

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکده مهندسی کامپیوتر

درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها

تمرین پنجم نمایش سری فوریه سیگنال‌های متناوب گسسته-زمان و تبدیل فوریه گسسته-زمان

استاد درس
دکتر راستی

توضیحات:

- مهلت تحویل تا پنج‌شنبه ۹ دی در نظر گرفته شده است و به هیچ عنوان تمدید نخواهد شد. برای این تمرین، مانند تمرین‌های دیگر، می‌توانید از بودجه تاخیر مجاز خود استفاده کنید.
- پاسخ به تمرین‌ها باید به صورت انفرادی نوشته شود و در صورت مشاهده هرگونه تقلب نمره برای همه افراد صفر در نظر گرفته خواهد شد.
- پاسخ بخش‌های تئوری و شبیه‌سازی تمرین را در قالب یک فایل PDF یا ZIP با نام «HW5_StudentNumber» در سایت درس بارگذاری کنید.
- سوالات خود را از طریق ایمیل ss.fall.2021@gmail.com با تدریس‌یاران درس مطرح کنید. موضوع ایمیل را «تمرین n : سوال m » برای سوالات تمرین و «سوال از فصل x » برای سوالات درسی قرار دهید.

نیمسال اول ۱۴۰۰-۱۴۰۱

بخش تئوری

سوال ۱ -

دو دنباله متناوب زیر را در نظر بگیرید.

$$\tilde{x}_1[n] = 1 + \sin\left(\frac{2\pi n}{10}\right)$$

$$\tilde{x}_2[n] = 1 + \sin\left(\frac{20\pi}{12}n + \frac{\pi}{2}\right)$$

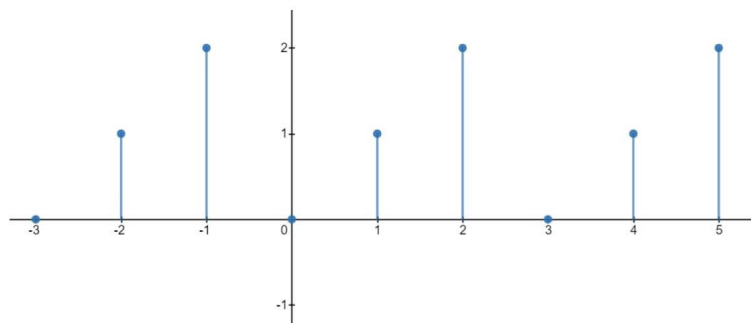
آ) دوره تناوب $x_1[n]$ و $x_2[n]$ را تعیین کنید.

ب) دنباله ضرایب سری فوریه a_{1k} را برای $x_1[n]$ و a_{2k} را برای $x_2[n]$ تعیین کنید.

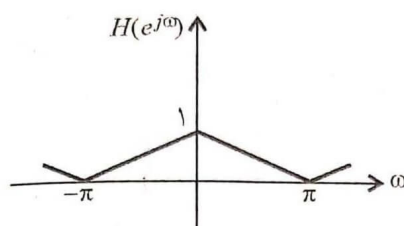
پ) در هر مورد، دنباله ضرایب سری فوریه متناوب است. دوره تناوب دنباله‌های a_{1k} و a_{2k} را تعیین کنید.

سوال ۲ -

سیگنال $x[n]$ با دوره تناوب $N = 3$ به شکل زیر است.



فرض کنید $y[n]$ خروجی یک سیستم LTI با پاسخ فرکانسی زیر به $x[n]$ است. ضریب $e^{j\frac{2\pi}{3}}$ را در سری فوریه $y[n]$ بدست آورید.



سوال ۳ -

فرض کنید چهار ویژگی زیر برای سیگنال $x[n]$ برقرار است.

- $x[n]$ یک سیگنال حقیقی و زوج است.
- دوره تناوب آن برابر $N = 10$ و ضرایب سری فوریه آن a_k است.

$$a_{11} = 5 \quad \bullet$$

$$\frac{1}{10} \sum_{n=0}^9 |x[n]|^2 = 50 \quad \bullet$$

نشان دهید $x[n] = A \cos(Bn + C)$ است. سپس ضرایب ثابت A ، B و C را بدست آورید.

سوال ۴ -

فرض کنید $x[n]$ سیگنالی متناهی به طول N می‌باشد به طوری که به ازای $n < 0$ و $n > N - 1$ ، $x[n] = 0$ است. تبدیل فوریه گسسته-زمان را برای $x[n]$ ، با $X(e^{j\omega})$ نشان می‌دهیم. سیگنال متناوب $\tilde{y}[n]$ با کنار هم قرار دادن سیگنال $x[n]$ به صورت متناوب ایجاد می‌شود؛ یعنی:

$$\tilde{y}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n + rN]$$

(آ) ضرایب سری فوریه a_k سیگنال $\tilde{y}[n]$ را برحسب $x[n]$ بنویسید.

(ب) رابطه میان ضرایب سری فوریه $\tilde{y}[n]$ و تبدیل فوریه $x[n]$ را به شکل یک عبارت ریاضی بیان کنید.

سوال ۵-

تبدیل فوریه سیگنال‌های گسسته-زمان زیر را محاسبه کنید.

a) $x[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$

b) $x[n] = (n+1) \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

c) $x[n] = \text{sinc}\left(\frac{\pi}{3}n\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}n\right)$

سوال ۶-

تبدیل فوریه معکوس سیگنال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$a) \quad X(e^{j\omega}) = 1 + 3e^{-j\omega} + 2e^{-j2\omega} - 4e^{-j3\omega} + e^{-j10\omega}$$

$$b) \quad X(e^{j\omega}) = \frac{2-12e^{-j\omega}}{1-12e^{-j\omega}+35e^{-2j\omega}}$$

$$c) \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-j\omega k}$$

$$d) \quad X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \frac{\pi}{4} \leq |\omega| \leq \frac{3\pi}{4} \\ 0, & \frac{3\pi}{4} \leq |\omega| \leq \pi, \quad 0 \leq |\omega| < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

سوال ۷-

پاسخ ضربه سیستم‌های LTI زیر را در نظر بگیرید.

$$a) \quad h[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}n\right)}{\pi n}$$

$$b) \quad h[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}n\right)}{\pi n} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{\pi n}$$

$$c) \quad h[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}n\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)}{\pi n}$$

آ) پاسخ ضربه سیستم‌های فوق را در حوزه فرکانس رسم کنید.

ب) به کمک نمودارهایی که در بخش قبل رسم کردید خروجی سیگنال زیر را برای هریک از سیستم‌های فوق بدست آورید.

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{8}n\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

سوال ۸-

یک سیستم LTI با سکون ابتدایی با معادله تفاضلی زیر توصیف شده است.

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$$

آ) تابع سیستم که $Y(e^{j\omega})$ را برحسب $X(e^{j\omega})$ بیان می‌کند بدست آورید.

ب) با استفاده از تبدیل فوریه، $y[n]$ را به ازای $x[n]$ های زیر بدست آورید.

- i) $\delta[n]$
- ii) $\delta[n - n_0]$
- iii) $\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$

بخش شبیه‌سازی

بعد از تلگراف، تلفن اختراعی بود که امکان انتقال پیام از راه دور را در قالب سیگنال پیوسته-زمان فراهم کرد. در ابتدای پیدایش تلفن‌ها، برقراری تماس و اتصال به مقصد مورد نظر، توسط تلفن‌چی‌ها صورت می‌گرفت (شکل ۱). در حقیقت گره‌های میانی شبکه تلفن را تلفن‌چی‌هایی تشکیل می‌دادند که اتصال مستقیم شما و مقصدتان را برقرار می‌کردند. با گسترش شبکه تلفن و جهانی شدن آن، ادامه این روش تقریباً غیرممکن بود و باید برای این مشکل چاره‌ای اندیشیده می‌شد.



شکل ۱. تصویری از تلفن‌چی‌ها در سال ۱۹۴۰

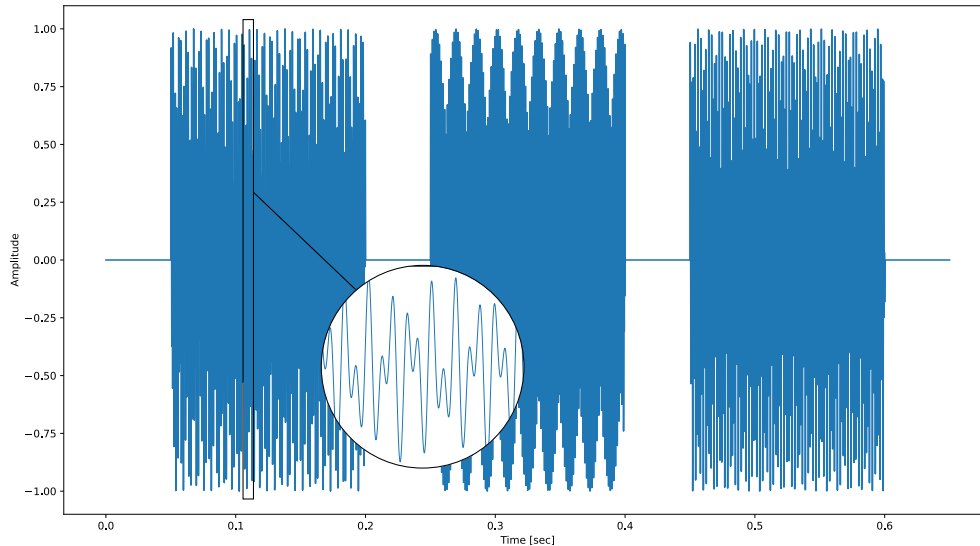
هدف خودکار کردن فرآیند اتصال مبدأ به مقصد تماس بود و چالش موجود، تشخیص شماره‌ای بود که مبدأ قصد اتصال به آن را داشت. در اینجا با یکی دیگر از کاربردهای روزمره تبدیل فوریه در حل این مسئله آشنا می‌شویم.

جدول ۱. دکمه‌های تلفن و فرکانس‌های معادل هر کدام

697	1	2	3
770	4	5	6
852	7	8	9
941	*	0	#
1209	1336	1477	

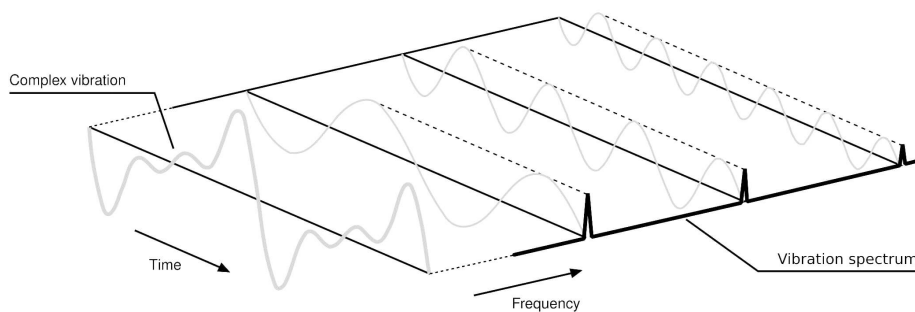
فرض کنید کلیدهای تلفن به شکل **جدول ۱** است. هر کلید تلفن در راستای سطر و ستون به دو فرکانس مرتبط می‌شود. در حقیقت با فشار دادن هر کلید، سیگنال صوتی که از مجموع دو سیگنال سینوسی با فرکانس‌های

مربوطه حاصل می‌شود، به سمت مرکز تلفن ارسال می‌شود. هنوز هم می‌توانید صدای معادل هر کلید را هنگام شماره‌گیری در تلفن‌ها بشنوید. به عنوان مثال، سیگنال صوتی حاصل از شماره‌گیری ۱۶۸ در **شکل ۲** آمده است. این سیگنال را می‌توانید در فایل sample.wav مشاهده کنید.



شکل ۲. سیگنال ارسالی به مرکز تلفن با شماره‌گیری ۱۶۸

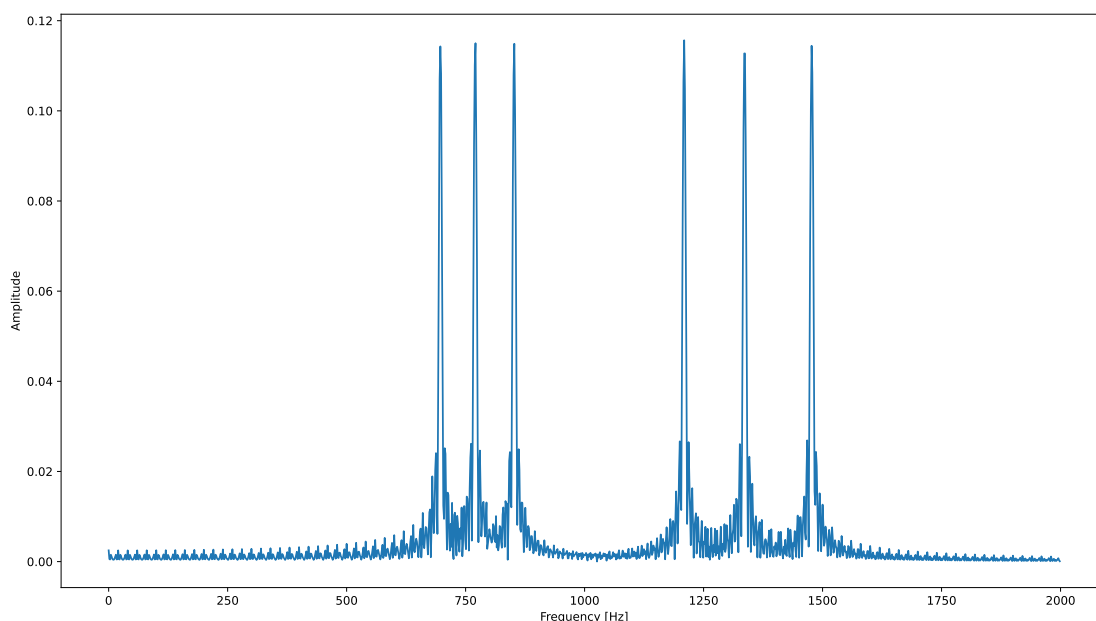
تشخیص فرکانس‌های تشکیل‌دهنده صوت در حوزه زمان چندان ساده نیست. همچنین سیگنال‌ها در حوزه زمان به شدت به نویز حساس هستند و شکل موج ممکن است بگونه‌ای تغییر کند که دیگر به موج اولیه شباهتی نداشته باشد. اما همانطور که درس خواندیم، تبدیل فوریه امکان شناسایی فرکانس‌های تشکیل‌دهنده یک سیگنال را به سادگی فراهم می‌کند (**شکل ۳**).



شکل ۳. تغییر حوزه سیگنال از زمان به فرکانس به کمک تبدیل فوریه

در نتیجه، برای تشخیص شماره مورد نظر در مسئله تلفن، تبدیل فوریه سیگنال دریافتی را محاسبه می‌کنیم. به عنوان مثال، تبدیل فوریه سیگنال حاصل از شماره‌گیری ۱۶۸ در **شکل ۴** رسم شده است. اما اگر توجه کنید،

مشکل دیگری در استفاده از تبدیل فوریه وجود دارد. با محاسبه تبدیل فوریه، سیگنال مورد نظر به طور کامل به حوزه فرکانس منتقل می‌شود و اطلاعات مربوط به حوزه زمان از بین می‌رود. به عنوان مثال در **شکل ۴**، تنها می‌توانیم سطرها و ستون‌هایی که دکمه‌های آن فشرده شده است را تشخیص دهیم و امکان دریافت کلیدهای فشرده شده و ترتیب زمانی آن‌ها را نداریم.

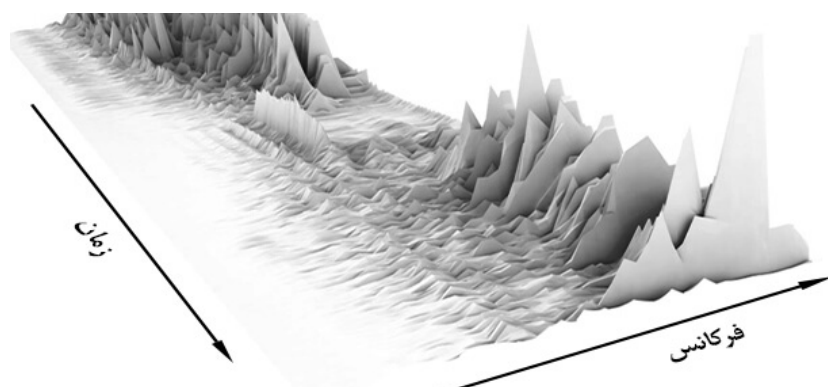


شکل ۴. تبدیل فوریه سیگنال حاصل از شماره‌گیری ۱۶۸

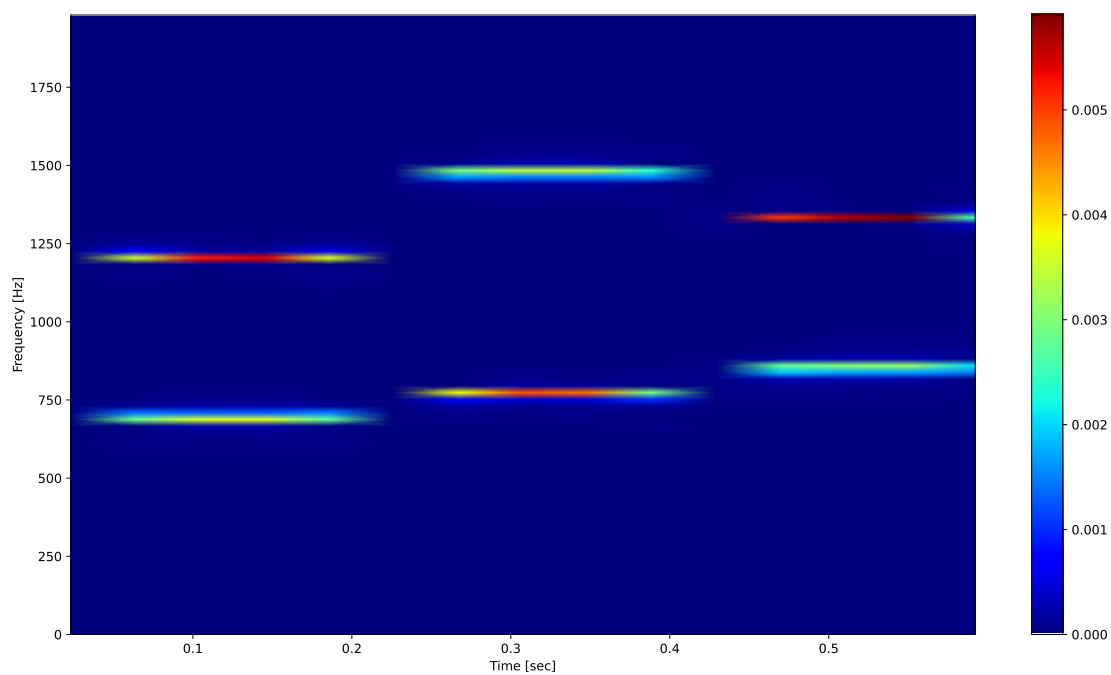
در حقیقت اگر حوزه زمان و حوزه فرکانس را دو سر یک بازه در نظر بگیریم، ما به اطلاعاتی در میانه این بازه نیاز داریم. ایده کلی آن است که بجای محاسبه تبدیل فوریه برای کل سیگنال، آن را به پنجره‌های زمانی کوتاه‌تری شکسته و تبدیل فوریه پنجره‌های زمانی مختلف را به طور مستقل محاسبه کنیم. این کار، سیگنال مورد نظر را سه‌بعدی می‌کند؛ یک بعد حوزه زمان را نشان می‌دهد، بعد دیگر فرکانس و نهایتاً بعد آخر شدت صوت را در زمان و فرکانس مربوطه مشخص می‌کند (**شکل ۵**). در **این ویدیو** می‌توانید برای یک موسیقی این نمودار را مشاهده کنید.

ترسیم سیگنال در قالب نمودار سه‌بعدی دشوار است. به همین دلیل، بعد سوم که شدت سیگنال را مشخص می‌کند، بصورت رنگ‌های مختلف رسم می‌کنیم. در **شکل ۶**، این نمودار را برای مثال ۱۶۸ مشاهده می‌کنید. به این نمودار طیف‌نگاره^۱ گفته می‌شود. همانطور که در **شکل ۶** مشاهده می‌کنید، فرکانس‌های دکمه‌های فشرده، به همراه ترتیب زمانی حضور آنها در سیگنال مشخص می‌شود. در سیستم‌های مخابراتی نیز به شیوه مشابه، شماره وارد شده تشخیص داده می‌شود.

^۱Spectrogram



شکل ۵. نمودار سه‌بعدی فرکانس و زمان



شکل ۶. طیف‌نگاره سیگنال حاصل از شماره‌گیری ۱۶۸

سوال ۱ -

در این بخش به کمک کتابخانه numpy، شماره‌ای که از شماره‌گیری آن سیگنال فایل tone.wav تولید می‌شود را شناسایی کنید.

- (آ) فایل tone.wav را مشابه سوال ۲ تمرین سری قبل، بخوانید و آن را در حوزه زمان رسم کنید. توجه کنید محور افقی زمان است و اعداد آن باید به اندازه مدت زمان فایل صوتی باشد (مشابه شکل ۲).
- (ب) با استفاده از تابع fft ^۲، تبدیل فوری سیگنال را محاسبه کنید. برای به دست آوردن فرکانس‌های هر یک از مقادیر خروجی fft ، از تابع fftfreq ^۳ استفاده کنید. در نهایت مشابه شکل ۴، تبدیل فوری این سیگنال را رسم کنید. توجه کنید در شکل ۴، محور افقی فرکانس است. همچنین در این شکل، مقادیر نمودار به منظور نرمال‌سازی، در $\frac{2}{N}$ ضرب شده‌اند اما لزومی ندارد این کار را انجام دهید.
- (پ) سیگنال را به پنجره‌های زمانی ۲۰۴۸ سمپلی بشکنید. در واقع خروجی این کار، تبدیل سیگنال به ماتریسی با ۲۰۴۸ سطر است که هر ستون آن، مقادیر سیگنال در حوزه زمان در یک پنجره زمانی است. سپس از هر یک پنجره‌های زمانی (ستون‌های ماتریس) به طور مستقل تبدیل فوری بگیرید. خروجی این کار نیز ماتریسی با ۲۰۴۸ سطر است که هر ستون آن، اطلاعات فرکانسی مربوط به آن پنجره زمانی را شامل می‌شود. این ماتریس در واقع همان طیف‌نگاره سیگنال است. در نهایت به کمک تابع imshow ، طیف‌نگاره حاصل را رسم کنید (مشابه شکل ۶).
- (ت) به کمک طیف‌نگاره به دست آمده و جدول ۱، شماره تلفن شماره‌گیری شده را مشخص کنید.
- (ث) طیف‌نگاره را به ازای اندازه پنجره‌های ۱۰۲۴ و ۴۰۹۶ رسم کنید. به نظر شما اندازه پنجره زمانی، چه تاثیری روی طیف‌نگاره می‌گذارد؟ (امتیازی)
- (راهنمایی: به تغییرات خروجی fft با تغییر اندازه پنجره زمانی توجه کنید)

پاسخ هر مورد را به همراه تصویر نمودارهای رسم شده گزارش کنید و در کنار کد خود آپلود کنید. همچنین استفاده از Jupyter برای مشاهده مرحله به مرحله اجرای برنامه و نوشتن توضیحات در لابه‌لای آن بسیار توصیه می‌شود.

ضمناً می‌توانید برنامه خود را بر روی فایل sample.wav بیازمایید و با نمودارهای این سند مقایسه کنید. اما نیازی به ارسال نمودارهای این فایل نیست.

^۲خروجی fft ، N سمپل، برابر با تعداد سمپل‌های ورودی آن است.

^۳ورودی‌های این تابع به ترتیب N ، تعداد سمپل‌ها و $d = \frac{1}{\text{sample rate}}$ است. خروجی آن نیز N فرکانس است که نظیر به نظیر، مرتبط به هر یک مقادیر خروجی تابع fft است.