Shortest Path Replacement

hos

2024 年 10 月 14 日

1　問題

無向・**正**重み付きグラフ $G = (V, E, w)$ $(w\colon E \to \mathbb{R}_{>0})$ および $s, t \in V$ が与えられる．各 $e \in E$ に対し，$G - e$ での s-t ウォークの重みの最小値 z_e を求めたい．

重みの加算・比較が可能として，$O((|V| + |E|) \log(|V|))$ 時間 $O(|V| + |E|)$ 空間．辺重みに 0 を許す場合は 0 を ε にして解く．

2　準備

最短と言ったら重み最小のこととする．$u, v \in V$ に対し，G での u-v 最短ウォークの重みを $d(u, v)$ と書く．

$d(s, t) = \infty$ のときは任意の $e \in E$ に対し $z_e = \infty$ である．以下 $d(s, t) < \infty$ を仮定する．

$s = t$ のときは任意の $e \in E$ に対し $z_e = 0$ である．以下 $s \neq t$ を仮定する．

G での s-t 最短単純パス P を 1 つとって固定する．

- s を始点とする最短路木 S であって P を含むものを 1 つとって固定する．S の頂点 u に対し，S での s-u 単純パスを $S(u)$ と書く．
- t を終点とする最短路木 T であって P を含むものを 1 つとって固定する．T の頂点 u に対し，T での u-t 単純パスを $T(u)$ と書く．

補題. $e \in E$ とし，$G - e$ に s-t ウォークが存在するとする．このとき，$G - e$ での s-t 最短ウォーク Q であって，Q 上の任意の頂点 u に対し，以下の少なくとも一方が成り立つようなものが存在する：

- Q の u までの prefix が $S(u)$ である
- Q の u からの suffix が $T(u)$ である

証明. 条件をいずれも満たさない頂点の個数が最小となるような Q をとる．Q 上のある頂点 u が条件をいずれも満たさないと仮定して矛盾を導く．

- $S(u)$ が e を含まないとすると，Q の prefix を $S(u)$ に置き換えてより良いウォークを得られるので矛盾．
- $T(u)$ が e を含まないとすると，Q の suffix を $T(u)$ に置き換えてより良いウォークを得られるので

矛盾．

よって $S(u), T(u)$ は e を含むとしてよい．これらは最短路木の単純パスなのでそれぞれ e をちょうど 1 回含む．e の前後に分解して $S(u) = Q_0 e Q_1$, $T(u) = Q_2 e Q_3$ とおく．

$S(u), T(u)$ が e を同じ向きに通る場合．s-u ウォーク $Q_0 \overline{Q_2}$ および u-t ウォーク $\overline{Q_1} Q_3$ を考えることにより，

$$\begin{aligned} w(Q_0) + w(e) + w(Q_1) = d(s,u) \leq w(Q_0) + w(Q_2) \\ w(Q_2) + w(e) + w(Q_3) = d(u,t) \leq w(Q_1) + w(Q_3) \end{aligned}$$

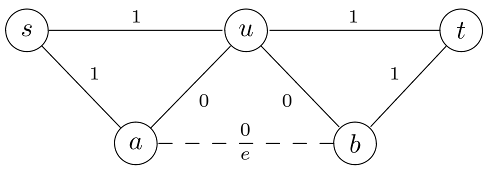
を得るが，両辺足して $w(e) \leq 0$ となり矛盾．

$S(u), T(u)$ が e を逆向きに通る場合，$G - e$ での s-t ウォーク $Q_0 Q_3$ を考えると，その重みは

$$w(Q_0) + w(Q_3) < d(s,u) + d(u,t) = w(Q)$$

なので Q の最短性に矛盾．■

注意. 辺重みに 0 を許すと補題は成り立たない：

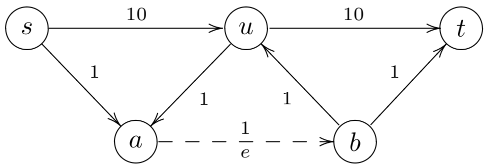


上図で，$P = sabt$ として，最短路木として

- S の辺は sa, ab, bt, bu
- T の辺は sa, ab, bt, ua

となるものをとると，$Q = sut, saut, subt, saubt$ のどれについても，頂点 u で条件を満たさない．

有向グラフの場合も補題は成り立たない：



上図で $G - e$ での s-t ウォークは $Q = sut$ のみだが，$d(s,u) = d(u,t) = 3$ より頂点 u で条件を満たさない．

3 解法

$P = (s = p_0, e_0, p_1, e_1, \ldots, e_{k-1}, p_k = t)$ ($p_i \in V$, $e_i \in E$, e_i の両端点は p_i, p_{i+1}) とおく．

$e \in E \setminus \{e_0, \ldots, e_{k-1}\}$ に対しては $z_e = d(s,t)$ である．

$u \in V$ に対し，$l(u), r(u)$ を以下で定める：

- u が S の頂点のとき，P と $S(u)$ の共通部分 (prefix である) を $(p_0, e_0, \ldots, e_{l(u)-1}, p_{l(u)})$ とする．そうでないとき $l(u) = +\infty$ とする．

- u が T の頂点のとき，P と $T(u)$ の共通部分 (suffix である) を $(p_{r(u)}, e_{r(u)}, \dots, e_{k-1}, p_k)$ とする．そうでないとき $r(u) = -\infty$ とする．

このとき，

$$z_{e_i} = \min\{ \quad d(s,u) + w(e) + d(v,t) \quad \mid \quad e \in E \setminus \{e_i\}, \quad e \text{ の両端点は } u, v, \quad l(u) \leq i < r(v) \quad \}$$

が成り立つ．

$\leq$ **の証明.** 右辺の条件を満たす e, u, v を任意にとる．

- $l(u)$ の定め方と $l(u) \leq i$ より，$S(u)$ は e_i を含まない．
- $r(v)$ の定め方と $i < r(v)$ より，$T(v)$ は e_i を含まない．

すると，$S(u)eT(v)$ が $G - e_i$ のウォークとなり，

$$z_{e_i} \leq w(S(u)eT(v)) = d(s,u) + w(e) + d(v,t)$$

である．
$\geq$ **の証明.** $z_{e_i} = \infty$ のときはよい．そうでないとき，$G - e_i$ について補題を適用して，$G - e_i$ での s-t 最短ウォーク Q を 1 つとる．$s \neq t$ および

- Q の s までの prefix は $S(s)$ である
- Q の t からの suffix は $T(t)$ である

ということと補題の性質を合わせると，Q に含まれる辺 e であって，両端点を通る順に u, v として，

- Q の u までの prefix は $S(u)$ である
- Q の v からの suffix は $T(v)$ である

ようなものがとれる．このとき，Q が e_i を含まないことから $e \in E \setminus \{e_i\}$ および $l(u) \leq i < r(v)$ が成り立ち，

$$z_{e_i} = w(Q) = d(s,u) + w(e) + d(v,t)$$

であるからよい． ■