第 1 章 向量及其运算

🕮 1.1 引言

线性代数的中心问题是求解线性方程组。
如给定一个线性方程组：

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x-3y=-2 \end{cases}$$

它能表示为：

$$x\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix}$$

此方程组可解等价于：$\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix}$可表示为$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$的线性组合。

🕮 1.2 *n* 维向量空间的点

一维：每个实数 x 一一对应于数轴上的点；
二维：每个二元有序数组(x, y)一一对应于二维平面上的点；
三维：每个三元有序数组(x, y, z)一一对应于三维空间中的点。
n 维：
定义 n 维空间的点为一个 n 元有序数组$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots x_n)$
称x_i是点$\mathbf{x}$的第 i 个坐标。

🕮 1.3 向量

向量(vector)是空间中具有一定长度和方向的直线段。

向量的加法(addition)：平行四边形法则或三角形法则。
向量的数乘(scalar multiplication)

如果固定向量的起点为原点，向量由其终点唯一确定。
也就是：(1) n 维空间中的点，(2) n 元有序数组，(3) n 维空间中由原点出发的向量，都是等价的。
记：

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots \\ a_n\end{bmatrix}$$

为列向量。a_i是向量$\boldsymbol{a}$第 i 个分量。也可以简写为$(a_1,\cdots,a_n)$。

🕮 1.4 向量空间的定义

由向量元素构成的非空集合 V，若定义了加法和数乘运算，且对任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 及数$k,l\in$ F(没特殊说明就当实数)满足 8 条性质(封闭性)：

1) $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$
2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$
3) 存在零向量 0：$\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$
4) 对任意向量$\boldsymbol{a}$，存在唯一相反向量$-\boldsymbol{a}$，使得$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0$
5) $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$
6) $(kl)\boldsymbol{a}=k(l\boldsymbol{a})$

7) $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$
8) $(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$

则称 V 为定义在数域 F 上的向量空间(vector space)。

📖 1.5 向量空间的线性组合

设$\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_m$是 m 个 n 维向量，$c_1,\cdots,c_m\in R$，则称$c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_m\mathbf{v}_m$是向量$\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_m$的一个线性组合(linear combination)。

3 维空间中，向量 **u**(非 0)、**u**, **v**(不共线)、**u**, **v**, **w**(不共面)的所有线性组合分别是一条直线、一个平面、整个 3 维空间。

📖 1.6 向量的点积、长度

设$\mathbf{v}=(v_1,\cdots,v_n),\mathbf{w}=(w_1,\cdots,w_n)$是两个 n 维向量，定义：

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=v_1w_1+\cdots+v_nw_n$$

为 **v** 和 **w** 的点积(dot product)，又称内积(inner product)或数量积(scalar product)。
注意：点积是一个数。

例：经济学中的点积
已知三种商品价格为p_1,p_2,p_3，其交易数量分别为q_1,q_2,q_3，其中$q_i>0$表示卖出，$q_i<0$表示买入。则总收入$=p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3$
若记价格向量为$\mathbf{p}=(p_1,p_2,p_3)$，交易数量向量为$\mathbf{q}=(q_1,q_2,q_3)$
则总收入$=\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}$。若$\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}=0$表示收支平衡。

向量 **v** 的长度(length)或模(norm)定义为：

$$||\mathbf{v}||=\sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}=\sqrt{{v_1}^2+\cdots+{v_n}^2}$$

若$||\mathbf{v}||=1$，则称为单位向量(unit vector)。

如：$\mathbf{i}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\mathbf{j}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\mathbf{u}=\begin{bmatrix}cos\theta\\sin\theta\end{bmatrix}$都是二维单位向量。

单位化：任一非零向量 **v**，则$\mathbf{v}/||\mathbf{v}||$是沿 **v** 方向的单位向量。

📖 1.7 向量的夹角

若$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=0$，称向量 **v** 和 **w** 垂直(perpendicular)或正交(orthogonal)，记作：**v**⊥**w** 或 **w**⊥**v**。(根据勾股定理可证)
规定：零向量与任意向量垂直。

两非零向量 v,w 的夹角 θ 满足(根据余弦定理可证)：

$$cos\theta=\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||}$$

📖 1.8 两个不等式

① Cauchy-Schwarz 不等式(Cauchy-Schwarz inequality)

$$|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}| \le ||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||$$

由$-1 \le cos\theta \le 1$即可得。

等号当且仅当一个向量是另一个向量的倍数($\theta = 0 \;\; or \;\; \pi$)。

② 三角不等式(triangle inequality)

$$||\mathbf{v}+\mathbf{w}|| \le ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}||$$

两边取平方，由 Cauchy-Schwarz 不等式可证。

等号当且仅当一个向量是另一个向量的非负倍数($\theta = 0$)。

几何意义：三角形中两边之和大于第三边。

例：$\mathbf{v} = (a, b), \mathbf{w} = (b, a)$，由 Cauchy-Schwarz 不等式得：

$$|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}| = 2ab \le ||\mathbf{v}||||\mathbf{w}|| = a^2 + b^2$$

令$x = a^2, y = b^2$得：

$$\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$$

即几何平均数(Geometric mean)不大于算术平均数(Arithmetic mean)。

第 2 章 矩阵与线性方程组

2.1 矩阵与向量的乘积

英国数学家 Cayley 是矩阵论的奠基人，他提到矩阵的出现或是在行列式的发展之后，或是作为描述线性方程组的简便方法而来。

例：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + \quad\;\; x_3 = 3 \\ \qquad 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

改写为线性组合形式：

$$x_1\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\\3\end{bmatrix}$$

记 3 个列向量为 **u**,**v**,**w**，常数向量记为 **b**，

令：$A = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$，$\mathbf{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$，则：

$$A\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v} + x_3\mathbf{w} = \mathbf{b}$$

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$记成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\2 & 0 & 1\\0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\\3\end{bmatrix}$$

矩阵 A 与未知向量 **x** 的乘积等于矩阵的列向量的线性组合。

矩阵 A 称为系数矩阵(coefficient matrix)。

上述方程组也可改写为：

$$\begin{cases}(1,1,-1)\cdot(x_1,x_2,x_3)=1\\ (2,0,1)\cdot(x_1,x_2,x_3)=3\\ (0,2,1)\cdot(x_1,x_2,x_3)=3\end{cases}$$

也就是：

$$A\mathbf{x}=\begin{bmatrix}(\text{row1})\cdot\mathbf{x}\\ (\text{row2})\cdot\mathbf{x}\\ (\text{row3})\cdot\mathbf{x}\end{bmatrix}$$

矩阵的每一行与列向量 **x** 的点积是$A\mathbf{x}$向量的每一个分量。

所以上述线性方程组可有两种理解：

1) 求列向量$\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$的线性组合，使之等于$\begin{bmatrix}1\\3\\3\end{bmatrix}$

2) 求向量$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$，使之与系数矩阵行向量$\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$的点积分别为 1,3,3

注：此处的矩阵都是行数和列数相同的矩阵，即方阵。

📖 2.2 可逆矩阵

若$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$对任意向量 **b** 有唯一解，则 A 是可逆的(invertible)

例：$\begin{cases}x_1=b_1\\ -x_1+x_2=b_2\\ -x_2+x_3=b_3\end{cases}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$

给定任意b_1,b_2,b_3，方程组有唯一解$\begin{cases}x_1=b_1\\ x_2=b_1+b_2\\ x_3=b_1+b_2+b_3\end{cases}$

故系数矩阵$\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$是可逆矩阵(invertible matrix)。

对线性方程组$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$，若 A 可逆，则可由常数项 **b** 求得 **x**。

如例子的未知向量 **x**，使用常数向量 **b** 表示为：

$$\begin{cases}x_1=b_1\\ x_2=b_1+b_2\\ x_3=b_1+b_2+b_3\end{cases}\leftrightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=S\mathbf{b}$$

该矩阵记为 S，则 S 是原来系数矩阵 A 的逆矩阵(inverse matrix)，记为：A^{-1}

设$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix},\mathbf{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix},\mathbf{w}=\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{bmatrix}$，若$A=(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$可逆，则$\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$的全部线性组合

是整个 3 维空间。
此时 **0** 写成$\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$的线性组合只有一种可能：$\mathbf{0}=0\mathbf{u}+0\mathbf{v}+0\mathbf{w}$
这时称向量$\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$线性无关(linearly independent)，对应$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$只有零解。

否则 **0** 可以写成$\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$的多种线性组合。此时称矩阵$A=(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$是奇异的(singular)，向量$\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$线性相关(linearly dependent)。
也就是$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$存在非零解。

例：循环差分矩阵

$$\begin{cases} x_1-x_3=b_1 \\ x_2-x_1=b_2 \\ x_3-x_2=b_3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

若$\mathbf{b}=0$，则$\mathbf{x}=\mathrm{c}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, c是任意实数。(无穷多解)

若$\mathbf{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$，则方程无解。

从几何上看，3 个列向量$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$线性相关，全部线性组合都在平面$x+y+z=0$上。向量$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$在该平面外部，不能写成 3 个列向量线性组合。

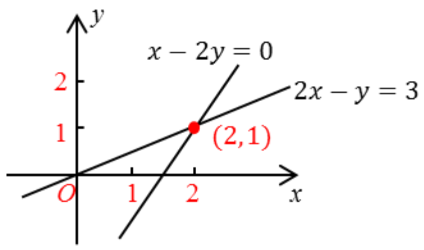
总结：
1) 若方阵 A 的列向量线性无关，则 A 可逆，$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$只有零解；
2) 若方阵 A 的列向量线性相关，则 A 奇异，$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$有无穷多解。

🕮 2.3 线性方程组的行图和列图

给定线性方程组$\begin{cases} x-2y=0 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

1) 可以写成矩阵形式：$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

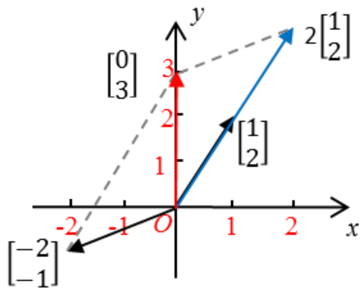
2) 从行的角度看，每行代表一条直线，方程组的解是两条直线的交点。
方程组的行图(row picture)：



3) 从列的角度看，方程组可改写为：$x\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$

解方程组等价于：求$\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$关于系数矩阵列向量$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}$的线性组合。

方程组的列图(column picture)：



4) 系数矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\2 & -1\end{bmatrix}$是可逆的。

考虑$\begin{cases}x-2y=b_1\\2x-y=b_2\end{cases}$ 求得：$\begin{cases}x=\frac{-b_1+2b_2}{3}\\y=\frac{-2b_1+b_2}{3}\end{cases}$(唯一解) 即：$A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\-\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$

一般地，$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$的每行表示一条直线(n=2)，或一张平面(n=3)或超平面(n>3)。
解方程组等价于：
1) 看这些直线、平面、超平面有没有交点。
2) **b** 能否表示为系数矩阵的列向量线性组合。

方程组对任意 **b** 有唯一解，等价于：A 可逆。
此时$\mathbf{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$，即 **x** 可表示为$A^{-1}$列向量的线性组合。

第 3 章　高斯消元法

📖 3.1　Gauss 消元法

Gauss 享有数学王子的美誉。

例 1： $\begin{cases}2x+y+z=1\\6x+2y+z=-1\\-2x+2y+z=7\end{cases}$

利用第一主元消元，消去第 2,3 个方程的 x：

$$\begin{cases}2x+\ \ y+\ \ z=1\\\qquad -1y-2z=-4\\\qquad\ \ 3y+2z=8\end{cases}$$

利用第二主元消元，消去第 3 个方程的 y：

$$\begin{cases}2x+\ \ y+\ \ z=1\\\qquad -1y-2z=-4\\\qquad\qquad -4z=-4\end{cases}$$

消元的目的是得到上三角系统(upper trianglar system)。
很容易求得$z=1$，回代(back substitution)得：$y=2,x=-1$

对应矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}2&1&1\\6&2&1\\-2&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\7\end{bmatrix}\xrightarrow{(2)-3(1),(3)+(1)}\begin{bmatrix}2&1&1\\0&-1&-2\\0&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-4\\8\end{bmatrix}\xrightarrow{(3)+3(2)}$$

$$\begin{bmatrix}2&1&1\\0&-1&-2\\0&0&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-4\\-4\end{bmatrix}$$

得到的系数矩阵是上三角矩阵，记为 U。矩阵对角线的 2、-1、4 称为主元(pivot)，主元位置必须非 0。

例 2：

① $\begin{cases}1x-2y=2\\3x-6y=16\end{cases}\xrightarrow{(2)-3(1)}\begin{cases}1x-2y=2\\0=10\end{cases}$ **无解**

② $\begin{cases}1x-2y=2\\3x-6y=6\end{cases}\xrightarrow{(2)-3(1)}\begin{cases}1x-2y=2\\0=0\end{cases}$ **无穷多解**

从行图角度：①是两条平行的直线，没有交点，所以方程组无解；②的两条直线重合，有无穷多交点，方程组有无穷多解。
从列图角度：①是两个列向量(1,3)(-2,-6)共线，常数向量(2,16)不在这条直线上，所以无法线性组合；②的常数向量(2,6)与两个共线的列向量在同一直线。

若消元过程出现$0=c\neq0$或$0=0$，则消元法**中止**。

例 3：$\begin{cases}y-z=3\\-2x+4y-z=1\\-2x+5y-4z=-2\end{cases}$

第一主元位置是 0，看似无法消元，但是交换 row1 和 row2 就可以继续消元：

$$\xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)}\begin{cases}-2x+4y-z=1\\y-z=3\\-2x+5y-4z=-2\end{cases}\xrightarrow{(3)-(1)}\begin{cases}-2x+4y-z=1\\y-z=3\\y-3z=-3\end{cases}\xrightarrow{(3)-(2)}$$

$$\begin{cases}-2x+4y-z=1\\y-z=3\\-2z=-6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=10\\y=6\\z=3\end{cases}$$

对应矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}0&1&-1\\-2&4&-1\\-2&5&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix}\xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)}\begin{bmatrix}-2&4&-1\\0&1&-1\\-2&5&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}\xrightarrow{(3)-(1)}$$

$$\begin{bmatrix}-2&4&-1\\0&1&-1\\0&1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\-3\end{bmatrix}\xrightarrow{(3)-(2)}\begin{bmatrix}-2&4&-1\\0&1&-1\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\-6\end{bmatrix}$$

上述求解过程可以推广到含 n 个未知量 n 个方程的情形。
Gauss 消元法步骤：

1) 若方程组的第一主元为 0，则交换方程以得到第一主元；

2) 用第一个方程的倍数消去第一主元下方所有系数；
3) 确定第二主元，继续以上消元过程；
4) 最后得到含有一个未知量的方程，回代得方程组的解。

n 个方程有 n 个主元，方程组有唯一解。
消元中止，表示方程组无解或有无穷多解(出现$0 = c \neq 0$或$0 = 0$)。

📖 3.2 消元法的矩阵表示

❀ 3.2.1 消去矩阵

例：$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x + 8y + z = 12 \\ 4y + z = 2 \end{cases}$

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathrm{b} \xrightarrow{(2)-3(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-2(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -10 \end{bmatrix}$$

若将系数矩阵A第 2 行第 2 列元素由 8 换成 6，则消元法第二步要暂停，需要先将第 2、3 行交换：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)-3(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

若系数矩阵A第 3 行第 3 列元素由 1 换成-4，则消元法中止，得不到第三主元：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-2(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -10 \end{bmatrix}$$

消元法成功，相当于原来的系数矩阵A可逆，等价于最后变换的系数矩阵 U 是可逆的上三角矩阵。

对于$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$线性方程组，怎么用尽可能简洁的方式描述对方程组消元化简的过程?

设$A = (a_{ij})_{n\times n}$位 n 行 n 列的方阵，$\mathbf{x} = (x_1, \cdots x_n)$是 n 维向量：

矩阵乘向量$A\mathbf{x} = x_1\overrightarrow{col_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{col_n} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{row_1} \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \overrightarrow{row_n} \cdot \mathbf{x} \end{bmatrix}$

$A\mathbf{x}$的第 i 个分量$= a_{i1}x_1 + \cdots a_{in}x_n$

上例消元法的第一步：第二个方程减去第一个方程的 3 倍：

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

使用一个矩阵实现此步消元：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2-3b_1\\b_3\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\12\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\6\\2\end{bmatrix}$$

此矩阵记为E_{21}，其效果是第一、三个分量保持不变，第二个分量减去第一个分量的 3 倍。

上例消元法的第二步：第三个方程减去第二个方程的 2 倍：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3-2b_2\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\6\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\6\\-10\end{bmatrix}$$

此矩阵记为E_{32}，其效果是第一、二个分量保持不变，第三个分量减去第二个分量的 2 倍。

$E_{21}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$是单位矩阵$I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$第二行减去第一行 3 倍得到。

$E_{32}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}$是单位矩阵$I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$第三行减去第二行 2 倍得到。

称E_{21},E_{32}这样的矩阵为消去矩阵(elimination matrix)。
这是一类初等矩阵(elementary matrix)。

定义矩阵的乘法：

$$AB=A(\mathbf{b_1}\quad\mathbf{b_2}\quad\mathbf{b_3}):=(A\mathbf{b_1}\quad A\mathbf{b_2}\quad A\mathbf{b_3})$$

矩阵E_{21}与A的乘法运算：

$$E_{21}A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&-2\\0&4&1\end{bmatrix}$$

消元过程就是：消去矩阵同时左乘系数矩阵 A 和常数项 $\mathbf{b}$。
即：$EA\mathbf{x}=E\mathbf{b}$

❀ 3.2.2 置换矩阵

若主元位置为 0，需先交换方程。如 **3.1** 的**例 3**：

$$\begin{bmatrix}0&1&-1\\-2&4&-1\\-2&5&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix}\xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)}\begin{bmatrix}-2&4&-1\\0&1&-1\\-2&5&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}$$

矩阵$P_{12}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$同时满足：$P_{12}\begin{bmatrix}0&1&-1\\-2&4&-1\\-2&5&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&4&-1\\0&1&-1\\-2&5&-4\end{bmatrix}$

$$P_{12}\begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}$$

P_{12}是单位矩阵 I 交换第一、二行所得。
将单位矩阵 I 的第 i,j 行交换得到的矩阵称为置换矩阵(permutation matrix)。

$P_{ij}A$将矩阵 A 的第 i,j 行交换。

❀ 3.2.3 初等行变换和初等矩阵

对方程组$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$，消元法涉及三种同解变形：

1) 将一个方程减去另一个方程的倍数；
2) 交换两个方程；
3) 用一个非零数乘一个方程。

称矩阵$(A|\mathbf{b})$为增广矩阵(augmented matrix)。相应地对其做三种行变换：

1) 将一行减去另一行的倍数；
2) 交换两行；
3) 用一个非零数乘一行。

这样的变换称为初等行变换。
由单位矩阵经过一次行变换得到的矩阵称为初等矩阵。

例：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{row2-row1\times l}\begin{bmatrix}1&0&0\\-l&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=E_{21}(-l)$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{row2\leftrightarrow row3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=P_{23}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{row2\times c}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&c&0\\0&0&1\end{bmatrix}=D_2(c),c\neq 0$$

$E(A|\mathbf{b})=(EA|E\mathbf{b})$, E 为初等矩阵。

对线性方程组$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$做消元法，实质上是对矩阵$(A|\mathbf{b})$做消元或换行，即使用一系列初等矩阵左乘矩阵$(A|\mathbf{b})$。

例： $E_{21}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, P_{32}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$, A是三阶方阵

$E_{21}A$：A 的第二行减去第一行的 4 倍；
$P_{32}A$：A 的第二、三行交换。

如果初等矩阵右乘矩阵 A 呢?

$$AE_{21}=A\begin{bmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$= \left[[col1 \quad col2 \quad col3] \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [col1 \quad col2 \quad col3] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [col1 \quad col2 \quad col3] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$$

$$= [col1 - 4col2 \quad col2 \quad col3]$$

也就是AE_{21}：A 的第一列减去第二列的 4 倍。
同理，AP_{32}：A 的第二、三列交换。

初等矩阵乘 A：**左乘换行，右乘换列**。

第 4 章 矩阵的运算

📖 4.1 矩阵

矩阵(matrix)由英国数学家 Sylvester 于 1850 年首先提出，指行列式的子式。在逻辑上，矩阵的概念先于行列式的概念，而历史顺序刚好相反。在矩阵引进时其基本性质就已经清楚了。英国数学家 Cayley 被公认为矩阵论的创立者。

矩阵是长方形的数表，一个 m 行 n 列的矩阵称为$m \times n$矩阵。
矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素用 a_{ij} 表示，称为 A 的(i,j)元素。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

矩阵可用列向量表示为$A = (a_1 \quad \cdots \quad a_n)$

若两个矩阵有相同的行数和列数，且对应元素都相等，则两个矩阵相等。

元素全是 0 的$m \times n$矩阵称为零矩阵，用 0 表示。
矩阵行数和列数相等时，称为方阵。
方阵 A 的对角元$a_{11}, a_{22}, \cdots a_{nn}$构成 A 的主对角线。
对角矩阵是非对角元都是 0 的方阵。
主对角线元素都是 1 的对角矩阵称为单位矩阵，记为 I。

📖 4.2 矩阵的加法和数乘

设$A = \left(a_{ij}\right), B = (b_{ij})$是$m \times n$矩阵，$c \in$ F，则：

加法：$A + B := \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{m \times n}$

数乘：$cA := \left(ca_{ij}\right)_{m \times n}$

对数域 F 上任意$m \times n$矩阵 A, B, C 及任意$k, l \in$ F，矩阵的加法和数乘满足 8 条运算规则(和向量满足的 8 条性质一样)：

1) $(A + B) + C = A + (B + C)$
2) $A + B = B + A$

3) $A+0=0+A=A$
4) A的负矩阵记为$-A$，有$A+(-A)=0$
5) $1A=A$
6) $(kl)A=k(lA)$
7) $(k+l)A=kA+lA$
8) $k(A+B)=kA+kB$

全体$m\times n$矩阵成为数域 F 上的一个向量空间。

📖 4.3 矩阵的乘法

设矩阵 B 的列是$\mathbf{b_1}\quad \mathbf{b_2}\quad \cdots\quad \mathbf{b_p}$，借助矩阵与向量的乘法，定义矩阵的乘法：

$$AB=A[\mathbf{b_1}\quad \mathbf{b_2}\quad \cdots\quad \mathbf{b_p}]:=[A\mathbf{b_1}\quad A\mathbf{b_2}\quad \cdots\quad A\mathbf{b_p}]$$

A 和 B 可乘，需要满足：A 的列数 $=B$ 的行数

$$(AB)_{ij}=(A\mathbf{b_j})_i=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

即 A 的第 i 行向量和 B 的第 j 列向量的点积。

AB 的第 i 行就是 A 的第 i 行与 B 的各列相乘所得。

将 A 写成行向量形式：

$$A=\begin{bmatrix}\mathbf{a_1}\\ \vdots\\ \mathbf{a_m}\end{bmatrix}\to\ AB=\begin{bmatrix}\mathbf{a_1}\\ \vdots\\ \mathbf{a_m}\end{bmatrix}B=\begin{bmatrix}\mathbf{a_1}B\\ \vdots\\ \mathbf{a_m}B\end{bmatrix}$$

矩阵乘积 AB 每一行$\mathbf{a_i}B$是矩阵 B 行向量的线性组合。

📖 4.4 矩阵乘法的性质

设 A 为$m\times n$矩阵，B,C 的行数列数使下列各式运算有定义，则：

1) $A(BC)=(AB)C$ (乘法结合律)
2) $A(B+C)=AB+AC$ (乘法左分配律)
3) $(B+C)A=BA+CA$ (乘法右分配律)
4) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$
5) $I_mA=A=AI_n$

矩阵乘法**没有**交换律：如 A 为$m\times n$矩阵，B 为$n\times p$矩阵，A 与 B 可做乘法，但 B 与 A 不一定能做乘法。即使可以，也可能$AB\neq BA$。

若$AB=BA$，则称 A 和 B 可交换。

例：$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&11\\11&25\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&14\\14&20\end{bmatrix}$$

即：$AB\neq BA$

矩阵也**不满足**消去律，即：若$AB=AC$，一般**不能**得到$B=C$。
特别地，若 AB 是零矩阵，一般也得不到$A=0$ or $B=0$。

例：$A=\begin{bmatrix}3&2\\6&4\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}8&9\\5&6\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}6&7\\8&9\end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix}3&2\\6&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8&9\\5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}34&39\\68&78\end{bmatrix}$$

$$AC=\begin{bmatrix}3&2\\6&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&7\\8&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}34&39\\68&78\end{bmatrix}$$

可以看出$AB=AC$，但很明显$B\neq C$。

🕮 4.5 矩阵的方幂

设 A 为$m\times n$矩阵，如果 A 能与自己乘积，需要$m=n$，即只有方阵才能与自身做乘积。

设 A 是$n\times n$方阵，p 是正整数，A^p称为方阵 A 的 p 次幂。
规定 A 的零次幂是单位矩阵，即：$A^0=I_n$。

例：$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，求$A^p$。

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{bmatrix}=2A$$

$\therefore A^p=2A^{p-1}=\cdots=2^{p-1}A$

🕮 4.6 关于矩阵乘法的引入

历史上，Cayley 是为描述线性变换的复合而引入矩阵乘法的定义。

如，设变换$\begin{cases}x_1=a_{11}x+a_{12}y\\y_1=a_{21}x+a_{22}y\end{cases}\rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

再做变换$\begin{cases}x_2=b_{11}x_1+b_{12}y_1\\y_2=b_{21}x_1+b_{22}y_1\end{cases}\rightarrow\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$

$$\begin{cases}x_2=(b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21})x+(b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22})y\\y_2=(b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21})x+(b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22})y\end{cases}$$

即：$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}&b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22}\\b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21}&b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}\end{bmatrix}$

// 个人非常不喜欢这么壮观的写法，容易看晕。

🕮 4.7 分块矩阵

处理大阶矩阵运算，常转换成小阶矩阵运算。
将矩阵用竖线和横线分成若干小块，每个小块称为矩阵的子块，分为子块的矩阵称为分块矩阵(block matrix)。

例：$A=\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&-1&0\\2&5&0&-2\\ \hdashline 3&1&-1&3\end{array}\right]$是一个分块矩阵，有 4 个小块：

$$A_{11}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&5&0\end{bmatrix},A_{12}=\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix},A_{21}=\begin{bmatrix}3&1&-1\end{bmatrix},A_{22}=\begin{bmatrix}3\end{bmatrix}$$

则 A 可记为：$\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}$

例：线性方程组$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$的增广矩阵$(A|\mathbf{b})$是有两个子块的分块矩阵。
消元时，直接左乘初等矩阵 E：$E(A|\mathbf{b})=(EA|E\mathbf{b})$

矩阵乘法的列行展开：设 A 为$m\times n$矩阵，B 为$n\times p$矩阵，则
A 写成列向量，B 写成行向量：

$$\mathrm{AB}=[\mathbf{a_1}\quad\cdots\quad\mathbf{a_n}]\begin{bmatrix}\mathbf{b_1}\\\vdots\\\mathbf{b_n}\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{a_i}\mathbf{b_i}$$

即 AB 是 A 的第 i 列和 B 的第 i 行相乘后，在相加。
其中$\mathbf{a_i}\cdot\mathbf{b_i}$是一个$m\times p$的矩阵。

例：$A=\begin{bmatrix}1&4\\1&5\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$
使用列行相乘：

$$AB=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&4&-4\\0&5&-5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&4&-3\\1&5&-4\end{bmatrix}$$

使用之前的行列相乘：

$$AB=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4&-3\\1&5&-4\end{bmatrix}$$

当矩阵太大时，不适于存储在高速计算机内存中，分块矩阵允许计算机一次处理几块子矩阵。当把矩阵分块后再近些矩阵计算更有效。

🕮 4.8 矩阵的转置

将$m\times n$矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$的行与列互换，得到矩阵$(a_{ji})_{n\times m}$，称为 A 的转置(transpose)，记为A^T。

矩阵转置的性质：

1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$
2) $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$
3) $(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$

4) $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

矩阵转置的应用：点积
$\mathbf{x},\mathbf{y}$ 是两个 n 维列向量，则$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$

设 A 为$m\times n$矩阵，$\mathbf{x}$ 为 n 维向量，$\mathbf{y}$ 为 m 维向量，则：

$$(A\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}\mathbf{y})$$

写成点积形式即：$(A\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot(A^{\mathrm{T}}\mathbf{y})$

所以矩阵的转置也可以定义为：给定A, A^{T}，是使$(A\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot(A^{\mathrm{T}}\mathbf{y})$对任意 n 维向量 $\mathbf{x}$，任意 m 维向量 $\mathbf{y}$ 都成立的矩阵。

若$A^{\mathrm{T}} = A$，称A是一个对称矩阵(symmetric matrix)。
若$A^{\mathrm{T}} = -A$，称A是一个反对称矩阵(anti-symmetric matrix)。
如$\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$是对称矩阵，$\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$是反对称矩阵。

设 R 为$m\times n$矩阵，则RR^{T}为$m\times m$的对称矩阵，$R^{\mathrm{T}}R$为$n\times n$的对称矩阵，且其对角元均非负。
$(RR^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (R^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}R^{\mathrm{T}} = RR^{\mathrm{T}} \to RR^{\mathrm{T}}$是对称矩阵，$R^{\mathrm{T}}R$同理可得也是对称矩阵。

RR^{T}的第 i 个对角元为$(RR^{\mathrm{T}})_{ii}$

$$= R_{i1}R^{\mathrm{T}}{}_{1i} + \cdots R_{in}R^{\mathrm{T}}{}_{ni} = \sum\nolimits_{k=1}^{n} R_{ik}R^{\mathrm{T}}{}_{ki} = \sum\nolimits_{k=1}^{n} {r_{ik}}^2 \geq 0$$

$R^{\mathrm{T}}R$的第 i 个对角元为$(R^{\mathrm{T}}R)_{ii}$

$$= R^{\mathrm{T}}{}_{i1}R_{1i} + \cdots R^{\mathrm{T}}{}_{im}R_{mi} = \sum\nolimits_{k=1}^{m} R^{\mathrm{T}}{}_{ik}R_{ki} = \sum\nolimits_{k=1}^{m} {r_{ki}}^2 \geq 0$$

故RR^{T}和$R^{\mathrm{T}}R$的对角元非负。

矩阵对角元的和称为 `trace` (矩阵的迹)。RR^{T}和$R^{\mathrm{T}}R$的 `trace` 相等。

$$tr(RR^{\mathrm{T}}) = \sum\nolimits_{i=1}^{m}\sum\nolimits_{k=1}^{n} {r_{ik}}^2 = tr(R^{\mathrm{T}}R) = \sum\nolimits_{i=1}^{n}\sum\nolimits_{k=1}^{m} {r_{ki}}^2$$

例：$\mathrm{R} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}, R^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

$$RR^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

$$R^{\mathrm{T}}R = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 5 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$tr(RR^{\mathrm{T}}) = 5 + 2 = 7, tr(R^{\mathrm{T}}R) = 1 + 5 + 1 = 7$

第 5 章 矩阵的逆

📖 5.1 可逆矩阵的定义

对方阵 A，若存在矩阵 B，满足$AB = BA = I$，则称 A 是可逆的(invertible)。称 B 是 A 的逆矩阵(inverse matrix)，记为：A^{-1}。

不可逆矩阵也称为奇异矩阵(singular matrix)，如 0、$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$是不可逆矩阵。

可逆矩阵也称为非奇异矩阵(nonsingular matrix)。

📖 5.2 矩阵可逆的性质

① 若方阵 A 满足$AB = I, CA = I$，则$B = C$，即方阵的逆唯一。

证明：$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$

② 若 A 可逆，则线性方程组$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$有唯一解$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$

③ A 可逆$\Leftrightarrow$ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$只有零解；

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$有非零解$\Leftrightarrow$ A不可逆。

④ 矩阵$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$可逆$\Leftrightarrow$ $ad - bc \neq 0$ （行列式$\det(A) \neq 0$），且：

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

例：$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $\det(\mathrm{A}) = 18 - 20 = -2 \neq 0$, 即$A$可逆。

$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2.5 & -1.5 \end{bmatrix}$

⑤ 对角矩阵$D = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}$可逆$\Leftrightarrow$ $d_i \neq 0$ $(1 \leq i \leq n)$，且：

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/d_n \end{bmatrix}$$

⑥ 若方阵A, B满足$AB = I$，则$BA = I$，且$A^{-1} = B$。

定理：

1) 若A是可逆矩阵，则A^{-1}也可逆，且$(A^{-1})^{-1} = A$
2) 若n阶方阵A, B都可逆，则AB可逆，且$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3) 若A可逆，则A^T也可逆，且$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$

📖 5.3 初等矩阵的逆

初等矩阵E都是可逆的，其逆矩阵将E变回I。

消去矩阵$E_{21}(-5)$的逆矩阵是$E_{21}(5)$。(row$_2$-5row$_1$ 和 row$_2$+5row$_1$)

换行矩阵P_{12}的逆矩阵是自身P_{12}。(交换 row_1 和 row_2，交换 2 次变回原来)
$D_2(c), c \neq 0$的逆矩阵是$D_2(1/c)$。(row_2*=c)

两个消去矩阵相乘：

$$E_{32}(-4)E_{21}(-5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 20 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

它们乘积的逆矩阵为：

$$E_{21}(-5)^{-1}E_{32}(-4)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

可以看出第二种：row_3 没有受到 row_1 影响。

🕮 5.4 Gauss-Jordan 消元法求逆

例：$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

设$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$则$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

两个方程组有相同的系数矩阵A，可以一起消元。

增广矩阵写成：$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right]$，即$(A|I)$。

通过初等矩阵记录消元过程。

$$[A \mathrel{\vdots} I]\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r2-2r1} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r1-3r2} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] = [I \mathrel{\vdots} A^{-1}]$$

Gauss 消元法在第一步就结束了，因为已经是上三角矩阵。Jordan 的贡献是继续消元，即主元上方元素消成 0，左边成为单位矩阵。即：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \text{即} A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

也就是当增广矩阵左边变为单位矩阵时，右边即为所求逆矩阵。

小结：设A可逆：$[A \mathrel{\vdots} I_n] \to [I_n \mathrel{\vdots} A^{-1}]$
经过一系列初等行变换，当A变为单位矩阵，右边的单位矩阵就变为A^{-1}。

由 Gauss-Jordan 消元法求逆矩阵过程可知：
若A可逆，A可经一系列初等行变换化为单位矩阵I。
因此有初等矩阵$E_1, \cdots, E_k$使得：

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I$$

故$A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1, A = (E_k \cdots E_2 E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$

Gauss-Jordan 消元法过程可以表示为：

$$E_k\cdots E_2E_1[A\,\vdots\,I]=A^{-1}[A\,\vdots\,I]=[I\,\vdots\,A^{-1}]$$

A可逆⇔A可以表示为一系列初等矩阵的乘积。

📖 5.5 矩阵可逆与主元个数

📖 5.6 下三角矩阵的逆

主对角线下(上)方元素全是 0 的方阵称为上(下)三角矩阵。

例：$A=\begin{bmatrix}a&0\\b&c\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}x&0\\y&z\end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix}a&0\\b&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&0\\y&z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax&0\\bx+cy&cz\end{bmatrix}$$

两个n阶下(上)三角矩阵A与B的乘积仍是下(上)三角矩阵，且AB的主对角元等于A与B相应主对角元的乘积。

例：$L=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\4&5&1\end{bmatrix}$，求$L^{-1}$

$$[L\quad I]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\3&1&0&0&1&0\\4&5&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r2-3r1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-3&1&0\\4&5&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r3-4r1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-3&1&0\\0&5&1&-4&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r3-5r2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-3&1&0\\0&0&1&11&-5&1\end{array}\right]$$

即：$L^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\11&-5&1\end{bmatrix}$

1) 下三角矩阵可逆⇔主对角元素都是非零。
2) 可逆下三角矩阵的逆也是下三角矩阵，特别地，若原矩阵对角元素都是 1，逆的对角元也都是 1。

📖 5.7 分块矩阵的消元和逆

分块矩阵$\left[\begin{array}{c:c}A&B\\\hdashline C&D\end{array}\right]$，其中$A$可逆。

则可进行分块矩阵的初等行变换，使之变为分块上三角矩阵：

$$\left[\begin{array}{c:c}A&B\\\hdashline C&D\end{array}\right]\to\begin{bmatrix}A&B\\0&D-CA^{-1}B\end{bmatrix}$$

使用分块初等矩阵描述为：

$$\begin{bmatrix}I&0\\-CA^{-1}&I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A&B\\0&D-CA^{-1}B\end{bmatrix}$$

分块矩阵的三种初等行变换：

1) 将一个块行减去 P 左乘另一块行：

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -P & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C-PA & D-PB \end{bmatrix}$$

2) 互换两个块行位置：

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & D \\ A & B \end{bmatrix}$$

3) 用一个可逆矩阵左乘某一块行：

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PA & PB \\ C & D \end{bmatrix}$$

类似有分块矩阵的初等列变换，将上面左乘换为右乘。

例：设$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$为可逆的分块上三角矩阵，其中$A_{11}$是$p \times p$矩阵，$A_{22}$是$q \times q$矩阵，求$A^{-1}$。

设$B = A^{-1}$且将其分块使：

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & I_q \end{array}\right]$$

所以：$\begin{cases} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I_p \\ A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0 \\ A_{22}B_{21} = 0 \\ A_{22}B_{22} = I_q \end{cases}$

由第 4 式得：$B_{22} = A_{22}^{-1}$，其中A_{22}可逆。

因为A_{22}可逆，根据第 3 式得：$B_{21} = 0$。

将$B_{21} = 0$代入第 1 式得：$B_{11} = A_{11}^{-1}$，其中A_{11}可逆。

最后根据第 2 式的：$B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}$。

所以：$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$

分块上三角矩阵可逆⇔主对角线上各分块都可逆。

第 6 章　LU 分解

📖 6.1　LU 分解

回忆高斯消元法：方阵 A 经过一系列初等行变换变为上三角矩阵 U。

使用矩阵表示：$EA = U$，E是初等矩阵的乘积

例：$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{r2-4r1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = U$

$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, E_{21}A = U$

$\rightarrow A = E_{21}^{-1}U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow A = LU$

目标：将矩阵A分解为一个下三角矩阵(lower triangular matrix)和一个上三角矩阵(upper triangular matrix)的乘积。

三阶方阵的情况：

假设不需要做换行，A经过 Gauss 消元法变为上三角矩阵U：

$$(E_{32}E_{31}E_{21})A = U$$

于是：

$$A = (E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}E_{32}^{-1})U = LU$$

消去矩阵为下三角矩阵，下三角矩阵的逆、乘积均是下三角矩阵。

为什么用$A = LU$，而不是$U = (E_{32}E_{31}E_{21})A$?

例：与 P17 类似

$$E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}, E_{31} = I_3, E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{32}E_{31}E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 10 & -5 & 1 \end{bmatrix} = E$$

$$E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}E_{32}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} = L$$

L容易计算，E不容易计算。

L只包括消去信息，E包含其他信息。

L可以这样得到：将消元的乘数写在对应位置上：

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

l_{ij}表示将矩阵的第i行减去j行的l_{ij}倍。

记$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a_1} \\ \mathbf{a_2} \\ \mathbf{a_3} \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} \mathbf{u_1} \\ \mathbf{u_2} \\ \mathbf{u_3} \end{bmatrix}$,代入得：$\begin{bmatrix} \mathbf{a_1} \\ \mathbf{a_2} \\ \mathbf{a_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{u_1} \\ \mathbf{u_2} \\ \mathbf{u_3} \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \mathbf{u_1} = \mathbf{a_1} \\ \mathbf{u_2} = \mathbf{a_2} - l_{21}\mathbf{u_1} \\ \mathbf{u_3} = \mathbf{a_3} - l_{31}\mathbf{u_1} - l_{32}\mathbf{u_2} \end{cases}$$

例：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r2-\left(-\frac{1}{2}\right)r1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r3-(-\frac{2}{3})r2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = U$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = LU$$

U为上三角矩阵，对角元是的A主元。

L是下三角矩阵，对角元为 1，乘数l_{ij}位于对角元下方。

有时U也写成对角矩阵和上三角矩阵的乘积，如上例：

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\0&-\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&\frac{3}{2}&0\\0&0&\frac{4}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\0&1&-\frac{2}{3}\\0&0&1\end{bmatrix}=LDU$$

其中D为对角矩阵，U为上三角矩阵，L为下三角矩阵，L和U对角元都是 1。

对角矩阵，以三阶为例：

$$\begin{bmatrix}d_1&0&0\\0&d_2&0\\0&0&d_3\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}d_1&0&0\\0&d_2&0\\0&0&d_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}row_1\\row_2\\row_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1row_1\\d_2row_2\\d_3row_3\end{bmatrix}$$

对角矩阵左乘矩阵A，相当于A的i行数乘d_i倍。

🕮 6.2 用 LU 分解解线性方程组

设$A=LU$，则方程组$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$可变为：

$$LU\mathbf{x}=\mathbf{b}\to\begin{cases}L\mathbf{c}=\mathbf{b}\ \ (\text{上三角方程组})\\U\mathbf{x}=\mathbf{c}\ \ (\text{下三角方程组})\end{cases}$$

例：已知$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&0\\0&\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0\\0&\frac{3}{2}&1\\0&0&\frac{4}{3}\end{bmatrix}=LU$

应用 LU 分解求解$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$，其中$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}10\\17\\16\end{bmatrix}$

$$L\mathbf{c}=\mathbf{b}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&0\\0&\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}\mathbf{c}=\begin{bmatrix}10\\17\\16\end{bmatrix}\to\mathbf{c}=\begin{bmatrix}10\\12\\8\end{bmatrix}$$

$$U\mathbf{x}=\mathbf{c}\to\begin{bmatrix}2&1&0\\0&\frac{3}{2}&1\\0&0&\frac{4}{3}\end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}10\\12\\8\end{bmatrix}\to\mathbf{x}=\begin{bmatrix}3\\4\\6\end{bmatrix}$$

不计 LU 分解的运算，解两个方程组$L\mathbf{c}=\mathbf{b}$和$U\mathbf{x}=\mathbf{c}$比直接解$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$简单。
如果算在内，计算量是相当的。

实际问题通常需要解一系列具有相同系数矩阵的线性方程组。

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b_1}, A\mathbf{x}=\mathbf{b_2},\cdots,A\mathbf{x}=\mathbf{b_n}$$

当A可逆，可求A^{-1}，再求每个解。

实际中：

1) 消元法解第一个方程组，同时得到A的 LU 分解
2) 用 LU 分解解剩下方程组。

🕮 6.3 消元法的计算量

A为n阶矩阵，用 Gauss 消元法解$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$需要多少次加减乘除运算?

第一列第一主元下方全部消为 0，需要$n(n-1)$次乘法和减法(第一行不变)。经过第一轮后，需要继续消元的矩阵大小变为$n-1$阶，也就是需要$(n-1)(n-2)$次乘法和减法。因此总共需要乘法和减法的次数为：

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\approx\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\approx\frac{1}{3}n^3$$

故左侧A的消元大约需要$\frac{1}{3}n^3$次乘法(multiplication)和$\frac{1}{3}n^3$次减法(subtraction)。

右侧$\mathbf{b}$消元法过程乘法和减法次数都是：

$$\sum_{k=1}^{n-1} k=\frac{n(n-1)}{2}\approx\frac{n^2}{2}$$

回代过程：含乘法次数：

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}\approx\frac{n^2}{2}$$

含减法次数：

$$\sum_{k=0}^{n-1} k=\frac{n(n-1)}{2}\approx\frac{n^2}{2}$$

故右侧总共有n^2次乘法和n^2次减法。

🕮 6.4 LU 分解的存在性和唯一性

并非每个矩阵A都有 LU 分解，即使A可逆。

例：若$A=\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\l_{21}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}\\0&u_{22}\end{bmatrix}=LU$

则$u_{11}=0,u_{12}=1,l_{21}u_{11}=2=0?$

故A没有 LU 分解。

设A_k是A的左上角$k\times k$子矩阵，称为A的k阶顺序主子阵。

定理：设可逆矩阵A的顺序主子阵$A_k(k=1,\cdots,n)$均为可逆矩阵，则A有 LU 分解。

证明：对A的阶数n使用数学归纳法。

定理：设n阶可逆矩阵$A = LU$，其中L为下三角矩阵，U为上三角矩阵，且$l_{ii} = 1$，$u_{ii} \neq 0$ (L 对角元全为 1，U 对角元全非 0)，则 LU 分解唯一。
证明：使用反正法。

设可逆矩阵A有两个 LU 分解：$A = L_1U_1 = L_2U_2$
变换得：$U_1U_2^{-1} = L_1^{-1}L_2$
因为$U_1U_2^{-1}$是上三角矩阵，$L_2L_1^{-1}$是下三角矩阵，所以只能是对角矩阵。
因为L_1, L_2对角元全为 1，故$L_1^{-1}L_2$对角元也全为 1。所以：

$$U_1U_2^{-1} = L_1^{-1}L_2 = I$$

因此：$L_1 = L_2, U_1 = U_2$，即 LU 分解唯一。

同理也可证明 LDU 分解唯一。

📖 6.5 对称矩阵的LDL^{T}分解

设可逆对称矩阵A不需换行，只通过消元能化成上三角矩阵U，即：$A = LDU$
因为A, D是对称矩阵，有$A = A^{\mathrm{T}} = (LDU)^{\mathrm{T}} = U^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}} = U^{\mathrm{T}}DL^{\mathrm{T}} = LDU$
所以由 LDU 分解唯一性可得：$U = L^{\mathrm{T}}$

因此对称矩阵的 LDU 分解可写为：$A = LDL^{\mathrm{T}}$

例：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r2-2r1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r3-r1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{r3-(-1)r2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = LU$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{bmatrix} = LDL^{\mathrm{T}}$$

📖 6.6 置换矩阵

一个n阶置换是$1,2,\cdots,n$的一个排列，这诱导了n阶单位矩阵行的一个重排。单位矩阵行重排后得到的矩阵称为置换矩阵。

所有2×2 的置换矩阵有：$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, P_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

1) n阶单位矩阵有$n!$个置换矩阵。
2) 置换矩阵的逆仍是置换矩阵，置换矩阵的乘积也是置换矩阵。
3) 置换矩阵P满足：$P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$ (即逆矩阵等于转置矩阵)

📖 6.7 $PA = LU$分解

设A是n阶可逆矩阵，则存在置换矩阵P，使得：$PA = LU$
证明：对A的阶数n使用数学归纳法。

例：$A=\begin{bmatrix}0&0&1&2\\0&0&3&0\\1&-1&0&1\\2&0&-1&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r1\leftrightarrow r3}\begin{bmatrix}1&-1&0&1\\0&0&3&0\\0&0&1&2\\2&0&-1&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r4-2r1}\begin{bmatrix}1&-1&0&1\\0&0&3&0\\0&0&1&2\\0&2&-1&1\end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{r2\leftrightarrow r4}\begin{bmatrix}1&-1&0&1\\0&2&-1&1\\0&0&1&2\\0&0&3&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r4-3r3}\begin{bmatrix}1&-1&0&1\\0&2&-1&1\\0&0&1&2\\0&0&0&-6\end{bmatrix}=U$$

$\Rightarrow U=E_{43}(-3)P_{42}E_{41}(-2)P_{31}A$

$\Rightarrow A=P_{31}E_{41}(2)P_{42}E_{43}(3)U$

其中：$E_{41}(2)P_{42}$表示：先第 2 行与第 4 行交换，再第 4 行加上第 1 行 2 倍。
等同于：先第 2 行加上第 1 行 2 倍，再第 2 行与第 4 行交换，即$P_{42}E_{21}(2)$
故：$E_{41}(2)P_{42}=P_{42}E_{21}(2)$

$A=P_{31}E_{41}(2)P_{42}E_{43}(3)U=P_{31}P_{42}E_{21}(2)E_{43}(3)U$

$$=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0&1\\0&2&-1&1\\0&0&1&2\\0&0&0&-6\end{bmatrix}=PLU$$

即$A=PLU$，其中$P=P_{31}P_{42}\Rightarrow P^{-1}=P_{42}P_{31}=P$

即：$P^{-1}A=LU\Rightarrow PA=LU$

第 7 章　向量空间

📖 7.1　引言

线性代数主要问题：$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$的解
　　　　　　主要运算：向量的线性组合

设$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$有两个互异解$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{\beta}$，则：

$$\begin{cases}A\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{b}\\A\boldsymbol{\beta}=\mathbf{b}\end{cases}\to\begin{cases}cA\boldsymbol{\alpha}=c\mathbf{b}\\(1-c)A\boldsymbol{\beta}=(1-c)\mathbf{b}\end{cases}\to A(c\boldsymbol{\alpha}+(1-c)\boldsymbol{\beta})=\mathbf{b}$$

即$c\boldsymbol{\alpha}+(1-c)\boldsymbol{\beta},c\in\mathbf{R}$都是$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$的解，即有无穷多的解。

因此$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$若超过一个解，必定有无穷多个解。
$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$若有解$\boldsymbol{\alpha}$，则任意解$\boldsymbol{\beta}$均满足$\boldsymbol{\beta}\in\{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{N}(A)\}$，其中$\mathbf{N}(A)=\{\mathbf{x}|A\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$
$\mathbf{N}(A)$对加法和数乘是封闭的(由此引入向量空间)。
如：$\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathrm{N}(A)\Rightarrow A\mathbf{u}=\mathbf{0},A\mathbf{v}=\mathbf{0}$
$\Rightarrow A(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\mathbf{0}\Rightarrow(\mathbf{u}+\mathbf{v})\in\mathrm{N}(A)$

$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$的解的情况：1) 只有零解；2) 有无穷多解。

📖 7.2　向量空间和子空间

定义：设$V\in\mathrm{R}^n$是一些n维列向量的集合，且V关于向量加法和数乘封闭，即$\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V,\forall c_1,c_2\in\mathrm{R}\Rightarrow c_1\boldsymbol{\alpha}+c_2\boldsymbol{\beta}\in V$，则称$V$为一个向量空间(vector space)，或$V$是$\mathrm{R}^n$的一个子空间(subspace)。

性质：零向量属于一个向量空间V。

$\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$根据数乘的封闭性得：$-\boldsymbol{\alpha} \in V$；再根据加法的封闭性：$\boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0} \in V$

更一般的定义：

一个实向量空间(real vector space)是"向量"的集合，其关于"加法"的"数乘"封闭(即线性组合封闭)且满足 8 条性质。

设V是一个向量空间，$W \subset V$，若W关于V的加法、数乘封闭，则W是V的一个子空间(subspace)。

例：R^3的子空间

1) $W = \mathrm{R}^3$
2) W是过原点的平面
3) W是过原点的直线
4) $W = \{\mathbf{0}\}$

🕮 7.3 列空间和零空间

❁ 7.3.1 列空间

设$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = [\overrightarrow{\alpha 1} \quad \overrightarrow{\alpha 2}]$，则$\overrightarrow{\alpha 1}$和$\overrightarrow{\alpha 2}$的全部线性组合是一个$\mathrm{R}^3$的子空间，称为$A$的列空间(column space)。记为：$C(A)$。

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$有解$\Leftrightarrow \mathbf{b} \in C(A)$

$C(A) = \{c_1\overrightarrow{\alpha 1} + c_2\overrightarrow{\alpha 2} \mid c_1, c_2 \in \mathrm{R}\} \subseteq \mathrm{R}^3$

几何上看$C(A)$是一张过原点的平面，该平面为$10x - 11y + 3z = 0$

例：$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5]$

$$V = \{c_1\alpha_1 + \cdots + c_5\alpha_5 | c_i \in \mathrm{R}\} = \left\{\begin{bmatrix} c_2 \\ -c_1 + c_3 \\ -c_2 + c_4 \\ -c_3 + c_5 \\ -c_4 \end{bmatrix} \middle| c_i \in \mathrm{R}\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_5 \end{bmatrix} \in \mathrm{R}^5 | b_1 + b_3 + b_5 = 0\right\}$$

几何上，它是R^5上一个超平面，是 5 维空间中的 4 维平面。

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$有解$\Leftrightarrow \mathbf{b}$在这个超平面上。

❀ 7.3.2 零空间

零空间$N(A) = \{\mathbf{x} | A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subset \mathrm{R}^n$

定理：$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$有无穷多解$\Leftrightarrow$ A的列向量线性相关$\Leftrightarrow$ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$有非零解

假设$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$有非零解，此处$A = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3]$

$\exists c_1, c_2, c_3$不全为 0 使得：$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = \mathbf{0}$

也就是$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$是$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$的解(非零解)。

$\therefore \forall t \in \mathrm{R}, t\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$也是$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$的解，即$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$只要有一个非零解，就有无穷多个非零解。

注意：$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$的解集不是一个空间，因为$\mathbf{x} = \mathbf{0}$不是它的解。

🕮 7.4 阶梯形

问题：求解$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$或$N(A)$?

例：$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{r2-2r1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{r3-3r1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r3-r2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

U是一个行阶梯形式(row-echelon form)。

主元所在(1, 3)列称为主列(pivot column)，主元对应变量(x_1, x_3)称为主变量(pivot variable)。

矩阵A经过一系列初等行变换转为U，相当于左乘一系列初等矩阵：$U = EA$

所以：$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow EA\mathbf{x} = E\mathbf{0} \Rightarrow U\mathbf{x} = \mathbf{0}$

(2, 4)两列是(1, 3)列的线性组合，称为自由列(free column)。

// col2 = 2col1, col4 = 2col3 -2col1

x_2, x_4是自由变量，对应方程：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ \qquad\qquad 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

继续消元，目标：保证每个方程只有一个主变量。

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r1-r2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_0$$

即：$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad - 2x_4 = 0 \\ \qquad\qquad 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + 2x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = -2x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$

所以解为：$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$

$\therefore\ N(A)=\left\{c_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}\middle|c_1,c_1\in\mathrm{R}\right\}$

注：
1) 矩阵A经过一系列初等行变换转为U，则$N(A)=N(U)$
2) $B\mathbf{x}=\mathbf{0}\Rightarrow AB\mathbf{x}=\mathbf{0}$，说明$N(B)\subset N(AB)$
3) $C(AB)\subset C(A)$，AB的每一列是A列向量的线性组合。

$$AB=A[\mathbf{b_1}\quad\cdots\quad\mathbf{b_n}]=[A\mathbf{b_1}\quad\cdots\quad A\mathbf{b_n}]$$

因为$A\mathbf{b_i}\in C(A)$，所以$A\mathbf{b_i}$的线性组合(列空间)$C(AB)\subset C(A)$
4) 设$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$有一个解$\mathbf{x}^*$，则$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$解集为$\mathbf{x}^*+N(A)$
5) 设V_1,V_2是R^n中两个子空间，则$V_1+V_2=\{\alpha_1+\alpha_2|\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2\}$是一个子空间；而$V_1\cup V_2$一般不是子空间。

第 8 章　求解齐次线性方程组

📖 8.1　引言

给定$(m\times n)$阶矩阵A，可以结合两个子空间：
(1) 列空间(column space)：$C(A)$是列向量的全部线性组合，是R^m的子空间。
(2) 零空间(null space)：$N(A)$是$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$"某些"解向量的全体线性组合，是R^n的子空间。

一般地，$N(A)$含无穷个向量，但这些向量可以只用有限个"特殊"的向量线性组合得出。这些特殊解满足：① 相互独立、线性无关；② 其他解容易写成这些解的线性组合。这些特殊解称为基础解系。

例： $2x+3y+z=0$的解集$N(A)$是一平面。
将z看成主变量，x,y看作自由变量：

$$\begin{cases}x=x\\y=\qquad\qquad y\\z=-2x-3y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\\-3\end{bmatrix}$$

x,y任取，故$N(A)=\left\{a\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\1\\-3\end{bmatrix}\middle|a,b\in\mathrm{R}\right\}$，其中$A=[2\quad 3\quad 1]$

📖 8.2　基础解系

例： $\begin{cases}x_1+x_2+3x_3-2x_4=0\\x_1-2x_2+x_3+x_4=0\end{cases}$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&3&-2\\1&-2&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r2-r1}\begin{bmatrix}1&1&3&-2\\0&-3&-2&3\end{bmatrix}=U$$

U是一个阶梯矩阵，$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$与$U\mathbf{x}=\mathbf{0}$有相同解，所以$N(A)=N(U)$。

行阶梯矩阵的主元所在列数严格单调递增，也就是后一个主元在前一个主元的右下方；主元以下全是 0。

继续消元，将第 2 主元-3 上方的 1 消去，得：

$$U=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3 & -2\\ 0 & -3 & -2 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow{r1+\frac{1}{3}r2}\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{7}{3} & -1\\ 0 & -3 & -2 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow{r2/(-3)}\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{7}{3} & -1\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -1\end{bmatrix}=U_0$$

U_0称为简化行阶梯形(reduced row echelon form)矩阵，主元所在列除了主元为 1 其余全为 0。

$N(A)=N(U)=N(U_0), U_0\mathbf{x}=\mathbf{0}$：

$$\begin{cases}x_1 \quad +\frac{7}{3}x_3-x_4=0\\ \quad x_2+\frac{2}{3}x_3-x_4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-\frac{7}{3}x_3+x_4\\ x_2=-\frac{2}{3}x_3+x_4\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}-\frac{7}{3}\\-\frac{2}{3}\\1\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}，\text{即}N(A)=N(U_0)=\left\{a\begin{bmatrix}-\frac{7}{3}\\-\frac{2}{3}\\1\\0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}\middle|a,b\in\mathrm{R}\right\}$$

主元对应未知量称为主变量(如有r个主变量、n个未知量)，其余变量为自由变量，若干$(n-r)$个特殊解向量称为基础解系。

8.3 简化行阶梯形的列变换

简化行阶梯形矩阵U_0一般不是对角矩阵。如果使用列变换，则U_0可化为：

$\mathrm{R}=\begin{bmatrix}I & F\\ 0 & 0\end{bmatrix}$的形式，但列变换改变了未知量的次序。

例：$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+3x_4+x_5=0\\ 2x_1+4x_2-2x_3+6x_4+3x_5=0\\ -x_1-2x_2+x_3-x_4+3x_5=0\end{cases}$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 3 & 1\\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3\\ -1 & -2 & 1 & -1 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow[r3+r1]{r2-2r1}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow[r2/2]{r2\leftrightarrow r3}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[r2-2r3]{r1-3r2+5r3}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=U_0$$

$$\xrightarrow[c3\leftrightarrow c5]{c2\leftrightarrow 4}\left[\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right]=R$$

第 2 列和第 4 列交换相当于x_2和x_4交换位置；x_3, x_5同理：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = \qquad\quad x_3 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

总结：$A \xrightarrow{E} U_0 \xrightarrow{P} R = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 即$R = EAP$

若$\alpha \in N(A)$，则$P^{-1}\alpha \in N(R)$
证：$A\alpha = 0 \to APP^{-1}\alpha = 0 \to EAPP^{-1}\alpha = 0 \to R(P^{-1}\alpha) = 0$
反之也成立：若$\beta \in N(R)$，则$P\beta \in N(A)$

主元个数r =主变量个数= A的无关列向量数= A的列数n −基础解系个数
r称为矩阵A的 rank (秩)。

$$rank(A) = rank(U_0) = rank(R)$$

R的主变量是$x_1, \cdots, x_r$， 自由变量是$x_{r+1}, \cdots, x_n$

对于$R = \begin{bmatrix} I_r & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，求解$R\mathbf{x} = \mathbf{0}$的解。

引入$N = \begin{bmatrix} -F \\ I_{n-r} \end{bmatrix}$，称为零空间矩阵(null space matrix)

$RN = 0$表示N的每一列(共$n - r$列)都是$R\mathbf{x} = \mathbf{0}$的解。这$n - r$个列向量的全体线性组合就是$R\mathbf{x} = \mathbf{0}$的解集$N(R)$，即$N(R) = C(N)$

例：$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 其中$F = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$$N = \begin{bmatrix} -F \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -4 & -5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N(R) = C(N) = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| c_1, c_2 \in \mathrm{R} \right\}$$

第 9 章　求解非齐次线性方程组

🕮 9.1　复习

🕮 9.2　求特解