دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی‌تکنیک تهران)
دانشکده مهندسی کامپیوتر

درس
سیگنال‌ها و سیستم‌ها

تمرین دوم
سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان

استاد درس
دکتر راستی

توضیحات:

- مهلت تحویل تا یکشنبه ۳۰ آبان در نظر گرفته شده است و به هیچ عنوان تمدید نخواهد شد. برای این تمرین، مانند تمرین‌های دیگر، می‌توانید از مجموع ۱۰ روز تاخیر مجاز خود استفاده کنید.

- پاسخ به تمرین‌ها باید به صورت انفرادی نوشته شود و در صورت مشاهده هرگونه تقلب نمره برای همه افراد صفر در نظر گرفته خواهد شد.

- پاسخ بخش‌های تئوری و شبیه‌سازی تمرین را در قالب یک فایل ZIP با نام «HW2_StudentNumber.zip» در سایت درس بارگذاری کنید.

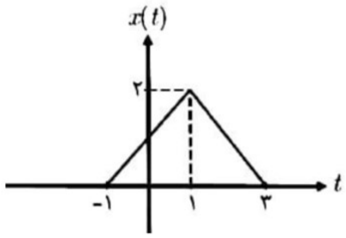
- سوالات خود را از طریق ایمیل ss.fall.2021@gmail.com با تدریس‌یاران درس مطرح کنید. موضوع ایمیل را «تمرین n: سوال m» برای سوالات تمرین و «سوال از فصل x» برای سوالات درسی قرار دهید.

نیمسال اول ۱۴۰۰-۱۴۰۱

بخش تئوری

سوال ۱ -

پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x(t)$ برابر با $u(t) - u(t-4)$ داده شده است. پاسخ این سیستم وقتی ورودی قسمت زوج سیگنال $x(t)$، که از رابطه $\frac{x(t)+x(-t)}{2}$ به‌دست می‌آید، باشد چه خواهد بود؟



سوال ۲-

در هر یک از موارد زیر، در صورتی که پاسخ ضربه سیستم LTI برابر $h(t)$ و ورودی آن برابر $x(t)$ باشد، خروجی سیستم را به دست آورید.

a) $x(t) = u(t) - u(t-2), \quad h(t) = e^{-2t}u(t)$

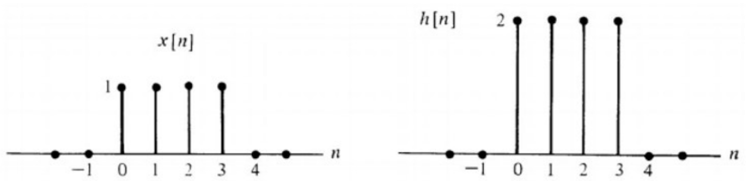
b) $h[n] = \delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1], \quad x[n] = \frac{1}{3^n}$

c) $h[n] = \frac{1}{5^n}u[n], \quad x[n] = u[-n-3]$

d) $x(t) = \prod(t-\frac{1}{2}) - \prod(t-\frac{3}{2}), \quad h(t) = u(t) - u(t-1)$

$\prod(t) = rect(t) = u(t+\frac{1}{2}) - u(t-\frac{1}{2})$

e)

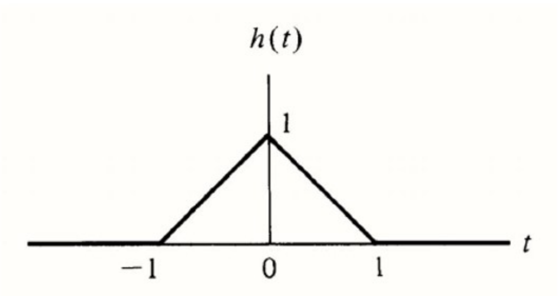


f) $x(t) = \begin{cases} 2 & |t| < t_1 \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad , \quad h(t) = \begin{cases} 1 & |t| < t_2 \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad , \quad 0 < t_1 \leq t_2$

سوال ۳-

فرض کنید سیگنال $x(t)$ یک قطار ضربه با رابطه‌ای که در ادامه نوشته شده است باشد و سیگنال پاسخ ضربه $h(t)$ را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$



آ) سیگنال $x(t)$ را رسم کنید.

ب) اگر $T = \frac{3}{2}$ باشد، $y(t) = x(t) * h(t)$ را محاسبه و رسم نمایید.

سوال ۴ -

خواص علی بودن و پایداری سیستم‌های LTI زیر را که با پاسخ ضربه یا معادله صریح مشخص شده‌اند تعیین کنید.

a) $h(t) = e^{-6t}u(t+2)$

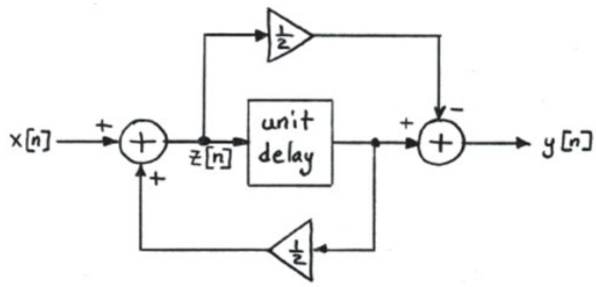
b) $h[n] = 2^n u[3-n]$

c) $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (t-\tau)u(t-\tau)x(\tau)d\tau$

d) $h[n] = (0.8)^n u[n+2]$

سوال ۵ -

سیستم LTI زیر را در نظر بگیرید (بخش‌های مثلثی به معنای عملگر ضرب در سیگنال ورودی هستند).



آ) معادله تفاضلی بین ورودی $x[n]$ و خروجی $z[n]$ را بیابید.

ب) پاسخ ضربه $h[n]$ بین ورودی $x[n]$ و خروجی $z[n]$ را محاسبه کنید.

پ) پاسخ ضربه $h_{overall}[n]$ بین ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ را بیابید.

سوال ۶-

با فرض برقراری سکون ابتدایی در معادله تفاضلی مرتبه اول زیر، پاسخ ضربه سیستمی را که رابطه ورودی-خروجی آن با این معادله تفاضلی توصیف شده است بیابید.

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n]$$

سکون ابتدایی:

$$\text{if } \forall n < n_0 . x[n] = 0 \text{ then } \forall n < n_0 . y[n] = 0$$

بخش شبیه‌سازی

بررسی سوال زیر اختیاری است (و نمره‌ای به آن تعلق نمی‌گیرد) اما توصیه می‌شود برای دید بهتر جهت انجام این بخش آن را حل کنید.

- سیگنال‌های گسسته_زمان $h[n]$ که خارج از بازه $n_0 \leq n \leq n_1$ و $x[n]$ که خارج از بازه $n_2 \leq n \leq n_3$ برابر صفر هستند را در نظر بگیرید. مقادیر n_4 و n_5 را به گونه‌ای بیابید که در خارج از بازه $n_4 \leq n \leq n_5$ مقدار $x[n] * h[n]$ برابر صفر باشد.

سوال ۱ -

آ. تابعی بنویسید که با دریافت دو سیگنال در ورودی، کانولوشن آن‌ها را محاسبه کند. سپس با استفاده از این تابع، کانولوشن موارد زیر را محاسبه و رسم کنید.

a)

$$x[n] = u[n+2] - 2u[n-12] + u[n-20]$$

$$h[n] = 0.9^n \left(u[n-2] - 2u[n-4]\right)$$

$$\text{interval} = [-20,\ 80]$$

b)

$$x(t) = \cos(t)\left[u(t+2) - u(t-2)\right]$$

$$h(t) = e^{-4t}u(t)$$

$$\text{interval} = [-15, 15]\ ,\ \text{step} = 0.1$$

c)

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad , \quad h(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\text{interval} = [-5, 5]\ ,\ \text{step} = 0.1\ ,\ a \in \{1, 3\}$$

برای بررسی درستی محاسبات کانولوشن می‌توانید از تابع convolve در کتابخانه numpy استفاده کنید و نتیجه کار را با محاسبات خود مقایسه کنید.

ب. اگر توجه کنید در قسمت آ. مقادیر سیگنال حاصل بسیار بزرگ‌تر از مقدار واقعی کانولوشن است. برای حل این مشکل چه تغییری در سیگنال نهایی باید داده شود؟ **(امتیازی)**

سوال ۲ (امتیازی)-

سیگنال زیر را در بازه $[-20, 20]$ با اندازه گام 0.1 رسم کنید. همانطور که مشاهده می‌کنید بر روی سیگنال نویز زیادی وجود دارد.

$$x\left(t\right)=\frac{3}{2}\sin\left(10t\right)+5\sin\left(\frac{1}{2}t\right)+\cos\left(\frac{15}{2}t\right)$$

آ. سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)=u(t+a)-u(t-a)$ را فرض کنید. به کمک تابع نوشته شده در سوال قبل، خروجی این سیستم را برای ورودی $x(t)$ به ازای $a\in\{0.2, 1.2, 8\}$ رسم کنید.

ب. تغییرات انجام شده روی ورودی توسط این سیستم را چطور توجیه می‌کنید؟ نقش a در ارتباط ورودی و خروجی سیستم چیست؟

پ. اگر مجددا توجه کنید در قسمت آ. مقادیر سیگنال خروجی سیستم با سیگنال اصلی متفاوت است. برای حل این مشکل چه تغییری در سیگنال خروجی باید داده شود؟

در ادامه درس و با استفاده از تبدیل فوریه، می‌توانیم به طور بهتری نویز سیگنال‌ها را حذف کنیم.