

Szakaszosan folytonos dinamikai rendszerek

Hős Csaba

2024. szeptember 23.

Tartalomjegyzék

1. Ismétlés: folytonos dinamikai rendszerek kvalitatív elmélete	3
1.1. Egyensúlyi helyzet	4
1.2. Stabilitásvesztési formák	4
1.3. Periodikus pályák, monodrómia mátrix	5
1.4. Bifurkációk	8
1.4.1. Folytonos dinamikai rendszerek	8
1.4.2. Leképezések	8
1.4.3. Szakadások osztályozása	8
2. Filippov rendszerek	10
2.1. Példa: Munkahenger pozíciójának csúszómód szabályozása . .	12
3. Korrekció a kapcsolófelületen	16
3.1. Transzverzális metszés, hibrid dinamikai rendszer	16
3.2. Példa	19
3.3. Transzverzális metszés, általános eset	19
4. Periodikus pályák numerikus követése	22
4.1. Pszeudo-ív hossz módszer	22
4.2. Periodikus pályák peremérték-megfogalmazása	25
4.3. Pszeudo-ív hossz módszer alkalmazása periodikus pályák kö- vetéséhez	27
4.3.1. Példa 1: tömeg-rugó rendszer	28
4.3.2. Példa 2: spring loaded inverted pendulum modell . . .	29

Bevezetés

Ez a jegyzet a BME Pattantyús-Ábrahám Géza Gépészeti Tudományok Doktori Iskola (DI) "Szakaszosan folytonos dinamikai rendszerek" tárgy anyagát tartalmazza. A jegyzet M. di Bernardo, C.J. Budd, A.R. Champneys és P. Kowalczyk "Piecewise-smooth Dynamical Systems" c. könyvének (Applied Mathematical Sciences Volume 163, Springer) válogatott fejezeteire épül.

Jelen jegyzetnek nem célja a terület alapos, átfogó, matematikai szempontból minden igényt kielégítő mélységű tárgyalása, sokkal inkább "étvágygerjesztő" és "ugródeszka"; a bemutatott módszereket a PhD hallgatók saját igényük és szükségük szerint, a szakirodalom felhasználásával tovább mélyíthetik.

Ezúton köszönöm a tárgyat eddig felvett hallgatóknak a személyes segítségét a jegyzet elkészítésében, különösen a BME Gépészmérnöki Kar Műszaki Mechanikai Tanszékének PhD hallgatóinak – többek között Horváth Hanna Zsófia (2. fejezet), Kádár Fanni (3. fejezet), Patkó Dóra (4. fejezet), Zsíros Ádám (?? fejezet) – akik éveken keresztül azt a kritikus tömeget adták, mely lehetővé tette a tárgy indítását és így engem is rákényszerítettek arra, hogy rendezett formába rendezzem az anyagot.

Budapest, 2024. szeptember 23.

Hős Csaba

1. fejezet

Ismétlés: folytonos dinamikai rendszerek kvalitatív elmélete

Tekintsük az $\dot{x} = f(x)$ dinamikai rendszert, ahol $x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ és \mathcal{D} az értelmezési tartomány. Legyen $\Phi(x, t)$ a megoldásoperátor (flow), amely az x kezdeti értéket a t -beli megoldásba viszi át:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, t) = f(\Phi(x, t)), \quad \Phi(x, 0) = x.$$

Vegyük észre, hogy amennyiben f $(r - 1)$ -szer $(r > 1)$ differenciálható, Φ egy fokkal simább.

Amennyiben a differenciálegyenlet rendszer jobb oldala explicit függene az időtől (azaz $f(x, t)$), az időt új változóként bevezetve $(x_{N+1} := t)$ autonómmá tehetjük a rendszerünket az $\dot{x}_{N+1} = f_{N+1}(x, t) = 1$ egyenlet csatolásával. Ez a "piszkos trükk" azonban sokat nem fog segíteni a későbbi stabilitásvizsgálatkor, mivel ehhez az egyenlethez a Jacobi mátrixban egy olyan sor és oszlop fog tartozni, melynek csak a $\text{Jac}_{N+1, N+1} = 1$ eleme lesz nemnulla, így egy további 1-es (neutrális) sajátérték jelenik meg.

Egy *leképezésnek* a

$$x \mapsto f(x)$$

szabályt nevezzük, ahol $x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$. A szabályt m -szer alkalmazva kapjuk, hogy $\phi^m(x_0) = f^{(m)}(x_0)$. Ezeket a rendszereket szokás az ún. pókháló-diagramon ábrázolni, ahol x_{n+1} -et x_n függvényében ábrázoljuk.

Invariáns halmaznak egy olyan $\Lambda \subset \mathcal{D}$ részhalmazt nevezünk, hogy ha $x_0 \in \Lambda$ akkor $\Phi(x_0, t) \in \Lambda$ minden t -re. Például egyensúlyi helyzet, illetve periodikus pálya, melyek természetesen lehetnek stabilak vagy instabilak.

A dinamikai rendszereink gyakran függeni fognak valamilyen paraméterektől, ezért gyakran írjuk fel ezeket $\dot{x} = f(x, \mu)$ alakban, ahol $\mu \in \mathbb{R}^p$ a paramétervektor.

1.1. Egyensúlyi helyzet

Az $\dot{x} = f(x)$ dinamikai rendszer *egyensúlyi helyzetének* a $0 = f(x^*)$ egyenletet kielégítő x^* pontot (vagy pontokat) nevezzük. Az egyensúlyi helyzet körül sorba fejtvé a jobboldalt kapjuk ($x := x^* + y$), hogy

$$\dot{y} := \frac{d}{dt}(x - x^*) = f(x^*) + f_x(x^*)y + O(y^2).$$

A differenciálegyenlet jobb oldalának linearizáltját *Jacobinak* nevezzük, $(f_x)_{i,j} = \partial f_i / \partial x_j$.

A Hartman-Grobman tétel értelmében egy hiperbolikus egyensúlyi helyzet közelében a dinamika *lokálisan topologikusan ekvivalens* a linearizált rendszer dinamikájával.

Az egyensúlyi helyzet típusát a Jacobi mátrix x^* -hoz tartozó sajátértékei (λ_1, λ_2) határozzák meg.

- $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ esetén x^* csomópont, amely $\lambda_{1,2} > 0$ esetén instabil, $\lambda_{1,2} < 0$ esetén stabil.
- $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ esetén x^* nyeregpont (instabilnak tekinthető).
- $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ komplex konjugált párok ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$) esetén x^* fókusz, amely a valós rész előjelétől függően lehet instabil ($\alpha > 0$) vagy stabil ($\alpha < 0$). Tisztán képzetes sajátértékek esetén centrumról beszélünk, amely mindig stabil, de nem aszimptotikus értelemben.

Az egyensúlyi helyzetet *hiperbolikusnak* nevezzük, ha a Jacobi mátrix minden sajátértéke nemnulla valós részű, vagyis csomópontról vagy nyeregpontról beszélünk. (Az elnevezés szerencsétlen, nem kell hiperbolikusnak lenniük a trajektóriáknak.)

1.2. Stabilitásvesztési formák

Alapvetően két esetet különböztetünk meg kétdimenziós rendszerek esetén: nyereg-csomópont bifurkáció, illetve Hopf-bifurkáció. Előbbi esetében a Jacobi mátrix legalább egy valós sajátérték válik pozitívvá, rezgések nem jelennek meg. Míg az utóbbi esetben legalább egy komplex sajátérték pár valós része

lesz nagyobb, mint nulla. Ezen belül is előfordulhat lágy, illetve kemény stabilitásvesztést. Előbbi esetében a rezgések amplitúdója folytonosan növekszik a bifurkációt előidéző paraméterrel, míg utóbbinál a rezgés megjelenésénél (és eltűnésénél) az amplitúdó ugrásszerűen jelenik meg (tűnik el).

1.3. Periodikus pályák, monodrómia mátrix

Tekintsük az $\dot{x} = f(x)$ dinamikai rendszer $x(t) = p(t)$ T periódusú periodikus pályáját, azaz $p(t) = p(t+T)$. A pálya közelében szeretnénk a dinamikát vizsgálni, ezért megkonstruáljuk az ún. *Poincaré metszetet*, amely egy $n-1$ dimenziós Π felület, amely tartalmazza az $x_p = x(t^*)$ pontot és transzverzálisan metszi a pályát (= nem érinti).

Legyen a Poincaré metszetet definiáló felület: $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n : \pi(x) = 0\}$! Ekkor a transzverzálitás feltétele, hogy Poincaré felületre merőleges vektornak (π_x) x_p -ben legyen a trajektória irányába eső vetülete, azaz $\pi_x(x_p)f(x_p) = \langle \pi_x(x_p), f(x_p) \rangle \neq 0$.

A Poincaré leképezés ezek után, ha x megfelelően közel van x_p -hez, a $P(x) = \Phi(x, \tau(x))$ alakban írható, ahol $\tau(x)$ -et (a megzavart pálya periódusidejét) a $\pi(\Phi(x, \tau(x)))$ egyenlet definiálja.

A periodikus pálya stabilitását az ún. *monodrómia mátrix* kiszámításával lehet vizsgálni. Vizsgáljuk a

$$\dot{x} = A(t)x \quad (1.1)$$

dinamikai rendszert, melyben $A(t)$ periodikus T periódussal. Legyen $X(t)$ (1.1) fundamentális megoldás mátrixa, azaz n darab lineárisan független megoldásból képzett mátrix. Ekkor létezik olyan olyan *konstans* C mátrix, melyre $X(t+T) = X(t)C$. Továbbá, ennek kiszámítása egyszerű, hiszen $t=0$ -ban $X(T) = X(0)C$, tehát $C = X^{-1}(0)X(T)$. Továbbá, ha $X(0) = I$, akkor $C = X(T)$. A C mátrixot gyakran *monodrómia mátrix*-nak nevezzük.

Így az eredeti $\dot{x} = f(x)$ dinamikai rendszer $p(t)$ periodikus pályája körül linearizálva kapjuk az $\dot{y} = f'(p(t))y$ variációs egyenletet, melynek a *fundamentális megoldását* kell $t=T$ pillanatban kiszámítani, ahol T a periódusidő. Ezt legegyszerűbben úgy tehetjük meg, ha speciális kezdeti feltételekből numerikusan integráljuk az egyenletet:

$$\mathbf{M} = [\Phi_p(\mathbf{e}_1, T) \quad \Phi_p(\mathbf{e}_2, T) \quad \dots \quad \Phi_p(\mathbf{e}_n, T)]$$

ahol Φ_p a variáció egyenlet fundamentális megoldás operátora, \mathbf{e}_i az i -edik egységvektor. Az \mathbf{M} mátrix egyik sajátértéke mindig 1, ha minden további 1 alatti, akkor a periodikus pálya stabil.

A fundamentális megoldás mátrix írható $\Phi(t+T) = \Phi(t)B$ alakban is, ahol

$$\det(B) = \exp \left(\int_0^T \text{tr}(A(s)) ds \right). \quad (1.2)$$

Példa. Tekintsük a következő rendszert: $\dot{r} = r(1 - r^2)$ és $\dot{\phi} = 1$. Észrevehetők, hogy a $p(t) = \{(r, \phi) = (1, 1)\}$ görbe határciklus, vagy, az (x, y) koordináta-rendszerben $p(t) = \{(x, y) = (\cos t, \sin t) : t \in \mathbb{R}\}$.

A sugárra felírt egyenlet linearizáltja a "pálya" körül: $\dot{r} = 1 - 3r^2|_{r=1} = -2$, így a megoldás stabil. Ez a számítás azonban egyensúlyi helyzetként határozza meg a pályát.

A pálya vizsgálatához térjünk át derékszögű koordináta rendszerre!

$$x = r \cos \phi \quad \rightarrow \quad \dot{x} = \dot{r} \cos \phi - r \sin \phi \dot{\phi} = x(1 - x^2 - y^2) - y \quad (1.3)$$

$$y = r \sin \phi \quad \rightarrow \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \phi + r \cos \phi \dot{\phi} = y(1 - x^2 - y^2) + x \quad (1.4)$$

Itt kihasználtuk, hogy pl. $\dot{r} \cos \phi = r \cos \phi(1 - r^2) = x(1 - (x^2 + y^2))$ ill. $\dot{\phi} = 1$. A fenti dinamikai rendszer általános linearizáltja és annak periódikus pálya közelében vett alakja:

$$f'(p(t)) = \begin{pmatrix} 1 - 3x^2 - y^2 & -1 - 2xy \\ 1 - 2xy & 1 - x^2 - 3y^2 \end{pmatrix} \Big|_{p(t)} = \begin{pmatrix} -2 \cos^2 t & -1 - \sin 2t \\ 1 - \sin 2t & -2 \sin^2 t \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Így a perturbációs egyenlet

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 1 - 2 \cos^2 t & -1 - \sin 2t \\ 1 - \sin 2t & 1 - 2 \sin^2 t \end{pmatrix} z \quad (1.6)$$

A monodrómia mátrix determinánsát analitikusan is ki tudjuk számítani:

$$\det(B) = \exp \left(\int_0^T \text{tr}(A(s)) ds \right) = \exp \left(\int_0^T -2 \cos^2 t - 2 \sin^2 t ds \right) \quad (1.7)$$

$$= \exp \left(\int_0^T -2 ds \right) = e^{-4\pi} < 1. \quad (1.8)$$

A determináns természetesen a sajátértékek (karakterisztikus multiplikátorok) szorzata, ám (periodikus pályáról lévén szó) az egyik sajátérték biztosan 1, mivel pedig itt kétdimenziós rendszerről van szó, a második pontosan a

fenti eredmény. A monodrómia mártixot numerikus kiszámítva kapjuk, hogy valóban,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} e^{-4\pi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Mivel $e^{-4\pi} < 1$, $p(t)$ pálya stabil. Az alábbi Matlab kód pontosan ezt a számítást végzi el. A program futásának eredménye: `eig(M) =+3.471e-06, 9.998e-01; exp(-4*pi)=+3.487e-06.`

```

1 function Monodromia_mx_pelda
2 clear all, clc
3
4 [t,x1]=ode45(@linode,[0 2*pi],[1 0]);
5 [t,x2]=ode45(@linode,[0 2*pi],[0 1]);
6 M=[x1(end,:) x2(end,:)]';
7 e=eigs(M);
8 fprintf('\n eig(M)      =%+5.3e, %+5.3e',e(2),e(1));
9 fprintf('\n exp(-4*pi)=%+5.3e\n',exp(-4*pi));
10 end
11
12 function dxdt=linode(t,x)
13 xp=cos(t); yp=sin(t);
14 Ap=[1-3*xp^2-yp^2, -1-2*xp*yp;
15     1-2*xp*yp, 1-xp^2-3*yp^2];
16 dxdt=Ap*[x(1);x(2)];
17 end

```

Példa¹. Tekintsük a következő rendszert:

$$\dot{x} = A(t)x = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 + \cos t - \frac{\sin t}{2 + \cos t} \end{pmatrix} x. \quad (1.10)$$

(Ebben az esetben *nem* egy autonóm rendszer periódikus pályája körüli linearizált rendszert vizsgálunk, hanem egy általános lineáris rendszert periódikus együtthatómátrixszal: $A(t) = A(t + 2\pi)$.) A rendszer megoldása:

$$x_1(t) = c_2 e^{t+\sin t} + c_3 e^{-t} \quad (1.11)$$

$$x_2(t) = c_2 e^{t+\sin t} (2 + \cos t). \quad (1.12)$$

Legyen $c_2 = c_3 = 1$, ekkor a fundamentális mátrix:

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{t+\sin t} & e^{-t} \\ e^{t+\sin t} (2 + \cos t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

¹E. Folkers: Floquet's Theorem, Bachelor's Project Mathematics, University of Groningen

mivel az általános megoldás $x(t) = c_2 X_1(t) + c_3 X_2(t)$ alakban írható, ahol X_i a fundamentális mátrix i -edik sorát jelenti. A monodrómia mátrix:

$$C = X^{-1}(0)X(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e^{2\pi} & e^{-2\pi} \\ e^{2\pi}(2-1) & 0 \end{pmatrix} = \quad (1.14)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2\pi} & e^{-2\pi} \\ e^{2\pi} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{2\pi} & 0 \\ 2e^{2\pi} & 3e^{-2\pi} \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

A fenti mátrix sajátértékei $\lambda_1 = e^{2\pi}/3 \approx 178,5$ és $\lambda_2 = e^{-2\pi}0.00187$, így a megoldások instabilak.

1.4. Bifurkációk

1.4.1. Folytonos dinamikai rendszerek

Tekintsük újra a parametrizált megoldást, $x(\mu)$ -t! Ez a görbe implicit alakban is meg lehet adva: $G(x, \mu) = 0$. Bifurkációnak nevezzük azt a μ_0 pontot, ahol az Implicit Függvény Tétel érvényét veszíti:

Implicit Függvény Tétel: tfh. valamilyen $\mu = \mu_0$ pontban létezik egy $x = x_0$ megoldása a (sima) $G(x, \mu) = 0$ egyenletnek, ahol $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ekkor, feltéve, hogy $G_x(x_0, \mu_0)$ nem szinguláris, létezik (lokálisan) egy sima $x(\mu)$ függvény úgy, hogy $x(\mu_0) = x_0$.

Vegyük észre, hogy ha nem is tudjuk explicit módon kifejezni $x(\mu)$ -t zárt alakban, elegendő bizonyítani, hogy $G_x(x_0, \mu_0)$ nem szinguláris és akkor létezik a fenti görbe. Például legyen $G(x, \mu) = x^2 + \mu^2 - 1$, azaz az egyséfkör. Természetesen az $x(\mu)$ függvény nem fejezhető ki zárt alakban a $-1 \leq \mu \leq 1$ tartományban, hiszen két ilyen függvény is van: $x_{1,2}(\mu) = \pm\sqrt{1-\mu^2}$. Az IFT célja az, hogy ezen függvények *létezéséről* adjon információt még akkor is, ha ezeket nem tudjuk explicit módon kifejezni, sőt, biztosítja, hogy az $x(\mu)$ függvény differenciálható. Megfordítva, ha $G_x(x_0, \mu_0)$ szinguláris és az IFT feltételei teljesülnek, "valami érdekes történik".

Dinamikai rendszerek esetében $G(x, \mu)$ lehet például

- $G(x, \mu) = f(x, \mu)$ - egyensúlyi helyzet bifurkációja.
- $G(x, \mu) = \max(\Re(\lambda_i))$ - egy bifurkációs vonal (lineáris stabilitás határa).

1.4.2. Leképezések

1.4.3. Szakadások osztályozása

Legyen $x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvény és $x_0 \in \mathcal{D}$. Az f függvény folytonos az x_0 -ban, ha f -nek létezik határértéke x_0 -ban és az megegyezik a függvény helyettesítési értékével, azaz

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ha az f függvény a \mathcal{D} halmaz minden pontjában folytonos, akkor f folytonos függvény. Ha az f függvény az értelmezési tartományának valamely pontjában nem folytonos, akkor a függvénynek ott szakadási helye van.

- Az f függvénynek x_0 -ban elsőfajú szakadása van, ha x_0 -ban létezik a jobb-, illetve baloldali véges határértéke.
- Ha a jobb-, illetve baloldali véges határérték megegyezik, akkor ez a szakadás megszüntethető.
- A függvény szakadási helye másodfajú, ha nem elsőfajú.

2. fejezet

Filippov rendszerek

Tekintsük a

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x), & \text{ha } H(x) > 0 \\ F_2(x), & \text{ha } H(x) < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

dinamikai rendszert. Feltesszük, hogy $F_1|_{H(x)=0} \neq F_2|_{H(x)=0}$, azaz a két vektormező különböző szögben éri el a

$$\Sigma = \{x : H(x) = 0\} \quad (2.2)$$

úgynevezett, *kapcsolófelületet* (*discontinuity surface* vagy *switching manifold*). Kapcsolófelületre mutat példát a 2.1. ábrán látható fekete szaggatott vonal.

Továbbá bevezetjük

$$H_x = \nabla H = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1} \quad \frac{\partial H}{\partial x_2} \quad \dots \right)^T \quad (2.3)$$

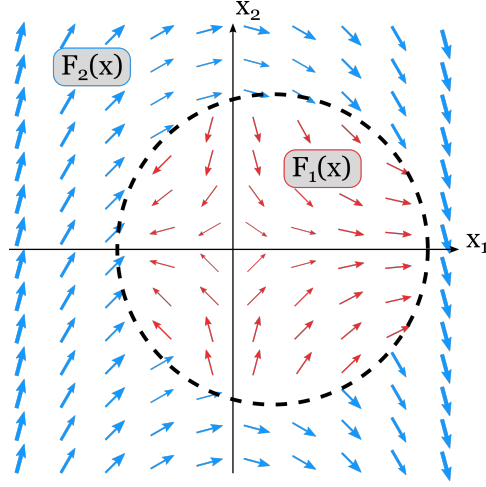
gradienst, amely F_1 növekedésének irányába mutat és merőleges a felületre.

Csúszófelületnek (*sliding region*) nevezzük a Σ kapcsolófelület azon részhalmazát, melyre $\langle F_1, H_x \rangle < 0$ és $\langle F_2, H_x \rangle > 0$ skalárszorzat teljesül. Ezen felületet Σ_s -ként jelöljük, ahol s index a *sliding*-ra utal. A csúszófelületen a két dinamikai rendszerhez tartozó trajektóriák csúszófelületre merőleges komponensei egymás felé, azaz befelé mutatnak. Csúszófelületre mutat példát a 2.2. ábra.

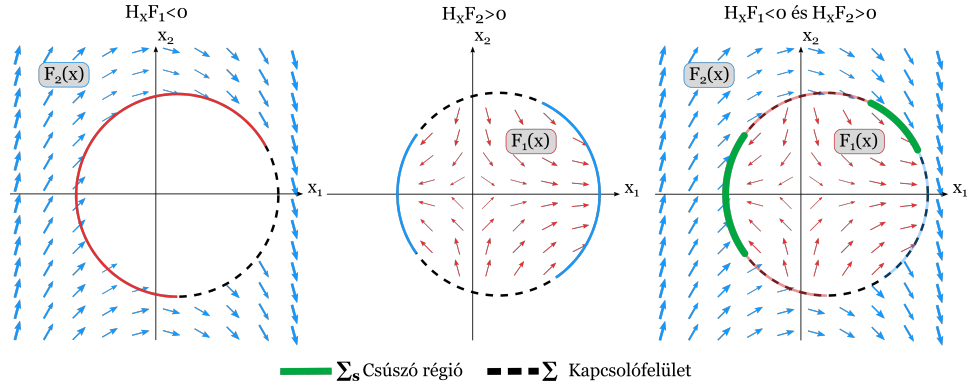
A csúszófelületen uralkodó dinamikát az

$$F_s = F_1(1 - \alpha) + F_2\alpha \quad (2.4)$$

egyenlet írja le. Vagyis lineárisan interpolálunk a két vektormező között oly módon, hogy α -t úgy adjuk meg, hogy $F_s \perp H_x$ teljesüljön. Ez akkor lesz



2.1. ábra. Példa kapcsolófelületre (jelen esetben egy kör), amely elválasztja a két dinamikát egymástól.



2.2. ábra. Példa csúszófelületre.

igaz, ha F_s és H_x skaláris szorzata zérus:

$$\langle F_s, H_x \rangle = 0, \quad (2.5)$$

tehát

$$\langle F_s, H_x \rangle = \langle F_1, H_x \rangle (1 - \alpha) + \langle F_2, H_x \rangle \alpha = 0, \quad (2.6)$$

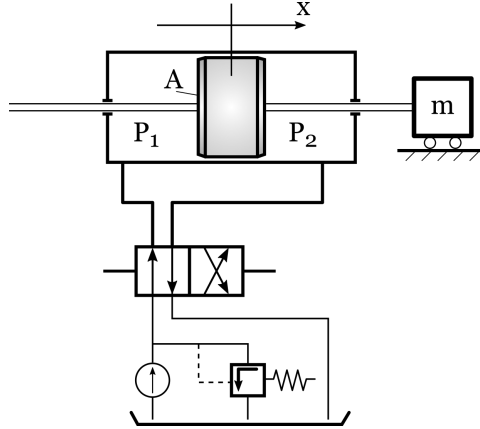
melyből kifejezhető α értéke a következőképpen:

$$\alpha = \frac{\langle F_1, H_x \rangle}{\langle F_1 - F_2, H_x \rangle}. \quad (2.7)$$

Jellemzően a \sum_s csúszófelületen a dinamika nagyon egyszerű és exponenciálisan tart(hat) az egyensúlyi helyzet felé (ha van ilyen). Ezt hívjuk *csúszómód szabályozásnak* (*sliding mode control*).

2.1. Példa: Munkahenger pozíciójának csúszómód szabályozása

Tekintsük a 2.3. ábrán látható elrendezést, mely munkahenger pozíciójának csúszómód szabályozására mutat példát. A hidraulikus tápegység (nyomásforrás) valamekkora $\Delta\tilde{p} > 0$ konstans nyomást tud kiadni. A hengervezérlő szelep állásától függően a hidraulikus munkahengerbe $+\Delta\tilde{p}$ vagy $-\Delta\tilde{p}$ nyomás kerül. Ennek hatására a hengerfej jobbra vagy balra mozdul el. Célunk, hogy a munkahengert x_k kívánt pozícióba juttassuk a munkahenger csúszómód szabályozása által. Ehhez rendelkezésünkre áll egy PD szabályozó.



2.3. ábra. Munkahenger szabályozása.

A dugattyú mozgását az alábbi másodrendű differenciálegyenlettel írhatjuk le:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} = A\Delta p, \quad (2.8)$$

ahol

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \begin{cases} +\Delta\tilde{p}, & \text{ha } H(x) > 0 \\ -\Delta\tilde{p}, & \text{ha } H(x) < 0 \end{cases}. \quad (2.9)$$

A szabályozás során a munkahengert az $x_k = 0$ pozícióba kívánjuk mozgatni. Ehhez a $H(x)$ függvényt egy PD szabályozási stratégia alapján írjuk elő:

$$H(x) = -P(x - x_k) - D\dot{x} = -Px - D\dot{x}, \quad (2.10)$$

ahol az arányos és differenciáló tagok pozitívak: $P > 0$ és $D > 0$. A dinamikai rendszert az

$$\dot{x} = (x_1 \ x_2)^T = (x \ v)^T \quad (2.11)$$

változó bevezetésével elsőrendű alakra hozzuk. Ekkor a két vektormező a következő alakú:

$$F_1(x) = \left(\frac{A\Delta\tilde{p}}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_2 \right), \quad F_2(x) = \left(-\frac{A\Delta\tilde{p}}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_2 \right). \quad (2.12)$$

Mivel $\dot{x} = v = x_2$, a $H(x)$ által meghatározott kapcsolóvonal egyenlete a (2.10) egyenlet alapján

$$\Sigma = \left\{ x : x_2 = -\frac{P}{D}x_1 \right\}, \quad (2.13)$$

a kapcsolóvonalra merőleges irányt kijelölő H_x gradiens pedig

$$H_x = \begin{pmatrix} -P \\ -D \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

A kapcsolóvonal Σ_s csúszó régiója a

$$\langle F_1, H_x \rangle = -Px_2 - \frac{DA\Delta\tilde{p}}{m} + \frac{Dk}{m}x_2 < 0, \quad (2.15)$$

valamint az

$$\langle F_2, H_x \rangle = -Px_2 + \frac{DA\Delta\tilde{p}}{m} + \frac{Dk}{m}x_2 > 0 \quad (2.16)$$

egyenlőtlenségek által adott. Ezekből a csúszó régió:

$$\Sigma_s = \{x : -x_2^* < x_2 < x_2^*\}, \quad (2.17)$$

ahol

$$x_2^* = \frac{DA\Delta\tilde{p}}{|Dk - Pm|}. \quad (2.18)$$

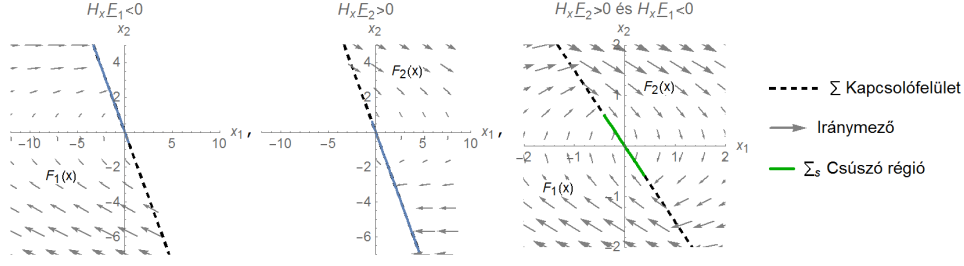
A két vektormezőt, a kapcsolófelületet és a csúszó régiót szemlélteti a 2.4. ábra.

A Σ_s -en érvényes dinamikát a korábban leírt

$$F_s = F_1(1 - \alpha) + F_2\alpha \quad (2.19)$$

vektormező határozza meg, ahol

$$\alpha = \frac{\langle F_1, H_x \rangle}{\langle F_1 - F_2, H_x \rangle} = \frac{-Px_2 - D\left(\frac{A\Delta\tilde{p}}{m} - \frac{k}{m}x_2\right)}{-D\frac{2A\Delta\tilde{p}}{m}}. \quad (2.20)$$



2.4. ábra. Munkahenger csúszómód szabályozása.

Ezt F_s -be visszahelyettesítve, a kapcsolóvonalra megszorított dinamika

$$\begin{aligned} F_s &= F_1(1 - \alpha) + F_2\alpha = F_1 + \alpha(F_2 - F_1) = \\ &= \left(\frac{A\Delta\tilde{p}}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_2 \right) + \alpha \left(-\frac{2A\Delta\tilde{p}}{m} \right) = \left(\frac{x_2}{-\frac{P}{D}}x_2 \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

vagyis

$$\dot{x}_1|_{\Sigma_s} = x_2, \quad \dot{x}_2|_{\Sigma_s} = -\frac{P}{D}x_2. \quad (2.22)$$

Megjegyzés: F_s második komponensét a Σ kapcsolóvonal egyenletének idő szerinti deriválásával is meg lehet kapni.

A kapcsolóvonalra megszorított dinamika egy exponenciálisan csillapódó sebességű mozgást ír le, és a rendszer a kapcsolóvonalon tart a $(0 \ 0)^T$ egyensúlyi helyzethez. A P/D hányados növelésével a beállítás gyorsasága növelhető, hiszen ekkor a csúszó megoldás egyre gyorsabban tart az origóhoz. Viszont annak érdekében, hogy a sliding mode lehetséges legyen, a (2.18) egyenletben leírt x_2^* kifejezésnek pozitívnak kell lennie, így adódik, hogy

$$\frac{DA\Delta\tilde{p}}{|Dk - Pm|} > 0, \quad (2.23)$$

ami akkor teljesül, ha

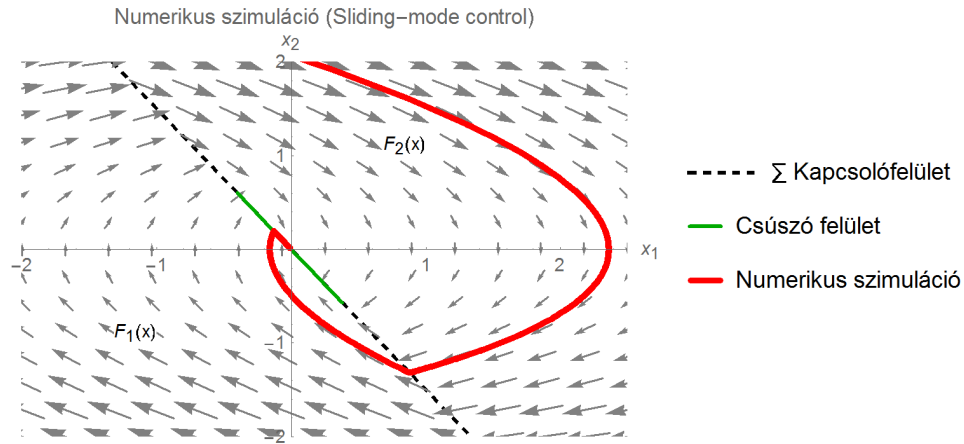
$$\frac{P}{D}m < k, \quad (2.24)$$

amiből látszik, hogy a viszkózus csillapítás nem lehet akármekkora. A csúszómód terület csökken, ha P/D nő, akár el is tűnhet.

Szimulációs példát mutat a 2.5. ábra. A szimuláció során felhasznált paraméterértékeket a 2.1. táblázat tartalmazza. $x_1(0) = -12$ m és $x_2(0) = 0.2$ m/s kezdeti feltételekkel indítva a szimulációt, a kapcsolófelületen áthaladva, a csúszó felületre kerül a megoldás, majd a rendszer a kapcsolóvonalon tart a $(0 \ 0)^T$ egyensúlyi helyzethez.

2.1. táblázat. Paraméterértékek

P [1/s]	D [1]	m [kg]	A [m ²]	$\Delta\tilde{p}$ [Pa]	k [Ns/m]
0.3	0.2	0.7	0.5	1	0.1



2.5. ábra. A csúszómód szabályozás által eredményezett trajektória. Kezdeti feltételek: $x_1(0) = -12$ m, $x_2(0) = 0.2$ m/s.

3. fejezet

Korrekció a kapcsolófelületen

3.1. Transzverzális metszés, hibrid dinamikai rendszer

Tekintsük az alábbi hibrid dinamikai rendszert:

$$\dot{x} = F(x), \quad (3.1)$$

melynek fundamentális megoldása $\Phi(x, t)$ és

$$x \mapsto R(x), \quad (3.2)$$

leképezés a $\Sigma := \{x, H(x) = 0\}$ -n. Kérdés: hogyan számítsuk ki egy olyan periodikus pálya stabilitását, mely "ütközik"?

Jelölje (lásd ábra):

- $x^* = \Phi(x_p, t_1)$, ahol x_p a periodikus pálya egy pontja
- $x_0 = \Phi(\hat{x}, t_1)$, ahol \hat{x} a perturbált pálya egy x_p melletti pontja
- $x_3 = R(\Phi(\hat{x}, t_1 + \delta))$

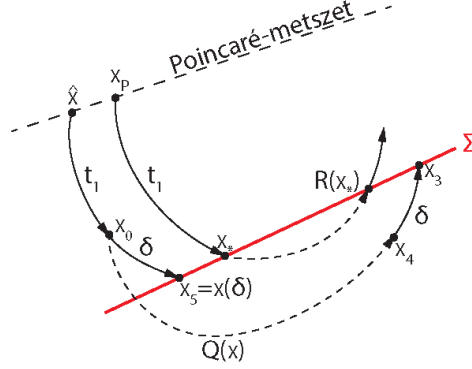
Keressük azt a $Q(x)$ leképezést, melyre teljesül, hogy

$$x_4 = Q(x_0),$$

ahol

$$x_4 = \Phi(x_3, -\delta) = \Phi(\overbrace{R(\Phi(x_0, \delta))}^{x_3}, -\delta).$$

x_5



3.1. ábra. Periodikus pálya a kapcsolóvonal közelében.

Azaz melyik az a leképezés, amely \hat{x} -ből indítva t_1 -ig (és *nem* $t_1 + \delta$ -ig) integrálva olyan pontba visz, hogy onnan újabb δ -ig integrálva a helyes x_3 pontba érkezünk? Másképp fogalmazva, meghatározandó az a $Q(x)$ leképezés, amely x_0 pont $x_4 = Q(x_0)$ képéből indulva δ ideig integrálva ugyanúgy x_3 -ba visz, mintha x_5 pontban alkalmaztuk volna az $R(x)$ leképezést.

Tehát meg kell konstruálnunk a $x_0 \mapsto Q(x_0) = x_4$ leképezést. A megoldást x_0 körül, kis δ értékekre sorbafejtve kapjuk, hogy:

$$x_5 = x(\delta) = \Phi(x_0, \delta)|_{t=0} = x_0 + \delta F(x_0) + \mathcal{O}(\delta^2). \quad (3.3)$$

Legyen $x_0 = x^* + \Delta x$, ezt behelyettesítve a fenti egyenletbe kapjuk, hogy

$$x(\delta) = x^* + \Delta x + \underbrace{\delta F(x^* + \Delta x)}_{F|_{\Delta x=0} = F(x^*) + \underbrace{\Delta F}_{\delta \Delta x \approx 0}} + \mathcal{O}(\delta^2) = x^* + \Delta x + \delta F(x^*) + \mathcal{O}(\delta^2, \delta \Delta x, \Delta x^2) \quad (3.4)$$

Másrésről, mivel $x_5 = x(\delta)$ rajta van a kapcsolófelületen:

$$O = H(x(\delta)) = H(x^* + \Delta x + \delta F(x^*) + \mathcal{O}(\delta^2, \delta \Delta x, \Delta x^2)), \quad (3.5)$$

valamint $H(x)$ sorfejtése x^* körül

$$H(x)|_{x=x^*} = \underbrace{H(x^*)}_{=0} + H_x(x^*)(x - x^*) + \mathcal{O}(\|x - x^*\|^2), \quad (3.6)$$

tehát:

$$O = H_x(x^*)(\Delta x + \delta F(x^*)) + \mathcal{O}(2). \quad (3.7)$$

Így δ -ra adódik, hogy:

$$\delta = -\frac{H_x(x^*)\Delta x}{H_x(x^*)F(x^*)} + \mathcal{O}(2), \quad (3.8)$$

amely azt jelenti, hogy a kapcsolófelület $H_x(x)$ gradiensét kell kiértékelni x^* helyen ahhoz, hogy becslést tudjunk adni a szükséges korrekcióra. A becslés hibája $\mathcal{O}(2)$, így a kapcsolófelület ferdeségét figyelembe véve becslhető a δ idő, amely alatt a zavart \hat{x} pontból indított megoldás t_1 idő elteltét követően elérte volna a kapcsolófelületet.

Továbbá:

$$x_3 = R(x(\delta)) = R(x^* + \Delta x + \delta F(x^*) + \mathcal{O}(2)), \quad (3.9)$$

$$x_4 = \Phi(x_3, -\delta)|_{t=0} = x_3 - \delta F(x_3) + \mathcal{O}(\delta^2), \quad (3.10)$$

$$x_4 = \Phi(x_3, -\delta)|_{t=0} = x_3 - \delta F(x_3) + \mathcal{O}(\delta^2), \quad (3.11)$$

$$(3.12)$$

amiből az x_4 az x^* körül:

$$\begin{aligned} x_4|_{x^*} &= \underbrace{R(x^*) + R_x(x^*)}_{x_3} \overbrace{(\Delta x + \delta F(x^*))}^{-x^* + x(\delta)} - \delta F(\underbrace{R(x^* + \Delta x + \delta F(x^*))}_{x_3}) + \mathcal{O}(2) = \\ &= R(x^*) + R_x(x^*)\Delta x + \delta[R_x(x^*)F(x^*) - F(R(x^*))] + \mathcal{O}(2). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Mivel $\Delta x = x_0 - x^*$ a keresett $x_0 \mapsto Q(x_0) = x_4$ leképezés, ezért

$$Q(x_0)|_{x^*} = R(x^*) + R_x(x^*)\Delta x - \frac{H_x(x^*)\Delta x}{H_x(x^*)F(x^*)}(R_x(x^*)F(x^*) - F(R(x^*))), \quad (3.14)$$

ahol az x_0 aktuális helye függ az \hat{x} -től, tehát a perturbáció mértékétől, így Δx szintén a zavarástól függ. Q_x leképezés szintén linearizálható x^* körül, amely x_0 helyen:

$$Q(x_0)|_{x^*} = R(x^*) + Q_x(x^*)\Delta x. \quad (3.15)$$

Ebből a 3.15 egyenletben szereplő $Q_x(x^*)$ mátrix meghatározható Δx együtt-hatóinak kigyűjtésével 3.14 egyenletből:

$$Q_x(x^*) = R_x(x^*) + \frac{F(R(x^*)) - R_x(x^*)F(x^*)}{H_x(x^*)F(x^*)}H_x(x^*). \quad (3.16)$$

3.2. Példa

Vegyük a következő folytonos rendszert:

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - 2\xi x_2 + \cos(\omega t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix},$$

továbbá a kapcsolóvonal $H(x) = x_1 - \delta$, vagyis $x_1 = \delta$ -nál fal van, így $R(x) = (x_1, -rx_2, x_3)^T$, melynek x szerinti deriváltja

$$R_x(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Megj.: δ a levezetések során egy időtartamot jelölt, a feladatbeli jelentése egy távolság.)

A becsapódás normál sebessége: $v = H_x(x^*)F(x^*) = x_2^*$, továbbá jelölje a^- és a^+ az ütközés előtti és utáni pillanatbeli értékeket, vagyis $a^- = -x_1^* - 2\xi x_2^* + \cos(\omega t)$ és $a^+ = -x_1^* + 2\xi r x_2^* + \cos(\omega t)$.

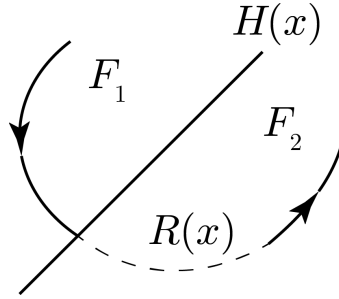
$$\begin{aligned} \text{Ezekkel: } Q_x &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_x(x^*)} + \underbrace{\frac{1}{v}}_{\frac{1}{H_x(x^*)F(x^*)}} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} -rv \\ a^+ \\ 1 \end{pmatrix}}_{F(R(x^*))} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_x(x^*)} \underbrace{\begin{pmatrix} v \\ a^- \\ 1 \end{pmatrix}}_{F(x^*)} \right) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{H_x(x^*)} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{v} \begin{pmatrix} -rv - v \\ a^+ + ra^- \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{v} \begin{pmatrix} -rv - v & 0 & 0 \\ a^+ + ra^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & 0 & 0 \\ \frac{a^+ + ra^-}{v} & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Megj.: A skalár gradienst (pl. most: $H_x(x)$) sorvektorként értelmezzük, ami egybevág azzal, hogy a Jacobi mátrix sorai is a vektor adott elemének mint skalárnak a gradienst tartalmazzák)

3.3. Transzverzális metszés, általános eset

Korrekció a kapcsolósíkon. Az általános esetben:

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x), & \text{ha } H(x) > 0 \\ F_2(x), & \text{ha } H(x) < 0, \end{cases}$$



3.2. ábra. $R(x)$ nem kapcsolósíkra képez le.

ahol $x \rightarrow R(x)$, ha $H(x) = 0$. Továbbá $R(x)$ -nek nem kötelező a kapcsolósíkra leképeznie (lásd 3.2. ábra).

A $Q(x)$ korrekciós leképezés alatt a következő érthető: (lásd 3.3. ábra)

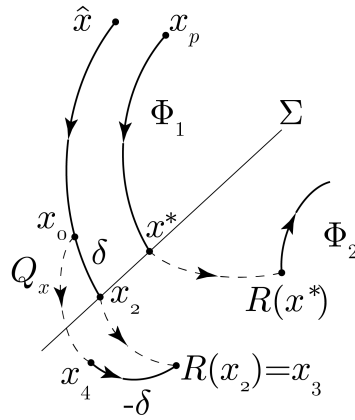
$$\Sigma = \{x, H(x) = 0\},$$

$$x^* = \Phi_1(x_p, t),$$

$$x_0 = \Phi_1(\hat{x}, t_1) \rightarrow x_2 = \Phi_1(x_0, \delta),$$

$$x_4 = \Phi_2(x_3, -\delta),$$

$$x_0 \rightarrow x_4 = Q(x_0) = \Phi_2(\underbrace{R(\Phi_1(x_0, \delta))}_{x_3}, -\delta)$$



3.3. ábra. Korrekció származtatása ha $R(x)$ nem kapcsolósíkra képez le.

$Q(x)$ linearizáltjára adódik, hogy:

$$Q_x(x^*) = R_x(x^*) + \frac{(F_2(R(x^*))) - R_x(x^*)F_1(x^*))H_x(x^*)}{H_x(x^*)F_1(x^*)} \quad (3.17)$$

és $H_x(x^*)F_1(x^*) \neq 0$ transzverzális metszés.

Példa 1.) Filippov rendszer csúszás nélkül, azaz $F_1|_\Sigma \neq F_2|_\Sigma$, valamint $R(x) = x$, azaz önmagába leképezés.

Ilyenkor:

$$Q_x = I + \frac{(F_2 - F_1)H_x}{H_x F_1}, \text{ mert } R(x) = I.$$

Példa 2.) Ütközékes dinamikai rendszer, ahol $F_1 = F_2 = F$. Így $Q(x) :$

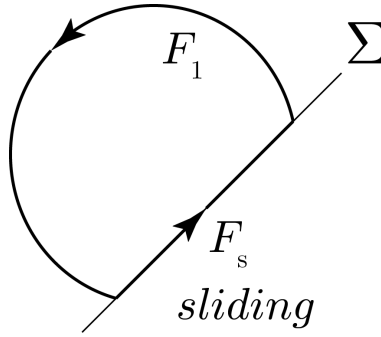
$$Q_x(x^*) = R_x(x^*) + \frac{(F(R(x^*))) - R_x(x^*)F(x^*))H_x(x^*)}{H_x(x^*)F(x^*)}$$

Példa 3.) Filippov rendszer csúszással, azaz

$$F_s = F_{12} = (1 - \alpha)F_1 + \alpha F_2, \text{ és } \alpha = \frac{H_x F_1}{H_x(F_1 - F_2)}.$$

Ekkor

$$Q_x = F + \frac{(F_{12} - F_1)H_x}{H_x F_1}$$



3.4. ábra. Filippov rendszer csúszással

4. fejezet

Periodikus pályák numerikus követése

Dinamikai rendszerek vizsgálatánál kíváncsiak vagyunk a rendszer viselkedésére különböző paraméterkombinációk esetében is. A paraméterek hatásának vizsgálatára többféle módszer is rendelkezésünkre áll, mint például a paraméterléptetés vagy a pszeudo-ívhossz módszer. Paraméterléptetés esetén a bifurkációs paraméter értékét kis mértékben megváltoztatjuk, ekkor jól megfogalmazott probléma esetén a megoldás is kis mértékben fog változni, és ezt a változást követjük lépésről-lépésre. Pszeudo-ívhossz módszernél a bifurkációs paraméter és a periodikus pálya periódusidejének összefüggését keressük oly módon, hogy a problémát egy "szintvonal" keresésre vezetjük vissza. A fejezetben ez utóbbival fogunk részletesebben foglalkozni.

4.1. Pszeudo-ívhossz módszer

A pszeudo-ívhossz módszer esetében a soron következő megoldást az előző megoldástól \mathbf{v} irányba keressük, ahol \mathbf{v} egy implicit egyenlet $F(\mathbf{x}) = 0$ szintvonalának érintőjével párhuzamos egység hosszú vektor:

$$\begin{cases} 0 = \langle \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i \rangle - \Delta s \\ 0 = F(\mathbf{x}_{i+1}), \end{cases} \quad (4.1)$$

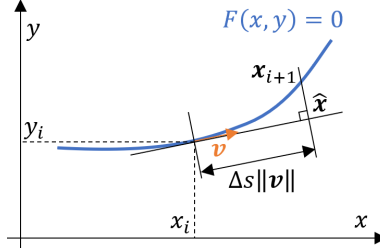
$$\mathbf{x}_i = [x_i \quad y_i]^T, \quad (4.2)$$

és Δs a lépés ívhossza. Az első egyenlet a merőlegességi feltétel, a második magának a keresett szintvonalnak az egyenlete. A módszer egy iterációs lépésének szemléltetése a 4.1. ábrán látható. A merőlegességi feltétel az alábbi

módon vezethető le:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_i + \Delta s \mathbf{v}_i, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_{i+1} - \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v}_i \rangle &= \langle \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i - \Delta s \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = \\ \langle \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i \rangle - \Delta s \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle &= \langle \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i \rangle - \Delta s. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (4.4)$$



4.1. ábra. A pszeudo-ív hossz módszer egy iterációs lépésének szemléltetése

A módszer alkalmazása során a (4.1) egyenletrendszert szimultán kell megoldani \mathbf{x}_{i+1} -re - két egyenlet, két ismeretlen. A módszer általánosítható több dimenzióra is, ekkor több $F_j(\mathbf{x})$ egyenletre van szükségünk.

Egy **példa** a módszer alkalmazására az egység sugarú kör körívének követése. Akkor az implicit függvényünk az alábbi:

$$F(\mathbf{x}) = x^2 + y^2 - 1. \quad (4.5)$$

A kezdőpontunk legyen

$$\mathbf{x}_0 = [1 \ 0]^T, \quad (4.6)$$

amely, mint látható kielégíti az implicit egyenletünket. A sebességvektor, azaz az érintő ebben a pontban

$$\mathbf{v}_0 = [0 \ 1]^T. \quad (4.7)$$

Azonban az esetek többségében ez nem ilyen egyszerűen meghatározható, és numerikusan kell közelítenünk, amihez ismernünk kell a szintvonal egy másik, közeli pontját is, $\mathbf{x}_{1/2}$ -et:

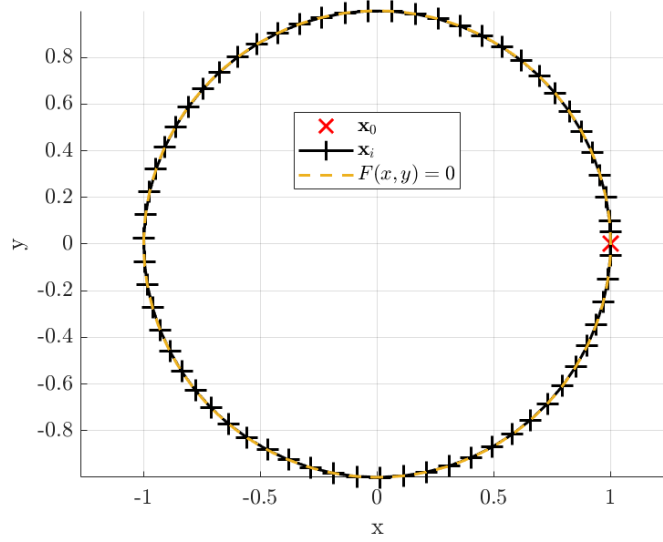
$$\mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{x}_{1/2} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_{1/2} - \mathbf{x}_0\|}. \quad (4.8)$$

A sebességvektor ezek után rendre:

$$\mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}\|}. \quad (4.9)$$

A körív követésének eredménye a pszeudo-ívhossz módszerrel a 4.2. ábrán látható. A lépéshossz $\Delta s = 0.1$ volt, a kezdeti sebességbecsléshez az \mathbf{x}_0 -hoz közeli szintvonal pont pedig

$$\mathbf{x}_{1/2} = [0.99 \quad \sqrt{1 - 0.99^2}]^T. \quad (4.10)$$



4.2. ábra. A pszeudo-ívhossz módszer alkalmazása körív követésére

Megjegyzés: pontosabb sebességvektort kapunk az iteráció során, ha a megoldáskor $\mathbf{x}_{i+1/2}$ -re is alkalmazzuk a pszeudo-ívhossz módszert, ekkor a sebességvektor általánosan így írható fel:

$$\mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{x}_{i+1/2} - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_{i+1/2} - \mathbf{x}_i\|}. \quad (4.11)$$

Az így keletkező extra egyenletek ugyanolyan formájúak, mint a (4.1) egyenlet az alábbi indexelést alkalmazva a problémára:

$$\begin{cases} 0 = \langle \mathbf{x}_{i+3/2} - \mathbf{x}_{i+1/2}, \mathbf{v}_i \rangle - \Delta s \\ 0 = F(\mathbf{x}_{i+3/2}), \end{cases} \quad (4.12)$$

Összességében ez a feladat egy négyváltozós nemlineáris gyökkeresési probléma az eredeti kétváltozós helyett.

4.2. Periodikus pályák peremérték-megfogalmazása

Dinamikai rendszerek mozgásegyenleteinek megoldásakor kezdeti értéket szoktunk megadni. Amennyiben a rendszer periódikus mozgást végez, a probléma átírható egy peremérték feladatra, ahol a peremfeltételt a periódus elejére és végére kell előírni. Belátható ugyanis, hogy periódikus mozgásnál az állapotváltozóknek t_0 és $t_0 + T$ időpontokban meg kell egyezniük, ahol T a periódusidő. Dinamikai rendszerek mozgásegyenleteit Cauchy átírással általánosan az alábbi módon lehet megadni:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{z}(t)), \quad (4.13)$$

ahol $\mathbf{z}(t)$ az állapotváltozók, $\mathbf{q}(t)$ pedig az általános koordináták vektora:

$$\mathbf{z}(t) = [\mathbf{q}(t) \quad \dot{\mathbf{q}}(t)]^T. \quad (4.14)$$

Periódikus mozgás esetén (autonóm rendszereknél t_0 szabadon megválasztható, így vegyük zérusnak) igaz a következő

$$\mathbf{z}_p(0) = \mathbf{z}_p(T). \quad (4.15)$$

Vezessük be τ dimenziótlán időt az alábbi módon:

$$\tau = t/T. \quad (4.16)$$

Ekkor a (4.13) egyenlet formája és a peremérték feladat a következő lesz

$$\begin{cases} \mathbf{z}'(\tau) = T \mathbf{F}(\mathbf{z}(\tau)), \\ \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}(1). \end{cases} \quad (4.17)$$

Megjegyzés: amennyiben a rendszerünk szakaszosan folytonos a (4.17)-es problémát ki kell egészíteni:

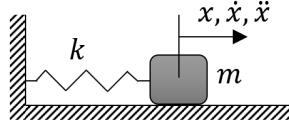
$$\begin{cases} \mathbf{z}'(\tau_1) = T_1 \mathbf{F}_1(\mathbf{z}(\tau_1)), \quad H(\mathbf{z}(\tau_1)) > 0, \\ \mathbf{z}'(\tau_2) = T_2 \mathbf{F}_2(\mathbf{z}(\tau_2)), \quad H(\mathbf{z}(\tau_2)) < 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{z}_1(1) = \mathbf{z}_2(0), \\ \mathbf{z}_2(1) = \mathbf{z}_1(0), \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\begin{cases} H(\mathbf{z}_1(1)) = 0, \\ H(\mathbf{z}_2(1)) = 0, \end{cases}$$

ahol $H(\mathbf{z}(\tau))$ a kapcsolófelület. Ütköző rendszer esetében figyelembe kell venni a peremfeltételek felírásánál az ütközéskor létrejövő leképezést.

Nézzük meg egy egyszerű **példa** peremérték-megfogalmazásának implementálását MATLAB környezetben! Peremérték feladatok megoldására a bvp beépített megoldókat lehet használni, esetünkben a bvp5c-vel fogunk dolgozni. A mechanikai rendszerünk a 4.3. ábrán látható.



4.3. ábra. Periódikus mozgást végző tömeg-rugó rendszer

A mozgásegyenlete a fenti rendszernek jól ismert:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} x. \quad (4.19)$$

Mint tudjuk, a rendszer mozgását leíró függvényt az alábbi módon lehet felírni, amennyiben x_0 kezdeti kitérítésünk van csak τ_0 időpillanatban kezdeti sebesség nélkül:

$$\varphi(\tau) = x_0 \cos\left(\tau\sqrt{k/m}T\right) = x_0 \cos(2\pi\tau), \quad (4.20)$$

$$\dot{\varphi}(\tau) = -x_0\sqrt{k/m} \sin\left(\tau\sqrt{k/m}T\right) = -x_0\sqrt{k/m} \sin(2\pi\tau), \quad (4.21)$$

ahol T a rendszer sajátfrekvenciájának inverze

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}. \quad (4.22)$$

A fenti függvényeket a peremérték-megfogalmazáskor kijöttékkel fogjuk összevetni.

A bvp5c megoldóhoz először definiálnunk kell egy időrácsot, amely időpontokban meg kell becsülnünk majd a keresett függvények értékét. Mivel áttértünk dimenziótlan időre, egy periódus "peremei" a $\tau \in \{0, 1\}$ pontok, valamint megjelent a Cauchy átírásnál T periódusidő, mint ismeretlen paraméter.

$$\begin{bmatrix} x'(\tau) \\ y'(\tau) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} y(\tau) \\ -\frac{k}{m} x(\tau) \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

A módszer a rácsháló első és utolsó pontjára fogja alkalmazni a peremfeltételeket. Jó kezdeti függvénybecslés a megoldó megfelelő működéséhez az egyik

legfontosabb kritérium, ehhez minél több információt össze kell gyűjteni a vizsgált rendszer viselkedéséről. A kezdeti függvénybecslésnek teljesítenie kell a peremfeltételeket. Az ismeretlen paraméter(ek)re is szükséges kezdeti becslést adni! A peremfeltételeket megadó vektor ($\text{res} \in \mathbb{R}^r = \mathbb{R}^{n+p}$) dimenziója megegyezik a mozgásegyenlet ($\text{dydx} \in \mathbb{R}^n$) és a paramétereket tartalmazó vektor ($\text{par} \in \mathbb{R}^p$) dimenziójának összegével.

```

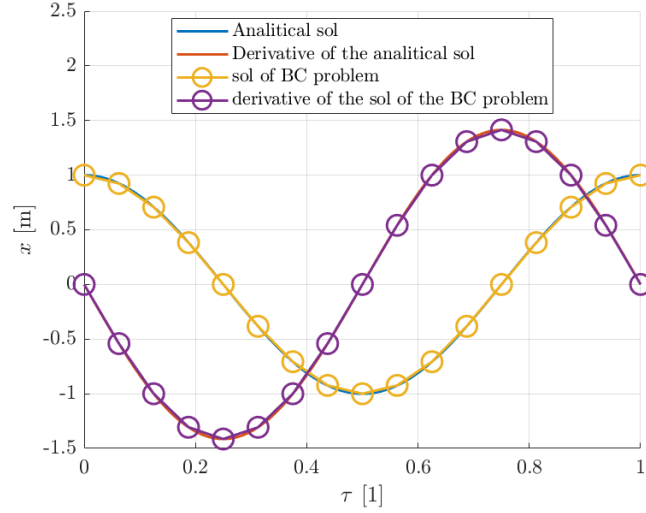
1 global k m x0
2 k = 10;
3 m = 5;
4 x0 = 1;
5 taumesh = linspace(0,1,5);
6 par = 2*pi;
7 solinit = bvpinit(taumesh, @bvp_initial_guess, par);
8 sol = bvp5c(@bvp_fun, @bvp_bcs, solinit);
9
10 function g = bvp_initial_guess(x)
11 global x0
12 g = x0*[cos(2*pi*x); -2*pi*sin(2*pi*x)];
13 end
14
15 function dydx = bvp_fun(x,y,par)
16 global k m
17 dydx = par*[y(2); -k*y(1)/m];
18 end
19
20 function res = bvp_bcs(ya,yb,par)
21 global x0
22 res = [ya(1) - x0
23        yb(1) - x0
24        ya(2)];
25 end

```

A módszer által kiszámolt T értéke megegyezik az analitikusan kiszámított periódusidővel. A tömegpont pozíciója és sebessége a 4.4. ábrán látható.

4.3. Pszeudo-ív hossz módszer alkalmazása periodikus pályák követéséhez

Ebben az alfejezetben két példát nézünk meg, ahol a pszeudo-ív hossz módszer periodikus pályák követésére használjuk. Ehhez ki kell választanunk majd egy bifurkációs paramétert, amely függvényében kíváncsiak vagyunk, hogyan alakul a periodikus mozgás. Az első feladat során az előbb vizsgált tömeg-rugó rendszerrel foglalkozunk, a másodikban egy szakaszosan folytonos rendszert, a spring loaded inverted pendulum (SLIP) modellt vizsgáljuk,



4.4. ábra. Tömeg-rugó rendszer peremérték-megfogalmazásának bvp5c megoldóval kiszámított eredményeinek összevetése az analitikus megoldással

amely az emberi futás leírásának egy elterjedten használt modellje.

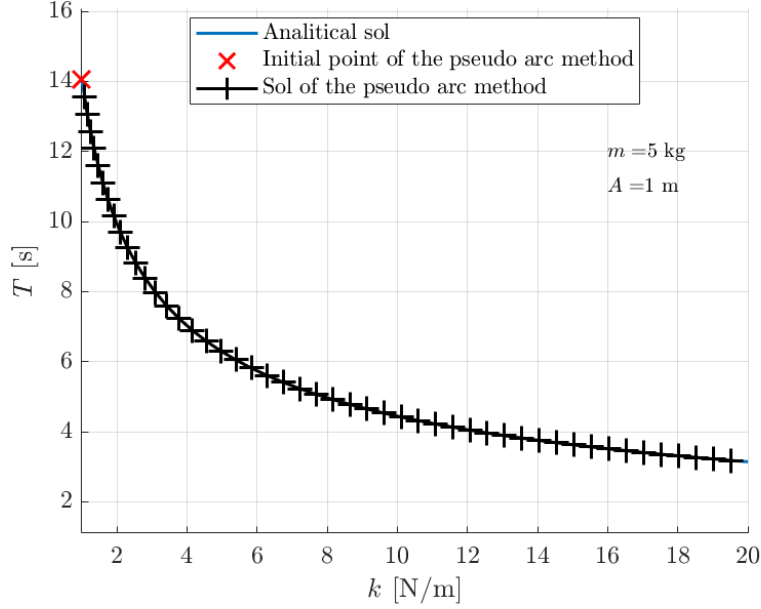
4.3.1. Példa 1: tömeg-rugó rendszer

A pszeudo-ív hossz módszer használatához ki kell választanunk egy bifurkációs paramétert, amit jelöljön μ . A példa során először vizsgáljuk a rugómevség ($\mu = k$), később a tömeg ($\mu = m$) hatását (ilyenkor a többi paraméter konstans). A (4.1) egyenlet alakja paraméterkövetés során az alábbi formájú:

$$\begin{cases} 0 = \langle \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i \rangle - \Delta s \\ 0 = T_{i+1} - T_{\text{BVP}}(\mu_{i+1}), \end{cases} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{x}_i = [\mu_i \quad T_i]^T, \quad (4.25)$$

ahol $T_{\text{BVP}}(\mu_{i+1})$ a peremfeladat megoldó által számolt periódusidő. A pszeudo-ív hossz módszert a 4.1 alfejezetben bemutatott módon kell alkalmazni, és a benne található $T_{\text{BVP}}(\mu_{i+1})$ értékét a 4.2 alfejezetben leírt módon kell meghatározni a (4.24) egyenletrendszer megoldása közben. A kapott eredményeket összevetettük az analitikusan kiszámítottakkal, és látható, hogy a pályakövetés illeszkedik az analitikusan előállított görbékre, ld. 4.5. és 4.6. ábrák.



4.5. ábra. Periódikus pályák követése k paraméter függvényében, $\Delta s = 0.5$

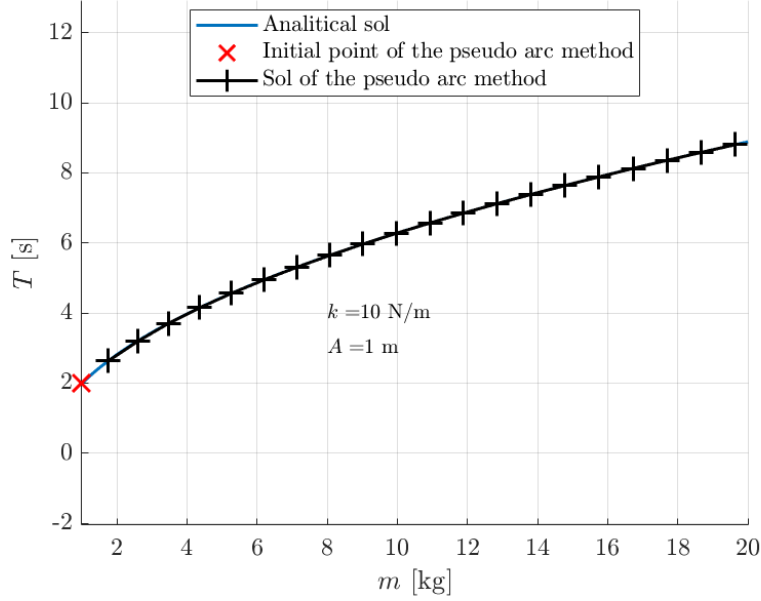
4.3.2. Példa 2: spring loaded inverted pendulum modell

A spring loaded inverted pendulum (SLIP) modell a 4.7. ábrán látható. A rendszer egy tömegpontból és egy tömeg nélküli rugóból áll, ami α szögben kapcsolódik a tömegponthoz. A SLIP modell az emberi futás modellezéséhez használt egyszerű mechanikai modell. Periódikus mozgásra képes, mely mozgás két fázisra, a támasz és repülő fázisokra tagolódik, így a rendszer szakaszosan, de C^2 folytonos.

A rendszer mozgásegyenlete a támaszfázisban (mivel az x kvázi ciklikus koordináta (a kezdeti értéke nem befolyásolja a mozgás minőségét, amennyiben a repülőfázisból vagy fázishatárokról indítjuk a rendszert), a rugó megfogott végét önkényesen mindig az origóba helyezzük, ami a tömegpont x koordináta szerinti helyzetét is megadja a fázis elején), és az állapotváltozók az alábbiak:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \kappa (l_0 - l(t)) x(t)/l(t), \\ \ddot{y} = \kappa (l_0 - l(t)) y(t)/l(t) - g, \end{cases} \quad (4.26)$$

$$\mathbf{z}(t) = [x(t) \quad y(t) \quad \dot{x}(t) \quad \dot{y}(t)]^T, \quad (4.27)$$



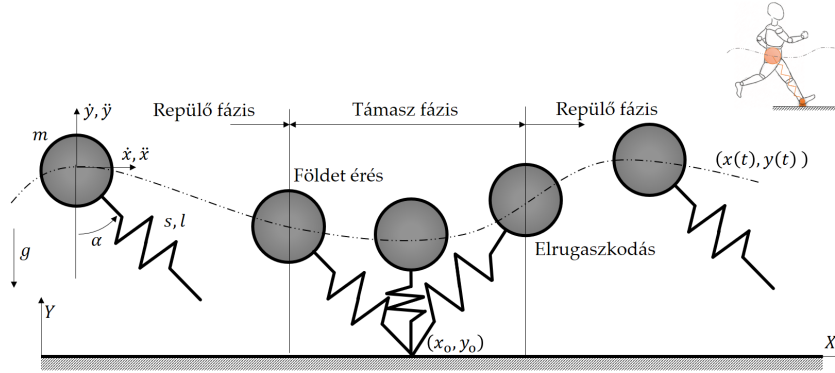
4.6. ábra. Periódikus pályák követése m paraméter függvényében, $\Delta s = 1$

$$l(t) = \sqrt{(-x(t))^2 + y(t)^2}, \quad (4.28)$$

A repülő fázisban is a fenti mozgásegyenlet érvényes, csupán a $\kappa = s/m = 0$ helyettesítést kell alkalmazni. A fázishatárokat megadó eseményfüggvények a támasz-repülő fázishatáron, illetve a repülő-támasz fázishatáron az alábbiak, ahol az 1-es index a támaszfázis, a 2-es a repülőre vonatkozik:

$$\begin{aligned} H_{12}(\mathbf{z}) &= l_0 - l(t), \\ H_{21}(\mathbf{z}) &= y(t) - l_0 \cos(\alpha). \end{aligned} \quad (4.29)$$

A peremfeladat megoldásához a mozgásegyenletekre alkalmazni kell a Cauchy-átírást, illetve dimenziótlanítani kell idő szerint. Külön kell dimenziótlanítani a támaszfázis mozgásegyenleteit a $\tau_1 = t/T_1$ dimenziótlan idővel



4.7. ábra. Spring loaded inverted pendulum (SLIP) mechanikai modellje

felírva, és külön a repülőfázisét $\tau_2 = t/T_2$ -vel.

$$\begin{cases} \mathbf{z}'(\tau_1) = T_1 \mathbf{F}_1(\mathbf{z}(\tau_1)), & H_{12}(\mathbf{z}(\tau_1)) > 0, \\ \mathbf{z}'(\tau_2) = T_2 \mathbf{F}_2(\mathbf{z}(\tau_2)), & H_{21}(\mathbf{z}(\tau_2)) > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{z}_1(1) = \mathbf{z}_2(0), \\ \hat{\mathbf{z}}_2(1) = \hat{\mathbf{z}}_1(0), \end{cases} \quad (4.30)$$

$$H_{12}(\mathbf{z}_1(1)) = 0,$$

$$x_1(0) = -l_0 \sin \alpha,$$

$$\hat{E} = l_0 \cos(\alpha) g + (x'_2(1)^2 + y'_2(1)^2) / 2,$$

ahol

$$\hat{\mathbf{z}}(\tau) = [y(\tau) \quad x'(\tau) \quad y'(\tau)]^T, \quad (4.31)$$

ugyanis $x(\tau)$ kvázi ciklikus koordináta, melynek értéke periódikus mozgás során szigorú monoton nő, így $\mathbf{z}_1(0) \neq \mathbf{z}_2(1)$, viszont $x_1(0)$ ismert. Valamint \hat{E} a tömeg szerint fajlagosított mechanikai összenergia, amely a rendszer egy paramétere, hiszen a modell konzervatív. A $H_{21}(\mathbf{z}_2(1))$ helyett azért jobb a fenti egyenlet használata, mivel ez a kapcsolófelület által tartalmazott információn felül többet mond, és kijelöli, hogy milyen energiaszinten mozog a rendszer. A (4.24) egyenletben a $T_{\text{BVP}}(\mu_{i+1}) = T_{\text{BVP},1}(\mu_{i+1}) + T_{\text{BVP},2}(\mu_{i+1})$ helyettesítést kell alkalmazni a peremfeladat megoldása után.

Egy jó próbafüggvény megadásához először inicializáljuk a feladatot, azaz keresünk egy periódikus pályát. A feladatot a támaszfázis elejéről indítjuk, és

itt $y_1(0) = l_0 \cos(\alpha)$ ismert, valamint $x(\tau)$ kvázi ciklikus koordináta. Mivel a rendszer konzervatív a mechanikai összenergiát paraméternek választva a sebességkomponensek kifejezhetők egymásból a támaszfázis elején, mi a $\dot{x}_1(0)$ -t vesszük most független változónak. A rendszer mozgását tehát adott paraméterkombinációnál egy változó fogja befolyásolni a támaszfázis bal oldali peremén. Az inicializálásnál az alábbi egyenlet zérushelyét keressük meg:

$$f(\dot{x}_1(0)) = \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(1) = 0. \quad (4.32)$$

Az inicializált kezdeti próbafüggvényekben a periódikus pálya pontjait használjuk fel, ahol az időpillanatokat az *xini*, a függvényértékeket az *yini* változóba mentjük. Az inicializált kezdeti próbafüggvények a $\dot{x}_1(0) = 5.1149$ m/s kezdeti értékű periódikus pályához vannak felírva, ahol a paraméterek értéke $l_0 = 1$ m, $\kappa = 112.5$ N/(m kg), $\alpha = 0.5708$ rad, $\hat{E} = 21.5$ N/kg. A pszeudo-ív hossz iterációjában az *xini* és *yini* változókat mindig aktualizáljuk a peremfeladat megoldó által számított megoldással. Feltételezzük, hogy a változás a pálya képében folyamatos a paraméterek változásával. A MATLAB kód lényeges részei lentebb megtekinthetők.

```

1  for i = 1:imax
2  xi_p = start_pseudo_root_finding();
3  v = (xi_p-xi)/norm((xi_p-xi));
4  xi = xi_p;
5  end

1  function y = start_pseudo_root_finding()
2  mu = xi(1);
3  fun_PAM = @pseudo_root_finding;
4  x = fzero(fun_PAM,mu);
5  T_par1 = T_BVP(1);
6  T_par2 = T_BVP(2);
7  [T_BVP_1,T_BVP_2]=boundary_SLIP(T_par1,T_par2);
8  T_BVP=[T_BVP_1,T_BVP_2,T_BVP_1+T_BVP_2];
9  y = [x; T_BVP(3)];
10 end

1  function y = pseudo_root_finding(mu)
2  T_par1 = T_BVP(1);
3  T_par2 = T_BVP(2);
4  [T_BVP_1, T_BVP_2] = boundary_SLIP(T_par1, T_par2);
5  T_BVP = [T_BVP_1, T_BVP_2, T_BVP_1 + T_BVP_2];
6  a = v(1);
7  b = v(2);
8  c = xi(1);
9  d = xi(2);

```

```

10 T_i = (h - (mu - c)*a)/b + d;
11 y = T_i - T_BVP(3);
12 end

1 function [T1, T2] = boundary_SLIP(T_in1, T_in2)
2 global xdot10
3 global xini yini
4 xinit = xini;
5 par = [T_in1; T_in2];
6 solinit = bvpinit(xinit, @bvp_initial_guess, par);
7 sol = bvp5c(@bvp_fun, @bvp_bcs, solinit);
8 T1 = sol.parameters(1);
9 T2 = sol.parameters(2);
10 xini = sol.x;
11 yini = sol.y;
12 xdot10 = sol.y(3,1);
13 end

14
15 function G = bvp_initial_guess(t)
16 global xini yini
17 G = [interp1(xini,yini(1,:),t)
18      interp1(xini,yini(2,:),t,'spline')
19      interp1(xini,yini(3,:),t,'spline')
20      interp1(xini,yini(4,:),t,'spline')
21      interp1(xini,yini(5,:),t)
22      interp1(xini,yini(6,:),t,'spline')
23      interp1(xini,yini(7,:),t)
24      interp1(xini,yini(8,:),t)];
25 end

26
27 function dydx = bvp_fun(t,Y,par)
28 global kappa_f g l0
29 lambda = sqrt((-Y(1))^2 + (Y(2))^2)/10;
30 dydx = [par(1)*Y(3)
31          par(1)*Y(4)
32          par(1)*( (kappa_f/lambda - kappa_f)*Y(1) )
33          par(1)*( (kappa_f/lambda - kappa_f)*Y(2) - g )
34          par(2)*Y(7)
35          par(2)*Y(8)
36          par(2)*0
37          -par(2)*g];
38 end

39
40 function res = bvp_bcs(ya,yb,par)
41 global l0 alpha_f
42 global E_f g
43 res = [ya(1) + l0*sin(alpha_f)
44        ya(2) - yb(6)
45        ya(3) - yb(7)]

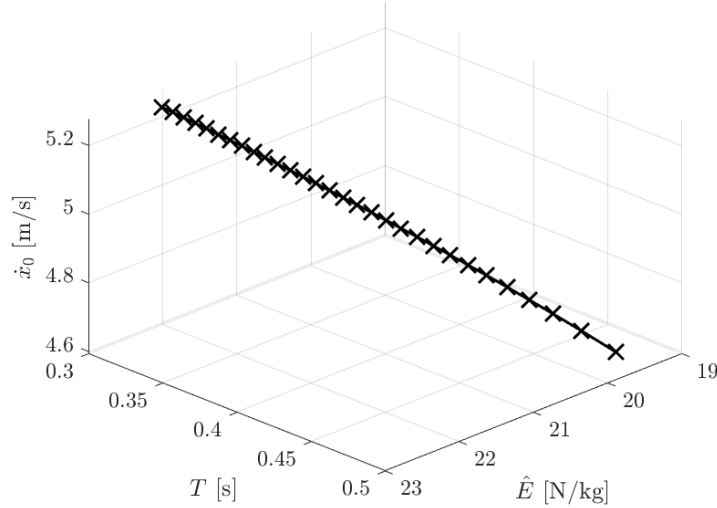
```

```

46 ya(4) - yb(8)
47 ya(5) - yb(1)
48 ya(6) - yb(2)
49 ya(7) - yb(3)
50 ya(8) - yb(4)
51 l0 - sqrt((yb(1))^2 + (yb(2))^2)
52 E_f - l0*cos(alpha_f)*g - (ya(3)^2 + ya(4)^2)/2];
53 end

```

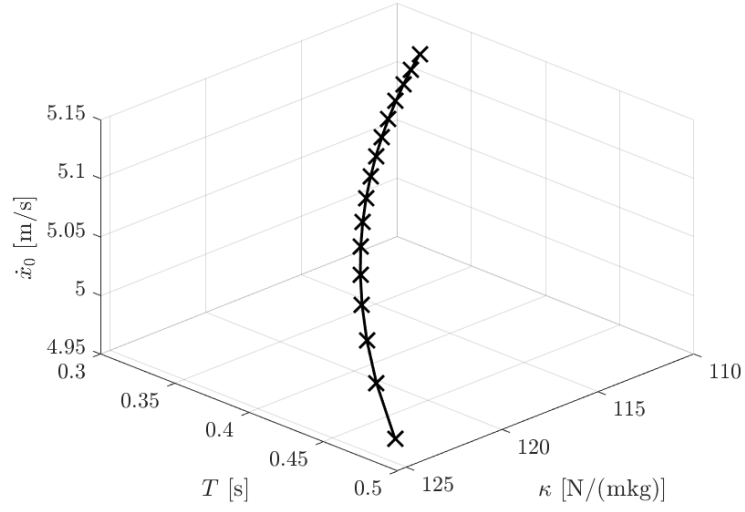
A rendszer paramétereit a κ , α , l_0 és \hat{E} , melyek közül tekintsük az l_0 -t fixen egységnyiinek. A másik három paramétert egyenként fogjuk bifurkációs paraméterként kezelni. A pszeudo-ív hossz módszer által megvalósított pályakövetés eredményei a 4.8., 4.9. és 4.10. ábrákon láthatók.



4.8. ábra. Pszeudo-ív hossz módszer pályakövetése, $\mu = \hat{E}$

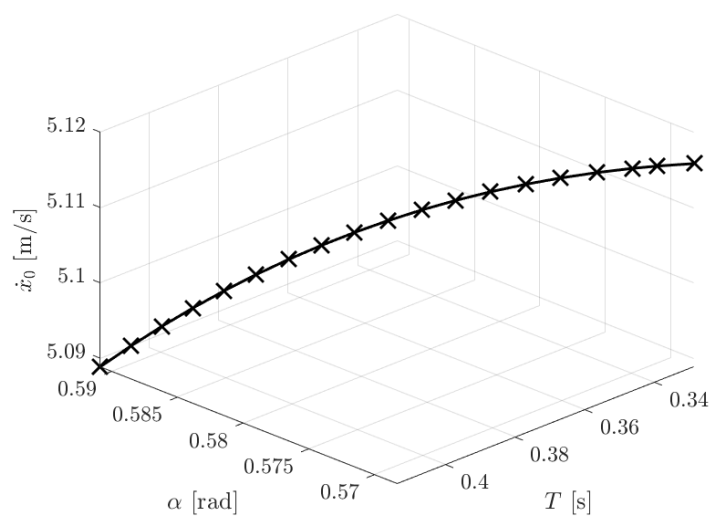
Megjegyzés: A (4.24) egyenletrendszer kipótolható egy harmadik egyenlettel, ami vonatkozhat a monodrómia mátrix sajátértékére; például kereshetjük azt a görbét, ami a stabilitáshatárt mondja meg, azaz amikor a nem triviális sajátérték $\lambda = 1$. Ekkor a mechanikai összeenergia már nem tekinthető paraméternek.

$$\begin{cases} 0 = \langle \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i \rangle - \Delta s, \\ 0 = T_{i+1} - T_{\text{BVP}}(\mu_{i+1}), \\ 0 = 1 - \lambda, \end{cases} \quad (4.33)$$



4.9. ábra. Pszeudó-ív hossz módszer pályakövetése, $\mu = \kappa$

$$\mathbf{x}_i = [\mu_i \quad T_i \quad \lambda_i]^T, \quad (4.34)$$



4.10. ábra. Pszeudó-ív hossz módszer pályakövetése, $\mu = \alpha$