

Szakaszosan folytonos dinamikai rendszerek

Hős Csaba

2020. december 16.

Tartalomjegyzék

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1. Ismétlés: folytonos dinamikai rendszerek kvalitatív elmélete | 3 |
| 1.1. Egyensúlyi helyzet | 4 |
| 1.2. Stabilitásvesztési formák | 4 |
| 1.3. Periodikus pályák, monodrómia mátrix [Zajcsuk Lilána - nincs kész] | 5 |
| 1.4. Bifurkációk | 6 |
| 1.4.1. Folytonos dinamikai rendszerek | 6 |
| 1.4.2. Leképezések | 6 |
| 1.4.3. Szakadások osztályozása | 6 |
| 2. Filippov rendszerek [Horváth Hanna Zsófia - nincs kész] | 8 |
| 2.1. Példa: Munkahenger pozíciójának csúszómód szabályozása . . | 10 |
| 3. Korrekció a kapcsolófelületen | 14 |
| 3.1. Transzverzális metszés, hibrid dinamikai rendszer [Kádár Fanni - nincs kész] | 14 |
| 3.2. Példa | 17 |
| 3.3. Transzverzális metszés, általános eset | 18 |
| 3.4. Nem-transzverzális metszés: Grazing [Zsiros Ádám, impakt oszillátor - nincs kész] | 20 |
| 3.5. Kiinduló egyenletek | 20 |
| 3.6. Fixpont | 20 |
| 3.6.1. A "square root" leképezés | 21 |
| 4. Periodikus pályák numerikus követése | 22 |
| 4.1. Pszeudo-ív hossz módszer | 22 |
| 4.2. Periodikus pályák peremérték-megfogalmazása | 25 |
| 4.3. Pszeudo-ív hossz módszer alkalmazása periodikus pályák követéséhez | 28 |

| | | |
|--------|-------------------------------------------------------|----|
| 4.3.1. | Példa 1: tömeg-rugó rendszer | 28 |
| 4.3.2. | Példa 2: spring loaded inverted pendulum modell . . . | 29 |

1. fejezet

Ismétlés: folytonos dinamikai rendszerek kvalitatív elmélete

Tekintsük az $\dot{x} = f(x)$ dinamikai rendszert, ahol $x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ és \mathcal{D} az értelmezési tartomány. Legyen $\Phi(x, t)$ a megoldásoperátor (flow), amely az x kezdeti értéket a t -beli megoldásba viszi át:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, t) = f(\Phi(x, t)), \quad \Phi(x, 0) = x.$$

Vegyük észre, hogy amennyiben f $(r - 1)$ -szer $(r > 1)$ differenciálható, Φ egy fokkal simább.

Amennyiben a differenciálegyenlet rendszer jobb oldala explicit függene az időtől (azaz $f(x, t)$), az időt új változóként bevezetve ($x_{N+1} := t$) autonómmá tehetjük a rendszerünket az $\dot{x}_{N+1} = f_{N+1}(x, t) = 1$ egyenlet csatolásával. Ez a "piszkos trükk" azonban sokat nem fog segíteni a későbbi stabilitásvizsgálatkor, mivel ehhez az egyenlethez a Jacobi mátrixban egy olyan sor és oszlop fog tartozni, melynek csak a $\text{Jac}_{N+1, N+1} = 1$ eleme lesz nemnulla, így egy további 1-es (neutrális) sajátérték jelenik meg.

Egy *leképezésnek* a

$$x \mapsto f(x)$$

szabályt nevezzük, ahol $x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$. A szabályt m -szer alkalmazva kapjuk, hogy $\phi^m(x_0) = f^{(m)}(x_0)$. Ezeket a rendszereket szokás az ún. pókháló-diagramon ábrázolni, ahol x_{n+1} -et x_n függvényében ábrázoljuk.

Invariáns halmaznak egy olyan $\Lambda \subset \mathcal{D}$ részhalmazt nevezünk, hogy ha $x_0 \in \Lambda$ akkor $\Phi(x_0, t) \in \Lambda$ minden t -re. Például egyensúlyi helyzet, illetve

periodikus pálya, melyek természetesen lehetnek stabilak vagy instabilak.

A dinamikai rendszereink gyakran függeni fognak valamilyen paraméterektől, ezért gyakran írjuk fel ezeket $\dot{x} = f(x, \mu)$ alakban, ahol $\mu \in \mathbb{R}^p$ a paramétervektor.

1.1. Egyensúlyi helyzet

Az $\dot{x} = f(x)$ dinamikai rendszer *egyensúlyi helyzetének* a $0 = f(x^*)$ egyenletet kielégítő x^* pontot (vagy pontokat) nevezzük. Az egyensúlyi helyzet körül sorbafektve a jobboldalt kapjuk ($x := x^* + y$), hogy

$$\dot{y} := \frac{d}{dt}(x - x^*) = f(x^*) + f_x(x^*)y + O(y^2).$$

A differenciálegyenlet jobb oldalának linearizáltját *Jacobinak* nevezzük, $(f_x)_{i,j} = \partial f_i / \partial x_j$.

A Hartman-Grobman tétel értelmében egy hiperbolikus egyensúlyi helyzet közelében a dinamika *lokálisan topologikusan ekvivalens* a linearizált rendszer dinamikájával.

Az egyensúlyi helyzet típusát a Jacobi mátrix x^* -hoz tartozó sajátértékei (λ_1, λ_2) határozzák meg.

- $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ esetén x^* csomópont, amely $\lambda_{1,2} > 0$ esetén instabil, $\lambda_{1,2} < 0$ esetén stabil.
- $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ esetén x^* nyeregpon (instabilnak tekinthető).
- $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ komplex konjugált párok ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$) esetén x^* fókusz, amely a valós rész előjelétől függően lehet instabil ($\alpha > 0$) vagy stabil ($\alpha < 0$). Tisztán képzetes sajátértékek esetén centrumról beszélünk, amely mindig stabil, de nem aszimptotikus értelemben.

Az egyensúlyi helyzetet *hiperbolikusnak* nevezzük, ha a Jacobi mátrix minden sajátértéke nemnulla valós részű, vagyis csomópontról vagy nyeregpontról beszélünk. (Az elnevezés szerencsétlen, nem kell hiperbolikusnak lenniük a trajektóriáknak.)

WR: Stabilitásvesztési formák, saddle-node, Hopf

1.2. Stabilitásvesztési formák

Alapvetően két esetet különböztetünk meg kétdimenziós rendszerek esetén: nyereg-csomópont bifurkáció, illetve Hopf-bifurkáció. Előbbi esetében a Ja-

cobi mátrix legalább egy valós sajátérték válik pozitívvá, rezgések nem jelennek meg. Míg az utóbbi esetben legalább egy komplex sajátérték pár valós része lesz nagyobb, mint nulla. Ezen belül is előfordulhat lágy, illetve kemény stabilitásvesztést. Előbbi esetében a rezgések amplitúdója folytonosan növekszik a bifurkációt előidéző paraméterrel, míg utóbbinál a rezgés megjelenésénél (és eltűnésénél) az amplitúdó ugrásszerűen jelenik meg (tűnik el).

1.3. Periodikus pályák, monodrómia mátrix [Zajcsuk Lilána - nincs kész]

Tekintsük az $\dot{x} = f(x)$ dinamikai rendszer $x(t) = p(t)$ T periódusú periodikus pályáját, azaz $p(t) = p(t + T)$. A pálya közelében szeretnénk a dinamikát vizsgálni, ezért megkonstruáljuk az ún. *Poincaré metszetet*, amely egy $n - 1$ dimenziós Π felület, amely tartalmazza az $x_p = x(t^*)$ pontot és transzverzálisan metszi a pályát (= nem érinti).

Legyen a Poincaré metszetet definiáló felület: $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n : \pi(x) = 0\}$! Ekkor a transzverzális feltétele, hogy Poincaré felületre merőleges vektornak (π_x) x_p -ben legyen a trajektória irányába eső vetülete, azaz $\pi_x(x_p)f(x_p) = \langle \pi_x(x_p), f(x_p) \rangle > 0$.

A Poincaré leképezés ezek után, ha x megfelelően közel van x_p -hez, a $P(x) = \Phi(x, \tau(x))$ alakban írható, ahol $\tau(x)$ -et (a megzavart pálya periódusidejét) a $\pi(\Phi(x, \tau(x)))$ egyenlet definiálja.

A periodikus pálya stabilitását az ún. *monodrómia mátrix* kiszámításával lehet vizsgálni, melyhez az $\dot{y} = f'(p(t))y$, ahol $p(t)$ a periodikus pálya, variáció egyenlet *fundamentális megoldását* kell $t = T$ pillanatban kiszámítani, ahol T a periódusidő. A mátrix a következőképp áll össze:

$$\mathbf{M} = [\Phi_p(\mathbf{e}_1, T) \quad \Phi_p(\mathbf{e}_2, T) \quad \dots \quad \Phi_p(\mathbf{e}_n, T)]$$

ahol Φ_p a variáció egyenlet fundamentális megoldás operátora, \mathbf{e}_i az i -edik egységvektor. Az \mathbf{M} mátrix egyik sajátértéke mindig 1, ha minden további 1 alatti, akkor a periodikus pálya stabil.

Példa. Tekintsük a következő rendszert: $\dot{r} = \mu r(1 - r^2)$ és $\dot{\phi} = 1$. Észrevehető, hogy a $p(t) = \{(x, y) = (\cos t, \sin t) : t \in \mathbb{R}\}$ görbe határciklus. Ekkor a variáció egyenlet

$$f'(p(t)) = \begin{bmatrix} 1 - 3x^2 - y^2 & -1 - 2xy \\ 1 - 2xy & 1 - x^2 - 3y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\cos^2 t & -1 - 2\sin t \cos t \\ 1 - 2\sin t \cos t & -2\sin^2 t \end{bmatrix}$$

A rendszer megoldás operátorával kiértékelhető a monodrómia mátrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} e^{-4\pi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mivel $e^{-4\pi} < 1$, $p(t)$ pálya stabil.

Leképezésekre: $x^* = f^{(n)}(x^*)$ és hiperbolikus, ha a linearizált egyenlet egyik sajátértéke sem fekszik az egységkörön.

Monodrómia mátrix kiszámítása + analitikus példa

1.4. Bifurkációk

1.4.1. Folytonos dinamikai rendszerek

Tekintsük újra a parametrizált megoldást, $x(\mu)$ -t! Ez a görbe implicit alakban is meg lehet adva: $G(x, \mu) = 0$. Bifurkációnak nevezzük azt a μ_0 pontot, ahol az Implicit Függvény Tétel érvényét veszíti:

Implicit Függvény Tétel: tfh. valamilyen $\mu = \mu_0$ pontban létezik egy $x = x_0$ megoldása a (sima) $G(x, \mu) = 0$ egyenletnek, ahol $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ekkor, feltéve, hogy $G_x(x_0, \mu_0)$ nem szinguláris, létezik (lokálisan) egy sima $x(\mu)$ függvény úgy, hogy $x(\mu_0) = x_0$.

Megjegyzés: ha nem is tudom kifejezni $x(\mu)$ -t zárt alakban (pl. egységkör), elegendő bizonyítani, hogy $G_x(x_0, \mu_0)$ nem szinguláris és akkor létezik a fenti görbe.

Példák:

- $G(x, \mu) = f(x, \mu)$ - egyensúlyi helyzet bifurkációja.
- $G(x, \mu) = \max(\Re(\lambda_i))$, ez egy bifurkációs vonal (lineáris stabilitás határa).

1.4.2. Leképezések

1.4.3. Szakadások osztályozása

Legyen $x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvény és $x_0 \in \mathcal{D}$. Az f függvény folytonos az x_0 -ban, ha f -nek létezik határértéke x_0 -ban és az megegyezik a függvény helyettesítési értékével, azaz

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ha az f függvény a \mathcal{D} halmaz minden pontjában folytonos, akkor f folytonos függvény. Ha az f függvény az értelmezési tartományának valamely pontjában nem folytonos, akkor a függvénynek ott szakadási helye van.

- Az f függvénynek x_0 -ban elsőfajú szakadása van, ha x_0 -ban létezik a jobb-, illetve baloldali véges határértéke.
- Ha a jobb-, illetve baloldali véges határérték megegyezik, akkor ez a szakadás megszüntethető.
- A függvény szakadási helye másodfajú, ha nem elsőfajú.

Szakadások osztályozása

2. fejezet

Filippov rendszerek [Horváth Hanna Zsófia - nincs kész]

CsB: Formázás, azt hiszem kész azt az egy ábrát kivéve

Tekintsük a

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x), & \text{ha } H(x) > 0 \\ F_2(x), & \text{ha } H(x) < 0 \end{cases}$$

dinamikai rendszert. Feltesszük, hogy $F_1|_{H(x)=0} \neq F_2|_{H(x)=0}$, azaz a két vektormező különböző szögben éri el a $\Sigma = \{x : H(x) = 0\}$ úgynevezett, *kapcsolófelületet* (*discontinuity surface* vagy *switching manifold*). Kapcsolófelületre mutat példát a 2.1. ábra.

Továbbá bevezetjük

$$H_x = \nabla H = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1} \quad \frac{\partial H}{\partial x_2} \quad \dots \right)^T \quad (2.1)$$

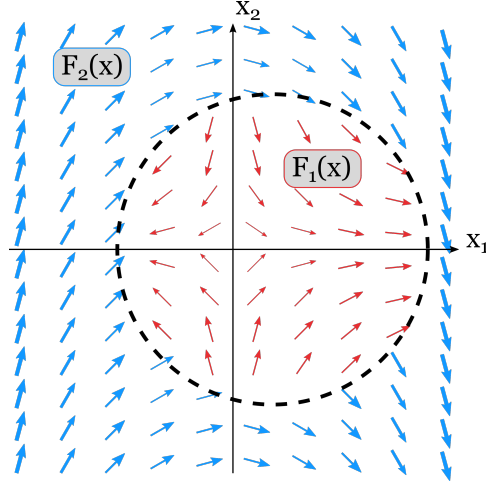
gradienst, amely F_1 növekedésének irányába mutat és merőleges a felületre.

Csúszófelületnek (sliding region) nevezzük a Σ kapcsolófelület azon részhalmazát, melyre $\langle F_1, H_x \rangle < 0$ és $\langle F_2, H_x \rangle > 0$ skalárszorzat teljesül. Ezen felületet Σ_s -ként jelöljük, ahol s index a *sliding*-ra utal. A csúszófelületen a két dinamikai rendszerhez tartozó trajektóriák csúszófelületre merőleges komponensei egymás felé, azaz befelé mutatnak.

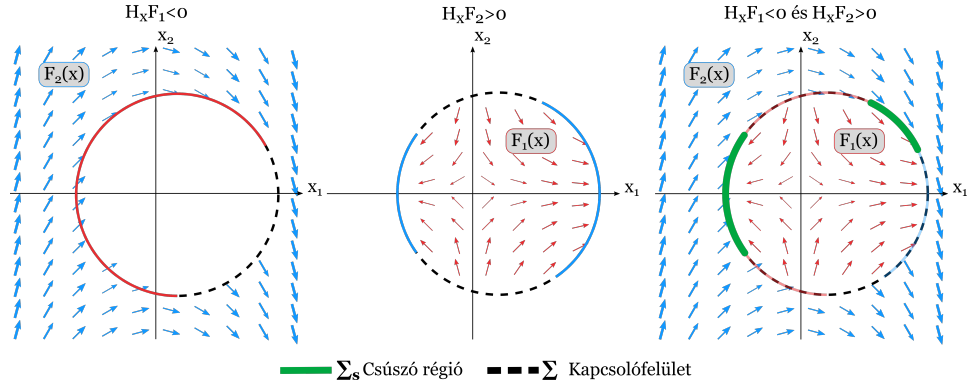
A csúszófelületen uralkodó dinamikát az

$$F_s = F_1(1 - \alpha) + F_2\alpha \quad (2.2)$$

egyenlet írja le. Vagyis lineárisan interpolálunk a két vektormező között oly módon, hogy α -t úgy adjuk meg, hogy $F_s \perp H_x$ teljesüljön. Ez akkor lesz



2.1. ábra. Példa kapcsolófelületre (jelen esetben egy kör), amely elválasztja a két dinamikát egymástól.



2.2. ábra. Példa csúszófelületre.

igaz, ha F_s és H_x skaláris szorzata zérus:

$$\langle F_s, H_x \rangle = 0, \quad (2.3)$$

tehát

$$\langle F_s, H_x \rangle = \langle F_1, H_x \rangle (1 - \alpha) + \langle F_2, H_x \rangle \alpha = 0, \quad (2.4)$$

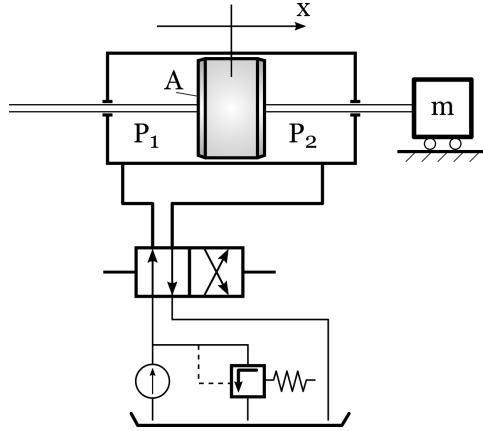
melyből kifejezhető α értéke a következőképpen:

$$\alpha = \frac{\langle F_1, H_x \rangle}{\langle F_1 - F_2, H_x \rangle}. \quad (2.5)$$

Jellemzően a \sum_s csúszófelületen a dinamika nagyon egyszerű és exponenciálisan tart(hat) az egyensúlyi helyzet felé (ha van ilyen). Ezt hívjuk *csúszómód szabályozásnak* (*sliding mode control*).

2.1. Példa: Munkahenger pozíciójának csúszómód szabályozása

Tekintsük a 2.3. ábrán látható elrendezést. A hidraulikus tápegység (nyomásforrás) valamekkora $\Delta\tilde{p}$ nyomást tud kiadni. A hengervezérlő szelep állásától függően a hidraulikus munkahengerbe $+\Delta\tilde{p}$ vagy $-\Delta\tilde{p}$ nyomás kerül. Ennek hatására a hengerfej jobbra vagy balra mozdul el. Célunk, hogy a munkahengert x_k kívánt pozícióba juttassuk a munkahenger csúszómód szabályozása által. Ehhez rendelkezésünkre áll egy PD szabályozó.



2.3. ábra. Munkahenger szabályozása.

A dugattyú mozgását az alábbi másodrendű differenciálegyenlettel írhatjuk le:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} = A\Delta p, \quad (2.6)$$

ahol

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \begin{cases} +\Delta\tilde{p}, & \text{ha } H(x) > 0 \\ -\Delta\tilde{p}, & \text{ha } H(x) < 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

valamint $\Delta\tilde{p} = \text{konst.}$

A szabályozás során a munkahengert az $x_k = 0$ pozícióba kívánjuk mozgatni. Ehhez a $H(x)$ függvényt egy PD szabályozási stratégia alapján írjuk elő:

$$H(x) = -P(x - x_k) - D\dot{x} = -Px - D\dot{x}, \quad (2.8)$$

ahol az arányos és differenciálós tagok pozitívak: $P > 0$ és $D > 0$. A dinamikai rendszert az

$$\dot{x} = (x_1 \ x_2)^T = (x \ v)^T \quad (2.9)$$

változó bevezetésével elsőrendű alakra hozzuk. Ekkor a két vektormező a következő alakú:

$$F_1(x) = \left(\frac{A\Delta\tilde{p}}{m} x_2 - \frac{k}{m} x_2 \right), \quad F_2(x) = \left(-\frac{A\Delta\tilde{p}}{m} x_2 - \frac{k}{m} x_2 \right). \quad (2.10)$$

Mivel $\dot{x} = v = x_2$, a $H(x)$ által meghatározott kapcsolóvonal egyenlete a (2.8) egyenlet alapján

$$\Sigma = \left\{ x : x_2 = -\frac{P}{D} x_1 \right\}, \quad (2.11)$$

a kapcsolóvonalra merőleges irányt kijelölő H_x gradiens pedig

$$H_x = \begin{pmatrix} -P \\ -D \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

A kapcsolóvonal Σ_s csúszó régiója a

$$\langle F_1, H_x \rangle = -Px_2 - \frac{DA\Delta\tilde{p}}{m} + \frac{Dk}{m} x_2 < 0, \quad (2.13)$$

valamint az

$$\langle F_2, H_x \rangle = -Px_2 + \frac{DA\Delta\tilde{p}}{m} + \frac{Dk}{m} x_2 > 0 \quad (2.14)$$

egyenlőtlenségek által adott. Ezekből a csúszó régió:

$$\Sigma_s = \{x : -x_2^* < x_2 < x_2^*\}, \quad (2.15)$$

ahol

$$x_2^* = \frac{DA\Delta\tilde{p}}{|Dk - Pm|}. \quad (2.16)$$

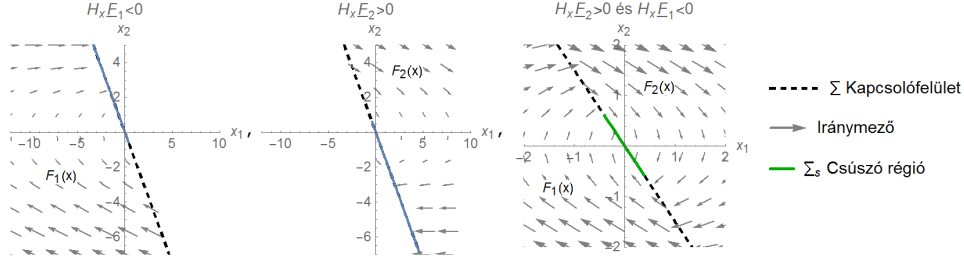
CsB: fancy diagram

A Σ_s -en érvényes dinamikát a korábban leírt

$$F_s = F_1(1 - \alpha) + F_2\alpha \quad (2.17)$$

vektormező határozza meg, ahol

$$\alpha = \frac{\langle F_1, H_x \rangle}{\langle F_1 - F_2, H_x \rangle} = \frac{-Px_2 - D\left(\frac{A\Delta\tilde{p}}{m} - \frac{k}{m}x_2\right)}{-D\frac{2A\Delta\tilde{p}}{m}}. \quad (2.18)$$



2.4. ábra. Munkahenger csúszómód szabályozása.

Ezt F_s -be visszahelyettesítve, a kapcsolóvonalra megszorított dinamika

$$\begin{aligned} F_s &= F_1(1 - \alpha) + F_2\alpha = F_1 + \alpha(F_2 - F_1) = \\ &= \left(\frac{A\Delta\tilde{p}}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_2 \right) + \alpha \left(\frac{0}{- \frac{2A\Delta\tilde{p}}{m}} \right) = \left(\frac{x_2}{- \frac{P}{D}} \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

vagyis

$$\dot{x}_1|_{\Sigma_s} = x_2, \quad \dot{x}_2|_{\Sigma_s} = -\frac{P}{D}x_2. \quad (2.20)$$

Megjegyzés: F_s második komponensét a Σ kapcsolóvonal egyenletének idő szerinti deriválásával is meg lehet kapni.

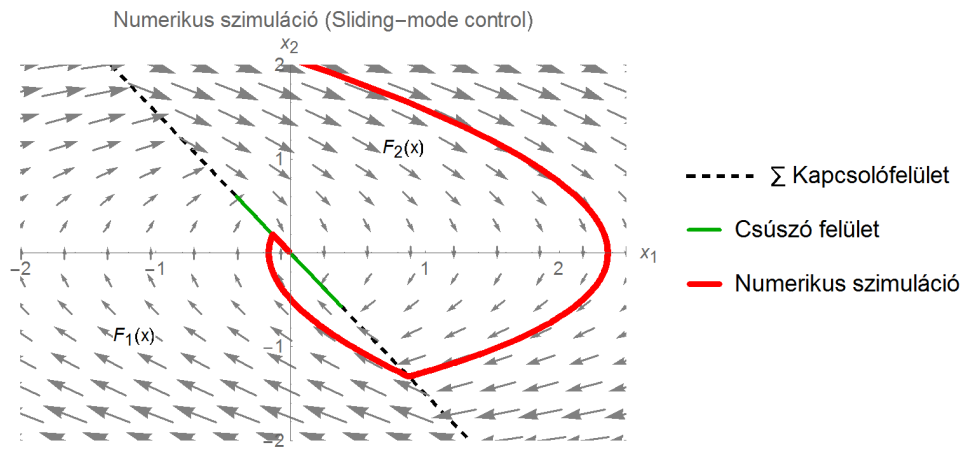
A kapcsolóvonalra megszorított dinamika egy exponenciálisan csillapodó sebességű mozgást ír le, és a rendszer a kapcsolóvonalon tart a $(0 \ 0)^T$ egyensúlyi helyzethez. A P/D hányados növelésével a beállítás gyorsasága növelhető, hiszen ekkor a csúszó megoldás egyre gyorsabban tart az origóhoz. Viszont annak érdekében, hogy a sliding mode lehetséges legyen, a (2.16) egyenletben leírt x_2^* kifejezésnek pozitívnak kell lennie, így adódik, hogy

$$\frac{DA\Delta\tilde{p}}{|Dk - Pm|} > 0, \quad (2.21)$$

ami akkor teljesül, ha

$$\frac{P}{D}m < k, \quad (2.22)$$

amiből látszik, hogy a viszkózus csillapítás nem lehet akármekkora. A csúszómód terület csökken, ha P/D nő, akár el is tűnhet.



2.5. ábra. A csúszómód szabályozás által eredményezett trajektória

3. fejezet

Korrekció a kapcsolófelületen

3.1. Transzverzális metszés, hibrid dinamikai rendszer [Kádár Fanni - nincs kész]

formázás + képletek ellenőrzése

(Könyv 2.5.1)

Tekintsük az alábbi hibrid dinamikai rendszert:

$$\dot{x} = F(x), \quad (3.1)$$

melynek fundamentális megoldása $\Phi(x, t)$ és

$$x \mapsto R(x), \quad (3.2)$$

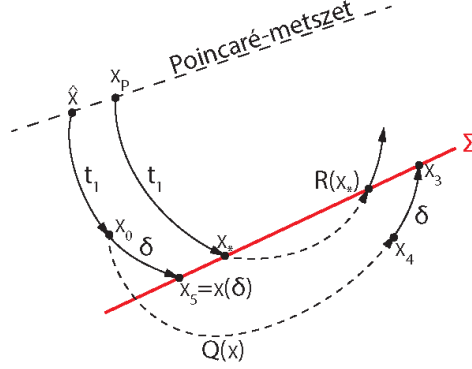
leképezés a $\Sigma := \{x, H(x) = 0\}$ -n. Kérdés: hogyan számítsuk ki egy olyan periodikus pálya stabilitását, mely "ütközik"?

Jelölje (lásd ábra):

- $x^* = \Phi(x_p, t_1)$, ahol x_p a periodikus pálya egy pontja
- $x_0 = \Phi(\hat{x}, t_1)$, ahol \hat{x} a perturbált pálya egy x_p melletti pontja
- $x_3 = R(\Phi(\hat{x}, t_1 + \delta))$

Keressük azt a $Q(x)$ leképezést, melyre teljesül, hogy

$$x_4 = Q(x_0),$$



3.1. ábra. Periodikus pálya a kapcsolóvonal közelében.

ahol

$$x_4 = \Phi(x_3, -\delta) = \Phi(\underbrace{R(\Phi(x_0, \delta))}_{x_5}, -\delta).$$

Másképp fogalmazva, melyik az a leképezés, amely \hat{x} -ből indítva t_1 -ig (és *nem* $t_1 + \delta$ -ig) integrálva olyan pontba visz, hogy onnan újabb δ -ig integrálva a helyes x_3 pontba érkezünk? Másképp fogalmazva meghatározandó az a $Q(x)$ leképezés, amely x_0 pont $x_4 = Q(x_0)$ képéből indulva δ ideig integrálva ugyanúgy x_3 -ba visz, mintha x_5 pontban alkalmaztuk volna az $R(x)$ leképezést.

Tehát meg kell konstruálnunk a $x_0 \mapsto Q(x_0) = x_4$ leképezést. A megoldást x_0 körül, kis δ értékekre sorbafejtve kapjuk, hogy:

$$x_5 = x(\delta) = \Phi(x_0, \delta)|_{t=0} = x_0 + \delta F(x_0) + \mathcal{O}(\delta^2). \quad (3.3)$$

Legyen $x_0 = x^* + \Delta x$, ezt behelyettesítve a fenti egyenletbe kapjuk, hogy

$$x(\delta) = x^* + \Delta x + \underbrace{\delta F(x^* + \Delta x)}_{F|_{\Delta x=0} = F(x^*) + \underbrace{\Delta x \cdot \underbrace{\quad}_{\delta \Delta x \approx 0}}} + \mathcal{O}(\delta^2) = x^* + \Delta x + \delta F(x^*) + \mathcal{O}(\delta^2, \delta \Delta x, \Delta x^2) \quad (3.4)$$

Másrésről, mivel $x_5 = x(\delta)$ rajta van a kapcsolófelületen:

$$0 = H(x(\delta)) = H(x^* + \Delta x + \delta F(x^*) + \mathcal{O}(\delta^2, \delta \Delta x, \Delta x^2)), \quad (3.5)$$

valamint $H(x)$ sorfejtése x^* körül

$$H(x)|_{x=x^*} = \underbrace{H(x^*)}_{=0} + H_x(x^*)(x - x^*) + \mathcal{O}(\|x - x^*\|^2), \quad (3.6)$$

tehát:

$$O = H_x(x^*)(\Delta x + \delta F(x^*)) + \mathcal{O}(2). \quad (3.7)$$

Így δ -ra adódik, hogy:

$$\delta = -\frac{H_x(x^*)\Delta x}{H_x(x^*)F(x^*)} + \mathcal{O}(2), \quad (3.8)$$

amely azt jelenti, hogy a kapcsolófelület $H_x(x)$ gradiensét kell kiértékelni x^* helyen ahhoz, hogy becslést tudjunk adni a szükséges korrekcióra. A becslés hibája $\mathcal{O}(2)$, így a kapcsolófelület ferdeségét figyelembe véve becsülhető a δ idő, amely alatt a zavart \hat{x} pontból indított megoldás t_1 idő elteltét követően elérte volna a kapcsolófelületet.

Továbbá:

$$x_3 = R(x(\delta)) = R(x^* + \Delta x + \delta F(x^*) + \mathcal{O}(2)), \quad (3.9)$$

$$x_4 = \Phi(x_3, -\delta)|_{t=0} = x_3 - \delta F(x_3) + \mathcal{O}(\delta^2), \quad (3.10)$$

$$x_4 = \Phi(x_3, -\delta)|_{t=0} = x_3 - \delta F(x_3) + \mathcal{O}(\delta^2), \quad (3.11)$$

$$(3.12)$$

amiből az x_4 az x^* körül:

$$\begin{aligned} x_4|_{x^*} &= \underbrace{R(x^*) + R_x(x^*)}_{x_3} \overbrace{(\Delta x + \delta F(x^*))}^{-x^* + x(\delta)} - \delta F(\underbrace{R(x^* + \Delta x + \delta F(x^*))}_{x_3}) + \mathcal{O}(2) = \\ &= R(x^*) + R_x(x^*)\Delta x + \delta[R_x(x^*)F(x^*) - F(R(x^*))] + \mathcal{O}(2). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Mivel $\Delta x = x_0 - x^*$ a keresett $x_0 \mapsto Q(x_0) = x_4$ leképezés, ezért

$$Q(x_0)|_{x^*} = R(x^*) + R_x(x^*)\Delta x - \frac{H_x(x^*)\Delta x}{H_x(x^*)F(x^*)}(R_x(x^*)F(x^*) - F(R(x^*))), \quad (3.14)$$

ahol az x_0 aktuális helye függ az \hat{x} -től, tehát a perturbáció mértékétől, így Δx szintén a zavarástól függ. Q_x leképezés szintén linearizálható x^* körül, amely x_0 helyen:

$$Q(x_0)|_{x^*} = R(x^*) + Q_x(x^*)\Delta x. \quad (3.15)$$

Ebból a 3.15 egyenletben szereplő $Q_x(x^*)$ mátrix meghatározható Δx együtt-hatóinak kigyűjtésével 3.14 egyenletből:

$$Q_x(x^*) = R_x(x^*) + \frac{F(R(x^*)) - R_x(x^*)F(x^*)}{H_x(x^*)F(x^*)} H_x(x^*). \quad (3.16)$$

3.2. Példa

Vegyük a következő folytonos rendszert:

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - 2\xi x_2 + \cos(\omega t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix},$$

továbbá a kapcsolóvonal $H(x) = x_1 - \delta$, vagyis $x_1 = \delta$ -nál fal van, így $R(x) = (x_1, -rx_2, x_3)^T$, melynek x szerinti deriváltja

$$R_x(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Megj.: δ a levezetések során egy időtartamot jelölt, a feladatbeli jelentése egy távolság.)

A becsapódás normál sebessége: $v = H_x(x^*)F(x^*) = x_2^*$, továbbá jelölje a^- és a^+ az ütközés előtti és utáni pillanatbeli értékeket, vagyis $a^- = -x_1^* - 2\xi x_2^* + \cos(\omega t)$ és $a^+ = -x_1^* + 2\xi r x_2^* + \cos(\omega t)$.

$$\begin{aligned} \text{Ezekkel: } Q_x &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_x(x^*)} + \underbrace{\frac{1}{v}}_{\frac{1}{H_x(x^*)F(x^*)}} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} -rv \\ a^+ \\ 1 \end{pmatrix}}_{F(R(x^*))} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_x(x^*)} \underbrace{\begin{pmatrix} v \\ a^- \\ 1 \end{pmatrix}}_{F(x^*)} \right) \underbrace{(1 \ 0 \ 0)}_{H_x(x^*)} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{v} \begin{pmatrix} -rv - v \\ a^+ + ra^- \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{v} \begin{pmatrix} -rv - v & 0 & 0 \\ a^+ + ra^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & 0 & 0 \\ \frac{a^+ + ra^-}{v} & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Megj.: A skalár gradiensét (pl. most: $H_x(x)$) sorvektorként értelmezzük, ami egybevág azzal, hogy a Jacobi mátrix sorai is a vektor adott elemének mint skalárnak a gradiensét tartalmazzák)

3.3. Transzverzális metszés, általános eset

Korrekción a kapcsolósíkon

Általános eset definíciója:

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x), & \text{ha } H(x) > 0 \\ F_2(x), & \text{ha } H(x) < 0, \end{cases}$$

ahol $x \rightarrow R(x)$, ha $H(x) = 0$.

Továbbá $R(x)$ -nek nem kötelező a kapcsolósíkra leképeznie (lásd 3.2. ábra).

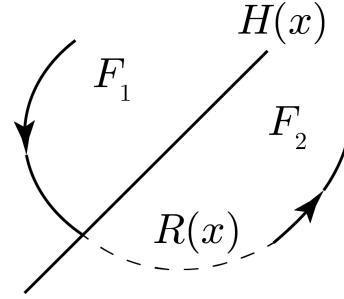
A $Q(x)$ korrekciós leképezés alatt a következő érthető: (lásd 3.3. ábra) $\Sigma = \{x, H(x) = 0\}$,

$$x^* = \Phi_1(x_p, t),$$

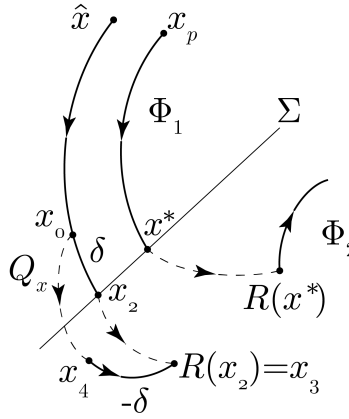
$$x_0 = \Phi_1(\hat{x}, t_1) \rightarrow x_2 = \Phi_1(x_0, \delta),$$

$$x_4 = \Phi_2(x_3, -\delta),$$

$$x_0 \rightarrow x_4 = Q(x_0) = \Phi_2(\underbrace{R(\Phi_1(x_0, \delta))}_{x_3}, -\delta)$$



3.2. ábra. $R(x)$ nem kapcsolósíkra képez le.



3.3. ábra. Korrekció származtatása ha $R(x)$ nem kapcsolósíkra képez le.

$Q(x)$ linearizáltjára adódik, hogy:

$$Q_x(x^*) = R_x(x^*) + \frac{(F_2(R(x^*))) - R_x(x^*)F_1(x^*)H_x(x^*)}{H_x(x^*)F_1(x^*)} \quad (3.17)$$

és $H_x(x^*)F_1(x^*) \neq 0$ transzverzális metszés.

Példa 1.) Filippov rendszer csúszás nélkül, azaz $F_1|_\Sigma \neq F_2|_\Sigma$, valamint $R(x) = x$, azaz önmagába leképezés.

Ilyenkor:

$$Q_x = I + \frac{(F_2 - F_1)H_x}{H_x F_1}, \text{ mert } R(x) = I.$$

Példa 2.) Ütközéses dinamikai rendszer, ahol $F_1 = F_2 = F$. Így $Q(x)$:

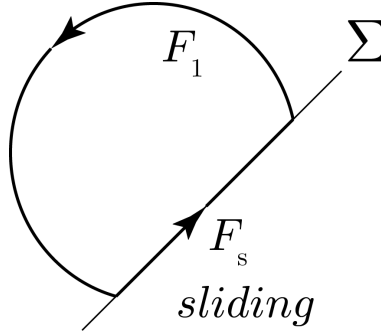
$$Q_x(x^*) = R_x(x^*) + \frac{(F(R(x^*)) - R_x(x^*)F(x^*))H_x(x^*)}{H_x(x^*)F(x^*)}$$

Példa 3.) Filippov rendszer csúszással, azaz

$$F_s = F_{12} = (1 - \alpha)F_1 + \alpha F_2, \text{ és } \alpha = \frac{H_x F_1}{H_x(F_1 - F_2)}.$$

Ekkor

$$Q_x = F + \frac{(F_{12} - F_1)H_x}{H_x F_1}$$



3.4. ábra. Filippov rendszer csúszással

3.4. Nem-transzverzális metszés: Grazing [Zsiros Ádám, impakt oscillátor - nincs kész]

(Könyv 6.1 fejezet)

3.5. Kiinduló egyenletek

Legyen $\dot{x} = F(x)$ egy dinamikai rendszer, melyet az $S^+ = \{x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n : H(x) > 0\}$, mely a $\Sigma := \{x \in \mathcal{D} : H(x) = 0\}$ felületen ütközik az $x^+ = R(x^-)$ leképezés általi kijelölt módon. Az ütközés pillanatában a kapcsolófületre merőleges sebességet és a gyorsulást a

$$v(x) = H_x F(x) \quad \text{és} \quad a(x) = (H_{xx} + H_x F_x) F(x)$$

összefüggések segítségével számíthatjuk ki. Amennyiben egy x^* pontban igaz, hogy $H(x^*) = 0$, $v(x^*)$ és $a(x^*) > 0$, *reguláris* grazing pontról beszélünk.

Belátható, hogy a grazing-bifurkáció környezetében a $p(t)$ periodikus pálya körüli dinamikát az alábbi linearizált Poincaré-leképezés írja le (ld. könyv 193 – 198.o. ill. 6. fejezet)

$$P_N(x, \mu) = \begin{cases} Nx + M\mu + Ey, & \text{ha } H(x, \mu) < 0 \\ Nx + M\mu, & \text{ha } H(x, \mu) > 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

ahol $N = \partial_x \tilde{P}_N(x^*, \mu^*)$ és $M = \partial_\mu \tilde{P}_N(x^*, \mu^*)$ és

$$y = \sqrt{-C^T N x - (C^T M + D)\mu} + O(x, \mu) = \sqrt{-H(x, \mu)} + O(x, \mu) \quad (3.19)$$

és E egy további (bonyolult) függvény és C ill. D a $H(x)$ linearizálása, azaz

$$H(x)|_{x^*} = C^T(\tilde{x} - x^*) + D(\tilde{\mu} - \mu^*) = C^T(Nx + M\mu) + D\mu. \quad (3.20)$$

A fenti rendszert hívjuk Nordmark leképezésnek.

3.6. Fixpont

A fenti rendszer fixpontja

$$x_e = (I - N)^{-1} M\mu, \quad (3.21)$$

és ha bevezetjük a $z = x - x_e$ új koordinátát, akkor a

$$z \mapsto f(z) = \begin{cases} Nz + E\sqrt{\sigma - C^T Nz}, & \text{ha } C^T Nz < \sigma \\ Nz, & \text{ha } C^T Nz > \sigma \end{cases} \quad (3.22)$$

rendszert kapjuk, ahol azt, hogy z képe ütközik-e vagy nem, a $H = H(x^*, \mu) + C^T Nz$ előjele dönti el, ahol $\sigma = -H(x^*, \mu)$.

3.6.1. A "square root" leképezés

A fenti rendszer tovább egyszerűsíthető. Mivel egy lineáris leképezésről van szó, az iterációk viselkedését a ν_1 legnagyobb sajátérték fogja megadni és formálisan elegendő a

$$w \mapsto f(w) = \begin{cases} \nu w + \sqrt{\mu - w}, & \text{ha } w - \mu < 0 \\ \nu w, & \text{ha } w - \mu > 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

leképezést vizsgálni. 189. oldal!

4. fejezet

Periodikus pályák numerikus követése

Dinamikai rendszerek vizsgálatánál kíváncsiak vagyunk a rendszer viselkedésére különböző paraméterkombinációk esetében is. A paraméterek hatásának vizsgálatára többféle módszer is rendelkezésünkre áll, mint például a paraméterléptetés vagy a pszeudo-ívhossz módszer. Paraméterléptetés esetén a bifurkációs paraméter értékét kis mértékben megváltoztatjuk, ekkor jól megfogalmazott probléma esetén a megoldás is kis mértékben fog változni, és ezt a változást követjük lépésről-lépésre. Pszeudo-ívhossz módszernél a bifurkációs paraméter és a periodikus pálya periódusidejének összefüggését keressük oly módon, hogy a problémát egy "szintvonal" keresésre vezettjük vissza. A fejezetben ez utóbbival fogunk részletesebben foglalkozni.

4.1. Pszeudo-ívhossz módszer

A pszeudo-ívhossz módszer esetében a soron következő megoldást az előző megoldástól \mathbf{v} irányba keressük, ahol \mathbf{v} egy implicit egyenlet $F(\mathbf{x}) = 0$ szintvonalának érintőjével párhuzamos egységghosszú vektor:

$$\begin{cases} 0 = \langle \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i \rangle - \Delta s \\ 0 = F(\mathbf{x}_{i+1}), \end{cases} \quad (4.1)$$

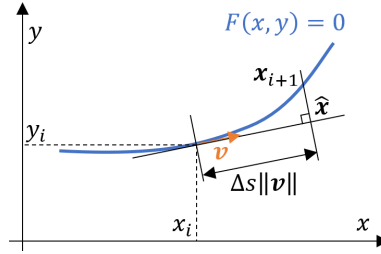
$$\mathbf{x}_i = [x_i \quad y_i]^T, \quad (4.2)$$

és Δs a lépés ívhossza. Az első egyenlet a merőlegességi feltétel, a második magának a keresett szintvonalnak az egyenlete. A módszer egy iterációs

lépésének szemléltetése a 4.1. ábrán látható. A merőlegességi feltétel az alábbi módon vezethető le:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_i + \Delta s \mathbf{v}_i, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_{i+1} - \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v}_i \rangle &= \langle \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i - \Delta s \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = \\ \langle \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i \rangle - \Delta s \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle &= \langle \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i \rangle - \Delta s. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (4.4)$$



4.1. ábra. A pszeudo-ív hossz módszer egy iterációs lépésének szemléltetése

A módszer alkalmazása során a (4.1) egyenletrendszer szimultán kell megoldani \mathbf{x}_{i+1} -re - két egyenlet, két ismeretlen. A módszer általánosítható több dimenzióra is, ekkor több $F_j(\mathbf{x})$ egyenletre van szükségünk.

Egy **példa** a módszer alkalmazására az egység sugarú kör körívének követése. Akkor az implicit függvényünk az alábbi:

$$F(\mathbf{x}) = x^2 + y^2 - 1. \quad (4.5)$$

A kezdő pontunk legyen

$$\mathbf{x}_0 = [1 \ 0]^T, \quad (4.6)$$

amely, mint látható kielégíti az implicit egyenletünket. A sebességvektor, azaz az érintő ebben a pontban

$$\mathbf{v}_0 = [0 \ 1]^T. \quad (4.7)$$

Azonban az esetek többségében ez nem ilyen egyszerűen meghatározható, és numerikusan kell közelítenünk, amihez ismernünk kell a szintvonal egy másik, közeli pontját is, $\mathbf{x}_{1/2}$ -et:

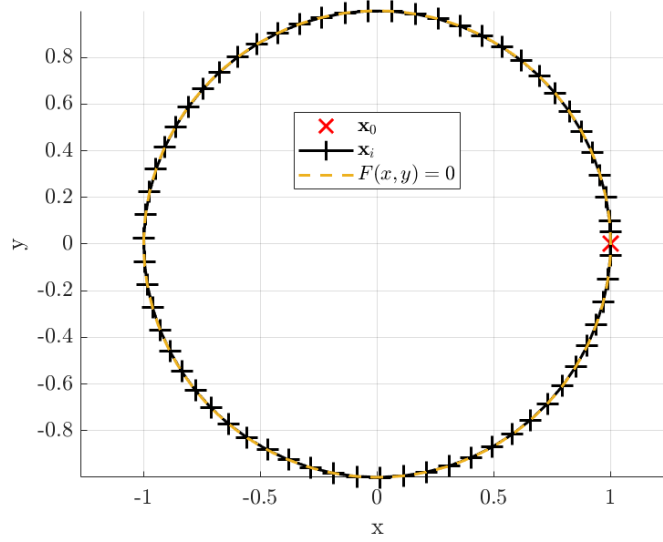
$$\mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{x}_{1/2} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_{1/2} - \mathbf{x}_0\|}. \quad (4.8)$$

A sebességvektor ezek után rendre:

$$\mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}\|}. \quad (4.9)$$

A körív követésének eredménye a pszeudo-ívhossz módszerrel a 4.2. ábrán látható. A lépéshossz $\Delta s = 0.1$ volt, a kezdeti sebességbecsléshez az \mathbf{x}_0 közeli szintvonal pont pedig

$$\mathbf{x}_{1/2} = [0.99 \quad \sqrt{1 - 0.99^2}]^T. \quad (4.10)$$



4.2. ábra. A pszeudo-ívhossz módszer alkalmazása körív követésére

Megjegyzés: pontosabb sebességvektort kapunk az iteráció során, ha a megoldáskor $\mathbf{x}_{i+1/2}$ -re is alkalmazzuk a pszeudo-ívhossz módszert, ekkor a sebességvektor általánosan így írható fel:

$$\mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{x}_{i+1/2} - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_{i+1/2} - \mathbf{x}_i\|}. \quad (4.11)$$

A (4.1) egyenlet indexelése az alábbi módon adható meg erre a problémára:

$$\begin{cases} 0 = \langle \mathbf{x}_{i+3/2} - \mathbf{x}_{i+1/2}, \mathbf{v}_i \rangle - \Delta s \\ 0 = F(\mathbf{x}_{i+3/2}), \end{cases} \quad (4.12)$$

Ez a feladat egy négyváltozós nemlineáris gyökkeresési probléma az eredeti kétváltozós helyett.

4.2. Periodikus pályák peremérték-megfogalmazása

Dinamikai rendszerek mozgásegyenleteinek megoldásakor kezdeti értéket szoktunk megadni. Amennyiben a rendszer periódikus mozgást végez, a probléma átírható egy peremérték feladatra, ahol a peremfeltételt a periódus elejére és végére kell előírni. Belátható ugyanis, hogy periódikus mozgásnál az állapotváltozóknak t_0 és $t_0 + T$ időpontokban meg kell egyezniük, ahol T a periódusidő. Dinamikai rendszerek mozgásegyenleteit Cauchy átírással általánosan az alábbi módon lehet megadni:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{z}(t)), \quad (4.13)$$

ahol $\mathbf{z}(t)$ az állapotváltozók, $\mathbf{q}(t)$ pedig az általános koordináták vektora:

$$\mathbf{z}(t) = [\mathbf{q}(t) \quad \dot{\mathbf{q}}(t)]^T. \quad (4.14)$$

Periódikus mozgás esetén (autonóm rendszernél t_0 szabadon megválasztható, így vegyük zérusnak) igaz a következő

$$\mathbf{z}_p(0) = \mathbf{z}_p(T). \quad (4.15)$$

Vezessük be τ dimenziótlan időt az alábbi módon:

$$\tau = t/T. \quad (4.16)$$

Ekkor a (4.13) egyenlet formája és a peremérték feladat a következő lesz

$$\begin{cases} \mathbf{z}'(\tau) = T\mathbf{F}(\mathbf{z}(\tau)), \\ \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}(1). \end{cases} \quad (4.17)$$

Megjegyzés: amennyiben a rendszerünk szakaszosan folytonos a (4.17)-es problémát ki kell egészíteni:

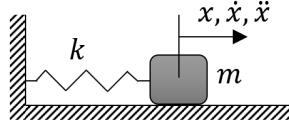
$$\begin{cases} \mathbf{z}'(\tau_1) = T_1\mathbf{F}_1(\mathbf{z}(\tau_1)), \quad H(\mathbf{z}(\tau_1)) > 0, \\ \mathbf{z}'(\tau_2) = T_2\mathbf{F}_2(\mathbf{z}(\tau_2)), \quad H(\mathbf{z}(\tau_2)) < 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{z}_1(1) = \mathbf{z}_2(0), \\ \mathbf{z}_2(1) = \mathbf{z}_1(0), \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\begin{cases} H(\mathbf{z}_1(1)) = 0, \\ H(\mathbf{z}_2(1)) = 0, \end{cases}$$

ahol $H(\mathbf{z}(\tau))$ a kapcsolófelület. Ütköző rendszer esetében figyelembe kell venni a peremfeltételek felírásánál az ütközéskor létrejövő leképezést.

Nézzük meg egy egyszerű **példa** peremérték-megfogalmazásának implementálását MATLAB környezetben! Peremérték feladatok megoldására a bvp beépített megoldókat lehet használni, esetünkben a bvp5c-vel fogunk dolgozni. A mechanikai rendszerünk a 4.3. ábrán látható.



4.3. ábra. Periódikus mozgást végző tömeg-rugó rendszer

A mozgásegyenlete a fenti rendszernek jól ismert:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} x. \quad (4.19)$$

Mint tudjuk, a rendszer mozgását leíró függvényt az alábbi módon lehet felírni, amennyiben x_0 kezdeti kitérítésünk van csak τ_0 -ban kezdeti sebesség nélkül:

$$\varphi(\tau) = x_0 \cos\left(\tau\sqrt{k/m} T\right) = x_0 \cos(2\pi \tau), \quad (4.20)$$

$$\dot{\varphi}(\tau) = -x_0\sqrt{k/m} \sin\left(\tau\sqrt{k/m} T\right) = -x_0\sqrt{k/m} \sin(2\pi \tau), \quad (4.21)$$

ahol T a rendszer sajátfrekvenciájának inverze

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}. \quad (4.22)$$

A fenti függvényeket a peremérték-megfogalmazáskor kijöttekkel fogjuk összevetni.

A bvp5c megoldóhoz először definiálnunk kell egy időrácsot, amely időpontokban meg kell becsülnünk majd a keresett függvények értékét. Mivel áttértünk dimenziótlan időre, egy periódus "peremei" a $\tau \in \{0, 1\}$ pontok, valamint megjelent a Cauchy átírásnál T periódusidő, mint ismeretlen paraméter.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(\tau) \\ \dot{y}(\tau) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} y(\tau) \\ -\frac{k}{m} x(\tau) \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

A módszer a rácsháló első és utolsó pontjára fogja alkalmazni a peremfeltételeket. Jó kezdeti függvénybecslés a megoldó megfelelő működéséhez az egyik legfontosabb kritérium, ehhez minnél több információt össze kell

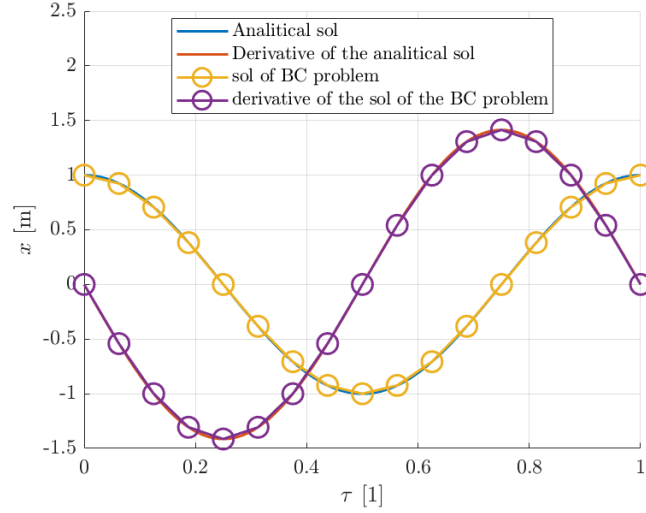
gyűjteni a vizsgált rendszer viselkedéséről. A kezdeti függvénybecslésnek teljesítenie kell a peremfeltételeket, melyeknek rajta kell lenniük a periódikus pályán. Az ismeretlen paraméter(ek)re is szükséges kezdeti becslést adni! A peremfeltételeket megadó vektor (kódban `res`) dimenziója megegyezik a mozgásegyenlet (kódban `dydx`) és a paramétereket tartalmazó vektor (kódban `par`) dimenziójának összegével.

```

1  global k m x0
2  k = 10;
3  m = 5;
4  x0 = 1;
5  taumesh = linspace(0,1,5);
6  par = 2*pi;
7  solinit = bvpinit(taumesh, @bvp_initial_guess, par);
8  sol = bvp5c(@bvp_fun, @bvp_bcs, solinit);
9
10 function g = bvp_initial_guess(x)
11 global x0
12 g = x0*[cos(2*pi*x); -2*pi*sin(2*pi*x)];
13 end
14
15 function dydx = bvp_fun(x,y,par)
16 global k m
17 dydx = par*[y(2); -k*y(1)/m];
18 end
19
20 function res = bvp_bcs(ya,yb,par)
21 global x0
22 res = [ya(1) - x0
23        yb(1) - x0
24        ya(2)];
25 end

```

A módszer által kiszámolt T értéke megegyezik az analitikusan kiszámított periódusidővel. A tömegpont pozíciója és sebessége a 4.4. ábrán látható.



4.4. ábra. Tömeg-rugó rendszer peremérték-megfogalmazásának bvp5c megoldóval kiszámított eredményeinek összevetése az analitikus megoldással

4.3. Pszeudo-ív hossz módszer alkalmazása periodikus pályák követéséhez

Ebben az alfejezetben két példát nézünk meg, ahol a pszeudo-ív hossz módszert periodikus pályák követésére használjuk. Ehhez ki kell választanunk majd egy bifurkációs paramétert, amely függvényében kíváncsiak vagyunk, hogyan alakul a periodikus mozgás. Az első feladat során az előbb vizsgált tömeg-rugó rendszerrel foglalkozunk, a másodikban egy szakaszosan folytonos rendszert, a spring loaded inverted pendulum (SLIP) modellt vizsgáljuk, amely az emberi futás leírásának egy elterjedten használt modellje.

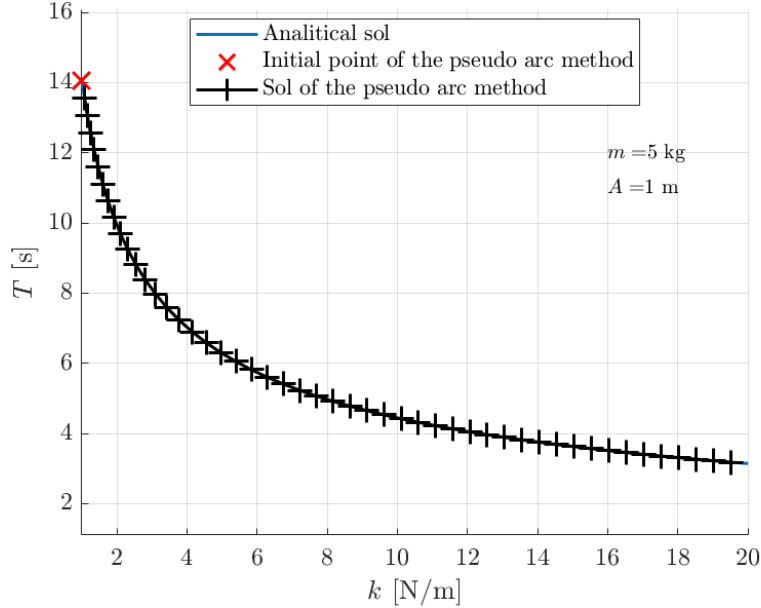
4.3.1. Példa 1: tömeg-rugó rendszer

A pszeudo-ív hossz módszer használatához ki kell választanunk egy bifurkációs paramétert, amit jelöljön μ . A példa során először vizsgáljuk a rugómerevség ($\mu = k$), később a tömeg ($\mu = m$) hatását (ilyenkor a többi paraméter konstans). A (4.1) egyenlet alakja paraméterkövetés során az alábbi formájú:

$$\begin{cases} 0 = \langle \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i \rangle - \Delta s \\ 0 = T_{i+1} - T_{\text{BVP}}(\mu_{i+1}), \end{cases} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{x}_i = [\mu_i \quad T_i]^T, \quad (4.25)$$

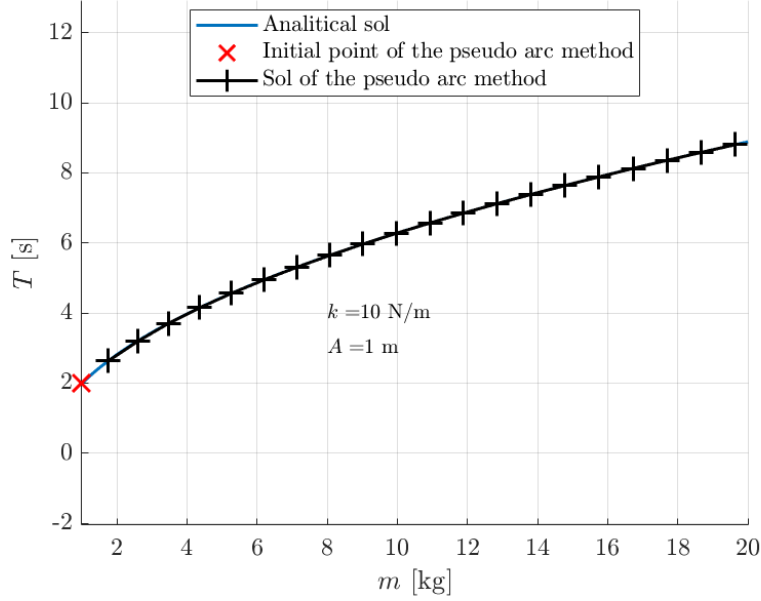
ahol $T_{\text{BVP}}(\mu_{i+1})$ a peremfeladat megoldó által számolt periódusidő. A pszeudo-ívhossz módszert a 4.1 alfejezetben bemutatott módon kell alkalmazni, és a benne található $T_{\text{BVP}}(\mu_{i+1})$ értékét a 4.2 alfejezetben leírt módon kell meghatározni a (4.24) egyenletrendszer megoldása közben. A kapott eredményeket összevetettük az analitikusan kiszámítottakkal, és látható, hogy a pályakövetés illeszkedik az analitikusan előállított görbékre, ld. 4.5. és 4.6. ábrák.



4.5. ábra. Periódikus pályák követése k paraméter függvényében, $\Delta s = 0.5$

4.3.2. Példa 2: spring loaded inverted pendulum modell

A spring loaded inverted pendulum (SLIP) modell a 4.7. ábrán látható. A rendszer egy tömegpontból és egy tömeg nélküli rugóból áll, ami α szögben kapcsolódik a tömegponthoz. A SLIP modell az emberi futás modellezéséhez használt egyszerű mechanikai modell, ugyanis periódikus mozgásra képes, mely mozgás két fázisra, a támasz és repülő fázisokra tagolódik, így a rendszer szakaszosan, de C^2 folytonos.



4.6. ábra. Periódikus pályák követése m paraméter függvényében, $\Delta s = 1$

A rendszer mozgásegyenlete a támaszfázisban (mivel az x ciklikus koordináta, a rugó megfogott végét önkényesen mindig az origóba helyezzük), és az állapotváltozók az alábbiak:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \kappa (l_0 - l(t)) x(t)/l(t), \\ \ddot{y} = \kappa (l_0 - l(t)) y(t)/l(t) - g, \end{cases} \quad (4.26)$$

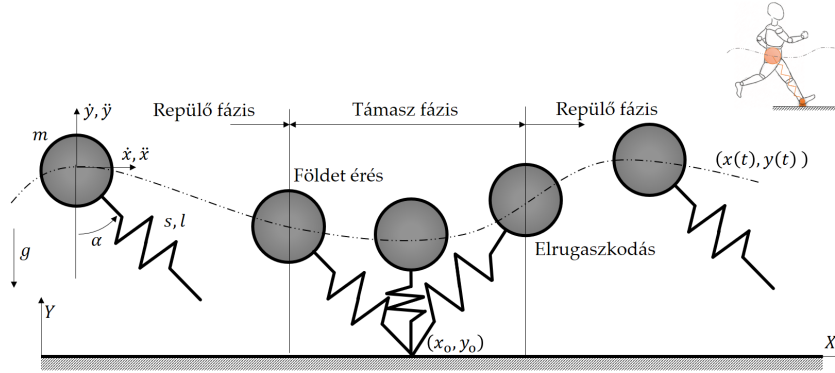
$$\mathbf{z}(t) = [x(t) \quad y(t) \quad \dot{x}(t) \quad \dot{y}(t)]^T, \quad (4.27)$$

$$l(t) = \sqrt{(-x(t))^2 + y(t)^2}, \quad (4.28)$$

A repülő fázisban is a fenti mozgásegyenlet érvényes, csupán a $\kappa = s/m = 0$ helyettesítést kell alkalmazni. A fázishatárokat megadó eseményfüggvények a támasz-repülő fázishatáron, illetve a repülő-támasz fázishatáron az alábbiak, ahol az 1-es index a támaszfázis, a 2-es a repülőre vonatkozik:

$$\begin{aligned} H_{12}(\mathbf{z}) &= l_0 - l(t), \\ H_{21}(\mathbf{z}) &= y(t) - l_0 \cos(\alpha). \end{aligned} \quad (4.29)$$

A peremfeladat megoldásához a mozgásegyenleteket át kell írni dimenziótlan időre, külön kell dimenziótlanítani a támaszfázis mozgásegyenleteit



4.7. ábra. spring loaded inverted pendulum (SLIP) mechanikai modell

$\tau_1 = t/T_1$ dimenziótlan idővel felírva, és külön a repülőfázisét $\tau_2 = t/T_2$ -vel.

$$\begin{cases} \mathbf{z}'(\tau_1) = T_1 \mathbf{F}_1(\mathbf{z}(\tau_1)), & H_{12}(\mathbf{z}(\tau_1)) > 0, \\ \mathbf{z}'(\tau_2) = T_2 \mathbf{F}_2(\mathbf{z}(\tau_2)), & H_{21}(\mathbf{z}(\tau_2)) > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{z}_1(1) = \mathbf{z}_2(0), \\ \mathbf{z}_2(1) = \mathbf{z}_1(0), \end{cases} \quad (4.30)$$

$$\begin{cases} H_{12}(\mathbf{z}_1(1)) = 0, \\ H_{21}(\mathbf{z}_2(1)) = 0 \end{cases}$$

A (4.24) egyenletben a $T_{\text{BVP}}(\mu_{i+1}) = T_{\text{BVP},1}(\mu_{i+1}) + T_{\text{BVP},2}(\mu_{i+1})$ helyettesítést kell alkalmazni a fenti peremfeladat megoldása után.

A feladatot a támaszfázis elejéről indítjuk, és itt $y_1(0) = l_0 \cos(\alpha)$ ismert, valamint $x(\tau)$ ciklikus koordináta, így ennek a kezdeti értéke nem befolyásolja a mozgás minőségét - amennyiben a repülőfázisból vagy fázishatárokról indítjuk a rendszert. Mivel a rendszer konzervatív a mechanikai összenergiát paraméternek választva a sebességkomponensek kifejezhetők egymásból a támaszfázis elején, mi a $\dot{x}_1(0)$ -t vesszük most független változónak. A rendszer mozgását tehát adott paraméterkombinációnál egy változó fogja befolyásolni a támaszfázis bal oldali peremén. A támaszfázis-repülőfázis átmenetnél is meg kell határoznunk a perem értékét a bvp5c alkalmazásához, mivel a peremértékeknek rajta kell lenniük a periódikus pályán. Az alábbi kód mutatja a peremfeladat megoldását, ahol a kezdeti próbafüggvények a $\dot{x}_1(0) = 5.1149$ m/s kezdeti értékű periódikus pályához

vannak felírva, ahol a paraméterek értéke $l_0 = 1$ m, $\kappa = 112.5$ N/(m kg), $\alpha = 0.5708$ rad, $E = 21.5$ N/kg. A globális paraméterek értékhozzárendelését nem mutatja a kód, azokat az értékeket egy .m fájlból olvassuk be, amelyben a periódikus pálya állapotváltozóit és paramétereit tároljuk, vagy a pszeudó-ívhossz módszer alkalmazásánál az alábbi egyenlet zérushelyének megtalálásával számíthatjuk őket:

$$f(\dot{x}_1(0)) = \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(1) = 0, \quad (4.31)$$

mivel $\dot{x}_1(0)$ meghatározza a mozgást, és ahol $\dot{x}_1(0)$ függ a μ bifurkációsparaméter értékétől.

```

1 global kappa alpha l0 g E
2 global x10 x20 y10 y20 xdot10 xdot20 ydot10 ydot20
3 global x11 x21 y11 y21 xdot11 xdot21 ydot11 ydot21
4 global A_y0 A_xdot0 A_y1
5 taumesh = linspace(0,1,5);
6 sol = bvp5c(@bvp_fun, @bvp_bcs, solinit);
7 sol.parameters
8
9 function G = bvp_initial_guess(t)
10 global x11 x21 y11 xdot10 ydot11 ydot21
11 global l0 g alpha_f E_f
12 global A_y0 A_xdot0 A_y1
13 x10 = -l0*sin(alpha_f);
14 y10 = l0*cos(alpha_f);
15 ydot10 = -sqrt(2*(E_f - g*y10) - xdot10^2);
16 dpi = asin(y10 - y11);
17 if dpi < pi/2
18     dpi = pi - dpi;
19 end
20 C = 2*pi - acos(ydot11*sqrt(2)/2/ydot10) + pi/4;
21 G = [x10 + t*(x11 - x10)
22     y10 - A_y0*sin(dpi*t)
23     xdot10 + A_xdot0*cos(2*pi*t) - A_xdot0
24     ydot10*2/sqrt(2)*cos(C*t-pi/4)
25     x11 + t*(x21 - x11)
26     y11 + A_y1*sin(t*pi)
27     xdot10 + 0*t
28     ydot11 + t*(ydot21 - ydot11)];
29 end

```

```

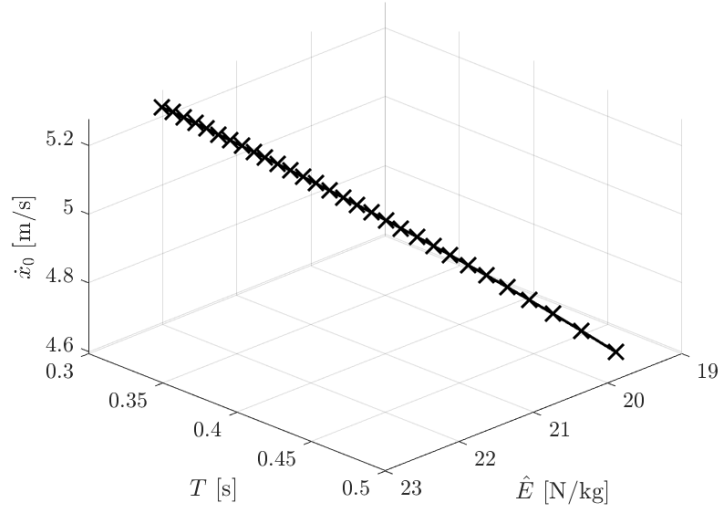
30
31 function dydx = bvp_fun(t,Y,par)
32 global kappa alpha g l0 x10
33 lambda = sqrt((x10 + 10*sin(alpha) - Y(1))^2 + (Y(2))
34             ^2)/10;
35 dydx = [par(1)*Y(3)
36         par(1)*Y(4)
37         par(1)*( (kappa/lambda - kappa)*(Y(1) - (x10 + 10*
38                 sin(alpha))))
39         par(1)*( (kappa/lambda - kappa)*Y(2) - g )
40         par(2)*Y(7)
41         par(2)*Y(8)
42         par(2)*0
43         -par(2)*g];
44 end
45
46 function res = bvp_bcs(ya,yb,par)
47 global l0 alpha x21 E g
48 res = [yb(5) - x21
49       ya(2) - yb(6)
50       ya(3) - yb(7)
51       ya(4) - yb(8)
52       ya(5) - yb(1)
53       ya(6) - yb(2)
54       ya(7) - yb(3)
55       ya(8) - yb(4)
56       l0 - sqrt((ya(1) + 10*sin(alpha) - yb(1))^2 + (yb
57               (2))^2)
58       yb(6) - 10*cos(alpha)];
59 end

```

A globális $A_{y0} = 0.06$, $A_{x\dot{0}} = 0.2$, $A_{y1} = 0.016$ paraméterek kézzel vannak beállítva a fenti rendszer próbafüggvényéhez, és a pszeudó-ív hossz módszer alkalmazása során minden új pontban automatikusan módosulnak, hogy minnél jobban simuljanak a legutóbb kiszámított rendszer állapotváltozóira. Így nem csak a peremértékek követik a pálya változását a próbafüggvényekben, hanem a köztes pontok is közelebb lesznek az új görbékhez. Feltételezzük, hogy a változás a pálya képében folyamatos a paraméterek változásával.

A rendszer paraméterei a κ , α , l_0 és E , melyek közül tekintsük az l_0 -t fixen egységnyinek. A másik három paramétert egyenként fogjuk bi-

furkációs paraméterként kezelni. A pszeudó-ív hossz módszer által megvalósított pályakövetés eredményei a 4.8., 4.9. és 4.10. ábrákon láthatók.



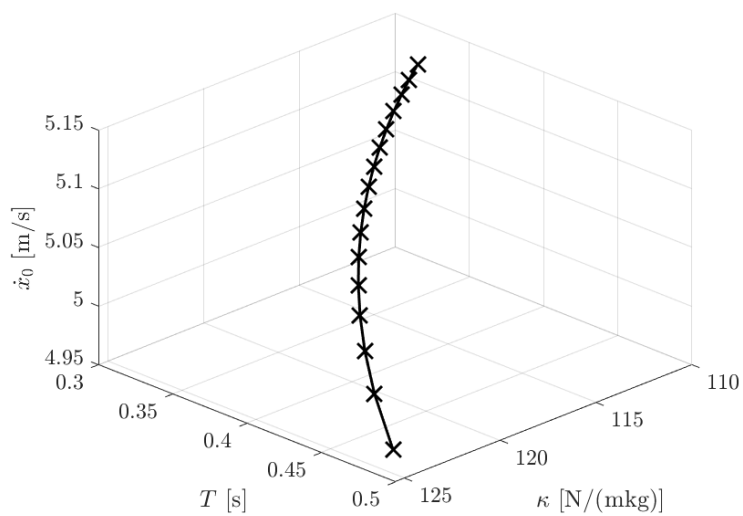
4.8. ábra. Pszeudó-ív hossz módszer pályakövetése, $\mu = E$

Megjegyzés: A (4.24) egyenletrendszer kipótolható egy harmadik egyenlettel, ami vonatkozhat a monodrómia mátrix sajátértékére; például kereshetjük azt a görbét, ami a stabilitáshatárt mondja meg, azaz amikor a nem triviális sajátérték $\lambda = 1$.

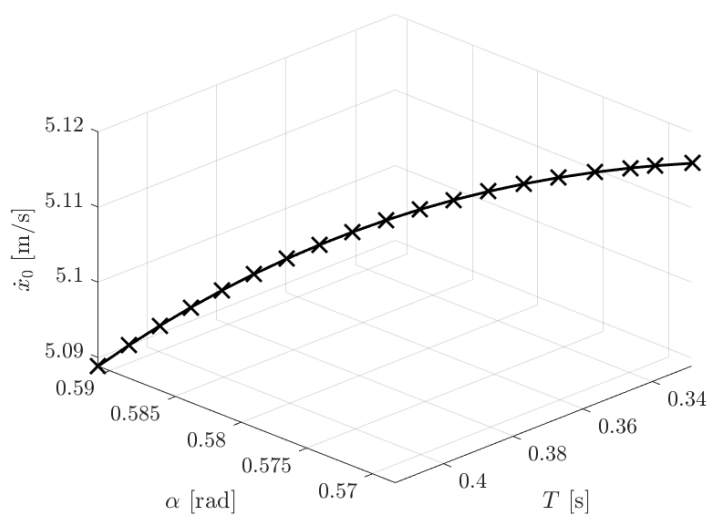
$$\begin{cases} 0 = \langle \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i \rangle - \Delta s, \\ 0 = T_{i+1} - T_{\text{BVP}}(\mu_{i+1}), \\ 0 = 1 - \lambda, \end{cases} \quad (4.32)$$

$$\mathbf{x}_i = [\mu_i \quad T_i \quad \lambda_i]^T, \quad (4.33)$$

Ekkor a mechanikai összeenergia már nem tekinthető paraméternek.



4.9. ábra. Pszeudó-ív hossz módszer pályakövetése, $\mu = \kappa$



4.10. ábra. Pszeudó-ív hossz módszer pályakövetése, $\mu = \alpha$