# Równania i nierówności funkcyjne

Tomasz Tkocz [*]

## Wstęp

Skrypt zawiera notatki do zajęć prowadzonych przez autora na WWW6 w Olsztynie. Na końcu każdego z trzech rozdziałów, które odpowiadają kolejnym wykładom, zamieszczono zadania stanowiące materiał ćwiczeń. W dodatku zaś zamieszczono zadania kwalifikacyjne z którymi musieli się zmierzyć uczestnicy warsztatów.

Autor będzie oczywiście wdzięczny za podzielenie się z nim (np. mailowo) uwagami dotyczącymi skryptu. W szczególności, wskazanie literówek jest mile widziane.

## 1 Podstawowe równania i ich zastosowania

Dział równań i nierówności funkcyjnych rozpada się w naturalny sposób na dwa poddziały, co widzieliśmy już w zadaniach kwalifikacyjnych.

Równania i nierówności funkcyjne

jednej zmiennej, np. $f(f(x)) = x + 1$

wielu zmiennych, np. $f(x) + f(y) \geqslant 2\sqrt{f(x)f(y)}$

Nas głównie interesować będzie druga działka (im więcej literek tym ciekawiej). Swoje początki zawdzięcza ona Mikołajowi z Oresme[1], który *jednorodnie deformującą* się wielkość $f$ określa jako spełniającą

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{f(x_2) - f(x_3)} = \frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3},$$

dla wszystkich $x_1 > x_2 > x_3$. To było jednak takie *pitu-pitu*. Pierwsze systematyczne badanie równań funkcyjnych zrobił Cauchy w swoim dziele *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*. Podążymy teraz jego śladem.

[*]Kolegium MISMaP i Wydział Matematyki, Uniwersytet Warszawski `ttkocz@gmail.com`

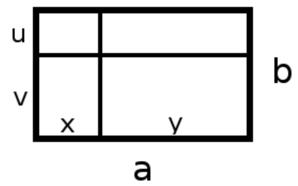
[1]średniowieczny $\sim$ 1300 filozof i uznany tłumacz ksiąg Arystotelesa; podobno wprowadził potęgę o wykładniku ułamkowym

**Twierdzenie 1.1.** *Jeśli $f\colon [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ jest **addytywna**, tzn. spełnia*

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

*dla wszystkich $x, y \geqslant 0$, to wówczas $f(x) = cx$, dla pewnej stałej nieujemnej $c$. Oczywiście na odwrót też.*

**Przykład 1.1** (Pole prostokąta)**.** Skąd to równanie? Z koncepcji addytywności, której słucha się np. pole powierzchni. Rozważmy prostokąt o bokach $a$ i $b$. Ile wynosi jego pole $P(a, b)$? Spójrzmy na rysunek. Mamy




$$P(x+y, b) = P(x, b) + P(y, b),$$

czyli

$$f_b(x) = P(x, b)$$

spełnia warunek addytywności. Zatem z Twierdzenia 1.1

$$P(a, b) = c(b)a.$$

Ale krojąc prostokąt wzdłuż dostaniemy

$$P(a, b) = P(a, u+v) = P(a, u) + P(a, v),$$

czyli

$$c(u+v)a = c(u)a + c(v)a,$$

zatem

$$c(u+v) = c(u) + c(v).$$

Znowu, wobec Twierdzenia 1.1, $c(u) = Cu$ i ostatecznie

$$P(a, b) = c(b)a = Cab,$$

gdzie $C$ ma sens stałej normującej. Odtworzyliśmy tym samym doskonale znany wzór na pole prostokąta.

Spróbujmy udowodnić to, jak widać po zastosowaniu, ważne twierdzenie.

*Dowód Twierdzenia 1.1.* **Krok I** Pokażemy najpierw, że $f(rx) = rf(x)$, dla $x \geqslant 0$ i wymiernego $r \geqslant 0$.

To tak, równość jest jasna dla $r$ będącego liczbą całkowitą nieujemną, bo z addytywności $f(0) = 2f(0)$, więc $f(0) = 0$, a z łatwej indukcji

$$f(x_1 + \ldots + x_n) = f(x_1) + \ldots + f(x_n),$$

więc kładąc $x_1 = \ldots = x_n = x$ mamy $f(nx) = nf(x)$, dla $n$ całkowitego dodatniego. Dalej, niech $r = p/q$. Z tego co już wiemy dostajemy

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p}{q}x\right) &= f\left(p \cdot \frac{x}{q}\right) = pf\left(\frac{x}{q}\right) \\ &= \frac{p}{q}qf\left(\frac{x}{q}\right) = \frac{p}{q}f\left(q\frac{x}{q}\right) = \frac{p}{q}f(x). \end{aligned}$$

**Krok II** Zauważmy teraz, że $f$ jest niemalejąca. Rzeczywiście. dla $y \geqslant x$

$$f(y) = f(x + y - x) = f(x) + f(y - x) \geqslant f(x).$$

**Krok III** Dowodzimy tezy z $c = f(1)$, tzn. że $f(x) = f(1)x$, dla $x \geqslant 0$.

Jeśli $x$ jest wymierne, to jest dobrze wobec kroku I. Ustalmy niewymierną liczbę $x > 0$. Wystarczy pokazać, że $f(x)$ leży dowolnie blisko $f(1)x$. Ustalmy w tym celu dowolne $\epsilon > 0$ i wybierzmy liczby wymierne $r$ i $w$ z przedziałów $(x - \epsilon, x)$ i $(x, x + \epsilon)$ odpowiednio (patrz Zadanie 1.3). Szacujemy

$$f(1)(x - \epsilon) \leqslant f(1)r = \leqslant f(x) \leqslant f(w) = f(1)w \leqslant f(1)(x + \epsilon),$$

skąd

$$|f(x) - f(1)x| < f(1)\epsilon.$$

Dowodzi to, wobec dowolności $\epsilon$, że $f(x) = f(1)x$ i kończy dowód twierdzenia. $\square$

Twierdzenie 1.1 oprócz przed chwilą pokazanego wyprowadzenia wzoru na pole prostokąta ma jeszcze inne ciekawe zastosowania. Zobaczmy teraz jedno z nich.

**Przykład 1.2** (Sprawiedliwy podział pieniędzy)**.** Jest trzech ludzi X, Y i Z i złotówka, którą chcemy pomiędzy nich rozdzielić sprawiedliwie. W tym celu powołujemy dwóch sędziów 1 i 2, którzy mówią ile komu przyznać, co opisujemy tak

$$\begin{aligned} X &= (x_1, x_2), \\ Y &= (y_1, y_2), \\ Z &= (z_1, z_2), \end{aligned}$$

przy czym

$$X + Y + Z = (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2) = (1, 1).$$

Niech $f(X), g(Y), h(Z)$, to funkcje wypłaty pieniędzy ludziom X, Y, Z odpowiednio zależne od decyzji sędziów. Sprawiedliwość objawia się w takich założeniach

$$f, g, h \geqslant 0 \qquad \text{nie każemy}$$
$$f(0) = g(0) = h(0) = 0 \text{wszyscy sędziowie dają 0 zł, to gościu dostaje 0 zł}$$

Jaki wzór mają te funkcje? Ponieważ

$$f(X) + g(Y) + h(Z) = 1, \quad X + Y + Z = (1, 1) =: \overrightarrow{1},$$

to

$$f(X) + g(Y) = 1 - h\left(\overrightarrow{1} - X - Y\right),$$

dla dowolnych $X, Y$ o sumach współrzędnych nie przekraczających 1. Kładąc $Y = 0$ widzimy, że $f(X) = 1 - h(\overrightarrow{1} - X)$ i podobnie $g(X) = 1 - h\left(\overrightarrow{1} - X\right)$. Zatem ostatnie równanie ma postać

$$f(X) + f(Y) = 1 - h\left(\overrightarrow{1} - (X + Y)\right) = f(X + Y).$$

Dlatego też funkcje $f_1(x) := f(x, 0)$ i $f_2(x) := f(0, x)$ spełniają założenia poniższego twierdzenia będącego wariacją Twierdzenia 1.1, którego dowód odłożymy do ćwiczeń.

**Twierdzenie 1.2.** *Jeśli $f\colon [0, 1] \longrightarrow [0, \infty)$ spełnia*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \qquad x, y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 1,$$

*to $f(x) = axK$ dla pewnej stałej $a \geqslant 0$.*

Wobec tego

$$f_1(x) = a_1 x,$$
$$f_2(x) = a_2 x.$$

Ale

$$f(X) = f((x_1, 0) + (0, x_2)) = f_1(x_1) + f_2(x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2,$$

więc mamy wzór na $f$. Czy stałe $a_1, a_2$ są dowolne? Nie, bowiem

$$1 = 1 - h\left(\overrightarrow{1} - \overrightarrow{1}\right) = f(1) = a_1 + a_2.$$

Wreszcie możemy też wyliczyć, że

$$h(X) = 1 - f\left(\overrightarrow{1} - X\right) = a_1 x_1 + a_2 x_2.$$

Otrzymaliśmy zatem, że sprawiedliwy podział puli pieniędzy jest dokonywany tylko i wyłącznie za pomocą średniej ważonej.

**Uwaga 1.1.** Można bez trudu uogólnić powyższe rozumowanie na większą liczbę ludzi i sędziów.

Oprócz równania Cauchy'ego, którego inne warianty poznamy na ćwiczeniach, bardzo ważne jest równanie równoległoboku sił. Na dobry początek można o nich poczytać w podręczniku z Analizy Matematycznej Fichteanholza [Fi].

$$(\square) \qquad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y), \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Historycznie było ono jednym z pierwszych i podobno zajmował się nim d'Alembert.

**Twierdzenie 1.3.** ** Ciągła funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nierówna tożsamościowo zero spełnia ($\square$) wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f(x) = \cos(ax) \qquad \textit{lub} \qquad f(x) = \cosh(ax),$$

*dla pewnej stałej $a \in \mathbb{R}$.*

*Dowód.* 1. Kładąc $y = 0$ mamy $2f(x)(1 - f(0)) = 0$, skąd $f \equiv 0$ albo $f(0) = 1$.

2. Kładąc $x = 0$ mamy $f(y) + f(-y) = 2f(y)$, skąd $f(-y) = f(y)$ dla $y \in \mathbb{R}$, czyli $f$ jest parzysta. Dlatego dalej zajmujemy się tylko dodatnimi argumentami.

3. Z ciągłości istnieje $c > 0$, że $f|_{[0,c]} > 0$. Mamy dwa przypadki $f(c) < 1$ albo $f(c) \geqslant 1$. Najpierw rozważmy pierwszy. Istnieje $\theta \in (0, \pi/2)$, że $f(c) = cos\theta$. Wtedy z równania

   - $x = y = c \Longrightarrow f(2c) = cos(2\theta)$
   - $x = 2c, y = c \Longrightarrow f(3cc) = cos(3\theta)$
   - itd. dostajemy $f(nc) = cos(n\theta)$
   - $x = y = c/2 \Longrightarrow f(c/2) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + cos^2\theta)} = cos(\theta/2)$
   - $x = y = c/2^2 \Longrightarrow f(c/2^2) = cos(\theta/2^2)$

   Itd. pokazujemy, że
   $$f\left(\frac{k}{2^l}c\right) = cos\left(\frac{k}{2^l}\theta\right).$$
   i stąd wobec ciągłości (patrz Zadanie 1.3)
   $$f(xc) = cos(x\theta), \qquad x > 0,$$
   a zatem $f(x) = cos(ax)$, dla $x > 0$ i z 1. i 2. pierwsza część tezy.

4. Drugą część tezy dostajemy rozważając identycznie pozostały przypadek.

$\square$

## Zadania

**1.1** (z wykładu)**.** Rozwiązać równanie Nicolasa z Oresme, tzn. znaleźć wszystkie funkcje $f\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{f(x_2) - f(x_3)} = \frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3},$$

dla wszystkich $x_1 > x_2 > x_3$

**1.2** (LVII OM)**.** Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ spełniające

$$f(x^2 + y) = xf(x) + f(y), \qquad x, y \in \mathbb{Q}.$$

**1.3** (Z wykładu)**.** Udowodnić, że

a) liczby wymierne są gęste w $\mathbb{R}$, tzn. w każdym przedziale $(a, b)$ znajdziemy liczbę wymierną,

b) liczby postaci $\{\frac{k}{2^l} \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$ (tzw. liczby dwójkowo-wymierne) są gęste w $\mathbb{R}$.

**1.4** (Równanie Cauchy'ego)**.** Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie addytywna. Pokazać, że są równoważne

(i) $f(x) = ax$

(ii) $f$ jest ciągła

(iii) $f$ jest ciągła w pewnym punkcie

(iv) $f$ jest monotoniczna

(v) $f$ jest lokalnie ograniczona

**1.5** (Warianty równania Cauchy'ego)**.** Znaleźć wszystkie funkcje

a) $f\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające $f(xy) = f(x) + f(y)$,

b) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające $f(x + y) = f(x)f(y)$.

**1.6** (Jensenizacja)**.** Znaleźć wszystkie ciągłe funkcje $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające równanie funkcyjne Jensena

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

**1.7** (Pexideryzacja)**.** Znaleźć wszystkie ciągłe funkcje $f, g, h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ takie, że

$$f(x) + g(y) = h(x + y), \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

**1.8** (Z wykładu)**.** Udowodnić Twierdzenie 1.2.

**1.9** (Funkcja kwadratowa)**.** Znaleźć wszystkie funkcje ciągłe $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y), \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

**1.10.** * Podać przykład nieciągłego rozwiązania równania Cauchy'ego (mamy tym samym przykład funkcji nigdzie nieciągłej, nigdzie ograniczonej i bardzo patologicznej)

**1.11.** * Pokazać, że funkcja z zadania 1.10 ma wykres będący gęstym podzbiorem płaszczyzny.

# 2 Twierdzenia o wartości średniej. Przykład równania jednej zmiennej.

Przypomnijmy, że na poprzednim wykładzie omówiliśmy równanie funkcyjne Cauchy'ego i d'Alemberta. Były to równania historycznie pierwsze, które systematycznie badano (tak jak my to zrobiliśmy).

Przeniesiemy się teraz do zagadnień bardziej współczesnych i powiemy sobie najpierw o równaniach funkcyjnych motywowanych twierdzeniami o wartości średniej. Najpierw, o co chodzi w twierdzeniach o wartości średniej? O to, że istnieje pewien punkt średni. Najsławniejsze jest twierdzenie Lagrange'a (Ci co nie wiedzą co to pochodna niech się nie boją — mogą zatkać uszy przy sformułowaniu, a zaraz i tak będzie interpretacja).

**Twierdzenie 2.1.** *Jeśli $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i ciągła na $[a,b]$, to istnieje **punkt średni** $\xi \in (a,b)$ dla którego*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Geometrycznie, istnieje punkt w którym styczna jest równoległa do siecznej. Fizycznie, jadąc Kawasaki po pustyni, dla dowolnego przedziału czasu $[t_1, t_2]$ istnieje chwila $t_0 \in [t_1, t_2]$, w której prędkość Kawasaki jest równa jego prędkości średniej po całym przedziale czasu $[t_1, t_2]$.

Stąd już krok do równań funkcyjnych, bo można zapytać: *dla jakich funkcji będzie tak, że punkt średni $\xi$ jest zawsze średnią arytmetyczną, czyli środkiem przedziału $(a,b)$?* Można też oczywiście pytać o inne średnie, i trzeba. Obszerną literaturę na ten temat stanowi monografia [SaRi] i praca [Ku91] Prof. Marka Kuczmy, twórcy polskiej szkoły równań funkcyjnych. Pokażemy teraz pewien wynik dla średniej arytmetycznej, który pochodzi od światowego lidera równań funkcyjnych, Prof. Janosa Aczéla.

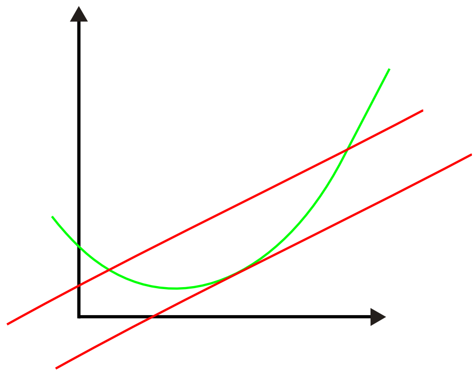
**Twierdzenie 2.2** (Aczél, [Acz])**.** *Funkcje $f, h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniają*

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = h\left(\frac{a+b}{2}\right), \qquad a, b \in \mathbb{R}, a \neq b,$$

*wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad h(x) = 2\alpha x + \beta,$$

*dla pewnych stałych $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.*



**Wniosek 2.1.** *Tylko parabola i jej zdegenerowana wersja — prosta ma tę własność, że styczna do niej poprowadzona jest równoległa do siecznej, gdy ją wystawimy akurat w środku przedziału.*

*Dowód Twierdzenia 2.2.* Kładąc $a = 0$, możemy obliczyć $f$ przy pomocy $h$

$$f(b) = bh\left(\frac{b}{2}\right) + f(0).$$

Zatem z wyjściowego równania możemy zrobić równanie z tylko jedną niewiadomą funkcją, otrzymując

$$bh\left(\frac{b}{2}\right) - ah\left(\frac{a}{2}\right) = (b-a)h\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Wprowadźmy dla ułatwienia pomocniczą funkcję $g(x) := h\left(\frac{x}{2}\right) - h(0)$. Mamy

$$bg(b) - ag(a) = (b-a)g(a+b), \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Podstawiając $b = -a$, wobec $g(0) = 0$, dostajemy, że $g(a) = -g(-a)$. Teraz, zamieniając $a$ na $-a$ mamy

$$(a+b)g(b-a) = bg(b) + ag(-a) = bg(b) - ag(a) = (b-a)g(a+b),$$

czyli dla $a, b$ takich, że $a + b \neq 0$, $b - a \neq 0$ jest

$$\frac{g(b-a)}{b-a} = \frac{g(a+b)}{a+b}.$$

Wstawiając więc np. $b = \frac{x+1}{2}$, $a = \frac{-x+1}{2}$ otrzymujemy $\frac{g(x)}{x} = g(1)$, dla $x \neq 0$, czyli mamy wyznaczone $g$

$$g(x) = \alpha x,$$

gdzie $\alpha$ jest pewną stałą. Stąd

$$h(x) = 2\alpha x + \beta, \qquad f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

dla pewnych stałych $\alpha, \beta, \gamma$.

Z drugiej strony, bez trudu sprawdzamy, że powyższe funkcje spełniają wyjściowe równanie. □

Zupełnie analogicznie dowodzi się wyników dla innych średnich. Podamy je tylko, a w razie zapotrzebowania zrobimy dowody na ćwiczeniach.

**Twierdzenie 2.3.** *Funkcje $f, h\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniają*

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = h\left(\sqrt{ab}\right), \qquad a, b > 0, a \neq b,$$

*wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f(x) = \frac{\alpha}{x} + \beta x + \gamma, \quad h(x) = -\frac{\alpha}{x^2} + \beta,$$

*dla pewnych stałych $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.*

Zadziwiające jest to, że dla średniej harmonicznej nie ma nietrywialnej krzywej.

**Twierdzenie 2.4.** *Funkcje $f, h\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniają*

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = h\left(\frac{2}{1/a + 1/b}\right), \qquad a, b > 0, a \neq b,$$

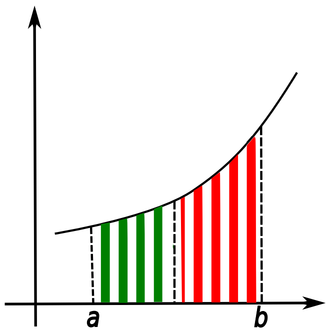
*wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f(x) = \alpha x + \beta, \quad h(x) = \beta,$$

*dla pewnych stałych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

Punkt średni może też być konstruowany inaczej. Np. jako taki, że pole pod wykresem na przedziałach $[a, \xi]$ i $[\xi, b]$ jest identyczne. Sygnalizujemy to jedynie teraz, zaś dokładniej omówimy to na ćwiczeniach (por. zadania).

Żeby zamknąć sprawę twierdzeń o wartości średniej przywołajmy nierówności funkcyjne, bo tu jest wiele do zrobienia. Próbka może być tego taka




**Problem 2.1.** Znaleźć wszystkie funkcje $f, h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} \geqslant h\left(\frac{a+b}{2}\right), \qquad a, b \in \mathbb{R}, a \neq b.$$

W takiej ogólności to może być nieuchwytne, ale pytanie co założyć dodatkowo, żeby mieć jedyne rozwiązanie?

Zmieńmy na chwilkę temat na równania funkcyjne jednej zmiennej. Podamy próbkę tej teorii w postaci ładnej charakteryzacji hiperboli.

**Twierdzenie 2.5** (Volkmann, [Vo88])**.** *Funkcja* $\varphi\colon (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ *spełnia układ równań*

$$\varphi(x+1) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x)+1}, \qquad x > 0, \tag{2.1}$$

$$\varphi(\varphi(x)) = x, \qquad x > 0, \tag{2.2}$$

*wtedy i tylko wtedy, gdy* $\varphi(x) = 1/x$.

*Dowód.* **Krok I** Funkcja $\varphi$ jest bijekcja, co widać od razu z (2.2). Określamy funkcję

$$\psi := \frac{1}{\varphi},$$

która też jest bijekcją (otwartej) półprostej spełniającą

$$\psi(x+1) = \psi(x) + 1, \qquad x > 0, \tag{2.3}$$

$$\psi\left(\frac{1}{\psi(x)}\right) = \frac{1}{x}, \qquad x > 0. \tag{2.4}$$

Zauważmy też, że funkcja odwrotna $\psi^{-1}$ również spełnia układ równań (2.3) i (2.4), więc ma te same własności co $\psi$.

**Krok II** $\psi((0, m]) = (0, m]$ dla każdego $\mathbb{Z} \ni m \geqslant 0$.

Istotnie, $\psi((0, m]) \subset (0, m]$, bo w przeciwnym razie mielibyśmy $y \in (0, m]$ dla pewnego $m$ i istniałoby $h > 0$, że $\psi(y) = m + h$. Wtedy

$$m \geqslant y = \psi^{-1}(\psi(y)) = \psi^{-1}(h+m) \overset{(2.3) \text{ dla } \psi^{-1}}{=} \psi^{-1}(h) + m > m,$$

czyli sprzeczność. Zatem też $\psi^{-1}((0,m]) \subset (0,m]$, co już łatwo daje to, co chcieliśmy.

**Krok III** $\psi(1) = 1 \overset{(2.3)}{\Longrightarrow} \psi(m) = m, \quad \mathbb{Z} \ni m > 0$.

No, bo sądząc przeciwnie, wobec kroku II dla $m = 1$ musiałoby być $\psi(1) < 1$. Wtedy $1/\psi(1) > 1$, czyli (znowu Krok II dla $m = 1$)

$$1 \overset{(2.4)}{=} \psi\left(\frac{1}{\psi(1)}\right) > 1,$$

i sprzeczność.

Niech $K_n$ będzie zbiorem wszystkich ułamków łańcuchowych długości $n$, tzn. zbiorem liczb postaci

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ldots + \frac{1}{a_n}}}, \quad \mathbb{Z} \ni a_0 \geqslant 0,\ \mathbb{Z} \ni a_1, \ldots, a_n > 0.$$

Dla $n = 0$ przyjmujemy $K_0 = \mathbb{Z} \cap [0, \infty)$. Dobrze wiadomo, że (jak nie, to patrz Zadanie 2.5)

$$\mathbb{Q} \cap (0, \infty) = \bigcup_{n \geqslant 0} K_n.$$

**Krok IV** Dla $r \in K_n$ mamy $\psi(r) = r$ oraz $\psi((r, \infty)) = (r, \infty)$.

Robimy to indukcją względem $n$. Dla $n = 0$ jest OK wobec Kroku II i III. Niech będzie OK dla $n$. Weźmy $r \in K_{n+1}$, które jasne, że zapisze się w postaci $r = m + 1/s$, dla $s \in K_n$ i nieujemnego całkowitego $m$. Mamy

$$\psi(r) = \psi(m + 1/s) = m + \psi(1/s) \overset{\text{założenie indukcyjne } s = \psi(s)}{=} m + \psi\left(\frac{1}{\psi(s)}\right)$$
$$\overset{(2.4)}{=} m + \frac{1}{s} = r.$$

Dalej, sprawdzamy

$$\psi([r, \infty)) \subset [r, \infty).$$

Rzeczywiście, biorąc $x \geqslant r = m + 1/s$ mamy

$$\psi\left(\frac{1}{\psi(x - m)}\right) = \frac{1}{x - m} \leqslant s \in K_n,$$

i z założenia indukcyjnego

$$\frac{1}{\psi(x - m)} \leqslant s.$$

Dlatego

$$\psi(x) = \psi(x - m + m) = \psi(x - m) + m \geqslant m + \frac{1}{s} = r.$$

Zastępując jak zwykle $\psi$ przez $\psi^{-1}$ mamy $\psi^{-1}([r,\infty)) \subset [r,\infty)$, a więc $\psi([r,\infty)) = [r,\infty)$, co kończy dowód indukcyjny.

**Krok V** $\psi(x) = x$, dla $x > 0$.

Z Kroku IV dla dowolnych liczb wymiernych $r < w$ mamy

$$\psi([r,w]) = [r,w].$$

Zatem dla dowolnego, ustalonego $x > 0$ dobierając $r < w$ wymierne tak, aby $x \in [r,w]$ dostaniemy $\psi(x) \in \psi([r,w]) = [r,w]$. Z dowolności $r$ i $w$ będzie dobrze.

Pokazaliśmy, że jeśli $\varphi$ spełnia wyjściowy układ równań, to $\varphi(x) = 1/\psi(x) = 1/x$. Z drugiej strony, oczywiście ta funkcja spełnia go, jest więc jego jedynym rozwiązaniem. $\square$

## Zadania

**2.1.** Udowodnić Twierdzenie 2.3, że funkcje $f, h\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniają

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = h\left(\sqrt{ab}\right), \qquad a,b > 0, a \neq b,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

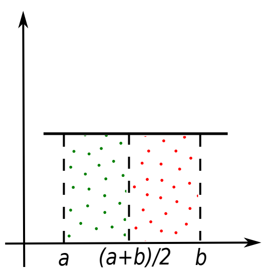
$$f(x) = \frac{\alpha}{x} + \beta x + \gamma, \quad h(x) = -\frac{\alpha}{x^2} + \beta,$$

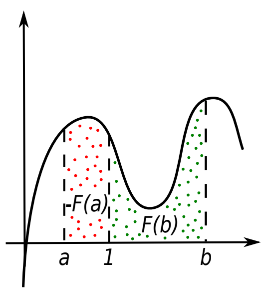
dla pewnych stałych $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

**2.2** (Zadanie kwalifikacyjne)**.** Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$xf(x) - yf(y) = (x-y)f(x+y),$$

dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$.



**2.3** (Równe pola)**.** Szukamy funkcji $f\colon (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ takiej, że

$$\text{pole pod wykresem } f \text{ na } [a, \frac{a+b}{2}] = \text{pole pod wykresem } f \text{ na } [\frac{a+b}{2}, b].$$

Określając funkcję

$$F(x) = \begin{cases} \text{pole pod wykresem } f \text{ na } [1,x] & \text{dla } x \geqslant 1 \\ -\text{pole pod wykresem } f \text{ na } [x,1] & \text{dla } x < 1 \end{cases}$$

problemem jest zadanie

a) Znaleźć $F\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające

$$F\left(\frac{a+b}{2}\right) - F(a) = F(b) - F\left(\frac{a+b}{2}\right), \qquad a,b > 0,$$

czyli

$$F\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{F(a)+F(b)}{2}, \qquad a,b > 0,$$

i mamy równanie Jensena

b) Znaleźć $F\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające

$$F\left(\sqrt{ab}\right) = \frac{F(a)+F(b)}{2}, \qquad a,b > 0.$$

c) Znaleźć $F\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające

$$F\left(\frac{2}{1/a+1/b}\right) = \frac{F(a)+F(b)}{2}, \qquad a,b > 0.$$

d) Znaleźć $F\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające

$$F\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right) = \frac{F(a)+F(b)}{2}, \qquad a,b > 0.$$

**Uwaga 2.1.** Funkcję $f$ odtwarzamy licząc pochodną funkcji $F$.

**2.4.** * Znaleźć wszystkie funkcje $f, h\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = h\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\right), \qquad x,y > 0, a \neq b.$$

**2.5** (Z wykładu)**.** Udowodnić fakt wykorzystany na wykładzie, że każda liczba wymierna dodatnia ma przestawienie w postaci ułamka łańcuchowego.

**2.6.** Znaleźć wszystkie funkcje parzyste $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i nieparzyste $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leqslant h\left(\frac{x+y}{2}\right), \qquad x, y \in \mathbb{R}, x \neq y.$$

**2.7.** Znaleźć wszystkie funkcje $f, h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające

$$f(x)-f(y) \leqslant (x-y)h\left(\frac{x+y}{2}\right), \qquad x, y \in \mathbb{R}, x \neq y.$$

**2.8.** Niech $I$ będzie pewnym przedziałem, zaś $M\colon I \times I \longrightarrow I$ średnią symetryczną, tzn. funkcją spełniającą

$$\min\{x,y\} \leqslant M(x,y) \leqslant \max\{x,y\} \quad \text{i} \quad M(x,y) = M(y,x), \qquad x, y \in I.$$

Znaleźć wszystkie funkcje $f, h\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające

$$f(x)-f(y) < (x-y)h\left(M(x,y)\right), \qquad x, y \in I.$$

# 3 Przykłady nierówności funkcyjnych

Na ostatnim wykładzie powędrujemy sobie po krainie nierówności funkcyjnych. Zaczniemy od funkcji podaddytywnych. Określa je nierówność funkcyjna będąca naturalnym odpowiednikiem równania funkcyjnego Cauchy'ego.

**Definicja 3.1.** Funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest **podaddytywna (nadaddytywna)**, gdy

$$f(x+y) \leqslant (\geqslant) f(x) + f(y),$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

**Przykład 3.1.** Funkcjami podaddytywnymi są na przykład $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{|x|}$, $h(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

Zadanie typu, które jak dotąd pojawiało się najczęściej: *znaleźć wszystkie funkcje takie, że ...*, jak widać z tych przykładów teraz może być bardzo trudne. Dokładając jednak jakieś założenia można czasami wszystkie funkcje pod/nadaddytywne i spełniające jeszcze coś tam znaleźć. Podamy trzy przykładowe twierdzenia.

**Twierdzenie 3.1** (Maksa, Volkmann, [MaVo])**.** *Funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnia dla każdych $x, y \in R$ nierówność*

$$|f(x+y)| \geqslant |f(x) + f(y)|,$$

*wtedy i tylko wtedy, gdy $f$ jest addytywna.*

*Dowód.* 1. $x = y = 0 \Longrightarrow |f(0)| \leqslant 0 \Longrightarrow f(0) = 0.$

2. $y = -x \Longrightarrow 0 \geqslant |f(x) + f(-x)| \Longrightarrow f$ jest nieparzysta.

3. Podnosimy wyjściową nierówność stronami do kwadratu i dostajemy

$$f(x+y)^2 \geqslant f(x)^2 + 2f(x)f(y) + f(y)^2.$$

4. W 3. zamieniamy $x$ na $x+y$ i $y$ na $-y$ dostając

$$f(x)^2 \geqslant f(x+y)^2 - 2f(x+y)f(y) + f(y)^2.$$

5. Dodajemy 3. i 4. stronami otrzymując

$$0 \geqslant 2f(y)\left(f(x) + f(y) - f(x+y)\right).$$

Zamieniając tutaj $x$ z $y$ mamy

$$0 \geqslant 2f(y)\left(f(x) + f(y) - f(x+y)\right).$$

Teraz zamieniamy znowu $x$ na $x+y$ i $y$ na $-y$ uzyskując

$$0 \geqslant 2f(x+y)\left(f(x+y) - f(x) - f(y)\right).$$

Dodajemy ostatnie trzy nierówności i mamy tezę

$$0 \geqslant \left(f(x) + f(y) - f(x+y)\right)^2.$$

□

**Twierdzenie 3.2** (Volkmann, [Vo84])**.** *Funkcja* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *spełnia*

$$f(x+y) \geqslant f(x) + f(y), \qquad \textit{(nadaddytywność)} \tag{3.1}$$

$$f(xy) \geqslant f(x)f(y), \qquad \textit{(nadmultiplikatywność)} \tag{3.2}$$

*dla każdych* $x, y \in \mathbb{R}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $f \equiv 0$ *lub* $f \equiv id$.

*Dowód.* 1. (3.1) $\overset{x=y=0}{\Longrightarrow}$ $0 \geqslant f(0)$, (3.2) $\overset{x=y=0}{\Longrightarrow}$ $f(0) \geqslant f(0)^2 \geqslant 0$, więc

$$f(0) = 0.$$

2. (3.1) $\overset{y=-x}{\Longrightarrow}$ $-f(x) \geqslant f(-x)$ — prawie nieparzystość, a ona jest kluczowa.

3. Załóżmy bez utraty ogólności, że szukamy niezerowych rozwiązać, tzn. istnieje $a \in \mathbb{R}$, że $f(a) \neq 0$. Można zakładać, że $f(a) < 0$, bo w przeciwnym razie, wobec 2, mamy $f(-a) \leqslant -f(a) < 0$.

4.

$$(3.2) \Longrightarrow f(a) \geqslant f(1)f(a) \Longrightarrow f(1) \geqslant 1,$$
$$(3.2) \Longrightarrow f(1) \geqslant f(1)^2 \Longrightarrow 1 \geqslant f(1),$$

więc

$$f(1) = 1.$$

5.

$$2., 4. \Longrightarrow f(-1) \leqslant -f(1) = -1,$$
$$(3.2) \Longrightarrow 1 = f(1) = f((-1)(-1)) \geqslant f(-1)^2 \Longrightarrow f(-1) \geqslant -1,$$

więc

$$f(-1) = -1.$$

6. $f(-x) \geqslant f(-1)f(x) = -f(-x) \overset{2.}{\Longrightarrow} f(-x) = -f(x)$.

7. Teraz z górki. $f$ jest addytywna, bo

$$f(x+y) \geqslant f(x) + f(y) = -\left(f(-x) + f(-y)\right) \geqslant -f(-x-y) = f(x+y).$$

$f$ jest multiplikatywna, gdyż podobnie

$$f(xy) \geqslant f(-x)f(-y) = -f(x)f(-y) \geqslant -f(-xy) = f(xy).$$

Wobec tych dwóch obserwacji dowód kończy lemat, którego dowód odkładamy do zadań.

**Lemat 3.1.** *Funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest jednocześnie addytywna i multiplikatywna wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) = x$ lub $f(x) \equiv 0$.*

$\square$

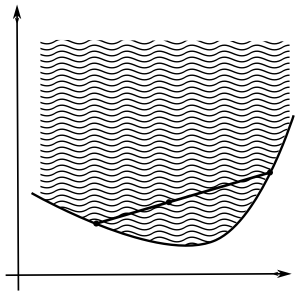
Ostatnie twierdzenie z tej serii zrobimy na ćwiczeniach jeśli będą chęci i aparat.

**Twierdzenie 3.3** ([Ku85])**.** *Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie podaddytywna. Jeśli ma ona różniczkowalną w zerze majorantę, która zeruje się w zerze, tzn. istnieje funkcja $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniająca*

$$f(x) \leqslant g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \qquad g(0) = 0 \quad \text{i } g \text{ różniczkowalna w } 0,$$

*to $f(x) = ax$, dla pewnej stałej $a \in \mathbb{R}$.*

Szeroką klasę nierówności funkcyjnych stanowią funkcje wypukłe. Można sobie na nie patrzeć jak na uogólnienie funkcji liniowych.



**Definicja 3.2.** Funkcję $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **wypukłą**, jeśli

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \qquad \lambda \in [0,1],\ x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

**Przykład 3.2.** Funkcje $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^2$ są wypukłe, a na przykład funkcja $x \mapsto x^3$ nie jest wypukła.

Można też mówić o półwypukłości, która bierze się z równania funkcyjnego Jensena.

**Definicja 3.3.** Funkcję $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **$\frac{1}{2}$-wypukłą**, jeśli

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}, \qquad x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Ciekawe, że $\frac{1}{2}$-wypukłość, to prawie wypukłość, ale prawie robi wielką różnicę. Patrz Zadanie 3.2. Natomiast coś bliskiego nierówności (3.3) można wycisnąć.

**Twierdzenie 3.4.** *Jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest $\frac{1}{2}$-wypukła, to* (3.3) *zachodzi ale tylko dla $\lambda$ wymiernych.*

*Dowód.* Naszym celem jest udowodnić, że dla dowolnego $n$ i dowolnych liczb $x_1, \ldots, x_n$ zachodzi

$$f\left(\frac{1}{n}\sum x_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum f(x_i).$$

Istotnie, jeśli $\lambda = p/q$, to biorąc powyżej $n = q$ i $x_1 = \ldots = x_p = x$, $x_{p+1} = \ldots = x_q = q$ otrzymamy (3.3).

Tą nierówność łatwo zobaczyć dla $n$ będącego potęgą dwójki, gdyż wystarczy iterować nierówność (3.4). Jak już to mamy, to weźmy $k$ tak, aby $n < 2^k$ i $x_{n+1} = \ldots = x_{2^k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Wtedy

$$\frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^{2^k} x_i = \frac{1}{2^k}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{2^k-n}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

i mamy

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = f\left(\frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^{2^k} x_i\right) \leqslant \frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$
$$= \frac{1}{2^k}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + (2^k - n) f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right),$$

skąd

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \frac{1}{2^k - (2^k - n)}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

□

Jako mało oklepane zastosowanie wypukłości zróbmy sobie tzw. nierówność HLP.

**Twierdzenie 3.5** (Hardy — Littlewood — Polya)**.** *Jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest wypukła, to dla dowolnych ciągów liczb $x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_n$ i $y_1 \geqslant \ldots \geqslant y_n$ spełniających*

$$X_k := \sum_{i=1}^{k} x_i \geqslant \sum_{i=1}^{k} y_i =: Y_k, \quad \textit{dla } k \leqslant n-1$$

*oraz*

$$X_n := \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i =: Y_n,$$

*mamy*

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} f(y_i).$$

*Dowód.* Oznaczmy sobie

$$\Delta_i = \frac{f(x_i) - f(y_i)}{x_i - y_i}, \qquad i \leqslant n$$

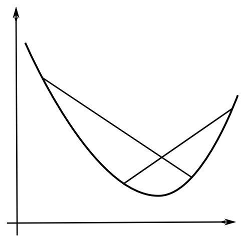
(elementy takie, że $x_i = y_i$ można bezkarnie wykreślić). Mamy udowodnić

$$\sum (f(x_i) - f(y_i)) = \sum \Delta_i (x_i - y_i) \geqslant 0.$$

Ponieważ z wypukłości mamy dla $i \leqslant n-1$, że $\Delta_i - \Delta_{i+1} \geqslant 0$ (patrz Zadanie 3.8), to wystarczy przecałkować przez części

$$\sum \Delta_i (x_i - y_i) = \sum_{i=1}^{n-1} (\underbrace{\Delta_i - \Delta_{i+1}}_{\geqslant 0})(X_i - Y_i) + \Delta_n(\underbrace{X_n - Y_n}_{=0}) \geqslant 0.$$

□



## Zadania

**3.1** (Z wykładu)**.** Udowodnić Lemat 3.1, czyli pokazać, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest jednocześnie addytywna i multiplikatywna wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) = x$ lub $f(x) \equiv 0$.

**3.2.** * Podać przykład funkcji $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\frac{1}{2}$-wypukłej, ale nie wypukłej.

**3.3.** * Niech funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie $\frac{1}{2}$-wypukła i ograniczona z góry (tzn. istnieje stała $C$, że $f(x) \leqslant C$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$). Udowodnić, że $f$ jest stała.

**3.4.** Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nieparzyste i podaddytywne.

**3.5** ([Pa])**.** Pokazać, że $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnia układ nierówności

$$\begin{aligned} f(x) &\leqslant x, \qquad && x \in \mathbb{R} \\ f(x+y) &\leqslant f(x) + f(y), \qquad && x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) = x$.

**3.6** (Z wykładu)**.** * Udowodnić Twierdzenie 3.3.

**3.7** ([Ru])**.** * Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leqslant (x-y)^2.$$

**3.8** (Z wykładu)**.** Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie wypukła. Udowodnić, że dla $x_1 > x_2$ i $y_1 > y_2$ zachodzi

$$\frac{f(x_1) - f(y_1)}{x_1 - y_1} \geqslant \frac{f(x_2) - f(y_2)}{x_2 - y_2}$$

**3.9.** Udowodnić, że nie istnieją funkcje $f, h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla $x \neq y$

$$f(x) - f(y) < (x-y)h(x+y+xy).$$

**3.10.** Niech $p > 1$ i $k$ będzie całkowite dodatnie. Udowodnić, że dla liczb rzeczywistych dodatnich $a_1, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{(a_1 + \ldots + a_n)^k}{a_1^k + \ldots + a_n^k} \geqslant \frac{(a_1^p + \ldots + a_n^p)^k}{a_1^{pk} + \ldots + a_n^{pk}}.$$

*Wskazówka:* Zastosować nierówność HLP (Twierdzenie 3.5) dla funkcji $f(x) = \sqrt[k]{x}$ (wklęsłej!) i ciągów $\frac{a_i^k}{a_1^k+\ldots+a_n^k}$, $\frac{a_i^{pk}}{a_1^{pk}+\ldots+a_n^{pk}}$.

**3.11** (6IMC). * Udowodnić, że nie istnieje funkcja $f\colon (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ taka, że

$$f(x)^2 \geqslant f(x+y)(f(x)+y),$$

dla wszystkich $x, y > 0$.

# A Zadania kwalifikacyjne

**A.1.** Dana jest funkcja $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ taka, że $g(g(x)) = x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$f(x) + \sqrt{2} f(g(x)) = x,$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

**A.2.** Udowodnić, że nie istnieje funkcja $f\colon [-2010, 2010] \longrightarrow [-2010, 2010]$ spełniająca

$$f(f(x)) - f(x) \geqslant \frac{1}{2010},$$

dla dowolnego $x \in [-2010, 2010]$.

**A.3.** Znaleźć wszystkie funkcje $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające nierówność

$$g(xy) + g(yz) + g(y)g(zx) \leqslant -1,$$

dla dowolnych $x, y, z \in \mathbb{R}$.

**A.4.** Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ różnowartościowe i spełniające równanie

$$f(2x - f(x)) = x,$$

dla każdego $x \in [0,1]$.

**A.5.** Rozstrzygnąć czy istnieje funkcja $f\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ taka, że $f(f(x)) = x+1$, dla każdej liczby całkowitej $x$. Odpowiedź uzasadnić.

**A.6.** Niech funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnia dla wszystkich $a, b, c \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(a + f(b+c)) + f(b + f(c+a)) + f(c + f(a+b)) = 0.$$

Znaleźć wszystkie możliwe wartości $f(0)$.

**A.7.** Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$xf(x) - yf(y) = (x-y)f(x+y),$$

dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$.

**A.8.** Zbadać czy istnieje funkcja $f$ ze zbioru liczb rzeczywistych, nieujemna i różna od stałej, spełniająca dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ nierówność

a) $f(x) + f(y) \leqslant 2\sqrt{f(x)f(y)}$,

b) $f(x) + f(y) \geqslant 2\sqrt{f(x)f(y)}$.

Odpowiedź w każdym z podpunktów uzasadnić.

# B Rozwiązania zadań kwalifikacyjnych

**Rozwiązanie Zadania A.1.** Za $x$ kładziemy $g(x)$ i wraz z wyjściowym równaniem mamy układ równań

$$\begin{cases} f(x) + \sqrt{2}f(g(x)) = x \\ f(g(x)) + \sqrt{2}f(x) = g(x) \end{cases},$$

skąd $f(x) = \sqrt{2}g(x) - x$. Sprawdzamy, że jest to istotnie dobre rozwiązanie. $\square$

**Rozwiązanie Zadania A.2.** Iterując nierówność z treści zadania łatwo indukcyjnie zobaczyć, że

$$f^{n+1}(x) - f(x) \geqslant \frac{n}{2010}, \qquad n \geqslant 1.$$

Ale $f^{n+1}(x) - f(x) \leqslant 2 \cdot 2010$, więc biorąc dostatecznie duże $n$ (np. $n = 2010^3$) dostaniemy sprzeczność porównując te dwie nierówności. $\square$

**Rozwiązanie Zadania A.3.** Wstawiamy $x = y = z = 0$ dostając $(g(0)+1)^2 \leqslant 0$, więc $g(0) = -1$. Wstawiając $x = y = z = 1$ mamy podobnie $g(1) = -1$. Wstawiając $x = z = 0$ otrzymujemy $g(y) \geqslant -1$, a kładąc $x = z = 1$ otrzymujemy $g(y) \leqslant -1$. Zatem $g(y) \equiv -1$. Z drugiej strony, łatwo sprawdzamy, że jest to dobre rozwiązanie. $\square$

**Rozwiązanie Zadania A.4.** Z równania z treści zadania widać bezpośrednio, że $f$ jest *na*, więc jest bijekcją. Mamy zatem

$$2x - f(x) = f^{-1}(x).$$

Ustalmy dowolne $x_0 \in [0, 1]$ i określmy ciąg $x_{n+1} = f(x_n)$, dla $n \geqslant 0$. Mamy z powyższego

$$x_n - x_{n+1} = x_{n-1} - x_n, \qquad n \geqslant 1,$$

tzn.

$$x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1},$$

czyli jest to ciąg arytmetyczny. Ponieważ jest on ograniczony, musi być stały. Zatem w szczególności

$$f(x_0) = x_1 = x_0.$$

Z dowolności $x_0$ mamy, że $f = \mathrm{id}$. Bezpośrednio sprawdzamy, że takie $f$ spełnia wyjściowe równanie. Jest więc ono jedynym rozwiązaniem. □

**Rozwiązanie Zadania A.5.** Załóżmy, że istnieje. Wtedy $f(x) + 1 = f^3(x) = f(x + 1)$, więc (indukcja) $f(x) = x + f(0)$. Wstawiając to do wyjśiowego równania mamy $x + 1 = f(x + f(0)) = x + 2f(0)$, skąd $f(0) = 1/2$. Sprzeczność. □

**Rozwiązanie Zadania A.6.** Oznaczmy $z = f(0)$. Popatrzmy, że

$$\begin{aligned} a = b = c = 0 &\implies f(z) = 0, \\ a = b = c = \frac{z}{2} &\implies f\left(\frac{z}{2}\right) = 0, \\ a = 0, b = c = \frac{z}{2} &\implies z = 0. \end{aligned}$$

□

**Rozwiązanie Zadania A.7.** Możemy bez utraty ogólności zakładać, że $f(0) = 0$. Wtedy, wstawiając $y = -x$ mamy, że $f(-x) = -f(x)$. Zamieniając $y$ na $-y$ wobec tego dostajemy

$$(x + y)f(x - y) = xf(x) - yf(y) = (x - y)f(x + y),$$

skąd już widać (zamieniamy zmienne $a = x + y$ i $b = x - y$ i kładziemy np. $b = 1$), że $f(x) = ax$, dla pewnej stałej $a$. Ogólne rozwiązanie jest więc postaci $f(x) = ax + b$. Łatwo sprawdzić, że istotnie jest ono OK. □

**Rozwiązanie Zadania A.8.**

a) Nie, bo wobec warunku równości między średnimi arytmetyczną i geometryczną $f$ musiałaby być stała.

b) Tak, np. $f(x) = x^2$.

□

## Literatura


[Acz] J. Aczél, *A Mean Value Property of the Derivative of Quadratic Polynomials-without Mean Values and Derivatives*, Mathematics Magazine, Vol. 58, No. 1 (1985), 42–45

[Fi] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy. Tom 1*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004

[Ku85] M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities. Cauchy's equation and Jensen's inequality*, Prace naukowe Uniwersytetu lskiego w Katowicach, nr 489, Pastwowe Wydawnictwo Naukowe i Uniwersytet lski, Warszawa Krakw Katowice 1985

[Ku91] M. Kuczma, *On the quasiarithmetic mean in a mean value property and the associated functional equation*, Aequationes Mathematicae **41** (1991), 33–54

[MaVo] Gy. Maksa, P. Volkmann, *Characterization of group homomorphisms having values in an inner product space*, Publ. Math. Debrecen **56** (2000), 197–200

[Pa] H. Pawłowski, *Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata*, Oficyna wydawnicza Tutor, Toruń 1997

[SaRi] P. K. Sahoo, T. Riedel, *Mean Value Theorems and Functional Equations*, World Scientific Publishing Co., NJ 1998

[Ru] W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, Wydawnictwo naukowe PWN, Warszawa 2002

[Vo84] P. Volkmann, *Sur les fonctions simultanément suradditives et surmultiplicatives*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie (N. S.) **28 (76)** (1984), 181–184

[Vo88] P. Volkmann, *Charakterisierung der Funktion* $1/x$ *durch Funktionalgleichungen*, Ann. Polon. Math. **48** (1988), 91–94