20181114

第 6 章 图

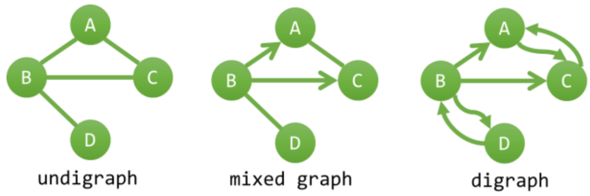
🕮 6.1 概述

图(graph)定义为 G = (V; E)。V 中元素称为顶点(vertex)；E 中元素分别对应 V 中某一对顶点(u, v)，表示存在某种关系，称为边(edge)。
顶点总数 n = |V|；边总数：e = |E|
列表结果和树结构都是图的特例。

❀ 6.1.1 无向图和有向图

若边(u, v)对应顶点 u 和 v 的次序无所谓，则称为无向边(undirected edge)。反之若 u 和 v 不对等，则(u, v)称为有向边(directed edge)，也称弧(arc)。
无向边(u, v)与(v, u)等价；但有向边则不同。有向边(u, v)从 u 指向 v，u 称为该边的起点(origin)或尾顶点(tail)，v 称为该边的终点(destination)或头顶点(head)。

所有边都是无方向的图称为无向图(undirected graph，简称 undigraph)。
所有边都是有向边的图称为有向图(directed graph，简称 digraph)。
若同时包含无向边和有向边，称为混合图(mixed graph)



有向图通用性更强，因为无向图和混合图都可转为有向图：每条无向边(u, v)都可等效地替换为一对有向边(u, v)和(v, u)。

❀ 6.1.2 度

对于任何边 e = (u, v)，称顶点 u 和 v 彼此邻接(adjacent)，互为邻居；u 和 v 都与边 e 彼此关联(incident)。
无向图中，与顶点 v 关联的边数称为 v 的度数(degree)，记为 deg(v)。

对于有向边 e = (u, v)，e 称为 u 的出边(outgoing edge)、v 的入边(incoming edge)。v 的出边总数称为出度(out-degree)，记为 outdeg(v)；入边总数称为入度(in-degree)，记为 indeg(v)。

❀ 6.1.3 通路与环路

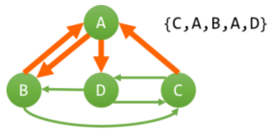
路径或通路(path)，是由 m+1 个顶点和 m 条边交替而成的序列：

$$\pi = \{v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \cdots, e_m, v_m\}$$

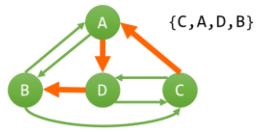
任意一条边$e_i = (v_{i-1}, v_i)$，路径沿途边总数为 m，称为路径长度，记为$|\pi| = m$
为了简化，也可省略连接其间的边，表示为：

$$\pi = \{v_0, v_1, v_2, \cdots, v_m\}$$

如图左边的{C, A, B, A, D}是顶点 C 到 D 的一条通路，长度为 4。虽然通路上边必须互异，但顶点却可以重复。沿途顶点互异的通路称为简单通路(simple path)。右边的{C, A, D, B}是从 C 到 B 的一条简单通路，长度为 3。

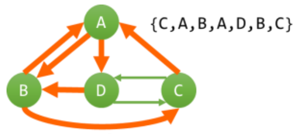


path

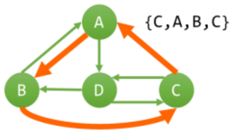


simple path

对于长度$m \geq 1$的通路，若起止顶点相同($v_0 = v_m$)，则称为环路(cycle)。
左边{C, A, B, A, D, B, C}是一条环路，长度为 6。同样，环路沿途除$v_0 = v_m$外所有顶点都互异，则称为简单环路(simple cycle)，如图右边{C, A, B, C}。

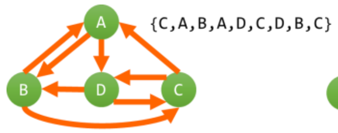


cycle

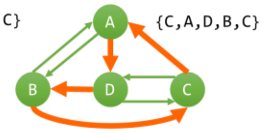


simple cycle

特别地，经过图中所有边恰好一次的环路，称为欧拉环路(Eulerian tour)，长度等于边总数 e。如图左边的{C, A, B, A, D, C, D, B, C}，长度为 8。
经过图中各顶点恰好一次的环路，称为哈密尔顿环路(Hamiltonian tour)，长度为构成环路的边数，即顶点总数 n。如图右边的{C, A, D, B, C}，长度为 4。



Eulerian tour



Hamiltonian tour

❁ 6.1.4 带权网络

通过一个权值函数，为每一边 e 指定一个权重(weight)，比如 `wt(e)`为边 e 的权重。各边均带有权重的图，称作带权图(weighted graph)或带权网络(weighted network)，有时也简称网络(network)，记作 `G(V, E, wt())`。

❁ 6.1.5 复杂度

问题的输入规模，应以顶点数和边数总和`(n+e)`度量。
包含 n 个顶点的图，最多含有多少条边?

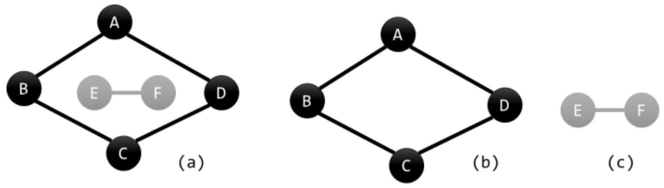
无向完全图：无向图中如果任意两个顶点之间都存在边，称为无向完全图；含有 n 个顶点的无向完全图有 `n(n-1)/2` 条边。
有向完全图：有向图中如果任意两个顶点之前都存在方向互为相反的两条边，称为有向完全图；含有 n 个顶点的有向完全图有 `n(n-1)`条边。
稀疏图和稠密图：稀疏和稠密都是相对而言，通常认为边小于$n \log n$为稀疏图，反之为稠密图。

因此不管有向图还是无向图，边数都不大于完全图，即：$e = O(n^2)$

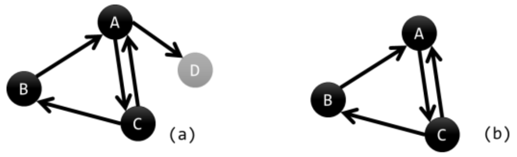
❁ 6.1.6 连通图

连通(connected)：
如果无向图中存在 u 到 v 的路径，则 u 到 v 连通(v 到 u 也连通)，因此 u 和 v 之间连通；默认任意顶点与自己连通；
如果有向图存在 u 到 v 的路径，则 u 到 v 连通，但 v 到 u 不一定连通。
连通图(connected graph)：无向图 G 任意两个顶点 u 和 v 都是连通的。

连通分量(connected component)：无向图中极大连通子图。
注：1) 子图要连通；2) 连通子图含有极大顶点数；3) 具有极大顶点数的连通子图包含依附于这些顶点的所有边。
如图(a)是无向非连通图，它有两个连通分量，即(b)和(c)：



强连通图(strongly connected graph)：**有向图** G 任意两个顶点 u 到 v 和 v 到 u 都连通(存在路径)。
强连通分量(strongly connected component)：有向图中极大强连通子图。
如图(a)是有向图，但不是强连通图，因为 A 到 D 连通，但 D 到 A 不连通；(b)是强连通图，而且是(a)的强连通分量。

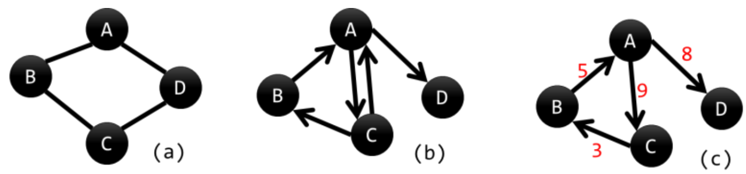


6.2 邻接矩阵

邻接矩阵(adjacency matrix)是图 ADT 最基本的实现方式，使用方阵 A[n][n]表示由 n 个顶点构成的图，其中每个单元，描述一对顶点之间可能存在的邻接关系。顶点集采用一维向量存储，边集采用二维向量存储。

对于无权图，顶点 u 到 v 的边存在，A[u][v] = 1；反之 A[u][v] = 0。对于带权网络，矩阵各单元可从布尔型改为整型或浮点型，记录对应边的权重。对于不存在的边，A[u][v] = 0 if u == v else ∞。

如图分别是无向图、有向图、有向带权图的邻接矩阵：



	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	1	0	1	0
C	1	1	0	1
D	1	0	1	0

	A	B	C	D
A	0	0	1	1
B	1	0	0	0
C	1	1	0	0
D	0	0	0	0

	A	B	C	D
A	0	∞	9	8
B	5	0	∞	∞
C	∞	3	0	∞
D	∞	∞	∞	0