

# Szakaszosan folytonos dinamikai rendszerek

Hős Csaba

2021. január 25.

# Tartalomjegyzék

<b>1. Ismétlés: folytonos dinamikai rendszerek kvalitatív elmélete</b>	<b>2</b>
1.1. Egyensúlyi helyzet . . . . .	3
1.2. Stabilitásvesztési formák . . . . .	3
1.3. Periodikus pályák, monodrómia mátrix [Zajcsuk Lilána - nincs kész] . . . . .	4
1.4. Bifurkációk . . . . .	5
1.4.1. Folytonos dinamikai rendszerek . . . . .	5
1.4.2. Leképezések . . . . .	5
1.4.3. Szakadások osztályozása . . . . .	5
<b>2. Filippov rendszerek [Horváth Hanna Zsófia - nincs kész]</b>	<b>7</b>
2.1. Példa: Munkahenger pozíciójának csúszómód szabályozása . .	9
<b>3. Korrekció a kapcsolófelületen</b>	<b>13</b>
3.1. Transzverzális metszés, hibrid dinamikai rendszer [Kádár Fanni - nincs kész] . . . . .	13
3.2. Példa . . . . .	16
3.3. Transzverzális metszés, általános eset . . . . .	17
3.4. Nem-transzverzális metszés: Grazing [Zsiros Ádám, impakt oszcillátor - nincs kész] . . . . .	19
3.4.1. 1DoF impakt oszcillátor . . . . .	19
3.4.2. Ütközés nélküli eset – monodrómia mátrix . . . . .	22
3.4.3. Ütközéssel – korrekciós mátrix . . . . .	23
3.4.4. Linearizálás . . . . .	24
3.5. Grazing . . . . .	24
3.6. Fixpont . . . . .	25
3.6.1. A "square root" leképezés . . . . .	25
3.6.2. Kódok – 1. . . . .	28

<b>4. Periodikus pályák numerikus követése (Patkó Dóra)</b>	<b>32</b>
4.1. Pszeudo-ív hossz módszer . . . . .	32
4.2. Periodikus pályák peremérték-megfogalmazása . . . . .	35
4.3. Pszeudo-ív hossz módszer alkalmazása periodikus pályák kö-	
vetéséhez . . . . .	38
4.3.1. Példa 1: tömeg-rugó rendszer . . . . .	38
4.3.2. Példa 2: spring loaded inverted pendulum modell . . .	39
<b>5. Square-root leképezés (Zsiros Ádám)</b>	<b>46</b>

## 1. fejezet

# Ismétlés: folytonos dinamikai rendszerek kvalitatív elmélete

Tekintsük az  $\dot{x} = f(x)$  dinamikai rendszert, ahol  $x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  és  $\mathcal{D}$  az értelmezési tartomány. Legyen  $\Phi(x, t)$  a megoldásoperátor (flow), amely az  $x$  kezdeti értéket a  $t$ -beli megoldásba viszi át:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, t) = f(\Phi(x, t)), \quad \Phi(x, 0) = x.$$

Vegyük észre, hogy amennyiben  $f$   $(r - 1)$ -szer  $(r > 1)$  differenciálható,  $\Phi$  egy fokkal simább.

Amennyiben a differenciálegyenlet rendszer jobb oldala explicit függene az időtől (azaz  $f(x, t)$ ), az időt új változóként bevezetve ( $x_{N+1} := t$ ) autonómmá tehetjük a rendszerünket az  $\dot{x}_{N+1} = f_{N+1}(x, t) = 1$  egyenlet csatolásával. Ez a "piszkos trükk" azonban sokat nem fog segíteni a későbbi stabilitásvizsgálatkor, mivel ehhez az egyenlethez a Jacobi mátrixban egy olyan sor és oszlop fog tartozni, melynek csak a  $\text{Jac}_{N+1, N+1} = 1$  eleme lesz nemnulla, így egy további 1-es (neutrális) sajátérték jelenik meg.

Egy *leképezésnek* a

$$x \mapsto f(x)$$

szabályt nevezzük, ahol  $x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ . A szabályt  $m$ -szer alkalmazva kapjuk, hogy  $\phi^m(x_0) = f^{(m)}(x_0)$ . Ezeket a rendszereket szokás az ún. pókháló-diagramon ábrázolni, ahol  $x_{n+1}$ -et  $x_n$  függvényében ábrázoljuk.

*Invariáns halmaznak* egy olyan  $\Lambda \subset \mathcal{D}$  részhalmazt nevezünk, hogy ha  $x_0 \in \Lambda$  akkor  $\Phi(x_0, t) \in \Lambda$  minden  $t$ -re. Például egyensúlyi helyzet, illetve

periodikus pálya, melyek természetesen lehetnek stabilak vagy instabilak.

A dinamikai rendszereink gyakran függeni fognak valamilyen paraméterektől, ezért gyakran írjuk fel ezeket  $\dot{x} = f(x, \mu)$  alakban, ahol  $\mu \in \mathbb{R}^p$  a paramétervektor.

## 1.1. Egyensúlyi helyzet

Az  $\dot{x} = f(x)$  dinamikai rendszer *egyensúlyi helyzetének* a  $0 = f(x^*)$  egyenletet kielégítő  $x^*$  pontot (vagy pontokat) nevezzük. Az egyensúlyi helyzet körül sorbafektve a jobboldalt kapjuk ( $x := x^* + y$ ), hogy

$$\dot{y} := \frac{d}{dt}(x - x^*) = f(x^*) + f_x(x^*)y + O(y^2).$$

A differenciálegyenlet jobb oldalának linearizáltját *Jacobinak* nevezzük,  $(f_x)_{i,j} = \partial f_i / \partial x_j$ .

A Hartman-Grobman tétel értelmében egy hiperbolikus egyensúlyi helyzet közelében a dinamika *lokálisan topologikusan ekvivalens* a linearizált rendszer dinamikájával.

Az egyensúlyi helyzet típusát a Jacobi mátrix  $x^*$ -hoz tartozó sajátértékei  $(\lambda_1, \lambda_2)$  határozzák meg.

- $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$  esetén  $x^*$  csomópont, amely  $\lambda_{1,2} > 0$  esetén instabil,  $\lambda_{1,2} < 0$  esetén stabil.
- $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$  esetén  $x^*$  nyeregpon (instabilnak tekinthető).
- $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$  komplex konjugált párok ( $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ) esetén  $x^*$  fókusz, amely a valós rész előjelétől függően lehet instabil ( $\alpha > 0$ ) vagy stabil ( $\alpha < 0$ ). Tisztán képzetes sajátértékek esetén centrumról beszélünk, amely mindig stabil, de nem aszimptotikus értelemben.

Az egyensúlyi helyzetet *hiperbolikusnak* nevezzük, ha a Jacobi mátrix minden sajátértéke nemnulla valós részű, vagyis csomópontról vagy nyeregpontról beszélünk. (Az elnevezés szerencsétlen, nem kell hiperbolikusnak lenniük a trajektóriáknak.)

WR: Stabilitásvesztési formák, saddle-node, Hopf

## 1.2. Stabilitásvesztési formák

Alapvetően két esetet különböztetünk meg kétdimenziós rendszerek esetén: nyereg-csomópont bifurkáció, illetve Hopf-bifurkáció. Előbbi esetében a Ja-

cobi mátrix legalább egy valós sajátérték válik pozitívvá, rezgések nem jelennek meg. Míg az utóbbi esetben legalább egy komplex sajátérték pár valós része lesz nagyobb, mint nulla. Ezen belül is előfordulhat lágy, illetve kemény stabilitásvesztést. Előbbi esetében a rezgések amplitúdója folytonosan növekszik a bifurkációt előidéző paraméterrel, míg utóbbinál a rezgés megjelenésénél (és eltűnésénél) az amplitúdó ugrásszerűen jelenik meg (tűnik el).

### 1.3. Periodikus pályák, monodrómia mátrix [Zajcsuk Lilána - nincs kész]

Tekintsük az  $\dot{x} = f(x)$  dinamikai rendszer  $x(t) = p(t)$   $T$  periódusú periodikus pályáját, azaz  $p(t) = p(t + T)$ . A pálya közelében szeretnénk a dinamikát vizsgálni, ezért megkonstruáljuk az ún. *Poincaré metszetet*, amely egy  $n - 1$  dimenziós  $\Pi$  felület, amely tartalmazza az  $x_p = x(t^*)$  pontot és transzverzálisan metszi a pályát (= nem érinti).

Legyen a Poincaré metszetet definiáló felület:  $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n : \pi(x) = 0\}$ ! Ekkor a transzverzális feltétele, hogy Poincaré felületre merőleges vektornak  $(\pi_x)$   $x_p$ -ben legyen a trajektória irányába eső vetülete, azaz  $\pi_x(x_p)f(x_p) = \langle \pi_x(x_p), f(x_p) \rangle > 0$ .

A Poincaré leképezés ezek után, ha  $x$  megfelelően közel van  $x_p$ -hez, a  $P(x) = \Phi(x, \tau(x))$  alakban írható, ahol  $\tau(x)$ -et (a megzavart pálya periódusidejét) a  $\pi(\Phi(x, \tau(x)))$  egyenlet definiálja.

A periodikus pálya stabilitását az ún. *monodrómia mátrix* kiszámításával lehet vizsgálni, melyhez az  $\dot{y} = f'(p(t))y$ , ahol  $p(t)$  a periodikus pálya, variáció egyenlet *fundamentális megoldását* kell  $t = T$  pillanatban kiszámítani, ahol  $T$  a periódusidő. A mátrix a következőképp áll össze:

$$\mathbf{M} = [\Phi_p(\mathbf{e}_1, T) \quad \Phi_p(\mathbf{e}_2, T) \quad \dots \quad \Phi_p(\mathbf{e}_n, T)]$$

ahol  $\Phi_p$  a variáció egyenlet fundamentális megoldás operátora,  $\mathbf{e}_i$  az  $i$ -edik egységvektor. Az  $\mathbf{M}$  mátrix egyik sajátértéke mindig 1, ha minden további 1 alatti, akkor a periodikus pálya stabil.

**Példa.** Tekintsük a következő rendszert:  $\dot{r} = \mu r(1 - r^2)$  és  $\dot{\phi} = 1$ . Észrevehető, hogy a  $p(t) = \{(x, y) = (\cos t, \sin t) : t \in \mathbb{R}\}$  görbe határciklus. Ekkor a variáció egyenlet

$$f'(p(t)) = \begin{bmatrix} 1 - 3x^2 - y^2 & -1 - 2xy \\ 1 - 2xy & 1 - x^2 - 3y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\cos^2 t & -1 - 2\sin t \cos t \\ 1 - 2\sin t \cos t & -2\sin^2 t \end{bmatrix}$$

A rendszer megoldás operátorával kiértékelhető a monodrómia mátrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} e^{-4\pi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mivel  $e^{-4\pi} < 1$ ,  $p(t)$  pálya stabil.

Leképezésekre:  $x^* = f^{(n)}(x^*)$  és hiperbolikus, ha a linearizált egyenlet egyik sajátértéke sem fekszik az egységkörön.

Monodrómia mátrix kiszámítása + analitikus példa

## 1.4. Bifurkációk

### 1.4.1. Folytonos dinamikai rendszerek

Tekintsük újra a parametrizált megoldást,  $x(\mu)$ -t! Ez a görbe implicit alakban is meg lehet adva:  $G(x, \mu) = 0$ . Bifurkációnak nevezzük azt a  $\mu_0$  pontot, ahol az Implicit Függvény Tétel érvényét veszíti:

*Implicit Függvény Tétel:* tfh. valamilyen  $\mu = \mu_0$  pontban létezik egy  $x = x_0$  megoldása a (sima)  $G(x, \mu) = 0$  egyenletnek, ahol  $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ekkor, feltéve, hogy  $G_x(x_0, \mu_0)$  nem szinguláris, létezik (lokálisan) egy sima  $x(\mu)$  függvény úgy, hogy  $x(\mu_0) = x_0$ .

Megjegyzés: ha nem is tudom kifejezni  $x(\mu)$ -t zárt alakban (pl. egységkör), elegendő bizonyítani, hogy  $G_x(x_0, \mu_0)$  nem szinguláris és akkor létezik a fenti görbe.

Példák:

- $G(x, \mu) = f(x, \mu)$  - egyensúlyi helyzet bifurkációja.
- $G(x, \mu) = \max(\Re(\lambda_i))$ , ez egy bifurkációs vonal (lineáris stabilitás határa).

### 1.4.2. Leképezések

### 1.4.3. Szakadások osztályozása

Legyen  $x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ ,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  adott függvény és  $x_0 \in \mathcal{D}$ . Az  $f$  függvény folytonos az  $x_0$ -ban, ha  $f$ -nek létezik határértéke  $x_0$ -ban és az megegyezik a függvény helyettesítési értékével, azaz

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ha az  $f$  függvény a  $\mathcal{D}$  halmaz minden pontjában folytonos, akkor  $f$  folytonos függvény. Ha az  $f$  függvény az értelmezési tartományának valamely pontjában nem folytonos, akkor a függvénynek ott szakadási helye van.

- Az  $f$  függvénynek  $x_0$ -ban elsőfajú szakadása van, ha  $x_0$ -ban létezik a jobb-, illetve baloldali véges határértéke.
- Ha a jobb-, illetve baloldali véges határérték megegyezik, akkor ez a szakadás megszüntethető.
- A függvény szakadási helye másodfajú, ha nem elsőfajú.

Szakadások osztályozása



## 2. fejezet

# Filippov rendszerek [Horváth Hanna Zsófia - nincs kész]

Tekintsük a

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x), & \text{ha } H(x) > 0 \\ F_2(x), & \text{ha } H(x) < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

dinamikai rendszert. Feltesszük, hogy  $F_1|_{H(x)=0} \neq F_2|_{H(x)=0}$ , azaz a két vektormező különböző szögben éri el a

$$\Sigma = \{x : H(x) = 0\} \quad (2.2)$$

úgynevezett, *kapcsolófelületet* (*discontinuity surface* vagy *switching manifold*). Kapcsolófelületre mutat példát a 2.1. ábrán látható fekete szaggatott vonal.

Továbbá bevezetjük

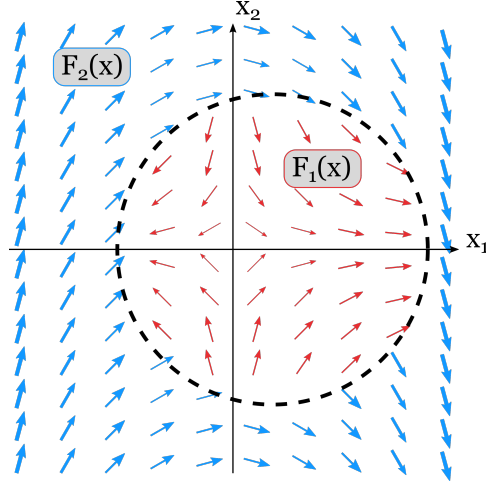
$$H_x = \nabla H = \left( \frac{\partial H}{\partial x_1} \quad \frac{\partial H}{\partial x_2} \quad \dots \right)^T \quad (2.3)$$

*gradienst*, amely  $F_1$  növekedésének irányába mutat és merőleges a felületre.

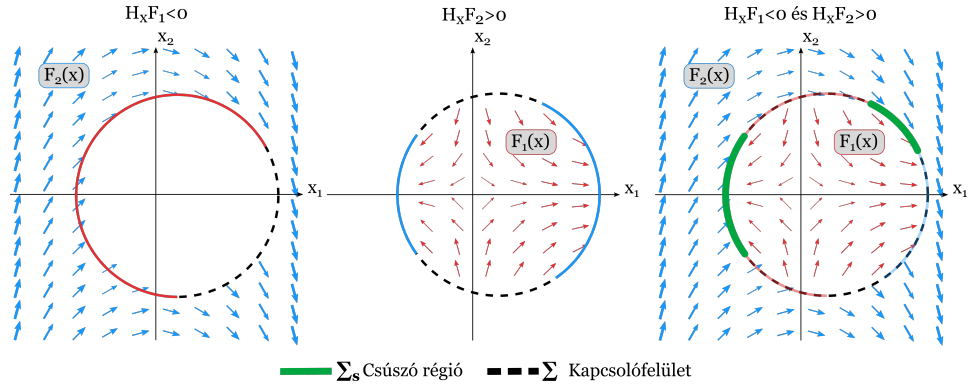
*Csúszófelületnek* (sliding region) nevezzük a  $\Sigma$  kapcsolófelület azon részhalmazát, melyre  $\langle F_1, H_x \rangle < 0$  és  $\langle F_2, H_x \rangle > 0$  skalárszorzat teljesül. Ezen felületet  $\Sigma_s$ -ként jelöljük, ahol  $s$  index a *sliding*-ra utal. A csúszófelületen a két dinamikai rendszerhez tartozó trajektóriák csúszófelületre merőleges komponensei egymás felé, azaz befelé mutatnak. Csúszófelületre mutat példát a 2.2. ábra.

A csúszófelületen uralkodó dinamikát az

$$F_s = F_1(1 - \alpha) + F_2\alpha \quad (2.4)$$



2.1. ábra. Példa kapcsolófelületre (jelen esetben egy kör), amely elválasztja a két dinamikát egymástól.



2.2. ábra. Példa csúszófelületre.

egyenlet írja le. Vagyis lineárisan interpolálunk a két vektormező között oly módon, hogy  $\alpha$ -t úgy adjuk meg, hogy  $F_s \perp H_x$  teljesüljön. Ez akkor lesz igaz, ha  $F_s$  és  $H_x$  skaláris szorzata zérus:

$$\langle F_s, H_x \rangle = 0, \quad (2.5)$$

tehát

$$\langle F_s, H_x \rangle = \langle F_1, H_x \rangle (1 - \alpha) + \langle F_2, H_x \rangle \alpha = 0, \quad (2.6)$$

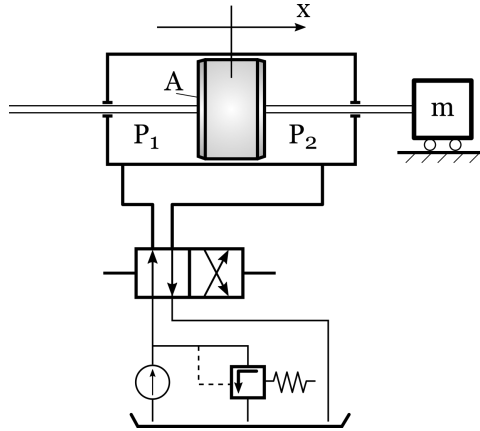
melyből kifejezhető  $\alpha$  értéke a következőképpen:

$$\alpha = \frac{\langle F_1, H_x \rangle}{\langle F_1 - F_2, H_x \rangle}. \quad (2.7)$$

Jellemzően a  $\sum_s$  csúszófelületen a dinamika nagyon egyszerű és exponenciálisan tart(hat) az egyensúlyi helyzet felé (ha van ilyen). Ezt hívjuk *csúszómód szabályozásnak* (*sliding mode control*).

## 2.1. Példa: Munkahenger pozíciójának csúszómód szabályozása

Tekintsük a 2.3. ábrán látható elrendezést, mely munkahenger pozíciójának csúszómód szabályozására mutat példát. A hidraulikus tápegység (nyomásforrás) valamekkora  $\Delta\tilde{p} > 0$  konstans nyomást tud kiadni. A hengervezérlő szelep állásától függően a hidraulikus munkahengerbe  $+\Delta\tilde{p}$  vagy  $-\Delta\tilde{p}$  nyomás kerül. Ennek hatására a hengerfej jobbra vagy balra mozdul el. Célunk, hogy a munkahengert  $x_k$  kívánt pozícióba juttassuk a munkahenger csúszómód szabályozása által. Ehhez rendelkezésünkre áll egy PD szabályozó.



2.3. ábra. Munkahenger szabályozása.

A dugattyú mozgását az alábbi másodrendű differenciálegyenlettel írhatjuk le:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} = A\Delta p, \quad (2.8)$$

ahol

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \begin{cases} +\Delta\tilde{p}, & \text{ha } H(x) > 0 \\ -\Delta\tilde{p}, & \text{ha } H(x) < 0 \end{cases}. \quad (2.9)$$

A szabályozás során a munkahengert az  $x_k = 0$  pozícióba kívánjuk mozgatni. Ehhez a  $H(x)$  függvényt egy PD szabályozási stratégia alapján írjuk elő:

$$H(x) = -P(x - x_k) - D\dot{x} = -Px - D\dot{x}, \quad (2.10)$$

ahol az arányos és differenciáló tagok pozitívak:  $P > 0$  és  $D > 0$ . A dinamikai rendszert az

$$x = (x_1 \ x_2)^T = (x \ v)^T \quad (2.11)$$

változó bevezetésével elsőrendű alakra hozzuk. Ekkor a két vektormező a következő alakú:

$$F_1(x) = \left( \frac{A\Delta\tilde{p}}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_2 \right), \quad F_2(x) = \left( -\frac{A\Delta\tilde{p}}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_2 \right). \quad (2.12)$$

Mivel  $\dot{x} = v = x_2$ , a  $H(x)$  által meghatározott kapcsolóvonal egyenlete a (2.10) egyenlet alapján

$$\Sigma = \left\{ x : x_2 = -\frac{P}{D}x_1 \right\}, \quad (2.13)$$

a kapcsolóvonalra merőleges irányt kijelölő  $H_x$  gradiens pedig

$$H_x = \begin{pmatrix} -P \\ -D \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

A kapcsolóvonal  $\Sigma_s$  csúszó régiója a

$$\langle F_1, H_x \rangle = -Px_2 - \frac{DA\Delta\tilde{p}}{m} + \frac{Dk}{m}x_2 < 0, \quad (2.15)$$

valamint az

$$\langle F_2, H_x \rangle = -Px_2 + \frac{DA\Delta\tilde{p}}{m} + \frac{Dk}{m}x_2 > 0 \quad (2.16)$$

egyenlőtlenségek által adott. Ezekből a csúszó régió:

$$\Sigma_s = \{x : -x_2^* < x_2 < x_2^*\}, \quad (2.17)$$

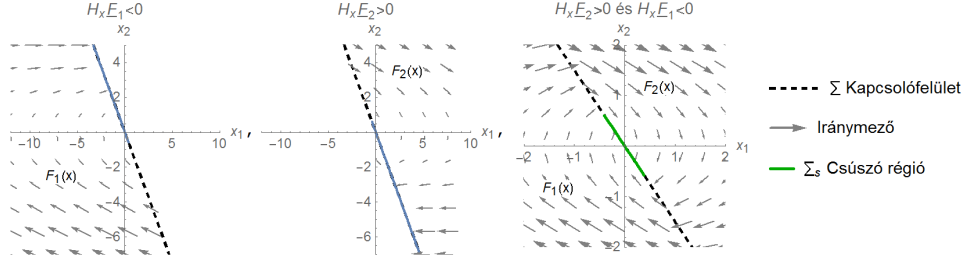
ahol

$$x_2^* = \frac{DA\Delta\tilde{p}}{|Dk - Pm|}. \quad (2.18)$$

A két vektormezőt, a kapcsolófelületet és a csúszó régiót szemlélteti a 2.4. ábra.

A  $\Sigma_s$ -en érvényes dinamikát a korábban leírt

$$F_s = F_1(1 - \alpha) + F_2\alpha \quad (2.19)$$



2.4. ábra. Munkahenger csúszómód szabályozása.

vektormező határozza meg, ahol

$$\alpha = \frac{\langle F_1, H_x \rangle}{\langle F_1 - F_2, H_x \rangle} = \frac{-Px_2 - D \left( \frac{A\Delta\tilde{p}}{m} - \frac{k}{m}x_2 \right)}{-D \frac{2A\Delta\tilde{p}}{m}}. \quad (2.20)$$

Ezt  $F_s$ -be visszahelyettesítve, a kapcsolóvonalra megszorított dinamika

$$\begin{aligned} F_s &= F_1(1 - \alpha) + F_2\alpha = F_1 + \alpha(F_2 - F_1) = \\ &= \left( \frac{A\Delta\tilde{p}}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_2 \right) + \alpha \left( -\frac{2A\Delta\tilde{p}}{m} \right) = \left( \frac{x_2}{-D}x_2 \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

vagyis

$$\dot{x}_1|_{\Sigma_s} = x_2, \quad \dot{x}_2|_{\Sigma_s} = -\frac{P}{D}x_2. \quad (2.22)$$

Megjegyzés:  $F_s$  második komponensét a  $\Sigma$  kapcsolóvonal egyenletének idő szerinti deriválásával is meg lehet kapni.

A kapcsolóvonalra megszorított dinamika egy exponenciálisan csillapodó sebességű mozgást ír le, és a rendszer a kapcsolóvonalon tart a  $(0 \ 0)^T$  egyensúlyi helyzethez. A  $P/D$  hányados növelésével a beállítás gyorsasága növelhető, hiszen ekkor a csúszó megoldás egyre gyorsabban tart az origóhoz. Viszont annak érdekében, hogy a sliding mode lehetséges legyen, a (2.18) egyenletben leírt  $x_2^*$  kifejezésnek pozitívnak kell lennie, így adódik, hogy

$$\frac{DA\Delta\tilde{p}}{|Dk - Pm|} > 0, \quad (2.23)$$

ami akkor teljesül, ha

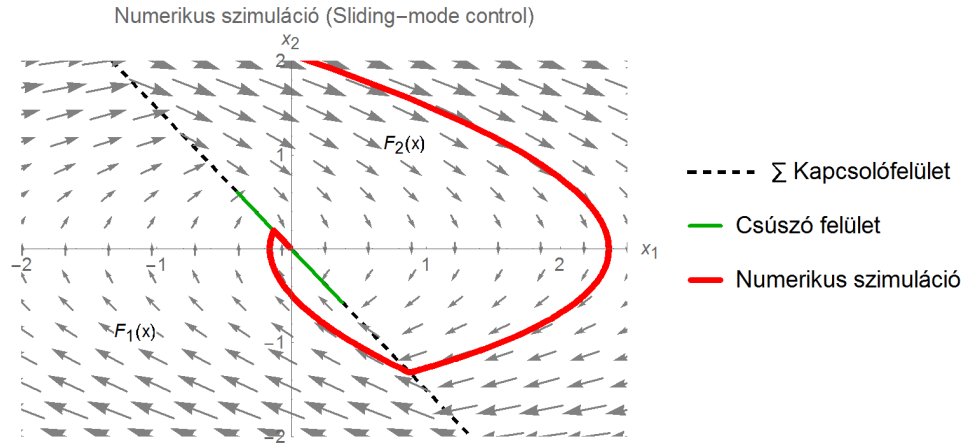
$$\frac{P}{D}m < k, \quad (2.24)$$

amiből látszik, hogy a viszkózus csillapítás nem lehet akármekkora. A csúszómód terület csökken, ha  $P/D$  nő, akár el is tűnhet.

Szimulációs példát mutat a 2.5. ábra. A szimuláció során felhasznált paraméterértékeket a 2.1. táblázat tartalmazza.  $x_1(0) = -12$  m és  $x_2(0) = 0.2$  m/s kezdeti feltételekkel indítva a szimulációt, a kapcsolófelületen áthaladva, a csúszó felületre kerül a megoldás, majd a rendszer a kapcsolóvonalon tart a  $(0\ 0)^T$  egyensúlyi helyzethez.

2.1. táblázat. Paraméterértékek

$P$ [1/s]	$D$ [1]	$m$ [kg]	$A$ [m <sup>2</sup> ]	$\Delta\tilde{p}$ [Pa]	$k$ [Ns/m]
0.3	0.2	0.7	0.5	1	0.1



2.5. ábra. A csúszómód szabályozás által eredményezett trajektória. Kezdeti feltételek:  $x_1(0) = -12$  m,  $x_2(0) = 0.2$  m/s.

## 3. fejezet

# Korrekció a kapcsolófelületen

### 3.1. Transzverzális metszés, hibrid dinamikai rendszer [Kádár Fanni - nincs kész]

formázás + képletek ellenőrzése

(Könyv 2.5.1)

Tekintsük az alábbi hibrid dinamikai rendszert:

$$\dot{x} = F(x), \quad (3.1)$$

melynek fundamentális megoldása  $\Phi(x, t)$  és

$$x \mapsto R(x), \quad (3.2)$$

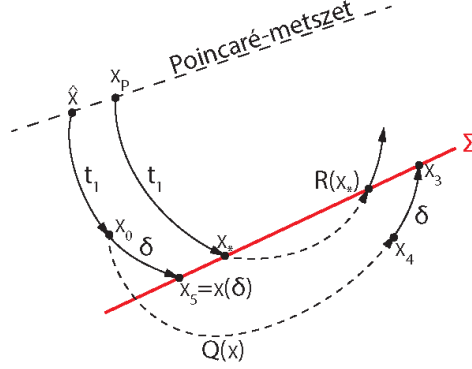
leképezés a  $\Sigma := \{x, H(x) = 0\}$ -n. Kérdés: hogyan számítsuk ki egy olyan periodikus pálya stabilitását, mely "ütközik"?

Jelölje (lásd ábra):

- $x^* = \Phi(x_p, t_1)$ , ahol  $x_p$  a periodikus pálya egy pontja
- $x_0 = \Phi(\hat{x}, t_1)$ , ahol  $\hat{x}$  a perturbált pálya egy  $x_p$  melletti pontja
- $x_3 = R(\Phi(\hat{x}, t_1 + \delta))$

Keressük azt a  $Q(x)$  leképezést, melyre teljesül, hogy

$$x_4 = Q(x_0),$$



3.1. ábra. Periodikus pálya a kapcsolóvonal közelében.

ahol

$$x_4 = \Phi(x_3, -\delta) = \Phi(\underbrace{R(\Phi(x_0, \delta))}_{x_5}, -\delta).$$

Másképp fogalmazva, melyik az a leképezés, amely  $\hat{x}$ -ből indítva  $t_1$ -ig (és *nem*  $t_1 + \delta$ -ig) integrálva olyan pontba visz, hogy onnan újabb  $\delta$ -ig integrálva a helyes  $x_3$  pontba érkezünk? Másképp fogalmazva meghatározandó az a  $Q(x)$  leképezés, amely  $x_0$  pont  $x_4 = Q(x_0)$  képéből indulva  $\delta$  ideig integrálva ugyanúgy  $x_3$ -ba visz, mintha  $x_5$  pontban alkalmaztuk volna az  $R(x)$  leképezést.

Tehát meg kell konstruálnunk a  $x_0 \mapsto Q(x_0) = x_4$  leképezést. A megoldást  $x_0$  körül, kis  $\delta$  értékekre sorbafejtve kapjuk, hogy:

$$x_5 = x(\delta) = \Phi(x_0, \delta)|_{t=0} = x_0 + \delta F(x_0) + \mathcal{O}(\delta^2). \quad (3.3)$$

Legyen  $x_0 = x^* + \Delta x$ , ezt behelyettesítve a fenti egyenletbe kapjuk, hogy

$$x(\delta) = x^* + \Delta x + \underbrace{\delta F(x^* + \Delta x)}_{F|_{\Delta x=0} = F(x^*) + \underbrace{\Delta x \cdot \underbrace{\quad}_{\delta \Delta x \approx 0}}} + \mathcal{O}(\delta^2) = x^* + \Delta x + \delta F(x^*) + \mathcal{O}(\delta^2, \delta \Delta x, \Delta x^2) \quad (3.4)$$

Másrésről, mivel  $x_5 = x(\delta)$  rajta van a kapcsolófelületen:

$$0 = H(x(\delta)) = H(x^* + \Delta x + \delta F(x^*) + \mathcal{O}(\delta^2, \delta \Delta x, \Delta x^2)), \quad (3.5)$$



valamint  $H(x)$  sorfejtése  $x^*$  körül

$$H(x)|_{x=x^*} = \underbrace{H(x^*)}_{=0} + H_x(x^*)(x - x^*) + \mathcal{O}(\|x - x^*\|^2), \quad (3.6)$$

tehát:

$$O = H_x(x^*)(\Delta x + \delta F(x^*)) + \mathcal{O}(2). \quad (3.7)$$

Így  $\delta$ -ra adódik, hogy:

$$\delta = -\frac{H_x(x^*)\Delta x}{H_x(x^*)F(x^*)} + \mathcal{O}(2), \quad (3.8)$$

amely azt jelenti, hogy a kapcsolófelület  $H_x(x)$  gradiensét kell kiértékelni  $x^*$  helyen ahhoz, hogy becslést tudjunk adni a szükséges korrekcióra. A becslés hibája  $\mathcal{O}(2)$ , így a kapcsolófelület ferdeségét figyelembe véve becsülhető a  $\delta$  idő, amely alatt a zavart  $\hat{x}$  pontból indított megoldás  $t_1$  idő elteltét követően elérte volna a kapcsolófelületet.

Továbbá:

$$x_3 = R(x(\delta)) = R(x^* + \Delta x + \delta F(x^*) + \mathcal{O}(2)), \quad (3.9)$$

$$x_4 = \Phi(x_3, -\delta)|_{t=0} = x_3 - \delta F(x_3) + \mathcal{O}(\delta^2), \quad (3.10)$$

$$x_4 = \Phi(x_3, -\delta)|_{t=0} = x_3 - \delta F(x_3) + \mathcal{O}(\delta^2), \quad (3.11)$$

$$(3.12)$$

amiből az  $x_4$  az  $x^*$  körül:

$$\begin{aligned} x_4|_{x^*} &= \underbrace{R(x^*) + R_x(x^*)}_{x_3} \overbrace{(\Delta x + \delta F(x^*))}^{-x^* + x(\delta)} - \delta F(\underbrace{R(x^* + \Delta x + \delta F(x^*))}_{x_3}) + \mathcal{O}(2) = \\ &= R(x^*) + R_x(x^*)\Delta x + \delta[R_x(x^*)F(x^*) - F(R(x^*))] + \mathcal{O}(2). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Mivel  $\Delta x = x_0 - x^*$  a keresett  $x_0 \mapsto Q(x_0) = x_4$  leképezés, ezért

$$Q(x_0)|_{x^*} = R(x^*) + R_x(x^*)\Delta x - \frac{H_x(x^*)\Delta x}{H_x(x^*)F(x^*)}(R_x(x^*)F(x^*) - F(R(x^*))), \quad (3.14)$$

ahol az  $x_0$  aktuális helye függ az  $\hat{x}$ -től, tehát a perturbáció mértékétől, így  $\Delta x$  szintén a zavarástól függ.  $Q_x$  leképezés szintén linearizálható  $x^*$  körül, amely  $x_0$  helyen:

$$Q(x_0)|_{x^*} = R(x^*) + Q_x(x^*)\Delta x. \quad (3.15)$$

Ebból a 3.15 egyenletben szereplő  $Q_x(x^*)$  mátrix meghatározható  $\Delta x$  együtt-hatásainak kigyűjtésével 3.14 egyenletből:

$$Q_x(x^*) = R_x(x^*) + \frac{F(R(x^*)) - R_x(x^*)F(x^*)}{H_x(x^*)F(x^*)} H_x(x^*). \quad (3.16)$$

### 3.2. Példa

Vegyük a következő folytonos rendszert:

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - 2\xi x_2 + \cos(\omega t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix},$$

továbbá a kapcsolóvonal  $H(x) = x_1 - \delta$ , vagyis  $x_1 = \delta$ -nál fal van, így  $R(x) = (x_1, -rx_2, x_3)^T$ , melynek  $x$  szerinti deriváltja

$$R_x(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Megj.:  $\delta$  a levezetések során egy időtartamot jelölt, a feladatbeli jelentése egy távolság.)

A becsapódás normál sebessége:  $v = H_x(x^*)F(x^*) = x_2^*$ , továbbá jelölje  $a^-$  és  $a^+$  az ütközés előtti és utáni pillanatbeli értékeket, vagyis  $a^- = -x_1^* - 2\xi x_2^* + \cos(\omega t)$  és  $a^+ = -x_1^* + 2\xi r x_2^* + \cos(\omega t)$ .

$$\begin{aligned} \text{Ezekkel: } Q_x &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_x(x^*)} + \underbrace{\frac{1}{v}}_{\frac{1}{H_x(x^*)F(x^*)}} \left( \underbrace{\begin{pmatrix} -rv \\ a^+ \\ 1 \end{pmatrix}}_{F(R(x^*))} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_x(x^*)} \underbrace{\begin{pmatrix} v \\ a^- \\ 1 \end{pmatrix}}_{F(x^*)} \right) \underbrace{(1 \ 0 \ 0)}_{H_x(x^*)} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{v} \begin{pmatrix} -rv - v \\ a^+ + ra^- \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{v} \begin{pmatrix} -rv - v & 0 & 0 \\ a^+ + ra^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & 0 & 0 \\ \frac{a^+ + ra^-}{v} & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Megj.: A skalár gradiensét (pl. most:  $H_x(x)$ ) sorvektorként értelmezzük, ami egybevág azzal, hogy a Jacobi mátrix sorai is a vektor adott elemének mint skalárnak a gradiensét tartalmazzák)

### 3.3. Transzverzális metszés, általános eset

Korrekción a kapcsolósíkon

Általános eset definíciója:

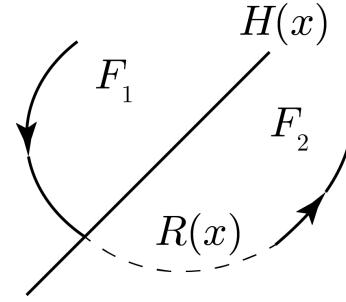
$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x), & \text{ha } H(x) > 0 \\ F_2(x), & \text{ha } H(x) < 0, \end{cases}$$

ahol  $x \rightarrow R(x)$ , ha  $H(x) = 0$ .

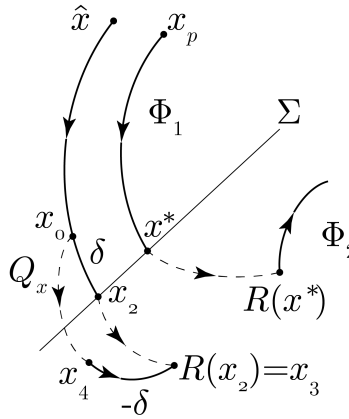
Továbbá  $R(x)$ -nek nem kötelező a kapcsolósíkra leképeznie (lásd 3.2. ábra).

A  $Q(x)$  korrekciós leképezés alatt a következő érthető: (lásd 3.3. ábra)  $\Sigma = \{x, H(x) = 0\}$ ,  
 $x^* = \Phi_1(x_p, t)$ ,  
 $x_0 = \Phi_1(\hat{x}, t_1) \rightarrow x_2 = \Phi_1(x_0, \delta)$ ,  
 $x_4 = \Phi_2(x_3, -\delta)$ ,

$$x_0 \rightarrow x_4 = Q(x_0) = \Phi_2(\underbrace{R(\overbrace{\Phi_1(x_0, \delta)}^{x_2})}_{x_3}, -\delta)$$



3.2. ábra.  $R(x)$  nem kapcsolósíkra képez le.



3.3. ábra. Korrekció származtatása ha  $R(x)$  nem kapcsolósíkra képez le.

$Q(x)$  linearizáltjára adódik, hogy:

$$Q_x(x^*) = R_x(x^*) + \frac{(F_2(R(x^*)) - R_x(x^*)F_1(x^*))H_x(x^*)}{H_x(x^*)F_1(x^*)} \quad (3.17)$$

és  $H_x(x^*)F_1(x^*) \neq 0$  transzverzális metszés.

**Példa 1.)** Filippov rendszer csúszás nélkül, azaz  $F_1|_{\Sigma} \neq F_2|_{\Sigma}$ , valamint  $R(x) = x$ , azaz önmagába leképezés.

Ilyenkor:

$$Q_x = I + \frac{(F_2 - F_1)H_x}{H_x F_1}, \text{ mert } R(x) = I.$$

**Példa 2.)** Ütközéses dinamikai rendszer, ahol  $F_1 = F_2 = F$ . Így  $Q(x)$  :

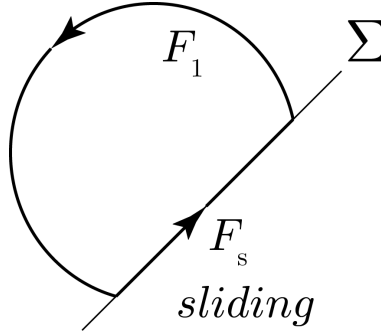
$$Q_x(x^*) = R_x(x^*) + \frac{(F(R(x^*)) - R_x(x^*)F(x^*))H_x(x^*)}{H_x(x^*)F(x^*)}$$

**Példa 3.)** Filippov rendszer csúszással, azaz

$$F_s = F_{12} = (1 - \alpha)F_1 + \alpha F_2, \text{ és } \alpha = \frac{H_x F_1}{H_x(F_1 - F_2)}.$$

Ekkor

$$Q_x = F + \frac{(F_{12} - F_1)H_x}{H_x F_1}$$



3.4. ábra. Filippov rendszer csúszással

### 3.4. Nem-transzverzális metszés: Grazing [Zsiros Ádám, impakt oscillátor - nincs kész]

Tekintsük az alábbi rendszert:

$$\dot{x} = F(x), \quad \text{ahol } x \in S^+ = \{x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n : H(x) > 0\}, \quad (3.18)$$

amely a

$$\Sigma := \{x \in \mathcal{D} : H(x) = 0\} \quad (3.19)$$

felületen ütközik az

$$x^+ = R(x^-) := x^- + W(x^-)v(x^-) \quad (3.20)$$

leképezés által kijelölt módon.  $H(x)$  a kapcsolóvonal egyenlete,  $x^+$  az ütközés utáni állapotváltozó,  $x^-$  pedig az ütközés előtti állapotváltozó. Az ütközés pillanatában a kapcsolófelületre merőleges sebességet és gyorsulást a

$$v(x) = H_x F(x), \quad (3.21)$$

a gyorsulást pedig

$$a(x) = (H_{xx} + H_x F_x)F(x) \quad (3.22)$$

összefüggés segítségével számíthatók ki.

#### 3.4.1. 1DoF impakt oszcillátor

Az 1 DoF impakt oszcillátor dimenziótlan egyenlete az alábbi:

$$u''(t) + 2\zeta u'(t) + u(t) = w(t), \quad u(t) > \sigma, \quad \zeta > 0. \quad (3.23)$$

A  $t = t_0$  (ütközéskori) időpillanatban az alábbi leképezés valósul meg:

$$f(u^-, v^-) := (u^+, v^+), \quad (3.24)$$

ahol közvetlenül az ütközés előtti pozíció és sebesség

$$u^- = u(t_0), \quad (3.25)$$

$$v^- = v(t_0) = \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=t_0}, \quad (3.26)$$

továbbá a közvetlenül az ütközés utáni pozíció és sebesség felírható az alábbi módon:

$$u^+ = u^-, \quad (3.27)$$

$$v^+ = -rv^-, \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (3.28)$$

Megjegyzés:  $1 - r^2$  meghatározza az ütközés során elnyelt mozgási energia-arányt.  $r$  a különböző anyagok tulajdonságaitól függ,  $r = 0.95$  az acélrúd esetének felel meg,  $r = 1$  a tökéletesen rugalmas és  $r = 0$  a tökéletesen rugalmatlan ütközésnek felel meg. Az általunk vizsgált esetben  $w(t) = \cos(\omega t)$  a periodikus gerjesztés  $\frac{2\pi}{\omega}$  periódussal:

$$u''(t) + 2\zeta u'(t) + u(t) = \cos(\omega t), \quad u > \sigma. \quad (3.29)$$

Az 1DoF impakt oszcillátor átírható az alábbi három-dimenziós autonóm rendszerré:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= -u - 2\zeta v + w(s), \quad \text{ha } u > \sigma, \\ \frac{ds}{dt} &= 1, \end{aligned} \quad (3.30)$$

azaz az alábbi lineáris differenciálegyenlet írja le a rendszert:

$$\dot{x} = F(x), \quad (3.31)$$

ahol

$$x = \begin{pmatrix} u \\ v \\ s \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{pmatrix} v \\ -u - 2\zeta v + w(s) \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

A kapcsolóvonal egyenlete

$$H(x) = u - \sigma, \quad (3.33)$$

gradiense pedig

$$H_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

A leképezés a kapcsolóvonalon:

$$x \rightarrow R(x) = \begin{pmatrix} u \\ -rv \\ s \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

azaz a leképezés gradiense

$$R_x(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

A sebesség, illetve a gyorsulás az alábbi módon írható le:

$$v(x) = v, \quad (3.37)$$

$$a(x) = -u - 2\zeta v + w(s), \quad (3.38)$$

így kapcsolóvonalra történő becsapódási sebesség:

$$H_x(x^-)F(x^-) = v^-, \quad (3.39)$$

Újra megemlítjük a (??) egyenletre levezetett korrekciós mátrixot:

$$Q_x(x^-) = R_x(x^-) + \frac{F(R(x^-)) - R_x(x^-)F(x^-)}{H_x(x^-)F(x^-)} H_x(x^-), \quad (3.40)$$

ahol  $x^-$  legyen egy periodikus pálya ütközési pontja. Felhasználva, hogy

$$x^+ = R(x^-), \quad (3.41)$$

azaz az ütközés utáni állapot felírható az ütközés előtti állapot és leképezés segítségével. (3.32), (3.34), (3.36) egyenletek felhasználásával:

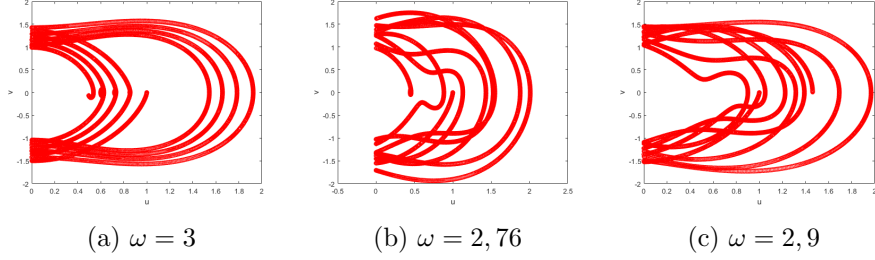
$$\begin{aligned} Q_x(x^-) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{(F(x^+) - R_x(x^-)F(x^-)) H_x}{v^-} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{v^-} \left( \begin{pmatrix} v^+ - v^- \\ a^-(-ra^-) \\ t^- - t^- \end{pmatrix} \right) H_x = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ \frac{a^+ + ra^-}{v^-} & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

A numerikus megoldást a fázistérben különböző gerjesztési frekvenciák esetére a 3.5. ábra szemlélteti, a numerikusan meghatározott elmozdulásfüggvényeket szintén különböző gerjesztési frekvenciák esetére a 3.6. ábra szemlélteti. A 3.5–3.6. ábrák elkészítése az alábbi fejezetben található *Matlab*-kóddal valósítható meg: 3.6.2. fejezet.

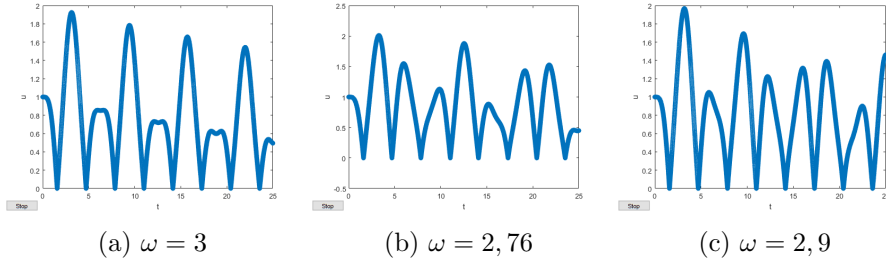
Az ütközés és a leképezés pontjainak számítása az alábbi módon történik:

1. Kiszámítjuk a  $0 < t < T$  folytonos szakasz monodrómiai mátrixát:

$$x^* = Mx_0 \quad (3.43)$$



3.5. ábra. Az 1DoF impakt oszcillátor fázisportréi  $\sigma = 0$ ,  $r = 0.95$ ,  $\zeta = 0$  esetre különböző gerjesztési frekvenciák esetén



3.6. ábra. Az 1DoF impakt oszcillátor rezgése  $\sigma = 0$ ,  $r = 0.95$ ,  $\zeta = 0$  esetre különböző gerjesztési frekvenciák esetén

2. Kiszámítjuk a korrekciós mátrixot (saltation matrix)

$$x_0 = Q_x x^* \quad (3.44)$$

3. A teljes monodrómia mátrix:

$$x_0^{n+1} = Q_x M x_0^n \quad (3.45)$$

### 3.4.2. Ütközés nélküli eset – monodrómia mátrix

Tegyük fel, hogy  $(u(t), v(t) = \frac{du}{dt})$  megoldása a

$$u''(t) + 2\zeta u'(t) + u = w(t) \quad (3.46)$$

egyenletnek. Tekintsük az alábbi perturbált megoldást:  $(u(t) + \delta u(t), v(t) + \delta v(t))$ . A  $\delta u$  függvény kielégíti az alábbi variációs egyenletet

$$\delta u''(t) + 2\zeta \delta u'(t) + \delta u = 0, \quad (\delta u(t_0), \delta v(t_0)) = (\delta u_0, \delta v_0), \quad (3.47)$$



azaz

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Így felírható az egy  $(T)$  periódusra vonatkozó állapotvektor variációja:

$$\begin{pmatrix} \delta u_T \\ \delta v_T \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \delta u(t_0 + T) \\ \delta v(t_0 + T) \end{pmatrix} = e^{LT} \begin{pmatrix} \delta u(t_0) \\ \delta v(t_0) \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Így az egy periódusra vonatkozó leképezés (monódrómia) mátrixa

$$N_T = e^{LT} = e^{-\zeta T} \begin{pmatrix} C_T & S_T \\ -\zeta C_T - \omega_0 S_T & \omega_0 C_T - \zeta S_T \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

ahol

$$\omega_0 = \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad (3.51)$$

$$C_T = \cos(\omega_0 T), \quad (3.52)$$

$$S_T = \sin(\omega_0 T). \quad (3.53)$$

Érdemes megemlíteni, hogy

$$\det(N_T) = e^{-2\zeta T}, \quad (3.54)$$

azaz a rendszer disszipatív, ha  $\zeta > 0$ .

### 3.4.3. Ütközéssel – korrekciós mátrix

Tegyük fel, hogy a  $T$  időintervallumban ütközés történik a  $t = t_0 + t_I$  időpillanatban. Az ütközés előtti sebesség  $v_I < 0$ , az ütközés előtti gyorsulás  $a_I^-$ , az ütközés utáni gyorsulás pedig  $a_I^+$ . A mozgás dinamikáját módosítja az ütközés, ennek leírásához pedig a  $Q_x$  mátrix kerül kiszámításra ((3.40) egyenlet). Így a  $T$  periódusra vonatkozó állapotvektor-variáció az alábbi módon írható le:

$$\begin{pmatrix} \delta u_T \\ \delta v_T \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \delta u(t_0 + T) \\ \delta v(t_0 + T) \end{pmatrix} = \tilde{N}_T \begin{pmatrix} \delta u_0 \\ \delta v_0 \end{pmatrix}, \quad (3.55)$$

ahol  $\tilde{N}_T$  ((3.50) egyenlet felhasználásával) az alábbi módon számolható:

$$\tilde{N}_T = N_{T-t_I} Q_x N_{t_I}. \quad (3.56)$$

Jelen esetben  $\tilde{N}_T$  determinánsa

$$\det(\tilde{N}_T) = e^{-2\zeta T} r^2. \quad (3.57)$$

Általánosítva ( $m$  ütközés történik a  $T$  periódus alatt):

$$\det(\tilde{N}_T) = e^{-2\zeta T} r^{2m}. \quad (3.58)$$

Megfigyelhető, hogy a rendszer disszipatív, ha  $r < 1$ , feltéve, ha  $\zeta \leq 0$ .

#### 3.4.4. Linearizálás

Tegyük fel, hogy az  $u(t)$  mozgás periodikus az alábbi feltételekkel:  $v(t_0) = v(t_0 + T) = 0$ ,  $a_0 := a(t_0) \neq 0$ . Kiszámításra kerül a  $P_N$  leképezés linearizálása, ami a  $\Pi_N = \{(u, t) : v = 0\}$  felületről képez le önmagára. Ehhez tekintsük a kezdeti feltételek kis perturbálását és vizsgáljuk a rendszer viselkedésének változását  $t_0 + \delta t_0$  kezdeti időpillanattól  $t_0 + T + \delta T$  időpillanatig. A feltételek:

$$u(t_0 + \delta t_0) = u(t_0) + \delta u_0, \quad (3.59)$$

$$v(t_0 + \delta t_0) = 0; \quad (3.60)$$

$$u(t_0 + T + \delta T) = u(t_0 + T) + \delta u_T, \quad (3.61)$$

$$v(t_0 + T + \delta T) = 0. \quad (3.62)$$

Kis  $\delta t_0$  és  $\delta u_0$  értékekre a  $P_T$  evolúciós leképezés

### 3.5. Grazing

Amennyiben egy  $x^*$  pontban igazak az alábbiak

$$H(x^*) = 0, \quad (3.63)$$

$$a(x^*) > 0, \quad (3.64)$$

$$H_x(x^*)F(x^*) = 0, \quad (3.65)$$

akkor *reguláris* grazing pontról beszélünk.

Belátható, hogy a grazing-bifurkáció környezetében a  $p(t)$  periodikus pálya körüli dinamikát az alábbi linearizált Poincaré-leképezés írja le (ld. könyv 193 – 198.o. ill. 6. fejezet)

$$P_N(x, \mu) = \begin{cases} Nx + M\mu + Ey, & \text{ha } H(x, \mu) < 0 \\ Nx + M\mu, & \text{ha } H(x, \mu) > 0 \end{cases} \quad (3.66)$$

ahol  $N = \partial_x \tilde{P}_N(x^*, \mu^*)$  és  $M = \partial_\mu \tilde{P}_N(x^*, \mu^*)$  és

$$y = \sqrt{-C^T N x - (C^T M + D)\mu} + O(x, \mu) = \sqrt{-H(x, \mu)} + O(x, \mu) \quad (3.67)$$

és  $E$  egy további (bonyolult) függvény és  $C$  ill.  $D$  a  $H(x)$  linearizálása, azaz

$$H(x)|_{x^*} = C^T(\tilde{x} - x^*) + D(\tilde{\mu} - \mu^*) = C^T(Nx + M\mu) + D\mu. \quad (3.68)$$

A (3.66) rendszert hívjuk Nordmark leképezésnek.

### 3.6. Fixpont

A (3.66) rendszer fixpontja

$$x_e = (I - N)^{-1} M \mu, \quad (3.69)$$

és ha bevezetjük a  $z = x - x_e$  új koordinátát, akkor a

$$z \mapsto f(z) = \begin{cases} Nz + E\sqrt{\sigma - C^T N z}, & \text{ha } C^T N z < \sigma \\ Nz, & \text{ha } C^T N z > \sigma \end{cases} \quad (3.70)$$

rendszert kapjuk, ahol azt, hogy  $z$  képe ütközik-e vagy nem, a  $H = H(x^*, \mu) + C^T N z$  előjele dönti el, ahol  $\sigma = -H(x^*, \mu)$ .

#### 3.6.1. A "square root" leképezés

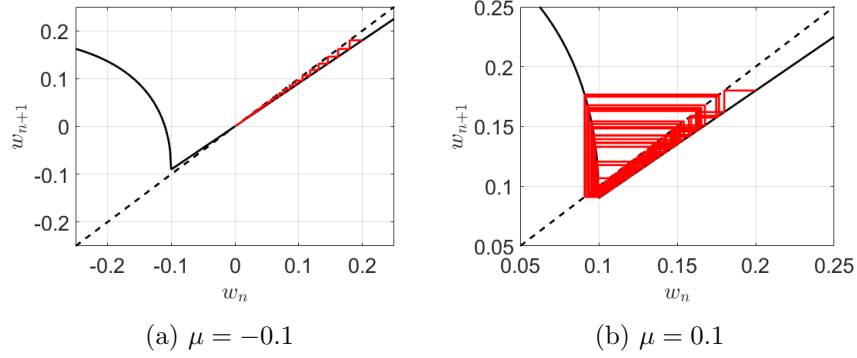
[ide esetleg jöhet, hogy az előző rendszerből pontosan hogyan is lesz a jelenlegi]

A fenti rendszer tovább egyszerűsíthető. Mivel egy lineáris leképezésről van szó, az iterációk viselkedését a  $\nu_1$  legnagyobb sajátérték fogja megadni és formálisan elegendő a

$$w \mapsto f(w) = \begin{cases} \nu w + \sqrt{\mu - w}, & \text{ha } w - \mu < 0 \\ \nu w, & \text{ha } w - \mu > 0 \end{cases} \quad (3.71)$$

leképezést vizsgálni. Szakaszos „square-root” leképezések azon folytonos leképezések, amelyeknél a leképezés egyik szakaszán négyzetgyökös, másik szakaszán pedig lineáris a leképezés. Az (3.71) leképezés esetén készített square-root mapeket  $\nu = 0,9$  esetén különböző  $\mu$  értékekre a 3.7. ábra szemlélteti.

A 3.7. ábrán látható square-root leképezések esetén, ha kézzel szeretnénk elvégezni a „pókháló-diagram” elkészítését, akkor az alábbi lépéseket szükséges megtennünk:



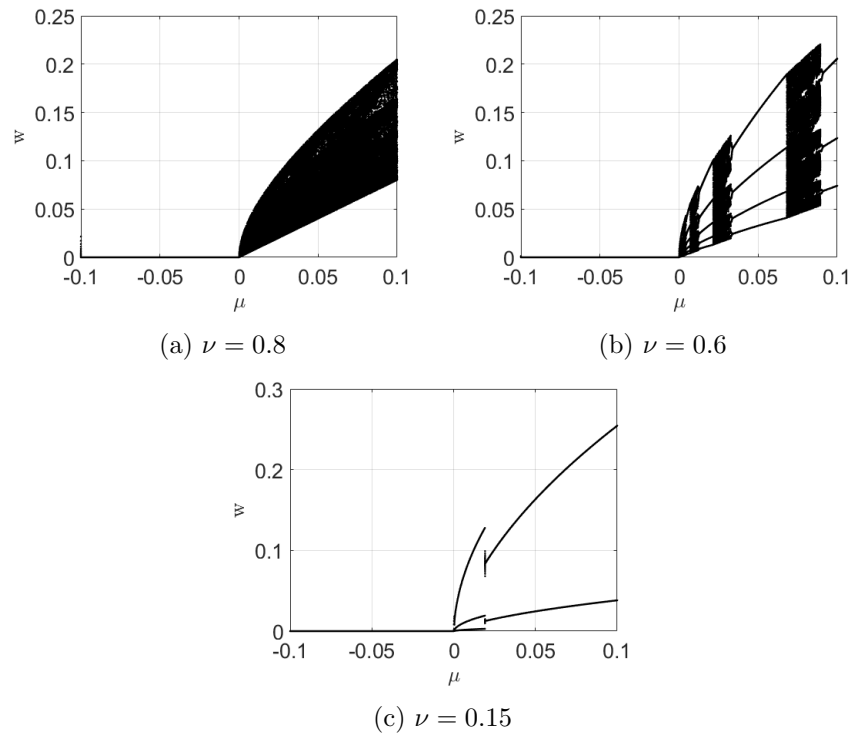
3.7. ábra. Egy dimenziós square-root map különböző  $\mu$  értékekre  $\nu = 0,9$  esetén

1. Vegyük fel a leképezés görbáját, azaz (3.71) egyenletet (fekete folytonos vonal a 3.7. ábrán)!
2. Vegyük fel az  $x_n = x_{n+1}$  egyenest (fekete szaggatott vonal a 3.7. ábrán)!
3. Vegyük fel a kezdeti feltételt az  $x_n$  tengelyen!
4. Vetítsük a kezdeti feltételt az  $x_n$  tengelyről a leképezés görbéjére!
5. Az így kapott  $P_0(x_n, x_{n+1})$  pont két koordinátája az  $x_n$ , illetve az  $x_{n+1}$ . Következő lépésben azt szükséges elérni, hogy a leképezés következő pontja a  $P_1(x_{n+1}, x_{n+2})$  pont legyen, azaz az új pont első koordinátájának az előző pont második koordinátájával kell megegyeznie. Ennek lépései:
  - (a)  $P_0(x_n, x_{n+1})$  pontból eljutunk a  $\tilde{P}_0(x_{n+1}, x_{n+1})$  pontba, azaz az  $x_n$  tengellyel párhuzamosan rávetítjük a  $P_0$  pontot az  $x_n = x_{n+1}$  egyenesre.
  - (b) A  $\tilde{P}_0(x_{n+1}, x_{n+1})$  pontból eljutunk az  $P_1(x_{n+1}, x_{n+2})$  pontba: az  $\tilde{P}_0$  pont első koordinátája meg kell, hogy egyezzen a  $P_1$  pont első koordinátájával, és tudjuk, hogy  $P_1$  a leképezés görbéjén van, így a  $\tilde{P}_0$  pontot szükséges rávetíteni a leképezés görbéjére az  $x_{n+1}$  tengellyel párhuzamosan.
6. Ismételjük meg a folyamatot  $N$ -szer!

A 3.7. ábrán látható, hogy a 3.7a. ábrán egy olyan paraméterkombináció került kiválasztásra, ahol  $x = 0$  a stabil fixpont, míg 3.7b. ábrán egy olyan paraméterkombináció került kiválasztásra, ahol jóval komplikáltabb viselkedése van a rendszernek. A grazing bifurkáció viselkedése a  $\mu$  paraméter értékétől függ, három esetet lehetséges elkülöníteni:

1. Kis csillapítás,  $2/3 < \nu < 1$ : amint  $\nu$  átlépi a 0-t, a rendszert kaotikus mozgás jellemzi (3.8a. ábra).
2. Közepes csillapítás,  $1/4 < \nu < 2/3$ : „ablakok végtelen sorozata”, amelyekben egymást váltja a stabil periodikus mozgás és a kaotikus mozgás. Az egyes ablakok között 1-gyel csökken a egyensúlyi helyek száma (3.8b. ábra).
3. Nagy csillapítás,  $0 < \nu < 1/4$ : ebben az esetben nincs kaotikus mozgás, de a egyensúlyi hely csökkenés az egyes „ablakok” között itt is jelen van (3.8c. ábra).

Az egyes eseteket a 3.8. ábra szemlélteti egy-egy adott  $\nu$  érték esetén.



3.8. ábra. Bifurkációs diagram az 1D square-root mapra vonatkozóan különböző  $\nu$  értékek esetén (bifurkációs paraméter:  $\mu$ )

### 3.6.2. Kódok – 1.

```

1 clear all
2 close all
3 clc
4
5 global zeta
6 global w
7 global r
8 global sigma
9
10 zeta=0;
11 w=3;
12 r=0.8;
13 sigma = 0;

```

```

14
15 tMon=2*pi/w;
16 tStart = 0;
17 tFinal = 25;
18
19 x0=[1; 0; 0];
20
21 [t10,x10]=ode45(@myOde,[0 tFinal],x0);
22 plot(x10(:,1),x10(:,2))
23
24 [t10,x10]=ode45(@myOde,[0 tMon],[1 0 0]);
25 [t01,x01]=ode45(@myOde,[0 tMon],[0 1 0]);
26 [tt,xt]=ode45(@myOde,[0 tMon],[0 0 1]);
27
28 M=[x10(end,:) ' x01(end,:) ' xt(end,:) '];
29
30 [t10,x10]=ode45(@myOde,[tStart tFinal],[1 0 0]);
31 eig(M)
32
33 refine = 30;
34 options = odeset('Events',@events,'OutputFcn',@odeplot
35     , 'OutputSel',1,...
36     'Refine',refine);
37
38 fig = figure;
39 box on
40 hold on;
41 xlabel('t')
42 ylabel('u')
43
44
45 tout = tStart;
46 xout = x0.';
47 teout = [];
48 xeout = [];
49 ieout = [];
50 while tout(end) < tFinal
51     % Solve until the first terminal event.
52     [t,x,te,xe,ie] = ode23(@myOde,[tStart tFinal],x0,

```

```

        options);
53     if ~ishold
54         hold on
55     end
56     % Accumulate output. This could be passed out as
        output arguments.
57     nt = length(t);
58     tout = [tout; t(2:nt)];
59     xout = [xout; x(2:nt,:)];
60     teout = [teout; te];           % Events at tstart
        are never reported.
61     xeout = [xeout; xe];
62     ieout = [ieout; ie];
63
64     ud = fig.UserData;
65     if ud.stop
66         break;
67     end
68
69     % Set the new initial conditions
70     x0(1) = x(nt,1);
71     x0(2) = -r*x(nt,2);
72     x0(3) = x(nt,3);
73
74     % A good guess of a valid first timestep is the
        length of the last valid
75     % timestep, so use it for faster computation. '
        refine' is 4 by default.
76     options = odeset(options, 'InitialStep', t(nt)-t(nt-
        refine), ...
77         'MaxStep', t(nt)-t(1));
78
79     tStart = t(nt);
80 end
81
82 figure
83 plot(xout(:,1), xout(:,2), 'ro')
84 xlabel('u')
85 ylabel('v')
86

```



```
87 % monodromy
```

```
88
```

```
89 %
```

---

```
90
```

```
91 function dxdt=myOde(t,x)
```

```
92     global zeta
```

```
93     global w
```

```
94     dxdt=[x(2);
```

```
95           -x(1)-2*zeta*x(2)+cos(w*t);
```

```
96           1];
```

```
97 end
```

```
98
```

```
99 %
```

---

```
100
```

```
101 function [value,isterminal,direction] = events(t,x)
```

```
102     global sigma
```

```
103     % Locate the time when height passes through zero  
104     % in a decreasing direction
```

```
104     % and stop integration.
```

```
105     fprintf(' %f\n',x(1))
```

```
106     value = sigma-x(1);      % detect height = 0
```

```
107     isterminal = 1;    % stop the integration
```

```
108     direction = 1;    % positive direction
```

```
109 end
```

## 4. fejezet

# Periodikus pályák numerikus követése (Patkó Dóra)

Dinamikai rendszerek vizsgálatánál kíváncsiak vagyunk a rendszer viselkedésére különböző paraméterkombinációk esetében is. A paraméterek hatásának vizsgálatára többféle módszer is rendelkezésünkre áll, mint például a paraméterléptetés vagy a pszeudo-ív hossz módszer. Paraméterléptetés esetén a bifurkációs paraméter értékét kis mértékben megváltoztatjuk, ekkor jól megfogalmazott probléma esetén a megoldás is kis mértékben fog változni, és ezt a változást követjük lépésről-lépésre. Pszeudo-ív hossz módszernél a bifurkációs paraméter és a periodikus pálya periódusidejének összefüggését keressük oly módon, hogy a problémát egy "szintvonal" keresésre vezetjük vissza. A fejezetben ez utóbbival fogunk részletesebben foglalkozni.

### 4.1. Pszeudo-ív hossz módszer

A pszeudo-ív hossz módszer esetében a soron következő megoldást az előző megoldástól  $\mathbf{v}$  irányba keressük, ahol  $\mathbf{v}$  egy implicit egyenlet  $F(\mathbf{x}) = 0$  szintvonalának érintőjével párhuzamos egység hosszú vektor:

$$\begin{cases} 0 = \langle \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i \rangle - \Delta s \\ 0 = F(\mathbf{x}_{i+1}), \end{cases} \quad (4.1)$$

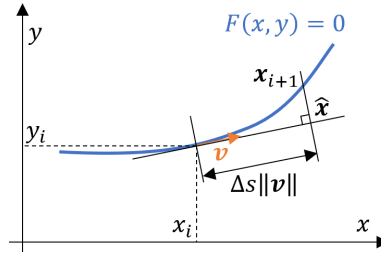
$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i \end{bmatrix}^T, \quad (4.2)$$

és  $\Delta s$  a lépés ív hossza. Az első egyenlet a merőlegességi feltétel, a második magának a keresett szintvonalnak az egyenlete. A módszer egy iterációs

lépésének szemléltetése a 4.1. ábrán látható. A merőlegességi feltétel az alábbi módon vezethető le:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_i + \Delta s \mathbf{v}_i, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_{i+1} - \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v}_i \rangle &= \langle \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i - \Delta s \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = \\ \langle \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i \rangle - \Delta s \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle &= \langle \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i \rangle - \Delta s. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (4.4)$$



4.1. ábra. A pszeudo-ív hossz módszer egy iterációs lépésének szemléltetése

A módszer alkalmazása során a (4.1) egyenletrendszer szimultán kell megoldani  $\mathbf{x}_{i+1}$ -re - két egyenlet, két ismeretlen. A módszer általánosítható több dimenzióra is, ekkor több  $F_j(\mathbf{x})$  egyenletre van szükségünk.

Egy **példa** a módszer alkalmazására az egység sugarú kör körívének követése. Akkor az implicit függvényünk az alábbi:

$$F(\mathbf{x}) = x^2 + y^2 - 1. \quad (4.5)$$

A kezdő pontunk legyen

$$\mathbf{x}_0 = [1 \ 0]^T, \quad (4.6)$$

amely, mint látható kielégíti az implicit egyenletünket. A sebességvektor, azaz az érintő ebben a pontban

$$\mathbf{v}_0 = [0 \ 1]^T. \quad (4.7)$$

Azonban az esetek többségében ez nem ilyen egyszerűen meghatározható, és numerikusan kell közelítenünk, amihez ismernünk kell a szintvonal egy másik, közeli pontját is,  $\mathbf{x}_{1/2}$ -et:

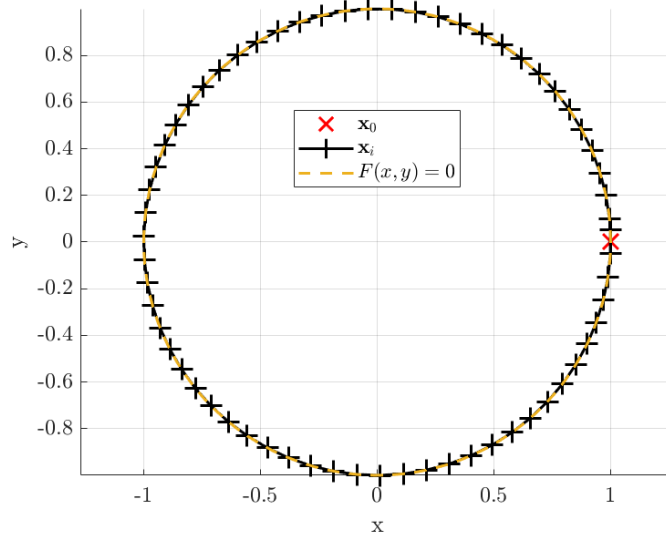
$$\mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{x}_{1/2} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_{1/2} - \mathbf{x}_0\|}. \quad (4.8)$$

A sebességvektor ezek után rendre:

$$\mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}\|}. \quad (4.9)$$

A körív követésének eredménye a pszeudo-ívhossz módszerrel a 4.2. ábrán látható. A lépéshossz  $\Delta s = 0.1$  volt, a kezdeti sebességbecsléshez az  $\mathbf{x}_0$  közeli szintvonal pont pedig

$$\mathbf{x}_{1/2} = [0.99 \quad \sqrt{1 - 0.99^2}]^T. \quad (4.10)$$



4.2. ábra. A pszeudo-ívhossz módszer alkalmazása körív követésére

**Megjegyzés:** pontosabb sebességvektort kapunk az iteráció során, ha a megoldáskor  $\mathbf{x}_{i+1/2}$ -re is alkalmazzuk a pszeudo-ívhossz módszert, ekkor a sebességvektor általánosan így írható fel:

$$\mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{x}_{i+1/2} - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_{i+1/2} - \mathbf{x}_i\|}. \quad (4.11)$$

A (4.1) egyenlet indexelése az alábbi módon adható meg erre a problémára:

$$\begin{cases} 0 = \langle \mathbf{x}_{i+3/2} - \mathbf{x}_{i+1/2}, \mathbf{v}_i \rangle - \Delta s \\ 0 = F(\mathbf{x}_{i+3/2}), \end{cases} \quad (4.12)$$

Ez a feladat egy négyváltozós nemlineáris gyökkeresési probléma az eredeti kétváltozós helyett.

## 4.2. Periodikus pályák peremérték-megfogalmazása

Dinamikai rendszerek mozgásegyenleteinek megoldásakor kezdeti értéket szoktunk megadni. Amennyiben a rendszer periodikus mozgást végez, a probléma átírható egy peremérték feladatra, ahol a peremfeltételt a periódus elejére és végére kell előírni. Belátható ugyanis, hogy periodikus mozgásnál az állapotváltozóknak  $t_0$  és  $t_0 + T$  időpontokban meg kell egyezniük, ahol  $T$  a periódusidő. Dinamikai rendszerek mozgásegyenleteit Cauchy átírással általánosan az alábbi módon lehet megadni:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{z}(t)), \quad (4.13)$$

ahol  $\mathbf{z}(t)$  az állapotváltozók,  $\mathbf{q}(t)$  pedig az általános koordináták vektora:

$$\mathbf{z}(t) = [\mathbf{q}(t) \quad \dot{\mathbf{q}}(t)]^T. \quad (4.14)$$

Periodikus mozgás esetén (autonóm rendszernél  $t_0$  szabadon megválasztható, így vegyük zérusnak) igaz a következő

$$\mathbf{z}_p(0) = \mathbf{z}_p(T). \quad (4.15)$$

Vezessük be  $\tau$  dimenziótlan időt az alábbi módon:

$$\tau = t/T. \quad (4.16)$$

Ekkor a (4.13) egyenlet formája és a peremérték feladat a következő lesz

$$\begin{cases} \mathbf{z}'(\tau) = T\mathbf{F}(\mathbf{z}(\tau)), \\ \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}(1). \end{cases} \quad (4.17)$$

**Megjegyzés:** amennyiben a rendszerünk szakaszosan folytonos a (4.17)-es problémát ki kell egészíteni:

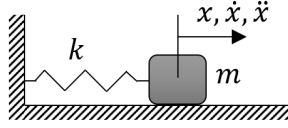
$$\begin{cases} \mathbf{z}'(\tau_1) = T_1\mathbf{F}_1(\mathbf{z}(\tau_1)), \quad H(\mathbf{z}(\tau_1)) > 0, \\ \mathbf{z}'(\tau_2) = T_2\mathbf{F}_2(\mathbf{z}(\tau_2)), \quad H(\mathbf{z}(\tau_2)) < 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{z}_1(1) = \mathbf{z}_2(0), \\ \mathbf{z}_2(1) = \mathbf{z}_1(0), \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\begin{cases} H(\mathbf{z}_1(1)) = 0, \\ H(\mathbf{z}_2(1)) = 0, \end{cases}$$

ahol  $H(\mathbf{z}(\tau))$  a kapcsolófelület. Ütköző rendszer esetében figyelembe kell venni a peremfeltételek felírásánál az ütközéskor létrejövő leképezést.

Nézzük meg egy egyszerű **példa** peremérték-megfogalmazásának implementálását MATLAB környezetben! Peremérték feladatok megoldására a bvp beépített megoldókat lehet használni, esetünkben a bvp5c-vel fogunk dolgozni. A mechanikai rendszerünk a 4.3. ábrán látható.



4.3. ábra. Periódikus mozgást végző tömeg-rugó rendszer

A mozgásegyenlete a fenti rendszernek jól ismert:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} x. \quad (4.19)$$

Mint tudjuk, a rendszer mozgását leíró függvényt az alábbi módon lehet felírni, amennyiben  $x_0$  kezdeti kitérítésünk van csak  $\tau_0$ -ban kezdeti sebesség nélkül:

$$\varphi(\tau) = x_0 \cos\left(\tau \sqrt{k/m} T\right) = x_0 \cos(2\pi \tau), \quad (4.20)$$

$$\dot{\varphi}(\tau) = -x_0 \sqrt{k/m} \sin\left(\tau \sqrt{k/m} T\right) = -x_0 \sqrt{k/m} \sin(2\pi \tau), \quad (4.21)$$

ahol  $T$  a rendszer sajátfrekvenciájának inverze

$$T = 2\pi \sqrt{m/k}. \quad (4.22)$$

A fenti függvényeket a peremérték-megfogalmazáskor kijötttekkel fogjuk összevetni.

A bvp5c megoldóhoz először definiálnunk kell egy időrácsot, amely időpontokban meg kell becsülnünk majd a keresett függvények értékét. Mivel áttértünk dimenziótlan időre, egy periódus "peremei" a  $\tau \in \{0, 1\}$  pontok, valamint megjelent a Cauchy átírásnál  $T$  periódusidő, mint ismeretlen paraméter.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(\tau) \\ \dot{y}(\tau) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} y(\tau) \\ -\frac{k}{m} x(\tau) \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

A módszer a rácsháló első és utolsó pontjára fogja alkalmazni a peremfeltételeket. Jó kezdeti függvénybecslés a megoldó megfelelő működéséhez az egyik legfontosabb kritérium, ehhez minnél több információt össze kell

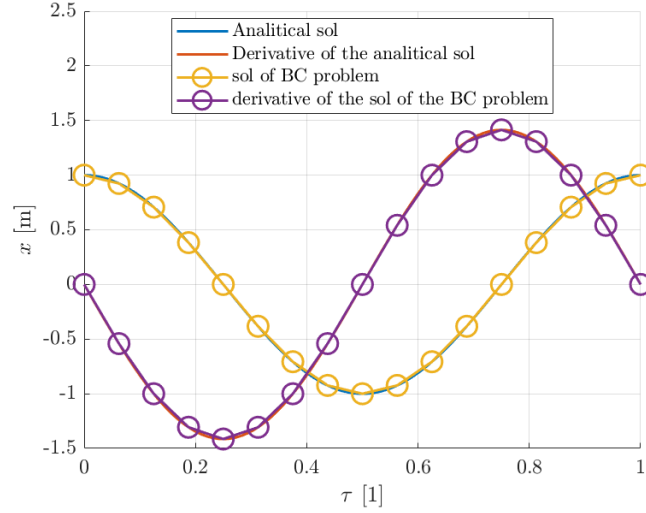
gyűjteni a vizsgált rendszer viselkedéséről. A kezdeti függvénybecslésnek teljesítenie kell a peremfeltételeket, melyeknek rajta kell lenniük a periódikus pályán. Az ismeretlen paraméter(ek)re is szükséges kezdeti becslést adni! A peremfeltételeket megadó vektor (kódban `res`) dimenziója megegyezik a mozgásegyenlet (kódban `dydx`) és a paramétereket tartalmazó vektor (kódban `par`) dimenziójának összegével.

```

1  global k m x0
2  k = 10;
3  m = 5;
4  x0 = 1;
5  taumesh = linspace(0,1,5);
6  par = 2*pi;
7  solinit = bvpinit(taumesh, @bvp_initial_guess, par);
8  sol = bvp5c(@bvp_fun, @bvp_bcs, solinit);
9
10 function g = bvp_initial_guess(x)
11 global x0
12 g = x0*[cos(2*pi*x); -2*pi*sin(2*pi*x)];
13 end
14
15 function dydx = bvp_fun(x,y,par)
16 global k m
17 dydx = par*[y(2); -k*y(1)/m];
18 end
19
20 function res = bvp_bcs(ya,yb,par)
21 global x0
22 res = [ya(1) - x0
23        yb(1) - x0
24        ya(2)];
25 end

```

A módszer által kiszámolt  $T$  értéke megegyezik az analitikusan kiszámított periódusidővel. A tömegpont pozíciója és sebessége a 4.4. ábrán látható.



4.4. ábra. Tömeg-rugó rendszer peremérték-megfogalmazásának bvp5c megoldóval kiszámított eredményeinek összevetése az analitikus megoldással

### 4.3. Pszeudo-ív hossz módszer alkalmazása periodikus pályák követéséhez

Ebben az alfejezetben két példát nézünk meg, ahol a pszeudo-ív hossz módszert periodikus pályák követésére használjuk. Ehhez ki kell választanunk majd egy bifurkációs paramétert, amely függvényében kíváncsiak vagyunk, hogyan alakul a periodikus mozgás. Az első feladat során az előbb vizsgált tömeg-rugó rendszerrel foglalkozunk, a másodikban egy szakaszosan folytonos rendszert, a spring loaded inverted pendulum (SLIP) modellt vizsgáljuk, amely az emberi futás leírásának egy elterjedten használt modellje.

#### 4.3.1. Példa 1: tömeg-rugó rendszer

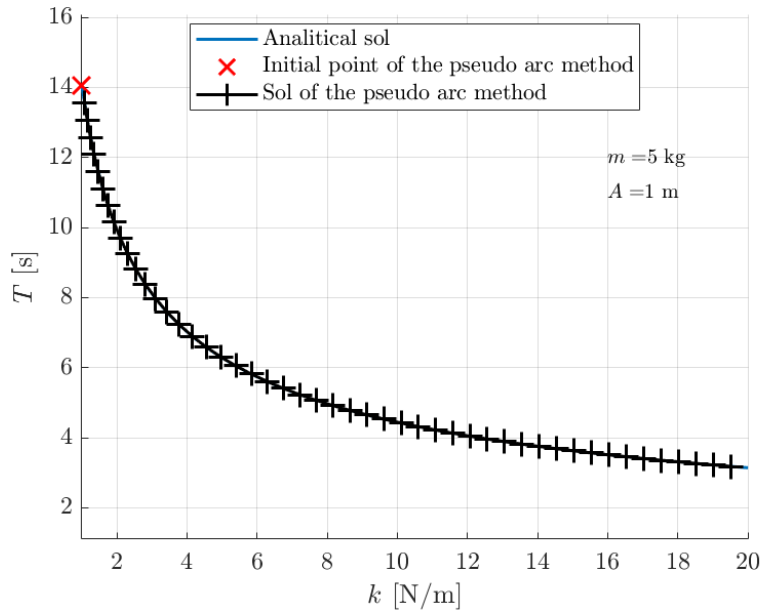
A pszeudo-ív hossz módszer használatához ki kell választanunk egy bifurkációs paramétert, amit jelöljön  $\mu$ . A példa során először vizsgáljuk a rugómerevség ( $\mu = k$ ), később a tömeg ( $\mu = m$ ) hatását (ilyenkor a többi paraméter konstans). A (4.1) egyenlet alakja paraméterkövetés során az alábbi formájú:

$$\begin{cases} 0 = \langle \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i \rangle - \Delta s \\ 0 = T_{i+1} - T_{\text{BVP}}(\mu_{i+1}), \end{cases} \quad (4.24)$$



$$\mathbf{x}_i = [\mu_i \quad T_i]^T, \quad (4.25)$$

ahol  $T_{\text{BVP}}(\mu_{i+1})$  a peremfeladat megoldó által számolt periódusidő. A pszeudo-ív hossz módszert a 4.1 alfejezetben bemutatott módon kell alkalmazni, és a benne található  $T_{\text{BVP}}(\mu_{i+1})$  értékét a 4.2 alfejezetben leírt módon kell meghatározni a (4.24) egyenletrendszer megoldása közben. A kapott eredményeket összevetettük az analitikusan kiszámítottakkal, és látható, hogy a pályakövetés illeszkedik az analitikusan előállított görbékre, ld. 4.5. és 4.6. ábrák.

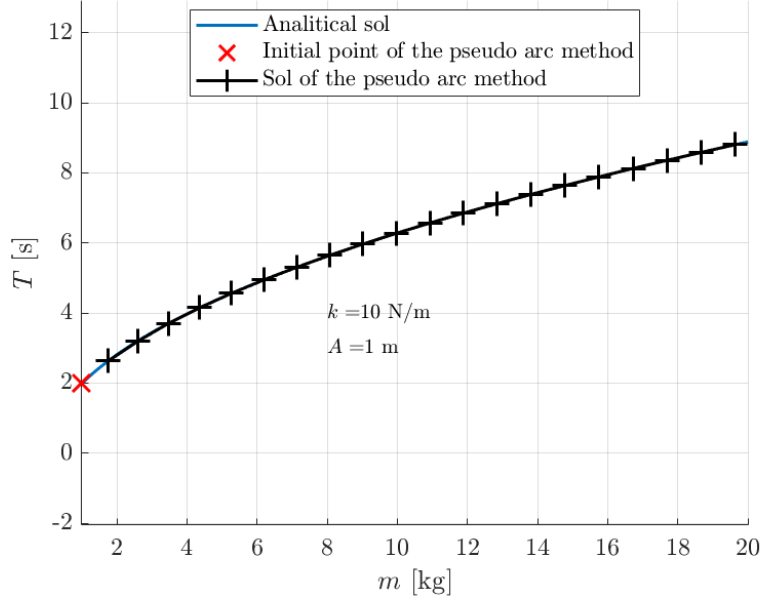


4.5. ábra. Periódikus pályák követése  $k$  paraméter függvényében,  $\Delta s = 0.5$

### 4.3.2. Példa 2: spring loaded inverted pendulum modell

A spring loaded inverted pendulum (SLIP) modell a 4.7. ábrán látható. A rendszer egy tömegpontból és egy tömeg nélküli rugóból áll, ami  $\alpha$  szögben kapcsolódik a tömegponthoz. A SLIP modell az emberi futás modellezéséhez használt egyszerű mechanikai modell, ugyanis periódikus mozgásra képes, mely mozgás két fázisra, a támasz és repülő fázisokra tagolódik, így a rendszer szakaszosan, de  $C^2$  folytonos.

A rendszer mozgásegyenlete a támaszfázisban (mivel az  $x$  ciklikus koordináta, a rugó megfogott végét önkényesen mindig az origóba helyezzük), és



4.6. ábra. Periódikus pályák követése  $m$  paraméter függvényében,  $\Delta s = 1$

az állapotváltozók az alábbiak:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \kappa (l_0 - l(t)) x(t)/l(t), \\ \ddot{y} = \kappa (l_0 - l(t)) y(t)/l(t) - g, \end{cases} \quad (4.26)$$

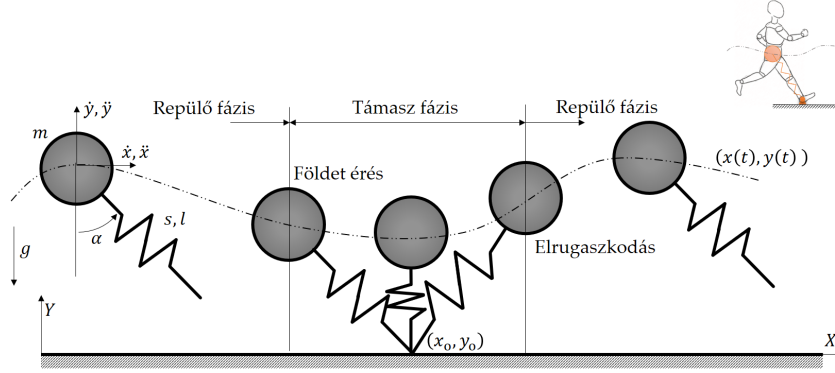
$$\mathbf{z}(t) = [x(t) \quad y(t) \quad \dot{x}(t) \quad \dot{y}(t)]^T, \quad (4.27)$$

$$l(t) = \sqrt{(-x(t))^2 + y(t)^2}, \quad (4.28)$$

A repülő fázisban is a fenti mozgásegyenlet érvényes, csupán a  $\kappa = s/m = 0$  helyettesítést kell alkalmazni. A fázishatárokat megadó eseményfüggvények a támasz-repülő fázishatáron, illetve a repülő-támasz fázishatáron az alábbiak, ahol az 1-es index a támaszfázis, a 2-es a repülőre vonatkozik:

$$\begin{aligned} H_{12}(\mathbf{z}) &= l_0 - l(t), \\ H_{21}(\mathbf{z}) &= y(t) - l_0 \cos(\alpha). \end{aligned} \quad (4.29)$$

A peremfeladat megoldásához a mozgásegyenleteket át kell írni dimenziótlan időre, külön kell dimenziótlanítani a támaszfázis mozgásegyenleteit



4.7. ábra. spring loaded inverted pendulum (SLIP) mechanikai modell

$\tau_1 = t/T_1$  dimenziótlán idővel felírva, és külön a repülőfázisét  $\tau_2 = t/T_2$ -vel.

$$\begin{cases} \mathbf{z}'(\tau_1) = T_1 \mathbf{F}_1(\mathbf{z}(\tau_1)), & H_{12}(\mathbf{z}(\tau_1)) > 0, \\ \mathbf{z}'(\tau_2) = T_2 \mathbf{F}_2(\mathbf{z}(\tau_2)), & H_{21}(\mathbf{z}(\tau_2)) > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{z}_1(1) = \mathbf{z}_2(0), \\ \mathbf{z}_2(1) = \mathbf{z}_1(0), \end{cases} \quad (4.30)$$

$$\begin{cases} H_{12}(\mathbf{z}_1(1)) = 0, \\ H_{21}(\mathbf{z}_2(1)) = 0 \end{cases}$$

A (4.24) egyenletben a  $T_{\text{BVP}}(\mu_{i+1}) = T_{\text{BVP},1}(\mu_{i+1}) + T_{\text{BVP},2}(\mu_{i+1})$  helyettesítést kell alkalmazni a fenti peremfeladat megoldása után.

A feladatot a támaszfázis elejéről indítjuk, és itt  $y_1(0) = l_0 \cos(\alpha)$  ismert, valamint  $x(\tau)$  ciklikus koordináta, így ennek a kezdeti értéke nem befolyásolja a mozgás minőségét - amennyiben a repülőfázisból vagy fázis-határokról indítjuk a rendszert. Mivel a rendszer konzervatív a mechanikai összenergiát paraméternek választva a sebességkomponensek kifejezhetők egymásból a támaszfázis elején, mi a  $\dot{x}_1(0)$ -t vesszük most független változónak. A rendszer mozgását tehát adott paraméterkombinációnál egy változó fogja befolyásolni a támaszfázis bal oldali peremén. A támaszfázis-repülőfázis átmenetnél is meg kell határoznunk a perem értékét a bvp5c alkalmazásához, mivel a peremértékeknek rajta kell lenniük a periódikus pályán. Az alábbi kód mutatja a peremfeladat megoldását, ahol a kezdeti próbafüggvények a  $\dot{x}_1(0) = 5.1149$  m/s kezdeti értékű periódikus pályához vannak felírva, ahol a paraméterek értéke  $l_0 = 1$  m,  $\kappa = 112.5$  N/(m kg),  $\alpha =$

0.5708 rad,  $E = 21.5$  N/kg. A globális paraméterek értékhozzárendelését nem mutatja a kód, azokat az értékeket egy .m fájlból olvassuk be, amelyben a periódikus pálya állapotváltozóit és paramétereit tároljuk, vagy a pszeudó-ívhossz módszer alkalmazásánál az alábbi egyenlet zérushelyének megtalálásával számíthatjuk őket:

$$f(\dot{x}_1(0)) = \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(1) = 0, \quad (4.31)$$

mivel  $\dot{x}_1(0)$  meghatározza a mozgást, és ahol  $\dot{x}_1(0)$  függ a  $\mu$  bifurkációsparaméter értékétől.

```

1  global kappa alpha l0 g E
2  global x10 x20 y10 y20 xdot10 xdot20 ydot10 ydot20
3  global x11 x21 y11 y21 xdot11 xdot21 ydot11 ydot21
4  global A_y0 A_xdot0 A_y1
5  taumesh = linspace(0,1,5);
6  sol = bvp5c(@bvp_fun, @bvp_bcs, solinit);
7  sol.parameters
8
9  function G = bvp_initial_guess(t)
10 global x11 x21 y11 xdot10 ydot11 ydot21
11 global l0 g alpha_f E_f
12 global A_y0 A_xdot0 A_y1
13 x10 = -l0*sin(alpha_f);
14 y10 = l0*cos(alpha_f);
15 ydot10 = -sqrt(2*(E_f - g*y10) - xdot10^2);
16 dpi = asin(y10 - y11);
17 if dpi < pi/2
18     dpi = pi - dpi;
19 end
20 C = 2*pi - acos(ydot11*sqrt(2)/2/ydot10) + pi/4;
21 G = [x10 + t*(x11 - x10)
22      y10 - A_y0*sin(dpi*t)
23      xdot10 + A_xdot0*cos(2*pi*t) - A_xdot0
24      ydot10*2/sqrt(2)*cos(C*t-pi/4)
25      x11 + t*(x21 - x11)
26      y11 + A_y1*sin(t*pi)
27      xdot10 + 0*t
28      ydot11 + t*(ydot21 - ydot11)];
29 end
30
```

```

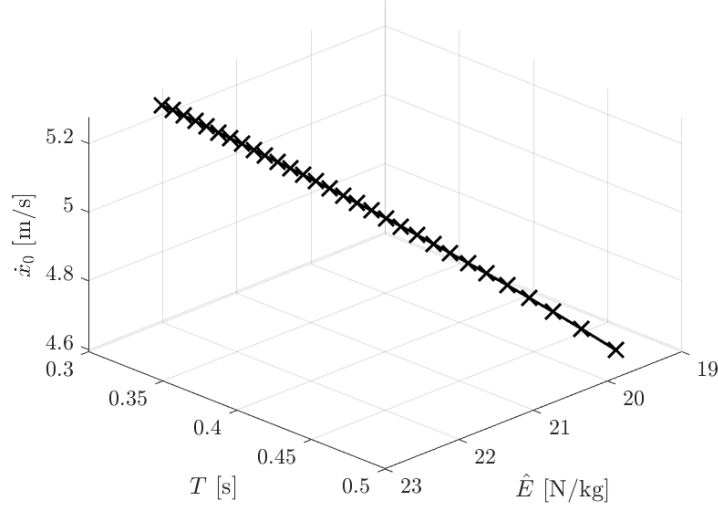
31 function dydx = bvp_fun(t,Y,par)
32 global kappa alpha g l0 x10
33 lambda = sqrt((x10 + 10*sin(alpha) - Y(1))^2 + (Y(2))
    ^2)/10;
34 dydx = [par(1)*Y(3)
35         par(1)*Y(4)
36         par(1)*( (kappa/lambda - kappa)*(Y(1) - (x10 + 10*
    sin(alpha))) )
37         par(1)*( (kappa/lambda - kappa)*Y(2) - g )
38         par(2)*Y(7)
39         par(2)*Y(8)
40         par(2)*0
41         -par(2)*g];
42 end
43
44 function res = bvp_bcs(ya,yb,par)
45 global l0 alpha x21 E g
46 res = [yb(5) - x21
47        ya(2) - yb(6)
48        ya(3) - yb(7)
49        ya(4) - yb(8)
50        ya(5) - yb(1)
51        ya(6) - yb(2)
52        ya(7) - yb(3)
53        ya(8) - yb(4)
54        l0 - sqrt((ya(1) + 10*sin(alpha) - yb(1))^2 + (yb
    (2))^2)
55        yb(6) - 10*cos(alpha)];
56 end

```

A globális  $A_{y0} = 0.06$ ,  $A_{x\dot{0}} = 0.2$ ,  $A_{y1} = 0.016$  paraméterek kézzel vannak beállítva a fenti rendszer próbagfüggvényéhez, és a pszeudó-ív hossz módszer alkalmazása során minden új pontban automatikusan módosulnak, hogy minnél jobban simuljanak a legutóbb kiszámított rendszer állapotváltozóira. Így nem csak a peremértékek követik a pálya változását a próbagfüggvényekben, hanem a köztes pontok is közelebb lesznek az új görbékhez. Feltételezzük, hogy a változás a pálya képében folyamatos a paraméterek változásával.

A rendszer paraméterei a  $\kappa$ ,  $\alpha$ ,  $l_0$  és  $E$ , melyek közül tekintsük az  $l_0$ -t fixen egységnyinek. A másik három paramétert egyenként fogjuk bifurkációs paraméterként kezelni. A pszeudó-ív hossz módszer által meg-

valósított pályakövetés eredményei a 4.8., 4.9. és 4.10. ábrákon láthatók.



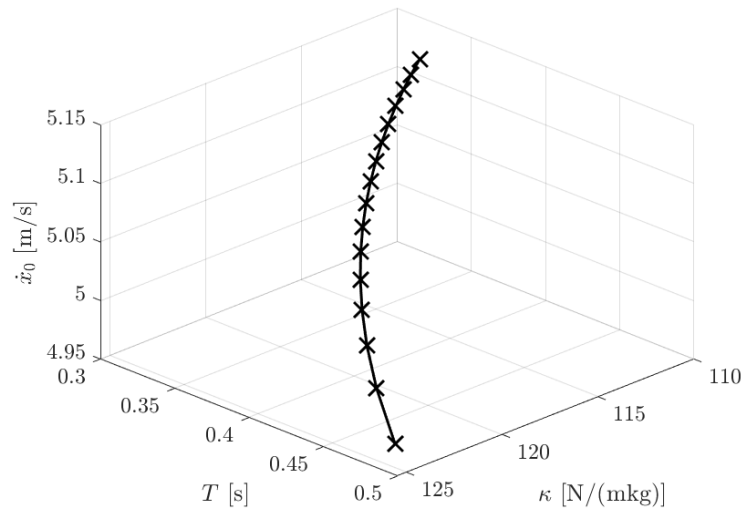
4.8. ábra. Pszeudó-ívhossz módszer pályakövetése,  $\mu = E$

**Megjegyzés:** A (4.24) egyenletrendszer kipótolható egy harmadik egyenlettel, ami vonatkozhat a monodrómia mátrix sajátértékére; például kereshetjük azt a görbét, ami a stabilitáshatárt mondja meg, azaz amikor a nem triviális sajátérték  $\lambda = 1$ .

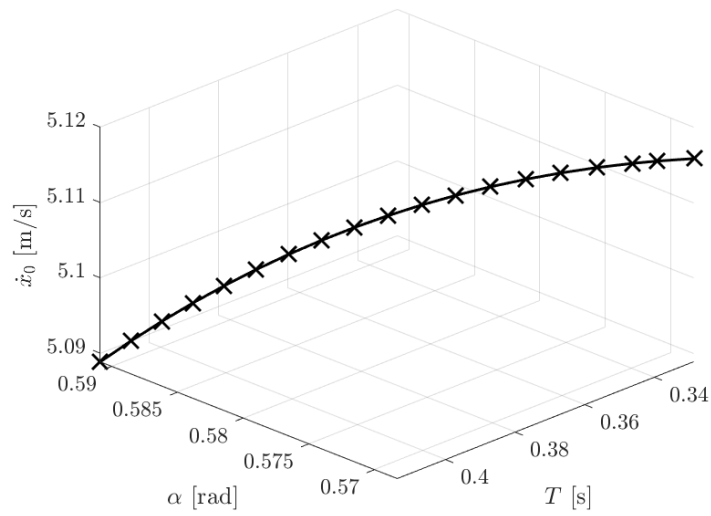
$$\begin{cases} 0 = \langle \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i \rangle - \Delta s, \\ 0 = T_{i+1} - T_{\text{BVP}}(\mu_{i+1}), \\ 0 = 1 - \lambda, \end{cases} \quad (4.32)$$

$$\mathbf{x}_i = [\mu_i \quad T_i \quad \lambda_i]^T, \quad (4.33)$$

Ekkor a mechanikai összeenergia már nem tekinthető paraméternek.



4.9. ábra. Pszeudó-ív hossz módszer pályakövetése,  $\mu = \kappa$



4.10. ábra. Pszeudó-ív hossz módszer pályakövetése,  $\mu = \alpha$

## 5. fejezet

# Square-root leképezés (Zsiros Ádám)