**第1章 向量及其运算**

**🕮 1.1 引言**

线性代数的中心问题是求解线性方程组。

如给定一个线性方程组：

它能表示为：

此方程组可解

**🕮 1.2 *n*维向量空间的点**

一维：每个实数*x*一一对应于数轴上的点；

二维：每个二元有序数组(*x*, *y*)一一对应于二维平面上的点；

三维：每个三元有序数组(*x*, *y*, *z*)一一对应于三维空间中的点。

*n*维：

定义*n*维空间的点为一个*n*元有序数组

称是点的第*i*个坐标。

**🕮 1.3 向量**

向量(vector)是空间中具有一定长度和方向的直线段。

向量的加法(addition)：平行四边形法则或三角形法则。

向量的数乘(scalar multiplication)

如果固定向量的起点为原点，向量由其终点唯一确定。

也就是：(1) *n*维空间中的点，(2) *n*元有序数组，(3) *n*维空间中由原点出发的向量，都是等价的。

记：

为列向量。是向量第*i*个分量。也可以简写为。

**🕮 1.4 向量空间的定义**

由向量元素构成的非空集合*V*，若定义了加法和数乘运算，且对任意向量***a***,***b***,***c***及数(没特殊说明就当实数)满足8条性质(封闭性)：

|  |
| --- |
| 3) 存在零向量0**：**  4) 对任意向量，存在唯一相反向量**，**使得 |

则称*V*为定义在数域F上的向量空间(vector space)。

**🕮 1.5 向量空间的线性组合**

设是*m*个*n*维向量，，则称是向量的一个线性组合(linear combination)。

3维空间中，向量**u**(非0)、**u**, **v**(不共线)、**u**, **v**, **w**(不共面)的所有线性组合分别是一条直线、一个平面、整个3维空间。

**🕮 1.6 向量的点积、长度**

设是两个*n*维向量，定义：

为**v**和**w**的点积(dot product)，又称内积(inner product)或数量积(scalar product)。

**注意**：点积是一个数。

**例**：经济学中的点积

已知三种商品价格为，其交易数量分别为，其中表示卖出，表示买入。则总收入

若记价格向量为，交易数量向量为

则总收入。若表示收支平衡。

向量**v**的长度(length)或模(norm)定义为：

若，则称为单位向量(unit vector)。

如：都是二维单位向量。

单位化：任一非零向量**v**，则是沿**v**方向的单位向量。

**🕮 1.7 向量的夹角**

若，称向量**v**和**w**垂直(perpendicular)或正交(orthogonal)，记作：**v**⊥**w**或**w**⊥**v**。(根据勾股定理可证)

规定：零向量与任意向量垂直。

两非零向量v,w的夹角θ满足(根据余弦定理可证)：

**🕮 1.8 两个不等式**

① Cauchy-Schwarz不等式(Cauchy-Schwarz inequality)

由即可得。

等号当且仅当一个向量是另一个向量的倍数()。

② 三角不等式(triangle inequality)

两边取平方，由Cauchy-Schwarz不等式可证。

等号当且仅当一个向量是另一个向量的非负倍数()。

几何意义：三角形中两边之和大于第三边。

**例**：**，由**Cauchy-Schwarz不等式得：

令得：

即几何平均数(Geometric mean)不大于算术平均数(Arithmetic mean)。

**第2章 矩阵与线性方程组**

**🕮 2.1 矩阵与向量的乘积**

英国数学家Cayley是矩阵论的奠基人，他提到矩阵的出现或是在行列式的发展之后，或是作为描述线性方程组的简便方法而来。

**例**：

改写为线性组合形式：

记3个列向量为**u**,**v**,**w**，常数向量记为**b**，

令：, ，则：

记成矩阵形式：

矩阵*A*与未知向量**x**的乘积等于矩阵的列向量的线性组合。

矩阵*A*称为系数矩阵(coefficient matrix)。

上述方程组也可改写为：

也就是：

矩阵的每一行与列向量**x**的点积是向量的每一个分量。

所以上述线性方程组可有两种理解：

|  |
| --- |
|  |

**注**：此处的矩阵都是行数和列数相同的矩阵，即方阵。

**🕮 2.2 可逆矩阵**

若对任意向量**b**有唯一解，则A是可逆的(invertible)

**例**：

给定任意，方程组有唯一解

故系数矩阵是可逆矩阵(invertible matrix)。

对线性方程组，若*A*可逆，则可由常数项**b**求得**x**。

如例子的未知向量**x**，使用常数向量**b**表示为：

该矩阵记为*S*，则*S*是原来系数矩阵*A*的逆矩阵(inverse matrix)，记为：

设，若可逆，则的全部线性组合是整个3维空间。

此时**0**写成的线性组合只有一种可能：

这时称向量线性无关(linearly independent)，对应只有零解。

否则**0**可以写成的多种线性组合。此时称矩阵是奇异的

(singular)，向量线性相关(linearly dependent)。

也就是存在非零解。

**例**：循环差分矩阵

从几何上看，线性相关，全部线性组合都在平面

。向量在该平面外部，不能写成3个列向量线性组合。

**总结**：

|  |
| --- |
| 1) 若方阵*A*的列向量线性无关，则*A*可逆，只有零解；  2) 若方阵*A*的列向量线性相关，则*A*奇异，有无穷多解。 |

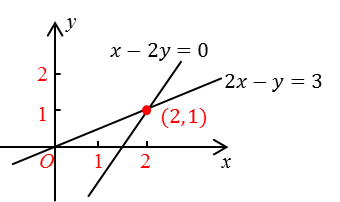
**🕮 2.3 线性方程组的行图和列图**

给定线性方程组

1) 可以写成矩阵形式：

2) 从行的角度看，每行代表一条直线，方程组的解是两条直线的交点。

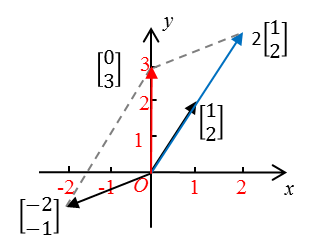
方程组的行图(row picture)：



3) 从列的角度看，方程组可改写为：

解方程组等价于：求关于系数矩阵列向量和的线性组合。

方程组的列图(column picture)：



4) 系数矩阵是可逆的。

考虑 求得：(唯一解) 即：

一般地，的每行表示一条直线(*n*=2)，或一张平面(*n*=3)或超平面(*n*>3)。

解方程组等价于：

1) 看这些直线、平面、超平面有没有交点。

2) **b**能否表示为系数矩阵的列向量线性组合。

方程组对任意**b**有唯一解，等价于：A可逆。

此时，即**x**可表示为列向量的线性组合。

**第3章 高斯消元法**

**🕮 3.1 Gauss消元法**

Gauss享有数学王子的美誉。

**例1**：

利用第一主元消元，消去第2,3个方程的*x*：

利用第二主元消元，消去第3个方程的*y*：

消元的目的是得到上三角系统(upper trianglar system)。

很容易求得，回代(back substitution)得：

对应矩阵形式：

得到的系数矩阵是上三角矩阵，记为*U*。矩阵对角线的2、-1、4称为主元(pivot)，主元位置必须非0。

**例2**：

从行图角度：①是两条平行的直线，没有交点，所以方程组无解；②的两条直线重合，有无穷多交点，方程组有无穷多解。

从列图角度：①是两个列向量(1,3)(-2,-6)共线，常数向量(2,16)不在这条直线上，所以无法线性组合；②的常数向量(2,6)与两个共线的列向量在同一直线。

若消元过程出现或，则消元法**中止**。

**例3**：

第一主元位置是0，看似无法消元，但是交换row1和row2就可以继续消元：

对应矩阵形式：

上述求解过程可以推广到含*n*个未知量*n*个方程的情形。

Gauss消元法步骤：

|  |
| --- |
| 1) 若方程组的第一主元为0，则交换方程以得到第一主元；  2) 用第一个方程的倍数消去第一主元下方所有系数；  3) 确定第二主元，继续以上消元过程；  4) 最后得到含有一个未知量的方程，回代得方程组的解。 |

*n*个方程有*n*个主元，方程组有唯一解。

消元中止，表示方程组无解或有无穷多解(出现或)。

**🕮 3.2 消元法的矩阵表示**

**🏵 3.2.1 消去矩阵**

**例**：

若将系数矩阵第2行第2列元素由8换成6，则消元法第二步要暂停，需要先将第2、3行交换：

若系数矩阵第3行第3列元素由1换成-4，则消元法中止，得不到第三主元：

消元法成功，相当于原来的系数矩阵可逆，等价于最后变换的系数矩阵*U*是可逆的上三角矩阵。

对于线性方程组，怎么用尽可能简洁的方式描述对方程组消元化简的过程?

设位*n*行*n*列的方阵，是*n*维向量：

矩阵乘向量

的第*i*个分量

上例消元法的第一步：第二个方程减去第一个方程的3倍：

使用一个矩阵实现此步消元：

此矩阵记为，其效果是第一、三个分量保持不变，第二个分量减去第一个分量的3倍。

上例消元法的第二步：第三个方程减去第二个方程的2倍：

此矩阵记为，其效果是第一、二个分量保持不变，第三个分量减去第二个分量的2倍。

是单位矩阵第二行减去第一行3倍得到。

是单位矩阵第三行减去第二行2倍得到。

称这样的矩阵为消去矩阵(elimination matrix)。

这是一类初等矩阵(elementary matrix)。

定义矩阵的乘法：

矩阵与的乘法运算：

消元过程就是：消去矩阵同时左乘系数矩阵*A*和常数项**b**。

即：

**🏵 3.2.2 置换矩阵**

若主元位置为0，需先交换方程。如**3.1**的**例3**：

矩阵同时满足：

是单位矩阵*I*交换第一、二行所得。

将单位矩阵*I*的第*i*, *j*行交换得到的矩阵称为置换矩阵(permutation matrix)。

将矩阵*A*的第*i*, *j*行交换。

**🏵 3.2.3 初等行变换和初等矩阵**

对方程组，消元法涉及三种同解变形：

|  |
| --- |
| 1) 将一个方程减去另一个方程的倍数；  2) 交换两个方程；  3) 用一个非零数乘一个方程。 |

称矩阵为增广矩阵(augmented matrix)。相应地对其做三种行变换：

|  |
| --- |
| 1) 将一行减去另一行的倍数；  2) 交换两行；  3) 用一个非零数乘一行。 |

这样的变换称为初等行变换。

由单位矩阵经过一次行变换得到的矩阵称为初等矩阵。

**例**：

, *E*为初等矩阵。

对线性方程组做消元法，实质上是对矩阵做消元或换行，即使用一系列初等矩阵左乘矩阵。

**例**：

：*A*的第二行减去第一行的4倍；

：*A*的第二、三行交换。

如果初等矩阵右乘矩阵*A*呢?

也就是：A的第一列减去第二列的4倍。

同理，：A的第二、三列交换。

初等矩阵乘A：**左乘换行**，**右乘换列**。

**第4章 矩阵的运算**

**🕮 4.1 矩阵**

矩阵(matrix)由英国数学家Sylvester于1850年首先提出，指行列式的子式。在逻辑上，矩阵的概念先于行列式的概念，而历史顺序刚好相反。在矩阵引进时其基本性质就已经清楚了。英国数学家Cayley被公认为矩阵论的创立者。

矩阵是长方形的数表，一个*m*行*n*列的矩阵称为矩阵。

矩阵*A*的第*i*行第*j*列元素用*aij*表示，称为*A*的(*i*, *j*)元素。

矩阵可用列向量表示为

若两个矩阵有相同的行数和列数，且对应元素都相等，则两个矩阵相等。

元素全是0的矩阵称为零矩阵，用0表示。

矩阵行数和列数相等时，称为方阵。

方阵*A*的对角元构成*A*的主对角线。

对角矩阵是非对角元都是0的方阵。

主对角线元素都是1的对角矩阵称为单位矩阵，记为*I*。

**🕮 4.2 矩阵的加法和数乘**

设是矩阵，，则：

对数域F上任意矩阵*A*, *B*, *C*及任意，矩阵的加法和数乘满足8条运算规则(和向量满足的8条性质一样)：

|  |
| --- |
| 1)  2)  3)  4) 的负矩阵记为，有  5)  6)  7)  8) |

全体矩阵成为数域F上的一个向量空间。

**🕮 4.3 矩阵的乘法**

设矩阵*B*的列是，借助矩阵与向量的乘法，定义矩阵的乘法：

*A*和*B*可乘，需要满足：*A*的列数 = *B*的行数

即*A*的第*i*行向量和*B*的第*j*列向量的点积。

*AB*的第*i*行就是*A*的第*i*行与*B*的各列相乘所得。

将A写成行向量形式：

矩阵乘积*AB*每一行是矩阵*B*行向量的线性组合。

**🕮 4.4 矩阵乘法的性质**

设*A*为矩阵，*B*, *C*的行数列数使下列各式运算有定义，则：

|  |
| --- |
| 1) (乘法结合律)  2) (乘法左分配律)  3) (乘法右分配律)  4)  5) |

矩阵乘法**没有**交换律：如*A*为矩阵，*B*为矩阵，*A*与*B*可做乘法，但*B*与*A*不一定能做乘法。即使可以，也可能。

若，则称*A*和*B*可交换。

**例**：

即：

矩阵也**不满足**消去律，即：若，一般**不能**得到。

特别地，若*AB*是零矩阵，一般也得不到。

**例**：

可以看出，但很明显。

**🕮 4.5 矩阵的方幂**

设*A*为矩阵，如果*A*能与自己乘积，需要，即只有方阵才能与自身做乘积。

设*A*是方阵，*p*是正整数，称为方阵*A*的*p*次幂。

规定*A*的零次幂是单位矩阵，即：。

**例：**。

**🕮 4.6 关于矩阵乘法的引入**

历史上，Cayley是为描述线性变换的复合而引入矩阵乘法的定义。

如，设变换

再做变换

即：

// 个人非常不喜欢这么壮观的写法，容易看晕。

**🕮 4.7 分块矩阵**

处理大阶矩阵运算，常转换成小阶矩阵运算。

将矩阵用竖线和横线分成若干小块，每个小块称为矩阵的子块，分为子块的矩阵称为分块矩阵(block matrix)。

**例**：是一个分块矩阵，有4个小块：

则A可记为：

**例**：线性方程组的增广矩阵是有两个子块的分块矩阵。

消元时，直接左乘初等矩阵*E*：

矩阵乘法的列行展开：设*A*为矩阵，*B*为矩阵，则

A写成列向量，B写成行向量：

即*AB*是*A*的第*i*列和*B*的第*i*行相乘后，在相加。

其中是一个的矩阵。

**例**：

使用列行相乘：

使用之前的行列相乘：

当矩阵太大时，不适于存储在高速计算机内存中，分块矩阵允许计算机一次处理几块子矩阵。当把矩阵分块后再近些矩阵计算更有效。

**🕮 4.8 矩阵的转置**

将矩阵的行与列互换，得到矩阵，称为*A*的转置(transpose)，记为。

矩阵转置的性质：

|  |
| --- |
| 1)  2)  3)  4) |

矩阵转置的应用：点积

**x**, **y**是两个*n*维列向量，则

设*A*为矩阵，**x**为*n*维向量，**y**为*m*维向量，则：

写成点积形式即：

所以矩阵的转置也可以定义为：给定，是使对任意*n*维向量**x**，任意*m*维向量**y**都成立的矩阵。

若，称是一个对称矩阵(symmetric matrix)。

若，称是一个反对称矩阵(anti-symmetric matrix)。

如是对称矩阵，是反对称矩阵。

设*R*为矩阵，则为的对称矩阵，为的对称矩阵，且其对角元均非负。

是对称矩阵，同理可得也是对称矩阵。

的第*i*个对角元为

的第*i*个对角元为

故和的对角元非负。

矩阵对角元的和称为trace (矩阵的迹)。和的trace相等。

**例**：

**第5章 矩阵的逆**

**🕮 5.1 可逆矩阵的定义**

对方阵*A*，若存在矩阵*B*，满足，则称*A*是可逆的(invertible)。

称*B*是*A*的逆矩阵(inverse matrix)，记为：。

不可逆矩阵也称为奇异矩阵(singular matrix)，如0、是不可逆矩阵。

可逆矩阵也称为非奇异矩阵(nonsingular matrix)。

**🕮 5.2 矩阵可逆的性质**

① 若方阵*A*满足，则，即方阵的逆唯一。

证明：

② 若*A*可逆，则线性方程组有唯一解

③ *A*可逆只有零解；

有非零解不可逆。

④ 矩阵可逆 (行列式)，且：

**例**： 即可逆。

⑤ 对角矩阵可逆，且：

⑥ 若方阵满足，则，且。

定理：

1) 若是可逆矩阵，则也可逆，且

2) 若阶方阵都可逆，则可逆，且

3) 若可逆，则也可逆，且

**🕮 5.3 初等矩阵的逆**

初等矩阵都是可逆的，其逆矩阵将变回。

消去矩阵的逆矩阵是。(row2-5row1和row2+5row1)

换行矩阵的逆矩阵是自身。(交换row1和row2，交换2次变回原来)

的逆矩阵是。(row2\*=*c*)

两个消去矩阵相乘：

它们乘积的逆矩阵为：

可以看出第二种：row3没有受到row1影响。

**🕮 5.4 Gauss-Jordan消元法求逆**

**例**：

设则

两个方程组有相同的系数矩阵，可以一起消元。

增广矩阵写成：，即。

通过初等矩阵记录消元过程。

Gauss消元法在第一步就结束了，因为已经是上三角矩阵。Jordan的贡献是继续消元，即主元上方元素消成0，左边成为单位矩阵。即：

即

也就是当增广矩阵左边变为单位矩阵时，右边即为所求逆矩阵。

**小结**：设可逆：

经过一系列初等行变换，当变为单位矩阵，右边的单位矩阵就变为。

由Gauss-Jordan消元法求逆矩阵过程可知：

若可逆，可经一系列初等行变换化为单位矩阵。

因此有初等矩阵使得：

故

Gauss-Jordan消元法过程可以表示为：

可逆⇔可以表示为一系列初等矩阵的乘积。

**🕮 5.5 矩阵可逆与主元个数**

**🕮 5.6 下三角矩阵的逆**

主对角线下(上)方元素全是0的方阵称为上(下)三角矩阵。

**例**：

两个阶下(上)三角矩阵与的乘积仍是下(上)三角矩阵，且的主对角元等于与相应主对角元的乘积。

**例**：

1) 下三角矩阵可逆⇔主对角元素都是非零。

2) 可逆下三角矩阵的逆也是下三角矩阵，特别地，若原矩阵对角元素都是1，逆的对角元也都是1。

**🕮 5.7 分块矩阵的消元和逆**

分块矩阵。

则可进行分块矩阵的初等行变换，使之变为分块上三角矩阵：

使用分块初等矩阵描述为：

分块矩阵的三种初等行变换：

1) 将一个块行减去*P*左乘另一块行：

2) 互换两个块行位置：

3) 用一个可逆矩阵左乘某一块行：

类似有分块矩阵的初等列变换，将上面左乘换为右乘。

**例**：设为可逆的分块上三角矩阵，其中是矩阵，是

矩阵，求。

设且将其分块使：

所以：

由第4式得：，其中可逆。

因为可逆，根据第3式得：。

将代入第1式得：，其中可逆。

最后根据第2式的：。

所以：

分块上三角矩阵可逆⇔主对角线上各分块都可逆。

**第6章 LU分解**

**🕮 6.1 LU分解**

回忆高斯消元法：方阵*A*经过一系列初等行变换变为上三角矩阵*U*。

使用矩阵表示：，是初等矩阵的乘积

**例**：

目标：将矩阵分解为一个下三角矩阵(lower triangular matrix)和一个上三角矩阵(upper triangular matrix)的乘积。

三阶方阵的情况：

假设不需要做换行，经过Gauss消元法变为上三角矩阵：

于是：

消去矩阵为下三角矩阵，下三角矩阵的逆、乘积均是下三角矩阵。

为什么用，而不是?

**例**：与P17类似

容易计算，不容易计算。

只包括消去信息，包含其他信息。

可以这样得到：将消元的乘数写在对应位置上：

表示将矩阵的第行减去行的倍。

记代入得：

**例**：

为上三角矩阵，对角元是的主元。

是下三角矩阵，对角元为1，乘数位于对角元下方。

有时也写成对角矩阵和上三角矩阵的乘积，如上例：

其中为对角矩阵，为上三角矩阵，为下三角矩阵，和对角元都是1。

对角矩阵，以三阶为例：

对角矩阵左乘矩阵，相当于的行数乘倍。

**🕮 6.2 用LU分解解线性方程组**

设，则方程组可变为：

**例**：已知

应用LU分解求解，其中

|  |
| --- |
|  |

不计LU分解的运算，解两个方程组和比直接解简单。

如果算在内，计算量是相当的。

实际问题通常需要解一系列具有相同系数矩阵的线性方程组。

当可逆，可求，再求每个解。

实际中：

1) 消元法解第一个方程组，同时得到的LU分解

2) 用LU分解解剩下方程组。

**🕮 6.3 消元法的计算量**

为阶矩阵，用Gauss消元法解需要多少次加减乘除运算?

第一列第一主元下方全部消为0，需要次乘法和减法(第一行不变)。经过第一轮后，需要继续消元的矩阵大小变为阶，也就是需要次乘法和减法。因此总共需要乘法和减法的次数为：

故左侧的消元大约需要次乘法(multiplication)和次减法(subtraction)。

右侧消元法过程乘法和减法次数都是：

回代过程：含乘法次数：

含减法次数：

故右侧总共有次乘法和次减法。

**🕮 6.4 LU分解的存在性和唯一性**

并非每个矩阵都有LU分解，即使可逆。

**例**：若

则

故没有LU分解。

设是的左上角子矩阵，称为的阶顺序主子阵。

**定理**：设可逆矩阵的顺序主子阵均为可逆矩阵，则有LU分解。

**证明**：对的阶数使用数学归纳法。

**定理**：设阶可逆矩阵，其中为下三角矩阵，为上三角矩阵，且 (*L*对角元全为1，*U*对角元全非0)，则LU分解唯一。

**证明**：使用反正法。

|  |
| --- |
| 设可逆矩阵有两个LU分解：  变换得：  因为是上三角矩阵，是下三角矩阵，所以只能是对角矩阵。  因为对角元全为1，故对角元也全为1。所以：  因此：，即LU分解唯一。 |

同理也可证明LDU分解唯一。

**🕮 6.5 对称矩阵的分解**

设可逆对称矩阵不需换行，只通过消元能化成上三角矩阵，即：

因为是对称矩阵，有

所以由LDU分解唯一性可得：

因此对称矩阵的LDU分解可写为：

**例**：

**🕮 6.6 置换矩阵**

一个阶置换是的一个排列，这诱导了阶单位矩阵行的一个重排。单位矩阵行重排后得到的矩阵称为置换矩阵。

所有

1) 阶单位矩阵有个置换矩阵。

2) 置换矩阵的逆仍是置换矩阵，置换矩阵的乘积也是置换矩阵。

3) 置换矩阵满足： (即逆矩阵等于转置矩阵)

**🕮 6.7 分解**

设是阶可逆矩阵，则存在置换矩阵，使得：

**证明**：对的阶数使用数学归纳法。

**例**：

其中：表示：先第2行与第4行交换，再第4行加上第1行2倍。

等同于：先第2行加上第1行2倍，再第2行与第4行交换，即

故：

即，其中

即：

**第7章 向量空间**

**🕮 7.1 引言**

线性代数主要问题：的解

主要运算：向量的线性组合

设有两个互异解，则：

即都是的解，即有无穷多的解。

因此若超过一个解，必定有无穷多个解。

若有解，则任意解均满足，其中

对加法和数乘是封闭的(由此引入向量空间)。

如：

的解的情况：1) 只有零解；2) 有无穷多解。

**🕮 7.2 向量空间和子空间**

定义：设是一些维列向量的集合，且关于向量加法和数乘封闭，即，则称为一个向量空间(vector space)，或

是的一个子空间(subspace)。

**性质**：零向量属于一个向量空间。

根据数乘的封闭性得：；再根据加法的封闭性：

更一般的定义：

一个实向量空间(real vector space)是"向量"的集合，其关于"加法"的"数乘"封闭(即线性组合封闭)且满足8条性质。

设是一个向量空间，，若关于的加法、数乘封闭，则是的一个子空间(subspace)。

**例**：的子空间

1)

2) 是过原点的平面

3) 是过原点的直线

4)

**🕮 7.3 列空间和零空间**

**🏵 7.3.1 列空间**

设，则和的全部线性组合是一个的子空间，称为的列空间(column space)。记为：。

有解⇔

几何上看是一张过原点的平面，该平面为

**例**：

几何上，它是上一个超平面，是5维空间中的4维平面。

有解⇔在这个超平面上。

**🏵 7.3.2 零空间**

零空间

**定理**：有无穷多解的列向量线性相关有非零解

假设有非零解，此处

不全为0使得：

也就是是的解(非零解)。

也是的解，即只要有一个非零解，就有无穷多个非零解。

**注意**：的解集不是一个空间，因为不是它的解。

**🕮 7.4 阶梯形**

问题：求解或?

**例**：

是一个行阶梯形式(row-echelon form)。

主元所在(1, 3)列称为主列(pivot column)，主元对应变量称为主变量(pivot variable)。

矩阵经过一系列初等行变换转为，相当于左乘一系列初等矩阵：

所以：

(2, 4)两列是(1, 3)列的线性组合，称为自由列(free column)。

// col2 = 2col1, col4 = 2col3 -2col1

是自由变量，对应方程：

继续消元，目标：保证每个方程只有一个主变量。

即：

所以解为：

**注**：

1) 矩阵经过一系列初等行变换转为，则

2) ，说明

3) ，的每一列是列向量的线性组合。

因为，所以的线性组合(列空间)

4) 设有一个解，则解集为

5) 设是中两个子空间，则是一个子空间；而一般不是子空间。

**第8章 求解齐次线性方程组**

**🕮 8.1 引言**

给定阶矩阵，可以结合两个子空间：

(1) 列空间(column space)：是列向量的全部线性组合，是的子空间。

(2) 零空间(null space)：是"某些"解向量的全体线性组合，是的子空间。

一般地，含无穷个向量，但这些向量可以只用有限个"特殊"的向量线性组合得出。这些特殊解满足：① 相互独立、线性无关；② 其他解容易写成这些解的线性组合。这些特殊解称为基础解系。

**例**：的解集是一平面。

将看成主变量，看作自由变量：

任取，故，其中

**🕮 8.2 基础解系**

**例**：

是一个阶梯矩阵，与有相同解，所以。

行阶梯矩阵的主元所在列数严格单调递增，也就是后一个主元在前一个主元的右下方；主元以下全是0。

继续消元，将第2主元-3上方的1消去，得：

称为简化行阶梯形(reduced row echelon form)矩阵，主元所在列除了主元为1其余全为0。

：

主元对应未知量称为主变量(如有个主变量、个未知量)，其余变量为自由变量，若干()个特殊解向量称为基础解系。

**🕮 8.3 简化行阶梯形的列变换**

简化行阶梯形矩阵一般不是对角矩阵。如果使用列变换，则可化为：

的形式，但列变换改变了未知量的次序。

**例**：

第2列和第4列交换相当于和交换位置；同理：

若，则

证：

反之也成立：若，则

主元个数主变量个数的无关列向量数的列数基础解系个数

称为矩阵的rank (秩)。

的主变量是，自由变量是

对于，求解的解。

引入，称为零空间矩阵(null space matrix)

表示的每一列(共列)都是的解。这个列向量的全体线性组合就是的解集，即

**例**：

**第9章 求解非齐次线性方程组**

**🕮 9.1 复习**

是阶矩阵，考虑。

通过行变换为阶梯形，再通过行变换为简化阶梯形，经列变换为：

其中称为矩阵的rank(秩)

主元个数主变量个数主列个数

无关行向量个数无关列向量个数

(1) 主列设为第列，则中列线性无关，称为的主列，其余列是这些主列的线性组合。

(2) 基础解系向量个数为，即自由变量个数。

**🕮 9.2 求特解**

考虑求解一般线性方程组。

已知：

(1) 有解

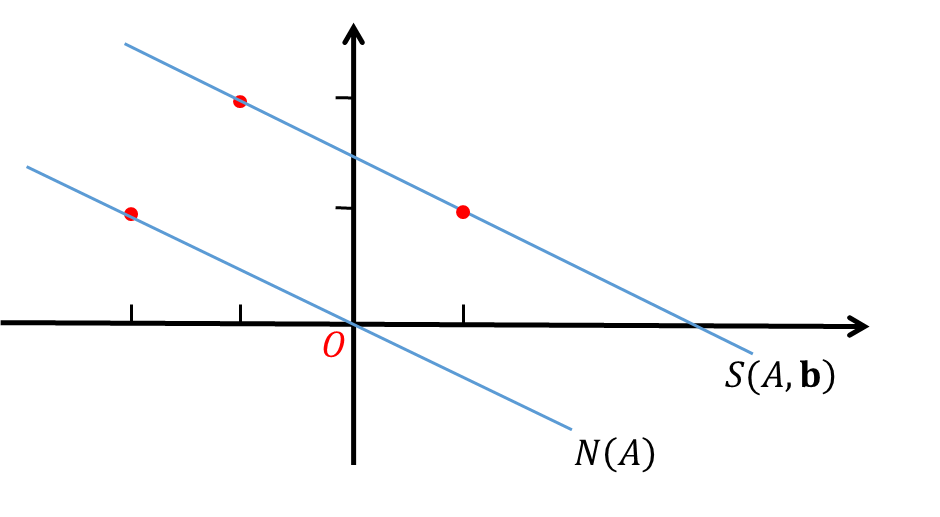
(2) 设有一特解，则解集为。

子空间。当时，是直线或平面；是过的、与平行的直线或平面。

**例**：的一个特解是

则原方程组的解集是

从图像上看，和是两条平行的直线。



**例**：

思路与求一样，行变换化为简化阶梯形。只不过此处也会跟着变化，所以考虑增广矩阵。

也就是：⇒

和同解。对应方程组为：

自由变量为，不妨令，则

即是一个特解。

和同解，对应方程组为：

解集为：

**🕮 9.3 解的一般性讨论**

是阶矩阵，，易知。

若，则是一个列满秩矩阵(matrix of full column rank)，如列向量；

，则是一个行满秩矩阵(matrix of full row rank)，如行向量。

特别地，，则是可逆矩阵。

① ，有唯一解

② ，方程个数大于未知量个数，但独立方程个数与未知量个数一样

相当于在①的基础上增加一些方程：如果矛盾则无解，不矛盾则有唯一解。

所以：只有零解，无解或有唯一解。

③ ，行消去个主元

变为，两者同解。总有特解

此时自由变量有个。而有无穷多解。

④

有解有解。

有解，也就是的行全为0。

若有解，则有无穷多解，有无穷多解

**例**：

为多少时，方程组有无穷多解?

和同解，即当时，有无穷多解。

**第10章 线性无关、基、维数**

**🕮 10.1 引言**

是阶矩阵，

(1) 的列向量中无关向量个数(列秩)的行向量中无关向量个数(行秩)

(2) 基础解系特殊解向量个数自由变量个数

所以成立等式：的列数

该等式直观理解：给定个方程，个未知量，则能求出个解，剩下个变量自由变化。

**🕮 10.2 维空间的坐标系**

对应2维坐标系

任一向量，而和是轴上两线性无关的单位向量。

(最经济的坐标系，没有多余的其他向量)

对应3维坐标系

任一向量，而是轴上三个线性无关的单位向量。

一般地，是一个维向量空间。因为

1) 线性无关，构成一个维坐标系。

2) 任一的向量都是的线性组合，即：

当然也可以用非直角坐标系。

**🕮 10.3 无关性、基、维数**

推广的维数到一般向量空间的维数(dimension)。

定义：设是一个向量空间，线性无关。

⇔若，则

是的一个基(basis) (最经济的坐标系)⇔

(1) 线性无关

(2) 是线性组合

称的维数(dimension)是基中向量个数

**例**：是一个向量空间

它有一个基，基不唯一。

也是一个基。

基中向量个数一样，都是4，即：

**例**：S={3×3阶实对称矩阵}是一个向量空间，它有自然的一组基：

**🕮 10.4 无关性、基、维数的性质**

**定理**：设是一个向量空间，是一组基，是另一组基，则，即两个不同基中的向量一样多，即维数唯一确定就是。

**推论**：中任意个向量线性相关。

**例**：设是的一组基，是一个可逆矩阵，证明

也是的一组基。

设

则

可逆⇒

线性无关，则

线性无关(只有零解)。

任取一向量，则

即，故也是一组基。

**🕮 10.5 关于rank的不等式**

列空间的基来自于主列

零空间的基来自于自由列

(1)

(2)

(3)

**第11章 四个基本子空间的基和维数**

**🕮 11.1 四个基本子空间的集**

设是阶矩阵，四个基本子空间：

(1) 列空间(column space)：

(2) 行空间(row space)：

(3) 零空间(nullspace)：

(4) 左零空间(left nullspace)：

使用消元法：

的一组基：的主列；

同理，的一组基：的主元所在行；

**例**：

可以看出可由和线性组合，故和是的基。

**例**：

可以看出、、是的基。

**注**：的基可以使用列空间基的求法，即考虑的列空间。

同样，求的基，也可以：

1) 求的零空间的基础解系；

2) ：前行有主行，后行全为0

即存在可逆矩阵，使得

其中，则，即是的一组基。

// , 且线性无关

**例**：

因此，有一组基。

**🕮 11.2 维数公式**

设是一个向量空间，和是两个子空间，则和是的子空间，但一般不是子空间。

这些空间的维数满足关系：

**例**：二维空间；和对应：和两条直线

如，但，故不是子空间

，故

对于任意，

故

所以，对于此例，满足维数公式。

**例**：{3阶实矩阵}；{3阶对称矩阵}；{3阶上三角矩阵}

检查

{3阶对角矩阵}

对于任意3阶实矩阵

故

所以，此例的和也满足维数公式。

**例**：设：,

。求和的一组基。

1) 令：

则，的基为主列即1, 2, 4列；

2) 任取

设

,

因为，不妨设

求得：⇒

故，所以是一组基。

**🕮 11.3 例题**

设为阶方阵，则存在可逆矩阵使得：

因此的后列是的一组基；的后行是的一组基。

因为且，故，且列满秩(full column rank)，其列是的一组基。

同理，，行满秩(full row rank)，其行是的一组基。

**例**：

矩阵

的一组基为的最后一列

的一组基为的最后一行

的一组基：

(主元所在列)

的一组基：

的一组基：(主元所在行)

**第12章 四个基本子空间的正交关系**

**🕮 12.1 引言**

**🕮 12.2 四个子空间的正交性**

**🕮 12.3 正交补**

**🕮 12.4 Ax=b在行空间中的唯一性**