

## 第 1 章 向量及其运算

### 1.1 引言

线性代数的中心问题是求解线性方程组。

如给定一个线性方程组：

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = -2 \end{cases}$$

它能表示为：

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

此方程组可解等价于： $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ 可表示为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ 的线性组合。

### 1.2 $n$ 维向量空间的点

一维：每个实数  $x$  一一对应于数轴上的点；

二维：每个二元有序数组  $(x, y)$  一一对应于二维平面上的点；

三维：每个三元有序数组  $(x, y, z)$  一一对应于三维空间中的点。

$n$  维：

定义  $n$  维空间的点为一个  $n$  元有序数组  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

称  $x_i$  是点  $\mathbf{x}$  的第  $i$  个坐标。

### 1.3 向量

**向量**(vector)是空间中具有一定长度和方向的直线段。

向量的**加法**(addition)：平行四边形法则或三角形法则。

向量的**数乘**(scalar multiplication)

如果固定向量的起点为原点，向量由其终点唯一确定。

也就是：(1)  $n$  维空间中的点，(2)  $n$  元有序数组，(3)  $n$  维空间中由原点出发的向量，都是等价的。

记：

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

为**列向量**。 $a_i$ 是向量 $\mathbf{a}$ 第 $i$ 个分量。也可以简写为 $(a_1, \dots, a_n)$ 。

### 1.4 向量空间的定义

由向量元素构成的非空集合  $V$ ，若定义了加法和数乘运算，且对任意向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  及数  $k, l \in F$  (没特殊说明就当实数)满足 8 条性质(封闭性)：

- 1)  $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
- 2)  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- 3) 存在零向量  $\mathbf{0}$ ： $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
- 4) 对任意向量  $\mathbf{a}$ ，存在唯一相反向量  $-\mathbf{a}$ ，使得  $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$
- 5)  $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$
- 6)  $(kl)\mathbf{a} = k(l\mathbf{a})$

$$7) k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$$

$$8) (k + l)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a}$$

则称  $V$  为定义在数域  $F$  上的**向量空间**(vector space)。

### 1.5 向量空间的线性组合

设  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  是  $m$  个  $n$  维向量,  $c_1, \dots, c_m \in R$ , 则称  $c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_m\mathbf{v}_m$  是向量  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  的一个**线性组合**(linear combination)。

3 维空间中, 向量  $\mathbf{u}$ (非 0)、 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ (不共线)、 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ (不共面)的所有线性组合分别是一条直线、一个平面、整个 3 维空间。

### 1.6 向量的点积、长度

设  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n), \mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$  是两个  $n$  维向量, 定义:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1w_1 + \dots + v_nw_n$$

为  $\mathbf{v}$  和  $\mathbf{w}$  的**点积**(dot product), 又称**内积**(inner product)或**数量积**(scalar product)。

**注意:** 点积是一个数。

**例:** 经济学中的点积

已知三种商品价格为  $p_1, p_2, p_3$ , 其交易数量分别为  $q_1, q_2, q_3$ , 其中  $q_i > 0$  表示卖出,  $q_i < 0$  表示买入。则总收入  $= p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3$

若记价格向量为  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ , 交易数量向量为  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$

则总收入  $= \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$ 。若  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0$  表示收支平衡。

向量  $\mathbf{v}$  的**长度**(length)或**模**(norm)定义为:

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$$

若  $||\mathbf{v}|| = 1$ , 则称为**单位向量**(unit vector)。

如:  $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$  都是二维单位向量。

单位化: 任一非零向量  $\mathbf{v}$ , 则  $\mathbf{v}/||\mathbf{v}||$  是沿  $\mathbf{v}$  方向的单位向量。

### 1.7 向量的夹角

若  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ , 称向量  $\mathbf{v}$  和  $\mathbf{w}$  **垂直**(perpendicular)或**正交**(orthogonal), 记作:  $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$  或  $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$ 。(根据勾股定理可证)

规定: 零向量与任意向量垂直。

两非零向量  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  的夹角  $\theta$  满足(根据余弦定理可证):

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{||\mathbf{v}|| ||\mathbf{w}||}$$

### 1.8 两个不等式

① **Cauchy-Schwarz 不等式**(Cauchy-Schwarz inequality)

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$$

由  $-1 \leq \cos\theta \leq 1$  即可得。

等号当且仅当一个向量是另一个向量的倍数 ( $\theta = 0$  or  $\pi$ )。

## ② 三角不等式 (triangle inequality)

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$$

两边取平方，由 Cauchy-Schwarz 不等式可证。

等号当且仅当一个向量是另一个向量的非负倍数 ( $\theta = 0$ )。

几何意义：三角形中两边之和大于第三边。

例：  $\mathbf{v} = (a, b), \mathbf{w} = (b, a)$ ，由 Cauchy-Schwarz 不等式得：

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| = 2ab \leq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| = a^2 + b^2$$

令  $x = a^2, y = b^2$  得：

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

即几何平均数 (Geometric mean) 不大于算术平均数 (Arithmetic mean)。

## 第 2 章 矩阵与线性方程组

### 2.1 矩阵与向量的乘积

英国数学家 Cayley 是矩阵论的奠基人，他提到矩阵的出现或是在行列式的发展之后，或是作为描述线性方程组的简便方法而来。

例：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_3 = 3 \\ 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

改写为线性组合形式：

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

记 3 个列向量为  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ，常数向量记为  $\mathbf{b}$ ，

令：  $A = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ ,  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ，则：

$$A\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v} + x_3\mathbf{w} = \mathbf{b}$$

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  记成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

矩阵  $A$  与未知向量  $\mathbf{x}$  的乘积等于矩阵的列向量的线性组合。

矩阵  $A$  称为系数矩阵 (coefficient matrix)。

上述方程组也可改写为：

$$\begin{cases} (1,1,-1) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 1 \\ (2,0,1) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 3 \\ (0,2,1) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 3 \end{cases}$$

也就是：

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} (\text{row1}) \cdot \mathbf{x} \\ (\text{row2}) \cdot \mathbf{x} \\ (\text{row3}) \cdot \mathbf{x} \end{bmatrix}$$

矩阵的每一行与列向量  $\mathbf{x}$  的点积是  $A\mathbf{x}$  向量的每一个分量。

所以上述线性方程组可有两种理解：

- 1) 求列向量  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  的线性组合，使之等于  $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$
- 2) 求向量  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ，使之与系数矩阵行向量  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  的点积分别为 1,3,3

注：此处的矩阵都是行数和列数相同的矩阵，即 **方阵**。

## 2.2 可逆矩阵

若  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  对任意向量  $\mathbf{b}$  有唯一解，则  $A$  是 **可逆的**(invertible)

例：  $\begin{cases} x_1 = b_1 \\ -x_1 + x_2 = b_2 \\ -x_2 + x_3 = b_3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

给定任意  $b_1, b_2, b_3$ ，方程组有唯一解  $\begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_1 + b_2 \\ x_3 = b_1 + b_2 + b_3 \end{cases}$

故系数矩阵  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  是 **可逆矩阵**(invertible matrix)。

对线性方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ，若  $A$  可逆，则可由常数项  $\mathbf{b}$  求得  $\mathbf{x}$ 。

如例子的未知向量  $\mathbf{x}$ ，使用常数向量  $\mathbf{b}$  表示为：

$$\begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_1 + b_2 \\ x_3 = b_1 + b_2 + b_3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = S\mathbf{b}$$

该矩阵记为  $S$ ，则  $S$  是原来系数矩阵  $A$  的 **逆矩阵**(inverse matrix)，记为： $A^{-1}$

设  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$ ，若  $A = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  可逆，则  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  的全部线性组合

是整个 3 维空间。

此时  $\mathbf{0}$  写成  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  的线性组合只有一种可能:  $\mathbf{0} = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{v} + 0\mathbf{w}$

这时称向量  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  线性无关 (linearly independent), 对应  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  只有零解。

否则  $\mathbf{0}$  可以写成  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  的多种线性组合。此时称矩阵  $A = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  是奇异的 (singular), 向量  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  线性相关 (linearly dependent)。

也就是  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  存在非零解。

例: 循环差分矩阵

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = b_1 \\ x_2 - x_1 = b_2 \\ x_3 - x_2 = b_3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

若  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , 则  $\mathbf{x} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $c$  是任意实数。(无穷多解)

若  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ , 则方程无解。

从几何上看, 3 个列向量  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  线性相关, 全部线性组合都在平面

$x + y + z = 0$  上。向量  $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$  在该平面外部, 不能写成 3 个列向量线性组合。

总结:

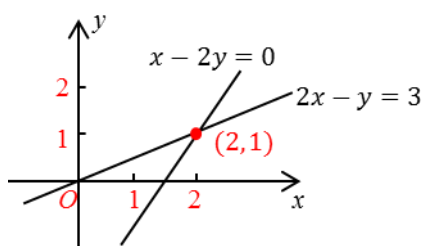
- 1) 若方阵  $A$  的列向量线性无关, 则  $A$  可逆,  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  只有零解;
- 2) 若方阵  $A$  的列向量线性相关, 则  $A$  奇异,  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  有无穷多解。

## 2.3 线性方程组的行图和列图

给定线性方程组  $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

1) 可以写成矩阵形式:  $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

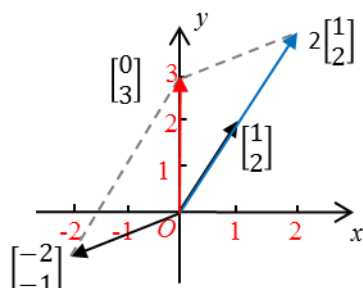
2) 从行的角度看, 每行代表一条直线, 方程组的解是两条直线的交点。  
方程组的行图 (row picture):



3) 从列的角度看, 方程组可改写为:  $x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

解方程组等价于: 求  $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$  关于系数矩阵列向量  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  和  $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$  的线性组合。

方程组的列图(column picture):



4) 系数矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  是可逆的。

考虑  $\begin{cases} x - 2y = b_1 \\ 2x - y = b_2 \end{cases}$  求得:  $\begin{cases} x = \frac{-b_1 + 2b_2}{3} \\ y = \frac{-2b_1 + b_2}{3} \end{cases}$  (唯一解) 即:  $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

一般地,  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的每行表示一条直线( $n=2$ ), 或一张平面( $n=3$ )或超平面( $n>3$ )。

解方程组等价于:

- 1) 看这些直线、平面、超平面有没有交点。
- 2)  $\mathbf{b}$  能否表示为系数矩阵的列向量线性组合。

方程组对任意  $\mathbf{b}$  有唯一解, 等价于:  $A$  可逆。

此时  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ , 即  $\mathbf{x}$  可表示为  $A^{-1}$  列向量的线性组合。

## 第3章 高斯消元法

### 3.1 Gauss 消元法

Gauss 享有数学王子的美誉。

例 1: 
$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 6x + 2y + z = -1 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases}$$

利用第一主元消元, 消去第 2,3 个方程的  $x$ :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -1y - 2z = -4 \\ 3y + 2z = 8 \end{cases}$$

利用第二主元消元, 消去第 3 个方程的  $y$ :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -1y - 2z = -4 \\ -4z = -4 \end{cases}$$

消元的目的是得到上三角系统(upper triangular system)。

很容易求得  $z = 1$ , 回代(back substitution)得:  $y = 2, x = -1$

对应矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)-3(1), (3)+(1)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)+3(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

得到的系数矩阵是上三角矩阵, 记为  $U$ 。矩阵对角线的 2、-1、4 称为**主元**(pivot), 主元位置必须非 0。

例 2:

$$\textcircled{1} \begin{cases} 1x - 2y = 2 \\ 3x - 6y = 16 \end{cases} \xrightarrow{(2)-3(1)} \begin{cases} 1x - 2y = 2 \\ 0 = 10 \end{cases} \quad \text{无解}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} 1x - 2y = 2 \\ 3x - 6y = 6 \end{cases} \xrightarrow{(2)-3(1)} \begin{cases} 1x - 2y = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \text{无穷多解}$$

从行图角度: ①是两条平行的直线, 没有交点, 所以方程组无解; ②的两条直线重合, 有无穷多交点, 方程组有无穷多解。

从列图角度: ①是两个列向量(1,3)(-2,-6)共线, 常数向量(2,16)不在这条直线上, 所以无法线性组合; ②的常数向量(2,6)与两个共线的列向量在同一直线上。

若消元过程出现  $0 = c \neq 0$  或  $0 = 0$ , 则消元法中止。

$$\text{例 3: } \begin{cases} y - z = 3 \\ -2x + 4y - z = 1 \\ -2x + 5y - 4z = -2 \end{cases}$$

第一主元位置是 0, 看似无法消元, 但是交换 row1 和 row2 就可以继续消元:

$$\xrightarrow{(1) \leftrightarrow (2)} \begin{cases} -2x + 4y - z = 1 \\ y - z = 3 \\ -2x + 5y - 4z = -2 \end{cases} \xrightarrow{(3)-(1)} \begin{cases} -2x + 4y - z = 1 \\ y - z = 3 \\ y - 3z = -3 \end{cases} \xrightarrow{(3)-(2)}$$

$$\begin{cases} -2x + 4y - z = 1 \\ y - z = 3 \\ -2z = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 6 \\ z = 3 \end{cases}$$

对应矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1) \leftrightarrow (2)} \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-(1)}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-(2)} \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

上述求解过程可以推广到含  $n$  个未知量  $n$  个方程的情形。

Gauss 消元法步骤:

1) 若方程组的第一主元为 0, 则交换方程以得到第一主元;

- 2) 用第一个方程的倍数消去第一主元下方所有系数;
- 3) 确定第二主元, 继续以上消元过程;
- 4) 最后得到含有一个未知量的方程, 回代得方程组的解。

$n$  个方程有  $n$  个主元, 方程组有唯一解。

消元中止, 表示方程组无解或有无穷多解(出现  $0 = c \neq 0$  或  $0 = 0$ )。

## 3.2 消元法的矩阵表示

### 3.2.1 消去矩阵

例: 
$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x + 8y + z = 12 \\ 4y + z = 2 \end{cases}$$

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{b} \xrightarrow{(2)-3(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-2(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -10 \end{bmatrix}$$

若将系数矩阵  $A$  第 2 行第 2 列元素由 8 换成 6, 则消元法第二步要暂停, 需要先第 2、3 行交换:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)-3(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

若系数矩阵  $A$  第 3 行第 3 列元素由 1 换成 -4, 则消元法中止, 得不到第三主元:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-2(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -10 \end{bmatrix}$$

消元法成功, 相当于原来的系数矩阵  $A$  可逆, 等价于最后变换的系数矩阵  $U$  是可逆的上三角矩阵。

对于  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  线性方程组, 怎么用尽可能简洁的方式描述对方程组消元化简的过程?

设  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  为  $n$  行  $n$  列的方阵,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  是  $n$  维向量:

$$A\mathbf{x} = x_1 \overrightarrow{col_1} + \dots + x_n \overrightarrow{col_n} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{row_1} \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \overrightarrow{row_n} \cdot \mathbf{x} \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x} \text{ 的第 } i \text{ 个分量} = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$$

上例消元法的第一步: 第二个方程减去第一个方程的 3 倍:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

使用一个矩阵实现此步消元:



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 3b_1 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

此矩阵记为 $E_{21}$ ，其效果是第一、三个分量保持不变，第二个分量减去第一个分量的 3 倍。

上例消元法的第二步：第三个方程减去第二个方程的 2 倍：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 - 2b_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -10 \end{bmatrix}$$

此矩阵记为 $E_{32}$ ，其效果是第一、二个分量保持不变，第三个分量减去第二个分量的 2 倍。

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{是单位矩阵 } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{第二行减去第一行 3 倍得到。}$$

$$E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{是单位矩阵 } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{第三行减去第二行 2 倍得到。}$$

称 $E_{21}, E_{32}$ 这样的矩阵为**消去矩阵**(elimination matrix)。

这是一类**初等矩阵**(elementary matrix)。

定义矩阵的乘法：

$$AB = A(\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3) := (A\mathbf{b}_1 \quad A\mathbf{b}_2 \quad A\mathbf{b}_3)$$

矩阵 $E_{21}$ 与 $A$ 的乘法运算：

$$E_{21}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

消元过程就是：消去矩阵同时左乘系数矩阵 $A$ 和常数项 $\mathbf{b}$ 。

即： $E\mathbf{Ax} = E\mathbf{b}$

### ⊗ 3.2.2 置换矩阵

若主元位置为 0，需先交换方程。如 3.1 的例 3：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1) \leftrightarrow (2)} \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{矩阵 } P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{同时满足: } P_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$P_{12} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$P_{12}$ 是单位矩阵  $I$  交换第一、二行所得。

将单位矩阵  $I$  的第  $i, j$  行交换得到的矩阵称为**置换矩阵**(permutation matrix)。

$P_{ij}A$ 将矩阵  $A$  的第  $i, j$  行交换。

### ⊗ 3.2.3 初等行变换和初等矩阵

对方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ，消元法涉及三种同解变形：

- 1) 将一个方程减去另一个方程的倍数；
- 2) 交换两个方程；
- 3) 用一个非零数乘一个方程。

称矩阵  $(A|\mathbf{b})$  为**增广矩阵**(augmented matrix)。相应地对其做三种行变换：

- 1) 将一行减去另一行的倍数；
- 2) 交换两行；
- 3) 用一个非零数乘一行。

这样的变换称为**初等行变换**。

由单位矩阵经过一次行变换得到的矩阵称为**初等矩阵**。

例：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{row2} - \text{row1} \times l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -l & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{21}(-l)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{row2} \leftrightarrow \text{row3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P_{23}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{row2} \times c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D_2(c), c \neq 0$$

$E(A|\mathbf{b}) = (EA|E\mathbf{b})$ ,  $E$  为初等矩阵。

对线性方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  做消元法，实质上是对矩阵  $(A|\mathbf{b})$  做消元或换行，即使用一系列初等矩阵左乘矩阵  $(A|\mathbf{b})$ 。

例：  $E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $P_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $A$  是三阶方阵

$E_{21}A$ :  $A$  的第二行减去第一行的 4 倍；

$P_{32}A$ :  $A$  的第二、三行交换。

如果初等矩阵右乘矩阵  $A$  呢？

$$AE_{21} = A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{col1} & \text{col2} & \text{col3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{col1} & \text{col2} & \text{col3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{col1} & \text{col2} & \text{col3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [\text{col1} - 4\text{col2} \quad \text{col2} \quad \text{col3}]$$

也就是 $AE_{21}$ :  $A$  的第一列减去第二列的 4 倍。

同理,  $AP_{32}$ :  $A$  的第二、三列交换。

初等矩阵乘  $A$ : 左乘换行, 右乘换列。

## 第 4 章 矩阵的运算

### 4.1 矩阵

**矩阵**(matrix)由英国数学家 Sylvester 于 1850 年首先提出, 指行列式的子式。在逻辑上, 矩阵的概念先于行列式的概念, 而历史顺序刚好相反。在矩阵引进时其基本性质就已经清楚了。英国数学家 Cayley 被公认为矩阵论的创立者。

矩阵是长方形的数表, 一个  $m$  行  $n$  列的矩阵称为  $m \times n$  矩阵。

矩阵  $A$  的第  $i$  行第  $j$  列元素用  $a_{ij}$  表示, 称为  $A$  的  $(i, j)$  元素。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

矩阵可用列向量表示为  $A = (a_1 \quad \cdots \quad a_n)$

若两个矩阵有相同的行数和列数, 且对应元素都相等, 则两个矩阵相等。

元素全是 0 的  $m \times n$  矩阵称为**零矩阵**, 用  $0$  表示。

矩阵行数和列数相等时, 称为**方阵**。

方阵  $A$  的**对角元** $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 构成  $A$  的**主对角线**。

**对角矩阵**是非对角元都是 0 的方阵。

主对角线元素都是 1 的对角矩阵称为**单位矩阵**, 记为  $I$ 。

### 4.2 矩阵的加法和数乘

设  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$  是  $m \times n$  矩阵,  $c \in F$ , 则:

$$\text{加法: } A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

$$\text{数乘: } cA := (ca_{ij})_{m \times n}$$

对数域  $F$  上任意  $m \times n$  矩阵  $A, B, C$  及任意  $k, l \in F$ , 矩阵的加法和数乘满足 8 条运算规则(和向量满足的 8 条性质一样):

- 1)  $(A + B) + C = A + (B + C)$
- 2)  $A + B = B + A$

- 3)  $A + 0 = 0 + A = A$
- 4)  $A$  的负矩阵记为  $-A$ , 有  $A + (-A) = 0$
- 5)  $1A = A$
- 6)  $(kl)A = k(lA)$
- 7)  $(k + l)A = kA + lA$
- 8)  $k(A + B) = kA + kB$

全体  $m \times n$  矩阵成为数域  $F$  上的一个向量空间。

### 4.3 矩阵的乘法

设矩阵  $B$  的列是  $\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_p$ , 借助矩阵与向量的乘法, 定义矩阵的乘法:

$$AB = A[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_p] := [A\mathbf{b}_1 \quad A\mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{b}_p]$$

$A$  和  $B$  可乘, 需要满足:  $A$  的列数 =  $B$  的行数

$$(AB)_{ij} = (A\mathbf{b}_j)_i = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

即  $A$  的第  $i$  行向量和  $B$  的第  $j$  列向量的点积。

$AB$  的第  $i$  行就是  $A$  的第  $i$  行与  $B$  的各列相乘所得。

将  $A$  写成行向量形式:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \rightarrow AB = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 B \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m B \end{bmatrix}$$

矩阵乘积  $AB$  每一行  $\mathbf{a}_i B$  是矩阵  $B$  行向量的线性组合。

### 4.4 矩阵乘法的性质

设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $B, C$  的行数列数使下列各式运算有定义, 则:

- 1)  $A(BC) = (AB)C$  (乘法结合律)
- 2)  $A(B + C) = AB + AC$  (乘法左分配律)
- 3)  $(B + C)A = BA + CA$  (乘法右分配律)
- 4)  $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
- 5)  $I_m A = A = A I_n$

矩阵乘法没有交换律: 如  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $B$  为  $n \times p$  矩阵,  $A$  与  $B$  可做乘法, 但  $B$  与  $A$  不一定能做乘法。即使可以, 也可能  $AB \neq BA$ 。

若  $AB = BA$ , 则称  $A$  和  $B$  可交换。

例:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{bmatrix}$$

即:  $AB \neq BA$

矩阵也不满足消去律，即：若  $AB = AC$ ，一般不能得到  $B = C$ 。  
特别地，若  $AB$  是零矩阵，一般也得不到  $A = 0$  or  $B = 0$ 。

例：  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & 39 \\ 68 & 78 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & 39 \\ 68 & 78 \end{bmatrix}$$

可以看出  $AB = AC$ ，但很明显  $B \neq C$ 。

## 4.5 矩阵的方幂

设  $A$  为  $m \times n$  矩阵，如果  $A$  能与自己乘积，需要  $m = n$ ，即只有方阵才能与自身做乘积。

设  $A$  是  $n \times n$  方阵， $p$  是正整数， $A^p$  称为方阵  $A$  的  $p$  次幂。  
规定  $A$  的零次幂是单位矩阵，即：  $A^0 = I_n$ 。

例：  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，求  $A^p$ 。

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2A$$

$$\therefore A^p = 2A^{p-1} = \dots = 2^{p-1}A$$

## 4.6 关于矩阵乘法的引入

历史上，Cayley 是为描述线性变换的复合而引入矩阵乘法的定义。

如，设变换  $\begin{cases} x_1 = a_{11}x + a_{12}y \\ y_1 = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

再做变换  $\begin{cases} x_2 = b_{11}x_1 + b_{12}y_1 \\ y_2 = b_{21}x_1 + b_{22}y_1 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x_2 = (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})x + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})y \\ y_2 = (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})x + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})y \end{cases}$$

即：  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{bmatrix}$

// 个人非常不喜欢这么壮观的写法，容易看晕。

## 4.7 分块矩阵

处理大阶矩阵运算，常转换成小阶矩阵运算。

将矩阵用竖线和横线分成若干小块，每个小块称为矩阵的子块，分为子块的矩阵称为分块矩阵(block matrix)。

例:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$  是一个分块矩阵, 有 4 个小块:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, A_{21} = [3 \quad 1 \quad -1], A_{22} = [3]$$

则  $A$  可记为:  $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$

例: 线性方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的增广矩阵  $(A|\mathbf{b})$  是有两个子块的分块矩阵。  
消元时, 直接左乘初等矩阵  $E$ :  $E(A|\mathbf{b}) = (EA|E\mathbf{b})$

矩阵乘法的列行展开: 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $B$  为  $n \times p$  矩阵, 则  
 $A$  写成列向量,  $B$  写成行向量:

$$AB = [\mathbf{a}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n] \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i$$

即  $AB$  是  $A$  的第  $i$  列和  $B$  的第  $i$  行相乘后, 在相加。  
其中  $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_i$  是一个  $m \times p$  的矩阵。

例:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

使用列行相乘:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \quad 0 \quad 1] + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} [0 \quad 1 \quad -1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & 5 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

使用之前的行列相乘:

$$AB = \begin{bmatrix} [1 \quad 4] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & [1 \quad 4] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & [1 \quad 4] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ [1 \quad 5] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & [1 \quad 5] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & [1 \quad 5] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

当矩阵太大时, 不适于存储在高速计算机内存中, 分块矩阵允许计算机一次处理几块子矩阵。当把矩阵分块后再近些矩阵计算更有效。

## 4.8 矩阵的转置

将  $m \times n$  矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  的行与列互换, 得到矩阵  $(a_{ji})_{n \times m}$ , 称为  $A$  的转置 (transpose), 记为  $A^T$ 。

矩阵转置的性质:

- 1)  $(A^T)^T = A$
- 2)  $(A + B)^T = A^T + B^T$
- 3)  $(kA)^T = kA^T$

$$4) (AB)^T = B^T A^T$$

矩阵转置的应用：点积

$\mathbf{x}, \mathbf{y}$  是两个  $n$  维列向量，则  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$

设  $A$  为  $m \times n$  矩阵， $\mathbf{x}$  为  $n$  维向量， $\mathbf{y}$  为  $m$  维向量，则：

$$(\mathbf{Ax})^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T A^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T (A^T \mathbf{y})$$

写成点积形式即：  $(\mathbf{Ax}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A^T \mathbf{y})$

所以矩阵的转置也可以定义为：给定  $A, A^T$ ，是使  $(\mathbf{Ax}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A^T \mathbf{y})$  对任意  $n$  维向量  $\mathbf{x}$ ，任意  $m$  维向量  $\mathbf{y}$  都成立的矩阵。

若  $A^T = A$ ，称  $A$  是一个 **对称矩阵** (symmetric matrix)。

若  $A^T = -A$ ，称  $A$  是一个 **反对称矩阵** (anti-symmetric matrix)。

如  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  是对称矩阵， $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$  是反对称矩阵。

设  $R$  为  $m \times n$  矩阵，则  $RR^T$  为  $m \times m$  的对称矩阵， $R^T R$  为  $n \times n$  的对称矩阵，且其对角元均非负。

$(RR^T)^T = (R^T)^T R^T = RR^T \rightarrow RR^T$  是对称矩阵， $R^T R$  同理可得也是对称矩阵。

$RR^T$  的第  $i$  个对角元为  $(RR^T)_{ii}$

$$= R_{i1} R_{1i}^T + \cdots R_{in} R_{ni}^T = \sum_{k=1}^n R_{ik} R_{ki}^T = \sum_{k=1}^n r_{ik}^2 \geq 0$$

$R^T R$  的第  $i$  个对角元为  $(R^T R)_{ii}$

$$= R_{i1}^T R_{1i} + \cdots R_{im}^T R_{mi} = \sum_{k=1}^m R_{ik}^T R_{ki} = \sum_{k=1}^m r_{ki}^2 \geq 0$$

故  $RR^T$  和  $R^T R$  的对角元非负。

矩阵对角元的和称为 **trace** (矩阵的迹)。 $RR^T$  和  $R^T R$  的 **trace** 相等。

$$tr(RR^T) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n r_{ik}^2 = tr(R^T R) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m r_{ki}^2$$

$$\text{例: } R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, R^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$RR^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R^T R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$tr(RR^T) = 5 + 2 = 7, tr(R^T R) = 1 + 5 + 1 = 7$$

## 第5章 矩阵的逆

### 5.1 可逆矩阵的定义

对方阵  $A$ , 若存在矩阵  $B$ , 满足  $AB = BA = I$ , 则称  $A$  是**可逆的**(invertible)。称  $B$  是  $A$  的**逆矩阵**(inverse matrix), 记为:  $A^{-1}$ 。

不可逆矩阵也称为**奇异矩阵**(singular matrix), 如  $0$ 、 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  是不可逆矩阵。

可逆矩阵也称为**非奇异矩阵**(nonsingular matrix)。

### 5.2 矩阵可逆的性质

① 若方阵  $A$  满足  $AB = I, CA = I$ , 则  $B = C$ , 即方阵的逆唯一。

证明:  $C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$

② 若  $A$  可逆, 则线性方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  有唯一解  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$

③  $A$  可逆  $\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  只有零解;

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  有非零解  $\Leftrightarrow A$  不可逆。

④ 矩阵  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  可逆  $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$  (行列式  $\det(A) \neq 0$ ), 且:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

例:  $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ,  $\det(A) = 18 - 20 = -2 \neq 0$ , 即  $A$  可逆。

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2.5 & -1.5 \end{bmatrix}$$

⑤ 对角矩阵  $D = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}$  可逆  $\Leftrightarrow d_i \neq 0$  ( $1 \leq i \leq n$ ), 且:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/d_n \end{bmatrix}$$

⑥ 若方阵  $A, B$  满足  $AB = I$ , 则  $BA = I$ , 且  $A^{-1} = B$ 。

定理:

1) 若  $A$  是可逆矩阵, 则  $A^{-1}$  也可逆, 且  $(A^{-1})^{-1} = A$

2) 若  $n$  阶方阵  $A, B$  都可逆, 则  $AB$  可逆, 且  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3) 若  $A$  可逆, 则  $A^T$  也可逆, 且  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

### 5.3 初等矩阵的逆

初等矩阵  $E$  都是可逆的, 其逆矩阵将  $E$  变回  $I$ 。

消去矩阵  $E_{21}(-5)$  的逆矩阵是  $E_{21}(5)$ 。(row<sub>2</sub>-5row<sub>1</sub> 和 row<sub>2</sub>+5row<sub>1</sub>)



换行矩阵 $P_{12}$ 的逆矩阵是自身 $P_{12}$ 。(交换 row<sub>1</sub> 和 row<sub>2</sub>, 交换 2 次变回原来)  
 $D_2(c), c \neq 0$ 的逆矩阵是 $D_2(1/c)$ 。(row<sub>2</sub>\*=c)

两个消去矩阵相乘:

$$E_{32}(-4)E_{21}(-5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 20 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

它们乘积的逆矩阵为:

$$E_{21}(-5)^{-1}E_{32}(-4)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

可以看出第二种: row<sub>3</sub> 没有受到 row<sub>1</sub> 影响。

## 5.4 Gauss-Jordan 消元法求逆

例:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

设 $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 则 $AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

两个方程组有相同的系数矩阵 $A$ , 可以一起消元。

增广矩阵写成:  $\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right]$ , 即 $(A|I)$ 。

通过初等矩阵记录消元过程。

$$[A \mid I] \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 - 3r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = [I \mid A^{-1}]$$

Gauss 消元法在第一步就结束了, 因为已经是上三角矩阵。Jordan 的贡献是继续消元, 即主元上方元素消成 0, 左边成为单位矩阵。即:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \text{即 } A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

也就是当增广矩阵左边变为单位矩阵时, 右边即为所求逆矩阵。

小结: 设 $A$ 可逆:  $[A \mid I_n] \rightarrow [I_n \mid A^{-1}]$

经过一系列初等行变换, 当 $A$ 变为单位矩阵, 右边的单位矩阵就变为 $A^{-1}$ 。

由 Gauss-Jordan 消元法求逆矩阵过程可知:

若 $A$ 可逆,  $A$ 可经一系列初等行变换化为单位矩阵 $I$ 。

因此有初等矩阵 $E_1, \dots, E_k$ 使得:

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I$$

$$\text{故 } A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1, A = (E_k \cdots E_2 E_1)^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$$

Gauss-Jordan 消元法过程可以表示为:

$$E_k \cdots E_2 E_1 [A \mid I] = A^{-1} [A \mid I] = [I \mid A^{-1}]$$

$A$ 可逆 $\Leftrightarrow A$ 可以表示为一系列初等矩阵的乘积。

## 5.5 矩阵可逆与主元个数

## 5.6 下三角矩阵的逆

主对角线下(上)方元素全是 0 的方阵称为上(下)三角矩阵。

例:  $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & z \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & 0 \\ bx + cy & cz \end{bmatrix}$$

两个 $n$ 阶下(上)三角矩阵 $A$ 与 $B$ 的乘积仍是下(上)三角矩阵, 且 $AB$ 的主对角元等于 $A$ 与 $B$ 相应主对角元的乘积。

例:  $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ , 求 $L^{-1}$

$$[L \mid I] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2-3r_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3-4r_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{r_3-5r_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -5 & 1 \end{array} \right]$$

即:  $L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 11 & -5 & 1 \end{bmatrix}$

1) 下三角矩阵可逆 $\Leftrightarrow$ 主对角元素都是非零。

2) 可逆下三角矩阵的逆也是下三角矩阵, 特别地, 若原矩阵对角元素都是 1, 逆的对角元也都是 1。

## 5.7 分块矩阵的消元和逆

分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ , 其中 $A$ 可逆。

则可进行分块矩阵的初等行变换, 使之变为分块上三角矩阵:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

使用分块初等矩阵描述为:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

分块矩阵的三种初等行变换:

1) 将一个块行减去 $P$ 左乘另一块行:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -P & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C - PA & D - PB \end{bmatrix}$$

2) 互换两个块行位置:

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & D \\ A & B \end{bmatrix}$$

3) 用一个可逆矩阵左乘某一块行:

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PA & PB \\ C & D \end{bmatrix}$$

类似有分块矩阵的初等列变换, 将上面左乘换为右乘。

例: 设  $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$  为可逆的分块上三角矩阵, 其中  $A_{11}$  是  $p \times p$  矩阵,  $A_{22}$  是  $q \times q$  矩阵, 求  $A^{-1}$ 。

设  $B = A^{-1}$  且将其分块使:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}$$

所以: 
$$\begin{cases} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I_p \\ A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0 \\ A_{22}B_{21} = 0 \\ A_{22}B_{22} = I_q \end{cases}$$

由第 4 式得:  $B_{22} = A_{22}^{-1}$ , 其中  $A_{22}$  可逆。

因为  $A_{22}$  可逆, 根据第 3 式得:  $B_{21} = 0$ 。

将  $B_{21} = 0$  代入第 1 式得:  $B_{11} = A_{11}^{-1}$ , 其中  $A_{11}$  可逆。

最后根据第 2 式的:  $B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}$ 。

所以: 
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

分块上三角矩阵可逆  $\Leftrightarrow$  主对角线上各分块都可逆。

## 第 6 章 LU 分解

### 6.1 LU 分解

回忆高斯消元法: 方阵  $A$  经过一系列初等行变换变为上三角矩阵  $U$ 。

使用矩阵表示:  $EA = U$ ,  $E$  是初等矩阵的乘积

例:  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - 4r_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = U$

$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, E_{21}A = U$

$\rightarrow A = E_{21}^{-1}U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow A = LU$

目标: 将矩阵  $A$  分解为一个下三角矩阵(lower triangular matrix)和一个上三角矩阵(upper triangular matrix)的乘积。

三阶方阵的情况:

假设不需要做换行， $A$ 经过 Gauss 消元法变为上三角矩阵 $U$ ：

$$(E_{32}E_{31}E_{21})A = U$$

于是：

$$A = (E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}E_{32}^{-1})U = LU$$

消去矩阵为下三角矩阵，下三角矩阵的逆、乘积均是下三角矩阵。

为什么用 $A = LU$ ，而不是 $U = (E_{32}E_{31}E_{21})A$ ？

例：与 P17 类似

$$E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}, E_{31} = I_3, E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{32}E_{31}E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} = E$$

$$E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}E_{32}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} = L$$

$L$ 容易计算， $E$ 不容易计算。

$L$ 只包括消去信息， $E$ 包含其他信息。

$L$ 可以这样得到：将消元的乘数写在对应位置上：

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$l_{ij}$ 表示将矩阵的第 $i$ 行减去 $j$ 行的 $l_{ij}$ 倍。

$$\text{记 } A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{bmatrix}, \text{代入得: } \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{a}_2 - l_{21}\mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_3 = \mathbf{a}_3 - l_{31}\mathbf{u}_1 - l_{32}\mathbf{u}_2 \end{cases}$$

例：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - (-\frac{1}{2})r_1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - (-\frac{2}{3})r_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = U$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = LU$$

$U$ 为上三角矩阵，对角元是 $A$ 的主元。

$L$ 是下三角矩阵，对角元为 1，乘数 $l_{ij}$ 位于对角元下方。

有时 $U$ 也写成对角矩阵和上三角矩阵的乘积，如上例：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LDU$$

其中 $D$ 为对角矩阵， $U$ 为上三角矩阵， $L$ 为下三角矩阵， $L$ 和 $U$ 对角元都是 1。

对角矩阵，以三阶为例：

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} row_1 \\ row_2 \\ row_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 row_1 \\ d_2 row_2 \\ d_3 row_3 \end{bmatrix}$$

对角矩阵左乘矩阵 $A$ ，相当于 $A$ 的 $i$ 行数乘 $d_i$ 倍。

## 6.2 用 LU 分解解线性方程组

设 $A = LU$ ，则方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 可变为：

$$LU\mathbf{x} = \mathbf{b} \rightarrow \begin{cases} L\mathbf{c} = \mathbf{b} & (\text{上三角方程组}) \\ U\mathbf{x} = \mathbf{c} & (\text{下三角方程组}) \end{cases}$$

例：已知 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = LU$

应用 LU 分解求解 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ，其中 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 17 \\ 16 \end{bmatrix}$

$$L\mathbf{c} = \mathbf{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 10 \\ 17 \\ 16 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$U\mathbf{x} = \mathbf{c} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

不计 LU 分解的运算，解两个方程组 $L\mathbf{c} = \mathbf{b}$ 和 $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ 比直接解 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 简单。如果算在内，计算量是相当的。

实际问题通常需要解一系列具有相同系数矩阵的线性方程组。

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1, A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2, \dots, A\mathbf{x} = \mathbf{b}_n$$

当 $A$ 可逆, 可求 $A^{-1}$ , 再求每个解。

实际中:

- 1) 消元法解第一个方程组, 同时得到 $A$ 的 LU 分解
- 2) 用 LU 分解解剩下方程组。

### 6.3 消元法的计算量

$A$ 为 $n$ 阶矩阵, 用 Gauss 消元法解 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 需要多少次加减乘除运算?

第一列第一主元下方全部消为 0, 需要 $n(n-1)$ 次乘法和减法(第一行不变)。经过第一轮后, 需要继续消元的矩阵大小变为 $n-1$ 阶, 也就是需要 $(n-1)(n-2)$ 次乘法和减法。因此总共需要乘法和减法的次数为:

$$\sum_{k=2}^n k(k-1) \approx \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \approx \frac{1}{3}n^3$$

故左侧 $A$ 的消元大约需要 $\frac{1}{3}n^3$ 次乘法(multiplication)和 $\frac{1}{3}n^3$ 次减法(subtraction)。

右侧 $\mathbf{b}$ 消元法过程乘法和减法次数都是:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$

回代过程: 含乘法次数:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$

含减法次数:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$

故右侧总共有 $n^2$ 次乘法和 $n^2$ 次减法。

### 6.4 LU 分解的存在性和唯一性

并非每个矩阵 $A$ 都有 LU 分解, 即使 $A$ 可逆。

例: 若 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} = LU$

则 $u_{11} = 0, u_{12} = 1, l_{21}u_{11} = 2 = 0$ ?

故 $A$ 没有 LU 分解。

设 $A_k$ 是 $A$ 的左上角 $k \times k$ 子矩阵, 称为 $A$ 的 $k$ 阶顺序主子阵。

**定理:** 设可逆矩阵 $A$ 的顺序主子阵 $A_k (k = 1, \dots, n)$ 均为可逆矩阵, 则 $A$ 有 LU 分解。

**证明:** 对 $A$ 的阶数 $n$ 使用数学归纳法。

**定理：**设 $n$ 阶可逆矩阵 $A = LU$ ，其中 $L$ 为下三角矩阵， $U$ 为上三角矩阵，且 $l_{ii} = 1$ ， $u_{ii} \neq 0$  ( $L$  对角元全为 1， $U$  对角元全非 0)，则 LU 分解唯一。

**证明：**使用反证法。

设可逆矩阵 $A$ 有两个 LU 分解： $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$

变换得： $U_1 U_2^{-1} = L_1^{-1} L_2$

因为 $U_1 U_2^{-1}$ 是上三角矩阵， $L_2 L_1^{-1}$ 是下三角矩阵，所以只能是对角矩阵。

因为 $L_1, L_2$ 对角元全为 1，故 $L_1^{-1} L_2$ 对角元也全为 1。所以：

$$U_1 U_2^{-1} = L_1^{-1} L_2 = I$$

因此： $L_1 = L_2, U_1 = U_2$ ，即 LU 分解唯一。

同理也可证明 LDU 分解唯一。

## 6.5 对称矩阵的 $LDL^T$ 分解

设可逆对称矩阵 $A$ 不需换行，只通过消元能化成上三角矩阵 $U$ ，即： $A = LDU$

因为 $A, D$ 是对称矩阵，有 $A = A^T = (LDU)^T = U^T D^T L^T = U^T D L^T = LDU$

所以由 LDU 分解唯一性可得： $U = L^T$

因此对称矩阵的 LDU 分解可写为： $A = LDL^T$

例：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-(-1)r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = LU$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{bmatrix} = LDL^T$$

## 6.6 置换矩阵

一个 $n$ 阶置换是 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列，这诱导了 $n$ 阶单位矩阵行的一个重排。单位矩阵行重排后得到的矩阵称为**置换矩阵**。

所有 $2 \times 2$  的置换矩阵有： $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, P_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

- 1)  $n$ 阶单位矩阵有 $n!$ 个置换矩阵。
- 2) 置换矩阵的逆仍是置换矩阵，置换矩阵的乘积也是置换矩阵。
- 3) 置换矩阵 $P$ 满足： $P^{-1} = P^T$  (即逆矩阵等于转置矩阵)

## 6.7 $PA = LU$ 分解

设 $A$ 是 $n$ 阶可逆矩阵，则存在置换矩阵 $P$ ，使得： $PA = LU$

**证明：**对 $A$ 的阶数 $n$ 使用数学归纳法。

$$\begin{aligned} \text{例: } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} &\xrightarrow{r1 \leftrightarrow r3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r4-2r1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{r2 \leftrightarrow r4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r4-3r3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = U \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U = E_{43}(-3)P_{42}E_{41}(-2)P_{31}A$$

$$\Rightarrow A = P_{31}E_{41}(2)P_{42}E_{43}(3)U$$

其中:  $E_{41}(2)P_{42}$ 表示: 先第 2 行与第 4 行交换, 再第 4 行加上第 1 行 2 倍。

等同于: 先第 2 行加上第 1 行 2 倍, 再第 2 行与第 4 行交换, 即  $P_{42}E_{21}(2)$

故:  $E_{41}(2)P_{42} = P_{42}E_{21}(2)$

$$A = P_{31}E_{41}(2)P_{42}E_{43}(3)U = P_{31}P_{42}E_{21}(2)E_{43}(3)U$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = PLU$$

即  $A = PLU$ , 其中  $P = P_{31}P_{42} \Rightarrow P^{-1} = P_{42}P_{31} = P$

即:  $P^{-1}A = LU \Rightarrow PA = LU$

## 第 7 章 向量空间

### 7.1 引言

线性代数主要问题:  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的解

主要运算: 向量的线性组合

设  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  有两个互异解  $\alpha, \beta, \alpha \neq \beta$ , 则:

$$\begin{cases} A\alpha = \mathbf{b} \\ A\beta = \mathbf{b} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} cA\alpha = c\mathbf{b} \\ (1-c)A\beta = (1-c)\mathbf{b} \end{cases} \rightarrow A(c\alpha + (1-c)\beta) = \mathbf{b}$$

即  $c\alpha + (1-c)\beta, c \in \mathbf{R}$  都是  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的解, 即有无穷多的解。

因此  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  若超过一个解, 必定有无穷多个解。

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  若有解  $\alpha$ , 则任意解  $\beta$  均满足  $\beta \in \{\alpha + N(A)\}$ , 其中  $N(A) = \{\mathbf{x} | A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$

$N(A)$  对加法和数乘是封闭的(由此引入 [向量空间](#))。

如:  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in N(A) \Rightarrow A\mathbf{u} = \mathbf{0}, A\mathbf{v} = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \in N(A)$$

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解的情况: 1) 只有零解; 2) 有无穷多解。

### 7.2 向量空间和子空间

定义: 设  $V \in \mathbf{R}^n$  是一些  $n$  维列向量的集合, 且  $V$  关于向量加法和数乘封闭, 即

$\forall \alpha, \beta \in V, \forall c_1, c_2 \in \mathbf{R} \Rightarrow c_1\alpha + c_2\beta \in V$ , 则称  $V$  为一个 [向量空间](#)(vector space), 或

$V$  是  $\mathbf{R}^n$  的一个 [子空间](#)(subspace)。



性质：零向量属于一个向量空间 $V$ 。

$\forall \alpha \in V$  根据数乘的封闭性得： $-\alpha \in V$ ；再根据加法的封闭性： $\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0} \in V$

更一般的定义：

一个实向量空间(real vector space)是"向量"的集合，其关于"加法"的"数乘"封闭(即线性组合封闭)且满足 8 条性质。

设 $V$ 是一个向量空间， $W \subset V$ ，若 $W$ 关于 $V$ 的加法、数乘封闭，则 $W$ 是 $V$ 的一个子空间(subspace)。

例： $\mathbb{R}^3$ 的子空间

- 1)  $W = \mathbb{R}^3$
- 2)  $W$ 是过原点的平面
- 3)  $W$ 是过原点的直线
- 4)  $W = \{\mathbf{0}\}$

## 7.3 列空间和零空间

### 7.3.1 列空间

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = [\vec{\alpha_1} \quad \vec{\alpha_2}]$ ，则 $\vec{\alpha_1}$ 和 $\vec{\alpha_2}$ 的全部线性组合是一个 $\mathbb{R}^3$ 的子空间，称为

$A$ 的列空间(column space)。记为： $C(A)$ 。

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解 $\Leftrightarrow \mathbf{b} \in C(A)$

$$C(A) = \{c_1\vec{\alpha_1} + c_2\vec{\alpha_2} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

几何上看 $C(A)$ 是一张过原点的平面，该平面为 $10x - 11y + 3z = 0$

$$\text{例: } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5]$$

$$V = \{c_1\alpha_1 + \cdots + c_5\alpha_5 \mid c_i \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{bmatrix} c_2 \\ -c_1 + c_3 \\ -c_2 + c_4 \\ -c_3 + c_5 \\ -c_4 \end{bmatrix} \mid c_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid b_1 + b_3 + b_5 = 0 \right\}$$

几何上，它是 $\mathbb{R}^5$ 上一个超平面，是 5 维空间中的 4 维平面。

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解 $\Leftrightarrow \mathbf{b}$ 在这个超平面上。

### ⊗ 7.3.2 零空间

零空间  $N(A) = \{\mathbf{x} | A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^n$

定理:  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  有无穷多解  $\Leftrightarrow A$  的列向量线性相关  $\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  有非零解

假设  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  有非零解, 此处  $A = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]$

$\exists c_1, c_2, c_3$  不全为 0 使得:  $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = \mathbf{0}$

也就是  $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$  是  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解(非零解)。

$\therefore \forall t \in \mathbb{R}, t \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$  也是  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解, 即  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  只要有一个非零解, 就有无穷多个非零解。

注意:  $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  的解集不是一个空间, 因为  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  不是它的解。

### 📖 7.4 阶梯形

问题: 求解  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  或  $N(A)$ ?

$$\text{例: } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-3r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

$U$  是一个行阶梯形式(row-echelon form)。

主元所在(1, 3)列称为**主列**(pivot column), 主元对应变量( $x_1, x_3$ )称为**主变量**(pivot variable)。

矩阵  $A$  经过一系列初等行变换转为  $U$ , 相当于左乘一系列初等矩阵:  $U = EA$

所以:  $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow EA\mathbf{x} = E\mathbf{0} \Rightarrow U\mathbf{x} = \mathbf{0}$

(2, 4)两列是(1, 3)列的线性组合, 称为**自由列**(free column)。

//  $\text{col2} = 2\text{col1}, \text{col4} = 2\text{col3} - 2\text{col1}$

$x_2, x_4$  是自由变量, 对应方程:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

继续消元, 目标: 保证每个方程只有一个主变量。

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_0$$

$$\text{即: } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + 2x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = -2x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

所以解为: 
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore N(A) = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

注:

1) 矩阵 $A$ 经过一系列初等行变换转为 $U$ , 则 $N(A) = N(U)$

2)  $B\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , 说明 $N(B) \subset N(AB)$

3)  $C(AB) \subset C(A)$ ,  $AB$ 的每一列是 $A$ 列向量的线性组合。

$$AB = A[\mathbf{b}_1 \ \cdots \ \mathbf{b}_n] = [A\mathbf{b}_1 \ \cdots \ A\mathbf{b}_n]$$

因为 $A\mathbf{b}_i \in C(A)$ , 所以 $A\mathbf{b}_i$ 的线性组合(列空间) $C(AB) \subset C(A)$

4) 设 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有一个解 $\mathbf{x}^*$ , 则 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 解集为 $\mathbf{x}^* + N(A)$

5) 设 $V_1, V_2$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中两个子空间, 则 $V_1 + V_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2 \mid \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2\}$ 是一个子空间; 而 $V_1 \cup V_2$ 一般不是子空间。

## 第8章 求解齐次线性方程组

### 8.1 引言

给定 $(m \times n)$ 阶矩阵 $A$ , 可以结合两个子空间:

(1) **列空间**(column space):  $C(A)$ 是列向量的全部线性组合, 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间。

(2) **零空间**(null space):  $N(A)$ 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ "某些"解向量的全体线性组合, 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间。

一般地,  $N(A)$ 含无穷个向量, 但这些向量可以只用有限个"特殊"的向量线性组合得出。这些特殊解满足: ① 相互独立、线性无关; ② 其他解容易写成这些解的线性组合。这些特殊解称为**基础解系**。

例:  $2x + 3y + z = 0$ 的解集 $N(A)$ 是一平面。

将 $z$ 看成主变量,  $x, y$ 看作自由变量:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -2x - 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$x, y$ 任取, 故 $N(A) = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ , 其中 $A = [2 \ 3 \ 1]$

### 8.2 基础解系

例: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \end{bmatrix} = U$$

$U$ 是一个阶梯矩阵,  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 与 $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有相同解, 所以 $N(A) = N(U)$ 。

行阶梯矩阵的主元所在列数严格单调递增, 也就是后一个主元在前一个主元的右下方; 主元以下全是 0。

继续消元, 将第 2 主元-3 上方的 1 消去, 得:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r1+\frac{1}{3}r2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{3} & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r2/(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{3} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix} = U_0$$

$U_0$ 称为**简化行阶梯形**(reduced row echelon form)矩阵, 主元所在列除了主元为 1 其余全为 0。

$N(A) = N(U) = N(U_0), U_0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ :

$$\begin{cases} x_1 + \frac{7}{3}x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + \frac{2}{3}x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{7}{3}x_3 + x_4 \\ x_2 = -\frac{2}{3}x_3 + x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 即 } N(A) = N(U_0) = \left\{ a \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

主元对应未知量称为主变量(如有 $r$ 个主变量、 $n$ 个未知量), 其余变量为自由变量, 若干 $(n-r)$ 个特殊解向量称为**基础解系**。

### 8.3 简化行阶梯形的列变换

简化行阶梯形矩阵 $U_0$ 一般不是对角矩阵。如果使用列变换, 则 $U_0$ 可化为:

$R = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的形式, 但列变换改变了未知量的次序。

例: 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r2-2r1 \\ r3+r1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r2 \leftrightarrow r3 \\ r2/2}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r1-3r2+5r3 \\ r2-2r3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U_0$$

$$\xrightarrow{\substack{c2 \leftrightarrow c4 \\ c3 \leftrightarrow c5}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

第 2 列和第 4 列交换相当于 $x_2$ 和 $x_4$ 交换位置;  $x_3, x_5$ 同理:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

总结:  $A \xrightarrow{E} U_0 \xrightarrow{P} R = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 即  $R = EAP$

若  $\alpha \in N(A)$ , 则  $P^{-1}\alpha \in N(R)$

证:  $A\alpha = 0 \rightarrow APP^{-1}\alpha = 0 \rightarrow EAPP^{-1}\alpha = 0 \rightarrow R(P^{-1}\alpha) = 0$

反之也成立: 若  $\beta \in N(R)$ , 则  $P\beta \in N(A)$

主元个数  $r$  = 主变量个数 =  $A$  的无关列向量数 =  $A$  的列数  $n$  - 基础解系个数  $r$  称为矩阵  $A$  的 **rank** (秩)。

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(U_0) = \text{rank}(R)$$

$R$  的主变量是  $x_1, \dots, x_r$ , 自由变量是  $x_{r+1}, \dots, x_n$

对于  $R = \begin{bmatrix} I_r & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 求解  $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解。

引入  $N = \begin{bmatrix} -F \\ I_{n-r} \end{bmatrix}$ , 称为 **零空间矩阵** (null space matrix)

$RN = \mathbf{0}$  表示  $N$  的每一列 (共  $n - r$  列) 都是  $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解。这  $n - r$  个列向量的全体线性组合就是  $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解集  $N(R)$ , 即  $N(R) = C(N)$

例:  $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 其中  $F = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$$N = \begin{bmatrix} -F \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -4 & -5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N(R) = C(N) = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid c_1, c_2 \in R \right\}$$

## 第9章 求解非齐次线性方程组

### 9.1 复习

$A$  是  $m \times n$  阶矩阵, 考虑  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 。

$A$ 通过行变换为阶梯形 $U$ ，再通过行变换为简化阶梯形 $U_0$ ，经列变换为：

$$R = \begin{bmatrix} I_r & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $r$ 称为矩阵 $A$ 的 **rank**(秩)

$rank(A) = r = \text{主元个数} = \text{主变量个数} = \text{主列个数}$   
 $= \text{无关行向量个数} = \text{无关列向量个数}$

(1)  $U_0$ 主列设为第 $i_1, \dots, i_r$ 列，则 $A$ 中 $i_1, \dots, i_r$ 列线性无关，称为 $A$ 的主列，其余列是这些主列的线性组合。

(2)  $N(A)$ 基础解系向量个数为 $n - r$ ，即自由变量个数。

## 9.2 求特解

考虑求解一般线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 。

已知：

(1)  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解 $\Leftrightarrow \mathbf{b} \in C(A)$

(2) 设 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有一特解 $\mathbf{x}^*$ ，则 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 解集为 $\mathbf{x}^* + N(A)$ 。

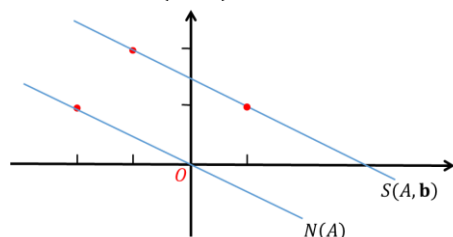
$N(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ 子空间。当 $n = 2$  or  $3$ 时， $N(A)$ 是直线或平面； $\mathbf{x}^* + N(A)$ 是过 $\mathbf{x}^*$ 的、与 $N(A)$ 平行的直线或平面。

例： $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$ 的一个特解是 $\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2y \\ y = y \end{cases} \rightarrow N(A) = \left\{ c \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, c \in \mathbb{R} \right\}$$

则原方程组的解集是 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, c \in \mathbb{R} \right\} = S(A, \mathbf{b})$

从图像上看， $S(A, \mathbf{b})$ 和 $N(A)$ 是两条平行的直线。



$$\text{例：} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_4 - 2x_5 = 1 \\ 5x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 8x_5 = 4 \end{cases}$$

思路与求 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 一样，行变换化为简化阶梯形。只不过此处 $\mathbf{b}$ 也会跟着变化，所以考虑增广矩阵。

$$[A \quad \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 5 & 5 & -3 & -4 & -8 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -4 & -8 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [C \quad \mathbf{d}]$$

也就是:  $E[A \quad \mathbf{b}] = [C \quad \mathbf{d}] \Rightarrow EA = C, E\mathbf{b} = \mathbf{d} \Rightarrow$

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 和 $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ 同解。 $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ 对应方程组为:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_3 - x_4 - 2x_5 = 1 \end{cases}$$

自由变量为 $x_2, x_4, x_5$ , 不妨令 $x_2 = x_5 = 0, x_4 = -1$ , 则 $x_3 = 0, x_1 = 0$   
即 $\mathbf{x}^* = [0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0]^T$ 是一个特解。

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 和 $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 同解,  $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 对应方程组为:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + \frac{1}{2}x_4 + x_5 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_4 - x_5 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$

$$\therefore A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ 解集为: } \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid c_i \in \mathbb{R} \right\}$$

### 9.3 解的一般性讨论

$A$ 是 $m \times n$ 阶矩阵,  $r = \text{rank}(A)$ , 易知 $r \leq \min(m, n)$ 。

若 $r = n$ , 则 $A$ 是一个列满秩矩阵(matrix of full column rank), 如列向量;

$r = m$ , 则 $A$ 是一个行满秩矩阵(matrix of full row rank), 如行向量。

特别地,  $r = n = m$ , 则 $A$ 是可逆矩阵。

①  $r = n = m$ ,  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一解 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$

$$A \xrightarrow{E} U_0 \xrightarrow{P} R = I_n$$

②  $r = n < m$ , 方程个数大于未知量个数, 但独立方程个数与未知量个数一样相当于在①的基础上增加一些方程: 如果矛盾则无解, 不矛盾则有唯一解。

所以:  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有零解,  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 无解或有唯一解。

$$A \xrightarrow{E} U_0 \xrightarrow{P} R = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$$

③  $r = m < n$ , 行消去 $m$ 个主元

$$A \xrightarrow{E} U_0 \xrightarrow{P} R = [I_m \quad F]$$

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 变为 $U_0\mathbf{x} = \mathbf{d}$ , 两者同解。 $U_0\mathbf{x} = \mathbf{d}$ 总有特解 $\mathbf{x} = P \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ 0 \end{bmatrix}$

此时自由变量有 $n - m$ 个。而 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有无穷多解。

④  $r < m, r < n$

$$A \xrightarrow{E} U_0 \xrightarrow{P} R = \begin{bmatrix} I_r & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow R = EAP$$

$Ax = b$ 有解  $\Leftrightarrow EAx = Eb \Leftrightarrow Ry = Eb = d$ 有解。

$Ry = d$ 有解  $\Leftrightarrow d \in C(R)$ , 也就是  $d$  的  $(r+1) \sim m$  行全为 0。

若  $Ry = d$ 有解, 则有无穷多解,  $\Rightarrow Ax = b$ 有无穷多解

例: 
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \alpha \end{cases}$$

$\alpha$ 为多少时, 方程组有无穷多解?

$$[A \quad b] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & \alpha \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & \alpha \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & \alpha - 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 5 \end{bmatrix} = [C \quad d]$$

$Ax = b$ 和  $Cx = d$ 同解, 即当  $\alpha = 5$  时,  $Ax = b$ 有无穷多解。

## 第 10 章 线性无关、基、维数

### 10.1 引言

$A$ 是  $m \times n$  阶矩阵,  $r = \text{rank}(A)$

(1)  $r = A$  的列向量中无关向量个数(列秩) =  $A$  的行向量中无关向量个数(行秩)

(2)  $s = N(A)$  基础解系特殊解向量个数 = 自由变量个数

所以成立等式:  $r + s = n = A$  的列数

该等式直观理解: 给定  $r$  个方程,  $n$  个未知量, 则能求出  $r$  个解, 剩下  $n - r$  个变量自由变化。

### 10.2 $n$ 维空间的坐标系

$R^2$  对应 2 维坐标系

任一向量  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 而  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  和  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  是  $x, y$  轴上两线性无关的单位向量。

(最经济的坐标系, 没有多余的其他向量)

$R^3$  对应 3 维坐标系

任一向量  $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 而  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  是  $x, y, z$  轴上三个线性无关的单位向量。

一般地,  $R^n$  是一个  $n$  维向量空间。因为

1)  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  线性无关, 构成一个  $n$  维坐标系。

2) 任一  $R^n$  的向量都是  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  的线性组合, 即:



$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a_1 \vec{e_1} + \cdots + a_n \vec{e_n}$$

当然也可以用非直角坐标系。

### 10.3 无关性、基、维数

推广 $R^n$ 的维数到一般向量空间的维数(dimension)。

定义：设 $V$ 是一个向量空间， $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n \in V, \{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ 线性无关。

$\Leftrightarrow$ 若 $a_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + a_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ ，则 $a_1 = \cdots = a_n = 0$

$\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ 是 $V$ 的一个基(basis) ( $V$ 最经济的坐标系) $\Leftrightarrow$

(1)  $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ 线性无关

(2)  $\forall \alpha \in V, \alpha$ 是 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ 线性组合

称 $V$ 的维数(dimension)是 $n =$ 基中向量个数

例： $M_2(R) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in R \right\}$ 是一个向量空间

它有一个基 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ ，基不唯一。

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ 也是一个基。

基中向量个数一样，都是4，即： $\dim M_2(R) = 4$

例： $S = \{3 \times 3 \text{ 阶实对称矩阵}\}$ 是一个向量空间，它有自然的一组基：

$$\left\{ E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, E_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\forall \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 + eE_5 + fE_6$$

$$\therefore \dim S = 6$$

### 10.4 无关性、基、维数的性质

定理：设 $V$ 是一个向量空间， $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ 是一组基， $\{\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_m\}$ 是另一组基，则 $m = n$ ，即两个不同基中的向量一样多，即维数唯一确定就是 $n$ 。

推论： $R^n$ 中任意 $n + 1$ 个向量线性相关。

例：设 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ 是 $R^n$ 的一组基， $A$ 是一个 $n \times n$ 可逆矩阵，证明 $A\mathbf{v}_1, \cdots, A\mathbf{v}_n$ 也是 $R^n$ 的一组基。

设 $c_1 A\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n A\mathbf{v}_n = \mathbf{0}, c_i \in R$

则 $A(c_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + c_n \mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$

$\because A$ 可逆 $\Rightarrow c_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$

$\because \{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ 线性无关，则 $c_1 = \cdots = c_n = 0$

$\therefore A\mathbf{v}_1, \cdots, A\mathbf{v}_n$ 线性无关(只有零解)。

任取一向量  $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n \Rightarrow A^{-1}\alpha \in \mathbb{R}^n$ , 则  $\exists a_i \in \mathbb{R}, A^{-1}\alpha = a_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + a_n \mathbf{v}_n$   
即  $\alpha = a_1 A\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n A\mathbf{v}_n$ , 故  $\{A\mathbf{v}_1, \cdots, A\mathbf{v}_n\}$  也是一组基。

### 10.5 关于 rank 的不等式

列空间  $C(A)$  的基来自于主列  $\Rightarrow \dim C(A) = \text{rank}(A)$

零空间  $N(A)$  的基来自于自由列  $\Rightarrow \dim N(A) = n - \text{rank}(A)$

- (1)  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$
- (2)  $\text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B))$
- (3)  $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$