

## Zadania kwalifikacyjne na WWW6

### Równania i nierówności funkcyjne

Termin nadsyłania rozwiązań 15 VII 2010r.

1. Dana jest funkcja  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  taka, że  $g(g(x)) = x$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ . Znaleźć wszystkie funkcje  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające równanie

$$f(x) + \sqrt{2}f(g(x)) = x,$$

dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$ .

2. Udowodnić, że nie istnieje funkcja  $f: [-2010, 2010] \rightarrow [-2010, 2010]$  spełniająca

$$f(f(x)) - f(x) \geq \frac{1}{2010},$$

dla dowolnego  $x \in [-2010, 2010]$ .

3. Znaleźć wszystkie funkcje  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające nierówność

$$g(xy) + g(yz) + g(y)g(zx) \leq -1,$$

dla dowolnych  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .

4. Znaleźć wszystkie funkcje  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  różnowartościowe i spełniające równanie

$$f(2x - f(x)) = x,$$

dla każdego  $x \in [0, 1]$ .

5. Rozstrzygnąć czy istnieje funkcja  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  taka, że  $f(f(x)) = x + 1$ , dla każdej liczby całkowitej  $x$ . Odpowiedź uzasadnić.

6. Niech funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia dla wszystkich  $a, b, c \in \mathbb{R}$  równanie

$$f(a + f(b + c)) + f(b + f(c + a)) + f(c + f(a + b)) = 0.$$

Znaleźć wszystkie możliwe wartości  $f(0)$ .

7. Znaleźć wszystkie funkcje  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające równanie

$$xf(x) - yf(y) = (x - y)f(x + y),$$

dla dowolnych  $x, y \in \mathbb{R}$ .

8. Zbadać czy istnieje funkcja  $f$  ze zbioru liczb rzeczywistych, nieujemna i różna od stałej, spełniająca dla dowolnych  $x, y \in \mathbb{R}$  nierówność

a)  $f(x) + f(y) \leq 2\sqrt{f(x)f(y)},$

b)  $f(x) + f(y) \geq 2\sqrt{f(x)f(y)}.$

Odpowiedź w każdym z podpunktów uzasadnić.

**Uwaga 1.**  $\mathbb{Z}$  oznacza zbiór liczb całkowitych.

**Uwaga 2.** Pewnie nie trzeba rozwiązać wszystkich zadań, żeby się zakwalifikować. Jest ich dużo, aby było z czego wybierać.

**Uwaga 3.** W razie jakichkolwiek pytań, proszę pytać mailowo.

**Uwaga 4.** Życzę miłej zabawy z zadankami.