# Shortest Path Replacement

hos

2024 年 10 月 14 日

## 1　問題

無向・**正**重み付きグラフ $G = (V, E, w)$ ($w\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$) および $s, t \in V$ が与えられる．各 $e \in E$ に対し，$G - e$ での $s$-$t$ ウォークの重みの最小値 $z_e$ を求めたい．

重みの加算・比較が可能として，$O((|V| + |E|) \log(|V|))$ 時間 $O(|V| + |E|)$ 空間．辺重みに 0 を許す場合は 0 を $\varepsilon$ にして解く．

## 2　準備

最短と言ったら重み最小のこととする．$u, v \in V$ に対し，$G$ での $u$-$v$ 最短ウォークの重みを $d(u, v)$ と書く．

$d(s, t) = \infty$ のときは任意の $e \in E$ に対し $z_e = \infty$ である．以下 $d(s, t) < \infty$ を仮定する．

$s = t$ のときは任意の $e \in E$ に対し $z_e = 0$ である．以下 $s \neq t$ を仮定する．

- $s$ を始点とする最短路木 $S$ を 1 つとって固定する．$S$ の頂点 $u$ に対し，$S$ での $s$-$u$ 単純パスを $S(u)$ と書く．
- $t$ を終点とする最短路木 $T$ を 1 つとって固定する．$T$ の頂点 $u$ に対し，$T$ での $u$-$t$ 単純パスを $T(u)$ と書く．

**補題.** $e \in E$ とし，$G - e$ に $s$-$t$ ウォークが存在するとする．このとき，$G - e$ での $s$-$t$ 最短ウォーク $Q$ であって，$Q$ 上の任意の頂点 $u$ に対し，以下の少なくとも一方が成り立つようなものが存在する：

- $Q$ の $u$ までの prefix が $S(u)$ である
- $Q$ の $u$ からの suffix が $T(u)$ である

**証明.** 条件をいずれも満たさない頂点の個数が最小となるような $Q$ をとる．$Q$ 上のある頂点 $u$ が条件をいずれも満たさないと仮定して矛盾を導く．

- $S(u)$ が $e$ を含まないとすると，$Q$ の prefix を $S(u)$ に置き換えてより良いウォークを得られるので矛盾．
- $T(u)$ が $e$ を含まないとすると，$Q$ の suffix を $T(u)$ に置き換えてより良いウォークを得られるので矛盾．

よって $S(u), T(u)$ は $e$ を含むとしてよい．これらは最短路木の単純パスなのでそれぞれ $e$ をちょうど 1 回含む．$e$ の前後に分解して $S(u) = Q_0 e Q_1$, $T(u) = Q_2 e Q_3$ とおく．

$S(u), T(u)$ が $e$ を同じ向きに通る場合．$s$-$u$ ウォーク $Q_0\overline{Q_2}$ および $u$-$t$ ウォーク $\overline{Q_1}Q_3$ を考えることにより，

$$\begin{aligned} w(Q_0) + w(e) + w(Q_1) = d(s,u) \le w(Q_0) + w(Q_2) \\ w(Q_2) + w(e) + w(Q_3) = d(u,t) \le w(Q_1) + w(Q_3) \end{aligned}$$

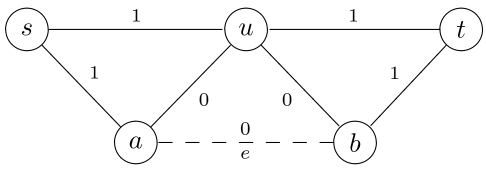
を得るが，両辺足して $w(e) \le 0$ となり矛盾．

$S(u), T(u)$ が $e$ を逆向きに通る場合，$G - e$ での $s$-$t$ ウォーク $Q_0 Q_3$ を考えると，その重みは

$$w(Q_0) + w(Q_3) < d(s,u) + d(u,t) = w(Q)$$

なので $Q$ の最短性に矛盾． ■

**注意.** 辺重みに 0 を許すと補題は成り立たない：

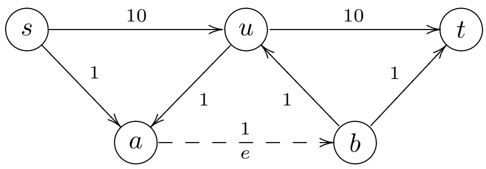



上図で，$P = sabt$ として，最短路木として

- $S$ の辺は $sa, ab, bt, bu$
- $T$ の辺は $sa, ab, bt, ua$

となるものをとると，$Q = sut, saut, subt, saubt$ のどれについても，頂点 $u$ で条件を満たさない．

有向グラフの場合も補題は成り立たない：




上図で $G - e$ での $s$-$t$ ウォークは $Q = sut$ のみだが，$d(s,u) = d(u,t) = 3$ より頂点 $u$ で条件を満たさない．

## 3 解法

$G$ での $s$-$t$ 最短単純パス $P$ を 1 つとって固定する．$P = (s = p_0, e_0, p_1, e_1, \dots, e_{k-1}, p_k = t)$ ($p_i \in V$, $e_i \in E$, $e_i$ の両端点は $p_i, p_{i+1}$) とおく．

$e \in E \setminus \{e_0, \dots, e_{k-1}\}$ に対しては $z_e = d(s,t)$ である．

$u \in V$ に対し，$l(u), r(u)$ を以下で定める：

- $u$ が $S$ の頂点のとき，$P$ と $S(u)$ の共通部分 (prefix である) を $(p_0, e_0, \dots, e_{l(u)-1}, p_{l(u)})$ とする．そうでないとき $l(u) = +\infty$ とする．

- $u$ が $T$ の頂点のとき，$P$ と $T(u)$ の共通部分 (suffix である) を $(p_{r(u)}, e_{r(u)}, \ldots, e_{k-1}, p_k)$ とする．そうでないとき $r(u) = -\infty$ とする．

このとき，

$$z_{e_i} = \min\{ \quad d(s,u) + w(e) + d(v,t) \quad \mid \quad e \in E \setminus \{e_i\}, \quad e \text{ の両端点は } u, v, \quad l(u) \leq i < r(v) \quad \}$$

が成り立つ．

$\leq$ **の証明．** 右辺の条件を満たす $e, u, v$ を任意にとる．

- $l(u)$ の定め方と $l(u) \leq i$ より，$S(u)$ は $e_i$ を含まない．
- $r(v)$ の定め方と $i < r(v)$ より，$T(v)$ は $e_i$ を含まない．

すると，$S(u)eT(v)$ が $G - e_i$ のウォークとなり，

$$z_{e_i} \leq w(S(u)eT(v)) = d(s,u) + w(e) + d(v,t)$$

である．

$\geq$ **の証明．** $z_{e_i} = \infty$ のときはよい．そうでないとき，$G - e_i$ について補題を適用して，$G - e_i$ での $s$-$t$ 最短ウォーク $Q$ を 1 つとる．$s \neq t$ および

- $Q$ の $s$ までの prefix は $S(s)$ である
- $Q$ の $t$ からの suffix は $T(t)$ である

ということと補題の性質を合わせると，$Q$ に含まれる辺 $e$ であって，両端点を通る順に $u, v$ として，

- $Q$ の $u$ までの prefix は $S(u)$ である
- $Q$ の $v$ からの suffix は $T(v)$ である

ようなものがとれる．このとき，$Q$ が $e_i$ を含まないことから $e \in E \setminus \{e_i\}$ および $l(u) \leq i < r(v)$ が成り立ち，

$$z_{e_i} = w(Q) = d(s,u) + w(e) + d(v,t)$$

であるからよい． ■