B(x) = a[h][|h|]$ として得られる．

$\texttt{rec}(m, h_0)$ $(0 \le m \le n,\ 0 \le h_0 < 2^n,\ 2^m \mid h_0)$

- $m > 0$ のとき
  1. $h_0 \le h < h_0 + 2^{m-1}$ について，①各 k について，
     - $a[h + 2^{m-1}][k] \mathrel{+}= a[h][k]$

- $\circ$ $b[h+2^{m-1}][k]$ += $b[h][k]$

  とする．

2. $\texttt{rec}(m-1,h)$, $\texttt{rec}(m-1,h+2^{m-1})$ を呼ぶ．
3. $h_0 \le h < h_0+2^{m-1}$ について，②各 k について，$a[h+2^{m-1}][k]$ −= $a[h][k]$ とする．

- $m=0$ のとき
  1. ③各 k について，$a[h_0][k] \leftarrow \sum_{0\le l\le k} a[h_0][l]\cdot b[h_0][k-l]$ とする．

①, ②, ③ で操作する k, l の範囲は $0\le k\le n$, $0\le l\le k$ より狭くできる．

① について，非 0 の値が入る場所を考えると，$|h|-|h_0|\le k\le |h|$ としてよい．例えば $n=3$ では以下の表のようになる．

$m=3$				
	0	1	2	3
0	$*$			
1		$*$		
2		$*$		
3			$*$	
4		$*$		
5			$*$	
6			$*$	
7				$*$

$\rightarrow$

$m=2$				
	0	1	2	3
0	$*$			
1		$*$		
2		$*$		
3			$*$	
4	$*$	$*$		
5		$*$	$*$	
6		$*$	$*$	
7			$*$	$*$

$\rightarrow$

$m=1$				
	0	1	2	3
0	$*$			
1		$*$		
2	$*$	$*$		
3		$*$	$*$	
4	$*$	$*$		
5		$*$	$*$	
6	$*$	$*$	$*$	
7		$*$	$*$	$*$

$\rightarrow$

$m=0$				
	0	1	2	3
0	$*$			
1	$*$	$*$		
2	$*$	$*$		
3	$*$	$*$	$*$	
4	$*$	$*$		
5	$*$	$*$	$*$	
6	$*$	$*$	$*$	
7	$*$	$*$	$*$	$*$

② について，出力に寄与する場所を考える (転置を考える) と，$|h|\le k\le |h|+(n-(m-1)-|h_0|)$ としてよい．例えば $n=3$ では以下の表のようになる．

$m=3$				
	0	1	2	3
0	$*$			
1		$*$		
2		$*$		
3			$*$	
4		$*$		
5			$*$	
6			$*$	
7				$*$

$\leftarrow$

$m=2$				
	0	1	2	3
0	$*$	$*$		
1		$*$	$*$	
2		$*$	$*$	
3			$*$	$*$
4		$*$		
5			$*$	
6			$*$	
7				$*$

$\leftarrow$

$m=1$				
	0	1	2	3
0	$*$	$*$	$*$	
1		$*$	$*$	$*$
2		$*$	$*$	
3			$*$	$*$
4		$*$	$*$	
5			$*$	$*$
6			$*$	
7				$*$

$\leftarrow$

$m=0$				
	0	1	2	3
0	$*$	$*$	$*$	$*$
1		$*$	$*$	$*$
2		$*$	$*$	$*$
3			$*$	$*$
4		$*$	$*$	$*$
5			$*$	$*$
6			$*$	$*$
7				$*$

③ について，非 0 の値が入る場所を考えて $k\le 2|h_0|$ としてよく (2 個の多項式の積であることを用いた)，出力に寄与する場所を考えて $|h_0|\le k$ としてよい．非 0 の値が入る場所を考えて $0\le l\le |h_0|$, $0\le k-l\le |h_0|$ としてよい．

さらに，② について，非 0 の値が入る場所を考えて $k\le 2|h|$ としてよい．

2 exp

$[x^\emptyset]A = 0$ なる $A \in R2^X$ に対して，$\exp(A) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{A^i}{i!}$ を求めたい．$\frac{A^i}{i!}$ は環演算のみで定義できることに注意する．

x_{n-1} の次数で分けて $A = A_0 + A_1 x_{n-1}$ とおくと

$$\exp(A) = \exp(A_0)\exp(A_1 x_{n-1}) = \exp(A_0)(1 + A_1 x_{n-1}) = \exp(A_0) + \exp(A_0) A_1 x_{n-1}$$

となり，サイズ $n-1$ の subset convolution 1 回とサイズ $n-1$ の exp に帰着できる．$O(2^n n^2)$ 時間.

毎回補間をせず，多点評価した状態で持っておくことができる．

$I \subseteq [n-1]$ とする．$\exp(A_0), \exp(A_1)$ を $x_i = [i \in I] \cdot t$ で評価した値をそれぞれ $a_0, a_1 \in R[t]$ とすると，$\exp(A)$ をさらに $x_{n-1} = 0, t$ で評価した値はそれぞれ $a_0, a_0 + a_0 a_1 t$ となる．ここで補間時に x_{n-1} の軸から差分をとると，$(a_0, a_0 + a_0 a_1 t) \mapsto (a_0, a_0 a_1)$ となるが，a_0 が $O(t^n)$ ずれていても，残り $n-1$ 軸の変換後 $t \to 0$ とすると消えるので，出力に影響がないことがわかる．

以上より，サイズ n の部分問題としては $2^n \times (n+1)$ 配列を求めればよい．

実測だと毎回 subset convolution を呼ぶほうが速い．TODO: 添え字の範囲を詰められていないかもしれないし，本当に枝刈りが効きにくくなっているかもしれない．

3 合成

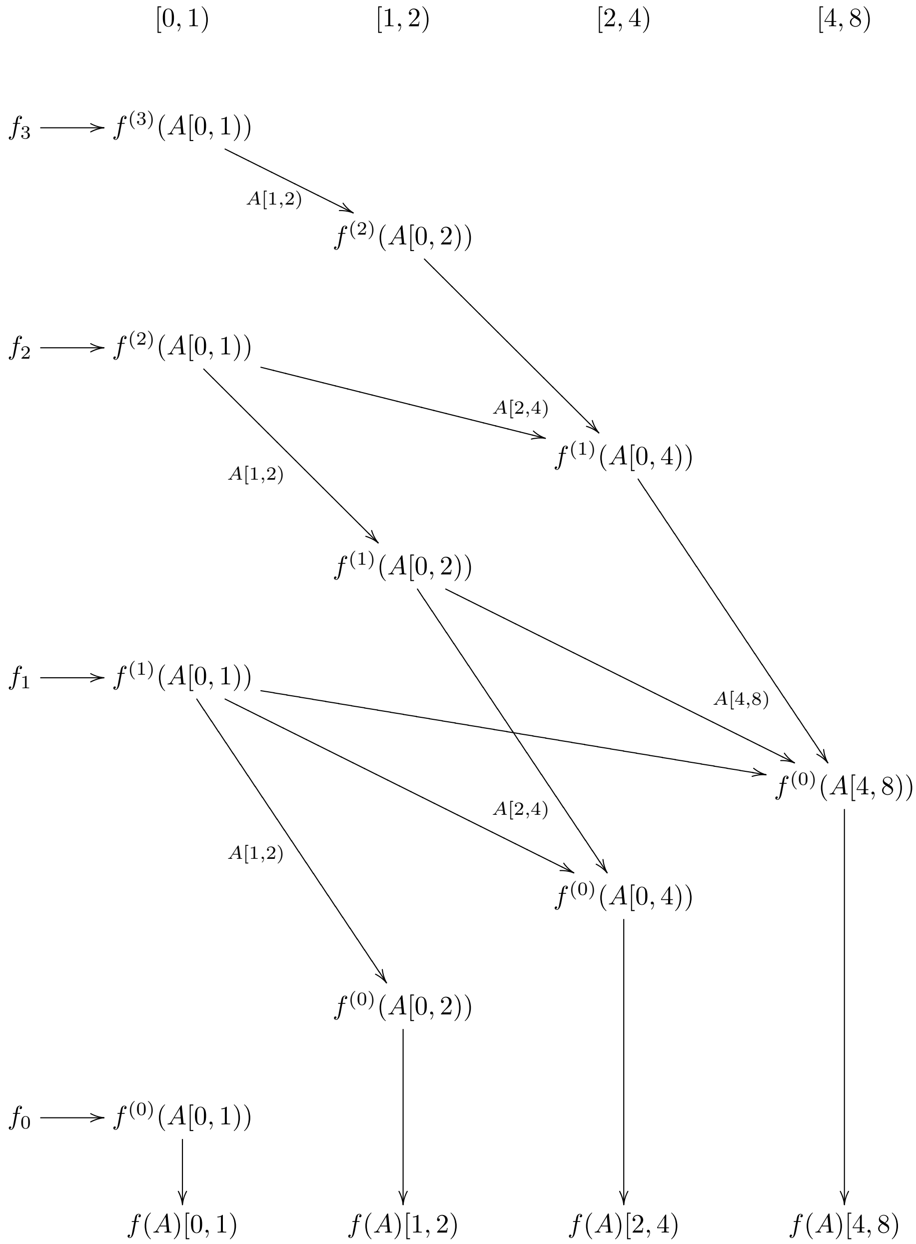
EGF $f(y) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \frac{y^i}{i!}$ $(f_i \in R)$ と $[x^\emptyset]A = 0$ なる $A \in R2^X$ に対して，$f(A) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \frac{A^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n} f_i \frac{A^i}{i!}$ を求めたい．

x_{n-1} の次数で分けて $A = A_0 + A_1 x_{n-1}$ とおくと

$$f(A) = f(A_0) + f'(A_0) A_1 x_{n-1}$$

であるから，f の i 階微分を $f^{(i)}$ と書いて，サイズ m で $f^{(0)}, \ldots, f^{(n-m)}$ との合成を求める問題に帰着される．base case は $f_0, \ldots, f_n$ である．時間計算量は $\sum_{0 \le m < n} (n-m) \cdot O(2^m m^2) = O(2^n n^2)$.

以下のように subset convolution を除いてサイズ 2^n の配列上で実装できる：



(TODO: 多点評価した状態で持つ方針で定数倍を詰める)

多項式 $f(y) = \sum_i f_i y^i \in R[y]$ と $A \in R2^X$ に対しても $f(A)$ が定まる．これは，定数項 $a = [x^\emptyset]A$ を分けて Taylor 展開して，

$$f(A) = f(a + (A - a)) = \sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}(a) \frac{(A-a)^i}{i!}$$

によって EGF の場合に帰着できる．

4 転置

$A \in R2^X$ を固定するとき，A 倍写像 $R2^X \to R2^X$ の転置は，A・入力・出力すべてを reverse してのsubset convolution となる．これは，A 倍写像を行列で書くと $([i \supseteq j] \cdot a_{i-j})_{i,j}$ となり，その転置行列が

$$([j \supseteq i] \cdot a_{j-i})_{i,j} = \left(\big[[n] - i \supseteq [n] - j\big] \cdot a_{([n]-i)-([n]-j)}\right)_{i,j}$$

となることからわかる．

$[x^{\emptyset}]B = 0$ なる $B \in R2^X$ を固定するとき，EGF 合成 $[n+1] \to R2^X; f \mapsto f(B)$ の転置は，適切に reverse を挟むことで，EGF power projection $R2^X \to [n+1]; A \mapsto \left([x^{[n]}]A\dfrac{B^i}{i!}\right)_i$ である．

直接アルゴリズムを導出する．不定元 t を導入して，答えの EGF $[x^{[n]}]\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} A\frac{(tB)^i}{i!} = [x^{[n]}]A\exp(tB)$ を求めたい．x_{n-1} の次数で分けて $A = A_0 + A_1 x_{n-1}$, $B = B_0 + B_1 x_{n-1}$ とおくと，

$$\begin{aligned}
[x^{[n]}]A\exp(tB) &= [x^{[n]}](A_0 + A_1 x_{n-1})\exp(t(B_0 + B_1 x_{n-1})) \\
&= [x^{[n]}](A_0 + A_1 x_{n-1})\exp(tB_0)(1 + tB_1 x_{n-1})) \\
&= [x^{[n]}]\left(A_0\exp(tB_0) + (A_1 + tA_0B_1)\exp(tB_0)x_{n-1}\right) \\
&= [x^{[n-1]}](A_1 + tA_0B_1)\exp(tB_0)
\end{aligned}$$

であるから，サイズ m では t の $n-m$ 次式が登場する (power projection を $n-m+1$ 回解けばよい)．base case では $\exp(tB) = 1$ である．

サイズ m の部分問題を $[x^{[m]}]\left(C_m\dfrac{B^i}{i!}\right)_i$ $(C_m \in R2^{\{x_0,\ldots,x_{m-1}\}}[t])$ とおくと，計算過程は以下のように

なる：

$$
\begin{tikzcd}
{[0,4)} & {[4,6)} & {[6,7)} & {[7,8)} & \\
 & & & {[t^3]C_0} \arrow[r] & out_3 \\
 & & {[t^2]C_1} \arrow[ur, "{B[1,2)}"] & & \\
 & & & {[t^2]C_0} \arrow[r] & out_2 \\
 & {[t^1]C_2} \arrow[uur] \arrow[urr, "{B[2,4)}"] & & & \\
 & & {[t^1]C_1} \arrow[uur, "{B[1,2)}"'] & & \\
 & & & {[t^1]C_0} \arrow[r] & out_1 \\
{[t^0]C_3} \arrow[uuur, "{B[4,8)}"] \arrow[uurr] \arrow[urrr] & & & & \\
 & {[t^0]C_2} \arrow[uuur, "{B[2,4)}"] \arrow[uurr] & & & \\
 & & {[t^0]C_1} \arrow[uuur, "{B[1,2)}"'] & & \\
 & & & {[t^0]C_0} \arrow[r] & out_0 \\
A[0,4) \arrow[uuuu] & A[4,6) \arrow[uuu] & A[6,7) \arrow[uu] & A[7,8) \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

$B \in R2^X$ を固定するとき，多項式合成 $R[y] \to R2^X; f \mapsto f(B)$ の転置は，適切に reverse を挟むことで，power projection $A \mapsto \left([x^{[n]}]AB^i\right)_i$ である．

定数項 $b = [x^{\emptyset}]B$ を分けて，

$$AB^i = A(b + (B-b))^i = \sum_j \frac{i!}{(i-j)!} b^{i-j} A \frac{(B-b)^j}{j!}$$

となるので EGF の場合に帰着できる．