

# MHD dynamo driven by precession in sphere

Yoshiki Ueda

## **Abstract**

Precession is attracting attention as an energy source of the Earth's dynamo in the period before the inner core formation. While the hydrodynamics driven by precession inside a sphere has been investigated in detail so far, there are many unknowns about the magnetohydrodynamics under precession. The magnetic field generation, or the dynamo effect, by the precession-driven flow is especially unknown. Here, we investigate the precession dynamo in a sphere by computer simulations. We use the Yin-Yang-Zhong grid for the spatial discretization in the sphere. We have performed simulations with various combinations of Poincaré numbers  $Po$  and the precession angles, with fixed parameters of the Prandtl number  $Pr = 1$ , the magnetic Prandtl number  $Pm = 6$ , and the Ekman number  $E = 7 \times 10^{-4}$ . Simulation results are summarized as follows: (1) The flow reaches a steady state in a time of about one viscous diffusion time. (2) High-velocity flows appear near the surface of the sphere, while low-velocity flows, that are sometimes in vortex form, appear near the center of the sphere. (3) When the precession angle is 60 degrees, the magnetic field is generated with the Poincare number  $Po = -0.2$ . The dynamo effect disappears when  $Po$  is either increased or decreased. (4) Strong magnetic fields are formed on the spherical surface. Their positions are point symmetric with respect to the origin. A dipole magnetic field is formed with a particular parameter set. (5) Strong shear flows are formed near the surface where horizontal flows rapidly change the amplitude and direction as a function of the radius. The magnetic field is generated and sustained where the strong horizontal shear flow resides. The dynamo observed in the precession system in this study is driven by the shear near the surface, rather than the slow vortex flow near the center. Additional simulations, such as longer simulations up to the magnetic diffusion time and high-resolution simulations with lower Ekman numbers, would be necessary to elucidate the precession-driven dynamo in a sphere in more detail.

# 歳差運動する球体内部の磁気流体シミュレーション

上田 佳輝

## 要旨

内核が形成されるよりも前の時代における地球ダイナモのエネルギー源として歳差運動が注目を集めている。歳差運動によって球内部に駆動される流れについては詳しく研究がなされているが、流れによる磁場の生成、すなわちダイナモ効果についてはあまり研究されていない。本研究では球内の流体の歳差運動によるダイナモ効果について計算機シミュレーションにより調べた。計算にはYin-Yang-Zhong格子を用いた。プラントル数 $Pr = 1$ ; 磁気プラントル数 $Pm = 6$ ; エクマン数 $E = 7 \times 10^{-4}$ に固定したパラメータの下、ポアンカレ数 $Po$ と歳差角の複数の組み合わせでのシミュレーションを行い、以下の結果を得た：(1) 流れは粘性拡散時間の十分の一程度の時間で定常状態に達し、以降流れ構造は変化しない。(2) 球表面に速度の速い流れが、球内部に速度の遅い流れが形成され、複数のモデルで球内部の遅い流れは渦を形成される。(3) 歳差角を60度とした場合、ポアンカレ数が-0.2のときには磁場が発展するが、ポアンカレ数を0に近づけても、反対に-1に近づけても磁場は減衰する。(4) 磁場は球表面に強く現れ、その位置は原点に対して点対称になる。また、あるパラメータではダイポール磁場が形成される。(5) 球表面には流れの強さ・向きともに異なる領域が近接している場所が存在し、そこで磁場が生成される。すなわち、本研究では速度シアによるダイナモが確認された。今後の課題として、(1) 磁気拡散時間までのシミュレーション (2) 歳差運動が地球ダイナモに与える影響をより理解するため、より低いエクマン数での計算が必要である。

# 目 次

<b>1 序論</b>	<b>1</b>
1.1 地球磁場とダイナモ理論 . . . . .	1
1.2 球体の数値計算手法 . . . . .	2
1.2.1 スペクトル法と格子点法 . . . . .	2
1.2.2 Yin-Yang-Zhong 格子 . . . . .	3
1.2.3 Yin-Yang-Zhong 格子の座標変換 . . . . .	4
1.2.4 Yin-Yang-Zhong 格子のベクトル変換と補間 . . . . .	6
<b>2 基礎方程式・計算モデル</b>	<b>9</b>
2.1 MHD 方程式 . . . . .	10
2.2 境界条件 . . . . .	10
2.3 初期状態 . . . . .	11
2.4 パラメータ設定 . . . . .	13
<b>3 シミュレーション結果</b>	<b>14</b>
3.1 流れ構造 . . . . .	14
3.2 磁場構造 . . . . .	20
<b>4 考察</b>	<b>25</b>
<b>5 結論</b>	<b>31</b>
謝辞	34
参考文献	34
<b>A 解像度によるエネルギーの変化</b>	<b>34</b>

# 1 序論

## 1.1 地球磁場とダイナモ理論

太陽系の惑星の多くには固有磁場が存在する。その代表例が地球の双極子（ダイポール）磁場である。このダイポール磁場は地球外核の磁気流体（液体鉄）が対流することで生成・維持されていると考えられている [?]. 地震波の解析から推定された地球の内部構造を Fig. 1 に示す。半径約 6400km の内、半径約 3500km の領域が核、その外側がマントルである。核は主に鉄で、マントルは岩石で構成される。地球の核はさらに半径約 1200km を境に流体領域と固体領域に分かれており、流体領域を外核、固体領域を内核と呼ぶ。

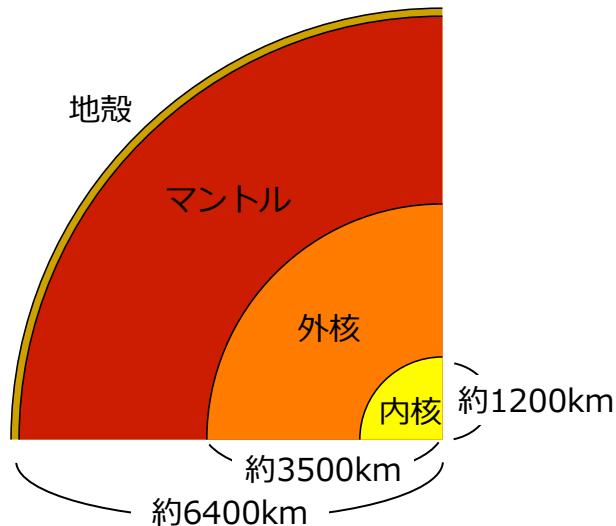


Fig. 1: Overview of the Earth's interior.

外核の電気伝導度は約  $1.4 \times 10^6 \Omega^{-1}m^{-1}$  と推定されている [?]. これから計算される外核の磁気拡散時間は数万年程度である。つまり、何らかの維持機構がなければ外核で生成される磁場は僅か数万年で散逸してしまう。一方、古地磁気の調査から、地球磁場は 30 億年以上前から存在していることが確認されている。外核の磁気流体が対流することで磁場が生成・維持されるという機構を MHD ダイナモ（または単にダイナモ）機構と呼ぶ。

地球ダイナモのエネルギー源はいまだ十分には解明されていないが、内核表面で生じる潜熱と組成分離による対流が最も有力な説である。外核の液体鉄が結晶化する際に鉄とその他の不純物に分離し、軽い不純物が浮上するときの浮力で起こる流れを組成対流という。したがって、地磁気を維持するエネルギー源として内核の存在が不可欠であるといえる。ところが内核は地球の歴史の中で比較的最近できたと考えられている。地球が形成され、マントルと核が分離した直後は核全体は高温で溶けていたと考えられる。つまり、地球初期は内核は存在していなかった。その後、地球全体が冷えるにしたがい、最も圧力の高い核の中心から固化が始まり、内核が形成された。内核形成以前は外核の液体鉄自体が十分な熱を持っていたため、マントルとの温度勾配により熱対流が駆動されていたと考えられる。ところが近年、地球中心核に近い高温高圧下での実験で鉄の伝導度が測定された結果、核の熱伝導度は従来予想よりも高い  $90 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  であると判明した [?]. この結果

から推定される内核の誕生年代は約7億年前である。つまり、内核に起因するダイナモのエネルギー源が存在したのは比較的最近であることがわかった。その少し前の時代は外核は既に十分冷えているので熱対流がダイナモのエネルギー源になることはない。しかし、内核が形成される以前にも地球磁場が存在したことは古地磁気学の研究から明らかになっている。エネルギー源なしに地球ダイナモが維持されたことになってしまう。これは“内核のパラドックス”と呼ばれる [?].

この“内核のパラドックス”を解決する1つのアイディアとして提唱されているのが、地球の歳差運動をエネルギー源とするダイナモである。歳差運動とは、ある角速度で回転している物体のその回転軸自体もある角速度で回転している運動を言う。地球も約2万6千年周期で歳差運動しており、この歳差が流れを駆動する。歳差運動によって磁場が発展することを数値シミュレーションで最初に示したのは Tilgner [?] である。その後、球 [?, ?]、球殻 [?], 円柱 [?, ?]、立方体 [?] での数値シミュレーションが行われている。しかしながら、歳差運動ダイナモの研究はいまだ少ないので現状である。

本研究の目的は歳差運動をエネルギー源とするダイナモを計算機シミュレーションで調べることである。

## 1.2 球体の数値計算手法

### 1.2.1 スペクトル法と格子点法

地球ダイナモの数値計算では球ジオメトリの計算手法が必要である。球内部の三次元空間を離散化する方法は大きく分けて2つある。一つは直交関数系（球ジオメトリでは球面調和関数がよく用いられる）を用いて式を展開するスペクトル法、もう一つは空間を有限個の格子点またはセルで分割するグリッドベースの方法（有限差分法、有限体積法、有限要素法など）である。地球ダイナモ分野ではスペクトル法を用いた研究が盛んに行われており、球または球殻を用いた歳差ダイナモ研究でも同様にスペクトル法が主流である。これは、球面調和関数を用いたスペクトル法は球ジオメトリへの適用が容易であり、さらに、比較的少ない展開モード数、つまり低解像度でも高い精度の解が得られるからである。一方、球面調和関数を用いたスペクトル法には以下の問題点がある：

- (1) 展開モード数  $L, M$  での計算量は  $\mathcal{O}(L^2 M^2)$  であるため、高い空間解像度を得るために展開モード数を増やすと計算量が非線形に増大してしまう。
- (2) 数値計算の各ステップ毎に実空間とスペクトル空間の間で球面調和関数変換と逆変換を行う必要があるが、これらの処理にはプロセッサ間のグローバル通信が必要であり、並列計算に向かない。

他方、例えば有限差分法では上の二つの問題を解消することができる。(1)に関しては、有限差分法の計算量は、系の自由度を  $L, M$  と置くと  $\mathcal{O}(LM)$  で記述される。(2)に関しては、陽的な時間積分法を採用する限り、有限差分法などグリッドベースの方法が並列計算に適していることは良く知られている。本研究では、将来的に低いエクマン数でのシミュレーションを想定している（エクマン数については第2.4章参照）。これは、地球のエクマン数が  $\mathcal{O}(10^{-15})$  と非常に小さいためである。低エクマン数の計算では高い空間解像度

が必要となるため、数値計算を現実的な期間内で行うには大規模並列化が不可欠である。そこで、本研究では数値計算手法に有限差分法を採用した。

有限差分法を用いる利点は上で述べた通りであるが、一方で、有限差分法を用いた球ジオメトリでの計算には問題がある。球ジオメトリに有限差分法を用いる最も簡単な方法は球座標格子  $\{r, \theta, \phi\}$  を使用することである。ここで、 $r (r_i \leq r \leq r_o)$  は原点からの距離(半径)、 $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$  は余緯度、 $\phi (-\pi \leq \phi < \pi)$  は経度である。流体シミュレーションにおいても球座標格子は広く用いられてきた [?, ?]。しかし、球座標格子には座標特異点：

- (1) 極 ( $\theta = 0, \pi$ )
- (2) 原点 ( $r = 0$ )

が存在するため、それに起因した以下二つの問題が発生する：

- (1) 座標特異点でのゼロ除算の問題。
- (2) 座標特異点の周囲に格子が集中してしまことによる計算コストの増加。

ゼロ除算の問題については、シミュレーションにおいて座標特異点上に格子点を置く必要はないため、格子点を座標特異点上からはずらすことで回避できる [?]。または、ロピタルの定理を利用し、方程式を特異的でない形にして解くという方法も用いられる [?]。つまり、数値計算において問題となるのは格子点の集中のみである。

以下で格子点の集中がなぜ問題となるのか述べる。本研究では、MHD 方程式(第 2.1 章で述べる)を陽的な時間積分法である 4 次ルンゲ=クッタ法を用いて積分する。陽解法を用いて数値積分を行う際には、時間刻み幅  $\Delta t$  が CFL (Courant–Friedrichs–Lowy) 条件を満たす必要がある。CFL 条件とは、計算の対象である系に存在する物理的な波が伝搬する速さよりも、数値計算において情報を伝搬する速さの方が小さくなければならないという条件である。例えば、音波モードのみが存在する 1 次元の系における CFL 条件は、

$$\Delta t < \alpha \frac{\Delta x}{C}, \quad (1)$$

と表される。ここで、 $\Delta t$  は時間刻み幅、 $\Delta x$  は格子間隔、 $C$  は音速、 $\alpha$  は  $0 < \alpha < 1$  を満たす定数である。すなわち、シミュレーションにおける格子間隔が小さいほど、短い時間刻み幅で数値積分を行う必要が生じるのである。座標特異点の周囲に格子が集中することでシミュレーションにおける格子間隔が小さくなり、CFL 条件を満たすために時間刻み幅を小さく取らなければならなくなるため、結果として計算コストが増大してしまうのである。

そこで、座標特異点周辺での格子の集中を回避するために考案されたのが Yin–Yang–Zhong 格子 [?] である。

### 1.2.2 Yin–Yang–Zhong 格子

Yin–Yang–Zhong 格子の説明の前に、まずはその前身となった Yin–Yang 格子 [?] について述べる。Yin–Yang 格子は、球座標格子の低緯度部分を切り取った格子を二つ組み合

わせて球全体を覆う重合格子である。二つの格子を組み合わせることで、極 ( $\theta = 0, \pi$ ) における格子の集中を回避している。Yin 格子は、球座標系の以下の範囲の格子である：

$$r_i \leq r \leq r_o, \quad (2)$$

$$\frac{1}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, \quad (3)$$

$$-\frac{3\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{4}. \quad (4)$$

Yang 格子は Yin 格子と同形であるが、軸を回転させたものである。Yin 格子、Yang 格子の二つを組み合わせて球を覆う。シミュレーションでは、Yin 格子、Yang 格子とともに球座標格子系で計算を行い、境界値を補間する際には、Yang 格子が Yin 格子の軸を回転させたものであることを考慮して補間を行うことにより、整合性を保つ(第 1.2.3 章, 第 1.2.4 章)。Yin–Yang 格子を用いた球殻シミュレーションは、地球科学と惑星科学 [?], 太陽物理と宇宙物理 [?], 天体物理 [?], 計算流体力学 [?], 画像処理 [?] など様々な研究に応用されている。

一方、Yin–Yang 格子を用いても、球の原点 ( $r = 0$ ) 付近での格子の集中は回避できない。そこで新たに考案されたのが Yin–Yang–Zhong 格子である。Fig. 2 に Yin–Yang–Zhong 格子の構造を示す。Zhong 格子は、Yin–Yang 格子で覆われた球中心の空洞部分に導入される直交座標格子である。Yin–Yang 格子の内縁半径を  $r_i$  とし、その内側に Zhong 格子を配置する。また、Zhong 格子の  $\{x, y, z\}$  方向の格子間隔  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  はすべて等しく、その値は Yin 格子、Yang 格子の半径方向の格子間隔  $\Delta r$  に等しくなるよう設定されている。つまり、

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta r. \quad (5)$$

である。Yin–Yang–Zhong 格子を用いることで、ほぼ均一な格子間隔で全球シミュレーションを行うことが可能となる。

本研究ではこの Yin–Yang–Zhong 格子を用いてシミュレーションを行った。

### 1.2.3 Yin–Yang–Zhong 格子の座標変換

まず、Yin 格子と Yang 格子の間の関係を示す。Yin 格子と Yang 格子の座標系は、回転軸を回転させた関係にある。Yin 格子における直交座標系  $\{x^n, y^n, z^n\}$ (すなわち一般的な直交座標系) を用いて Yang 格子における直交座標系  $\{x^e, y^e, z^e\}$  を記述すると、

$$(x^e, y^e, z^e) = (-x^n, z^n, y^n), \quad (6)$$

となる。ここで、添字の  $n, e$  はそれぞれ Yin 格子と Yang 格子に対応する。これを行列で書くと、

$$\begin{pmatrix} x^e \\ y^e \\ z^e \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \\ z^n \end{pmatrix}, \quad (7)$$

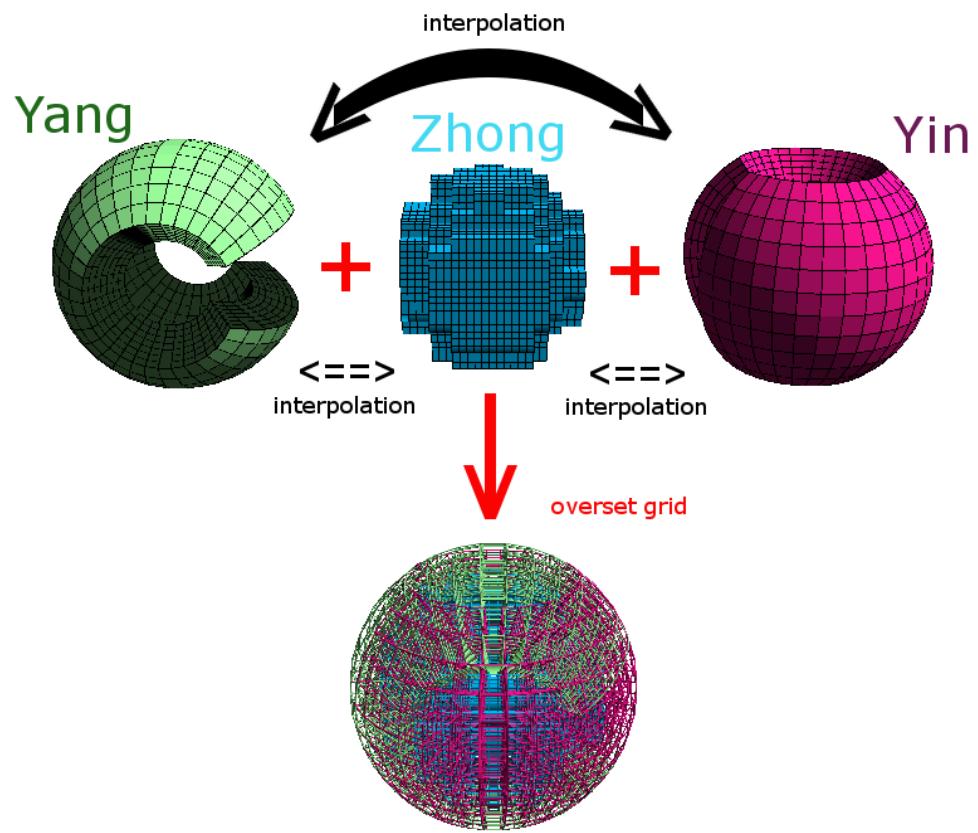


Fig. 2: Overview of Yin–Yang–Zhong grid system.

ここで、

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

である。この変換行列  $M$  は、 $M^{-1} = M$  の関係を満たす。したがって、Yang 格子における直交座標系を用いて Yin 格子における直交座標系を記述すると、

$$(x^n, y^n, z^n) = (-x^e, z^e, y^e), \quad (9)$$

となる。また、式 (6)-(9) より、球座標系での座標の関係は、

$$r^e = r^n, \quad (10)$$

$$\sin \theta^e \cos \phi^e = -\sin \theta^n \cos \phi^n, \quad (11)$$

$$\sin \theta^e \sin \phi^e = \cos \theta^n, \quad (12)$$

$$\cos \theta^e = \sin \theta^n \sin \phi^n, \quad (13)$$

で与えられることがわかる。

次に Zhong 格子について示す。Zhong 格子は一般的な直交座標系なので、Yin 格子と Zhong 格子の間の座標変換はよく知られた球座標と直交座標の座標変換の式、

$$x = r^n \sin \theta^n \cos \phi^n, \quad (14)$$

$$y = r^n \sin \theta^n \sin \phi^n, \quad (15)$$

$$z = r^n \cos \theta^n, \quad (16)$$

で与えられる。また、Yang 格子と Zhong 格子の間の座標変換は、式 (9) より、

$$x = -r^e \sin \theta^e \cos \phi^e, \quad (17)$$

$$y = r^e \cos \theta^e, \quad (18)$$

$$z = r^e \sin \theta^e \sin \phi^e, \quad (19)$$

で与えられる。

#### 1.2.4 Yin–Yang–Zhong 格子のベクトル変換と補間

まず、Yin 格子と Yang 格子の間の関係を示す。Shellにおいて、球殻が 2 つの領域に分割されているため、Yin 格子と Yang 格子の境界部分で値の相互補間を行う必要がある。Yin 格子と Yang 格子の間においても、スカラー値の変換は簡単に行うことができる。一方、Yang 格子は Yin 格子を回転させたものであり、Yin 格子と Yang 格子では  $\theta, \phi$  成分のベクトルの向きが異なるため、ベクトル値の変換はやや複雑である。

Fig. 3 に Yin 格子と Yang 格子のベクトルの向きの関係を示す。図の緑色の格子が Yin 格子、青色の格子が Yang 格子である。図中の  $\hat{\theta}^n$  と、 $\hat{\phi}^n$  はそれぞれ Yin 格子の緯度方向、

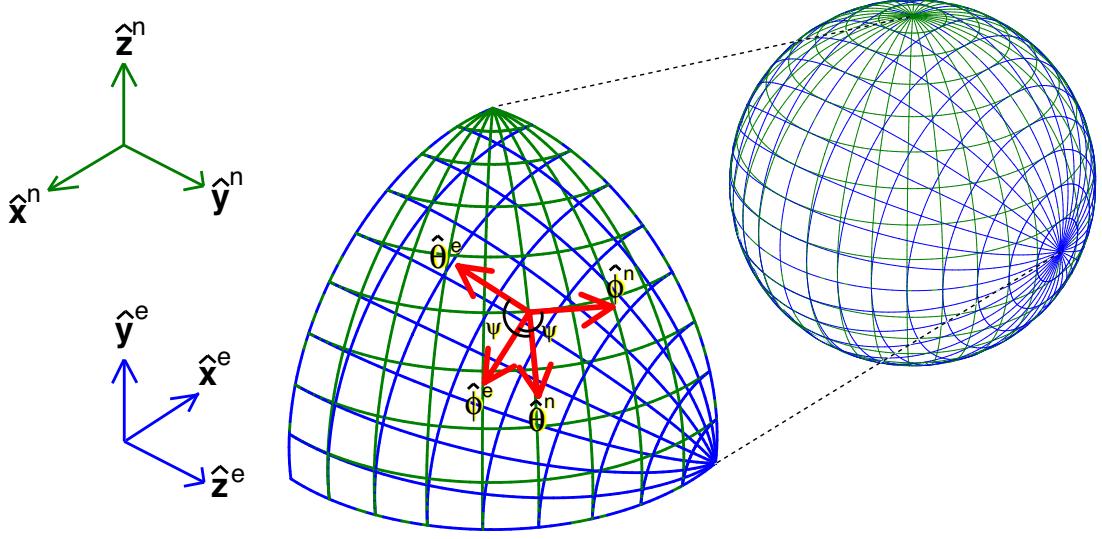


Fig. 3: Vector components for Yin and Yang.

経度方向の単位ベクトルであり、 $\hat{\theta}^e$  と、 $\hat{\phi}^e$  はそれぞれ Yang 格子の余緯度方向、経度方向の単位ベクトルである。Yin 格子上でのベクトル場を  $(v_r^n, v_\theta^n, v_\phi^n)^T$ 、Yang 格子上でのベクトル場を  $(v_r^e, v_\theta^e, v_\phi^e)^T$  とする。ここで、 $T$  は転置を意味する。Yin–Yang 格子間の回転角を  $\psi$  とすると、Yin 格子上のベクトル場から Yang 格子上のベクトル場へのベクトル変換は、

$$\begin{pmatrix} v_r^e \\ v_\theta^e \\ v_\phi^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_r^n \\ v_\theta^n \\ v_\phi^n \end{pmatrix}, \quad (20)$$

と表される。Fig. 3 から、 $\cos \psi$  と  $\sin \psi$  は、

$$\cos \psi = \hat{\phi}^n \cdot \hat{\phi}^e, \quad (21)$$

$$\sin \psi = -\hat{\phi}^n \cdot \hat{\theta}^e, \quad (22)$$

と表される。また、 $\hat{\phi}^n, \hat{\phi}^e, \hat{\theta}^e$  は、

$$\begin{aligned} \hat{\phi}^n &= -\sin \phi^n \hat{x}^n + \cos \phi^n \hat{y}^n, \\ &= \sin \phi^n \hat{x}^e + \cos \phi^n \hat{z}^e, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\hat{\phi}^e = -\sin \phi^e \hat{x}^e + \cos \phi^e \hat{y}^e, \quad (24)$$

$$\hat{\theta}^e = \cos \theta^e \cos \phi^e \hat{x}^e + \cos \theta^e \sin \phi^e \hat{y}^e - \sin \theta^e \hat{z}^e, \quad (25)$$

と表すことができる。ここで、Yin 格子、Yang 格子での直交座標系の各単位ベクトルをそれぞれ  $(\hat{x}^n, \hat{y}^n, \hat{z}^n), (\hat{x}^e, \hat{y}^e, \hat{z}^e)$  とした。よって、 $\cos \psi$  と  $\sin \psi$  は、式 (21)-(25) より、

$$\cos \psi = -\sin \phi^n \sin \phi^e, \quad (26)$$

$$\sin \psi = \frac{\cos \phi^n}{\sin \theta^e}, \quad (27)$$

と書ける。式(26),(27)を用いると、Yin-Yang格子におけるベクトル変換式は、変換行列を  $P$  とし、

$$\begin{pmatrix} v_r^e \\ v_\theta^e \\ v_\phi^e \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} v_r^n \\ v_\theta^n \\ v_\phi^n \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \phi^n \sin \phi^e & -\cos \phi^n / \sin \theta^e \\ 0 & \cos \phi^n / \sin \theta^e & -\sin \phi^n \sin \phi^e \end{pmatrix}, \quad (29)$$

と書くことができる。これは、Yin格子からYang格子への変換行列である。また、Yang格子からYin格子への変換行列は  $P$  の逆行列  $P^{-1}$  で表すことができ、 $P^{-1}$  は  $P$  の添字を入れ替えることで表現できる：

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \phi^e \sin \phi^n & -\cos \phi^e / \sin \theta^n \\ 0 & \cos \phi^e / \sin \theta^n & -\sin \phi^e \sin \phi^n \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Yin格子とYang格子でベクトル変換を行う際は、式(28)-(30)の関係を用いれば良い。

Zhong格子上でのベクトル場からYin格子上でのベクトル場へのベクトル変換は、一般的な球座標と直交座標とのベクトル変換である。つまり、Zhong格子上でのベクトル場を  $v_x, v_y, v_z$  とすると、

$$\begin{pmatrix} v_r^n \\ v_\theta^n \\ v_\phi^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta^n \cos \phi^n & \sin \theta^n \sin \phi^n & \cos \theta^n \\ \cos \theta^n \cos \phi^n & \cos \theta^n \sin \phi^n & -\sin \theta^n \\ -\sin \phi^n & \cos \phi^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad (31)$$

と表すことができる。また、Zhong格子上でのベクトル場からYang格子上でのベクトル場へのベクトル変換は、式(28)-(29)と式(31)より、

$$\begin{pmatrix} v_r^e \\ v_\theta^e \\ v_\phi^e \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \sin \theta^n \cos \phi^n & \sin \theta^n \sin \phi^n & \cos \theta^n \\ \cos \theta^n \cos \phi^n & \cos \theta^n \sin \phi^n & -\sin \theta^n \\ -\sin \phi^n & \cos \phi^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin \theta^e \cos \phi^e & \cos \theta^e & \sin \theta^e \sin \phi^e \\ -\cos \theta^e \cos \phi^e & -\sin \theta^e & \cos \theta^e \sin \phi^e \\ \sin \phi^e & 0 & \cos \phi^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad (33)$$

と表すことができる。Yin座標系、Yang座標系からZhong座標系へのベクトル変換行列は、Zhong座標系からYin座標系、Yang座標系へのそれぞれの変換行列の転置行列で書ける。

Yin格子、Yang格子とZhong格子の間の補間にはトリリニア補間を用いる。Ying格子、Yang格子の境界値をZhong格子から補間する場合は、半径  $r = r_i$  でのYin格子、Yang格子の座標値をZhong格子の座標系に変換、補間点を囲む8個の格子点を探索し、8点

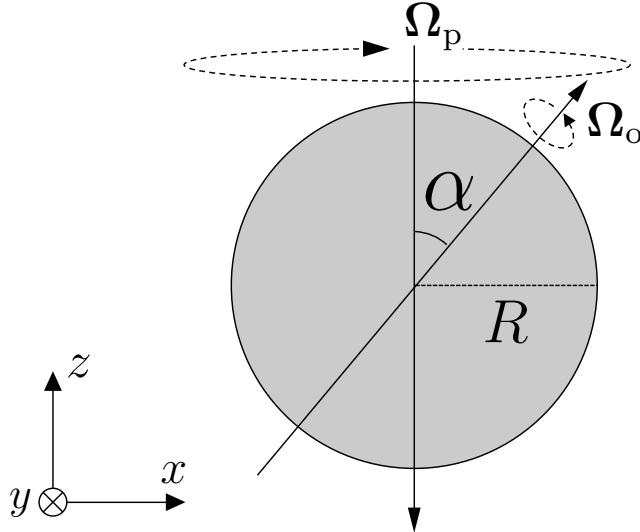


Fig. 4: Sketch of the problem. The angular velocities of the rotation and the precession are denoted by  $\Omega_o$  and  $\Omega_p$ , respectively. The precession axis  $\Omega_p$  is inclined at angle  $\alpha$  to the rotation axis  $\Omega_o$ .

から線形補間を行う。反対に、Zhong 格子の値を Yin 格子、Yang 格子から補間する場合には、Yin 格子、Yang 格子での、

$$r_i \leq r \leq r_i + 2\Delta r, \quad (34)$$

の範囲内で Zhong 格子領域に含まれる格子点を探索する。そして、その座標値を Zhong 格子から Yin 格子、Yang 格子に変換し、線形補間に利用する 8 つの格子点を探索し、補間する。

## 2 基礎方程式・計算モデル

本研究の計算モデルを Fig. 4 に示す。歳差軸に沿った角速度ベクトルを  $\Omega_p = \Omega_p \hat{e}_p$ 、自転軸に沿った角速度ベクトルを  $\Omega_o = \Omega_o \hat{e}_o$  と置く。ここで、 $\hat{e}_p$  は歳差軸方向の単位ベクトル、 $\Omega_p$  は歳差軸に沿った角速度の大きさ、 $\hat{e}_o$  は自転軸方向の単位ベクトル、 $\Omega_o$  は自転軸に沿った角速度の大きさである。本研究では  $\hat{e}_p$  を直交座標系の  $z$  軸に固定し、 $\hat{e}_o$  を  $xz$  平面で  $x$  軸方向に  $\alpha$  度傾けた方向に置く。本研究は地球をモデルとしているため、歳差軸・自転軸それぞれに沿った回転の方向は地球と同じ向きとする。すなわち、 $\hat{e}_p$  の符号は負、 $\hat{e}_o$  の符号は正となる。また、2 つの角速度ベクトルは時間に依らず一定である。2 つの回転運動は以下を組み合わせて実装する：

- (1) 回転系の MHD 方程式を解く ( $\Omega_p$ )
- (2) 速度場の境界条件に回転の効果を加える ( $\Omega_o$ )

すなわち、本研究では回転系でのシミュレーションを行った。計算領域は全球 ( $0 \leq r \leq r_{top}$ ) とし、球の半径は  $R = 1$  に規格化する。

## 2.1 MHD 方程式

本研究で用いる回転系の圧縮性 MHD 方程式を以下に示す：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{f}, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} &= -\nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{f}) - \nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \nu \left[ \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \\ &\quad + 2\rho \mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}_p - \rho \boldsymbol{\Omega}_p \times (\boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= -\mathbf{v} \cdot \nabla p - \gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} + (\gamma - 1) K \nabla^2 T \\ &\quad + (\gamma - 1) \eta \mathbf{J}^2 + (\gamma - 1) \Phi, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \eta \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (38)$$

ここで、

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{v}, \quad (39)$$

$$p = C_v (\gamma - 1) \rho T, \quad (40)$$

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}, \quad (41)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (42)$$

$$\boldsymbol{\Phi} = 2\nu \left[ \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \right], \quad (43)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right], \quad (44)$$

である。

$\rho$  は質量密度、 $\mathbf{f}$  は質量流速、 $p$  は圧力、 $\mathbf{A}$  は磁場のベクトルポテンシャルである。式(35)は質量保存則、式(36)は運動方程式、式(37)はエネルギーの式、式(38)はベクトルポテンシャルで書いた磁場の誘導方程式を表している。状態方程式は式(40)であり、 $C_v$  は定積比熱、 $\gamma$  は比熱比、 $T$  は温度を表す。また、 $\mathbf{v}$  は速度場、 $\mathbf{J}$  は電流密度、 $\mathbf{B}$  は磁場、 $\boldsymbol{\Omega}_p$  は回転系での角速度ベクトル、 $\nu$  は粘性率、 $K$  は熱伝導率、 $\eta$  は磁気拡散率、 $\Phi$  は散逸関数を表す。本研究では理想気体を仮定し、 $\gamma = \frac{5}{3}$  を用いる。

## 2.2 境界条件

速度場に対しては角速度ベクトル  $\boldsymbol{\Omega}_o$  の回転運動を課すために、

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega}_o \times \mathbf{r}, \quad (r = r_{\text{top}}) \quad (45)$$

という境界条件を用いる。すなわち、質量流速  $\mathbf{f}$  で書き表すと、

$$\mathbf{f} = \rho (\boldsymbol{\Omega}_o \times \mathbf{r}), \quad (r = r_{\text{top}}) \quad (46)$$

となる。

磁場に対しては、球面での動径方向成分  $B_r$  のみが存在する境界条件を課す。すなわち、

$$B_t = B_p = 0, \quad (r = r_{\text{top}}) \quad (47)$$

であり、磁場のベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  を用いると、

$$A_r = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) = 0, \quad (r = r_{\text{top}}) \quad (48)$$

となる。

球面での密度に対しては片側差分を用いて計算する。温度に対しては外部との熱のやりとりがないという断熱境界条件：

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad (r = r_{\text{top}}) \quad (49)$$

を採用した。球面での圧力は密度と温度から状態方程式 (40) を用いて決定する。

## 2.3 初期状態

速度場の初期条件として、境界条件と同じ角速度ベクトルの剛体回転を球全体に課す。すなわち、速度  $\mathbf{v}$  に対して、

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega}_o \times \mathbf{r}, \quad (0 \leq r \leq r_{\text{top}}) \quad (50)$$

を与える。質量流速  $\mathbf{f}$  で書き表すと、

$$\mathbf{f} = \rho (\boldsymbol{\Omega}_o \times \mathbf{r}), \quad (0 \leq r \leq r_{\text{top}}) \quad (51)$$

となる。Fig. 5 に歳差角 60 度のモデルにおける速度場の 3 次元分布を示す。

また、 $r, \theta, \phi$  方向にそれぞれ  $\mathcal{O}(10^{-7})$  程度のランダムな初期磁場を課す。

本研究では圧縮性 MHD 方程式を解くものの、圧縮性の効果は小さくために、 $U$  を代表的な流速、 $C$  を音速とすると、

$$\mathcal{M} = \frac{U}{C}, \quad (52)$$

で定義されるマッハ数  $\mathcal{M}$  が最大  $\mathcal{O}(10^{-1})$  程度の流れを考える。つまり、音速、

$$C = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}, \quad (53)$$

を  $\mathcal{O}(10)$  程度にする。具体的には、圧力  $p$  と質量密度  $\rho$  にそれぞれ、

$$p = 100.0, \quad (54)$$

$$\rho = 1.0, \quad (55)$$

を初期条件として与えた。

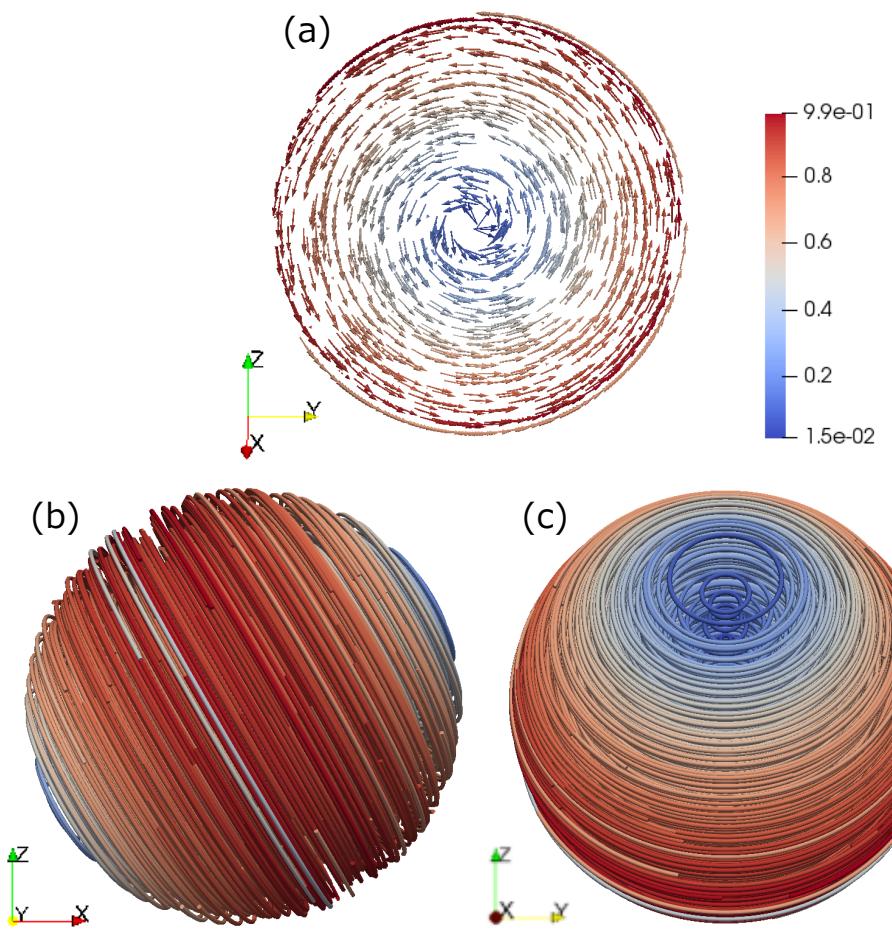


Fig. 5: Initial flow for model P020\_A600. (a)vector glyphs, (b) and (c) streamlines. (b) from  $-y$ -axis, (c) from  $x$ -axis.

## 2.4 パラメータ設定

本研究で用いた Yin–Yang–Zhong ダイナモシミュレーションコードでは、空間離散化に 2 次精度中心差分法、時間積分には 4 次精度ルンゲ=クッタ法を用いる。Yin 格子、Yang 格子とともに余緯度と経度の範囲はそれぞれ  $\frac{1}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi$ 、 $-\frac{3}{4}\pi \leq \phi \leq \frac{3}{4}\pi$  である。

本研究の計算モデルを特徴付ける無次元パラメータは、プラントル数  $Pr$ 、磁気プラントル数  $Pm$ 、エクマン数  $E$ 、ポアンカレ数  $Po$  であり、それぞれ以下の式で表される：

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad (56)$$

$$Pm = \frac{\nu}{\eta}, \quad (57)$$

$$E = \frac{\nu}{\Omega_o R^2}, \quad (58)$$

$$Po = \frac{\Omega_p}{\Omega_o}. \quad (59)$$

プラントル数  $Pr$  は、粘性と熱拡散の比を表す。磁気プラントル数  $Pm$  は、粘性と磁気拡散の比を表す。エクマン数  $E$  は、粘性とコリオリ力の比を表す。ポアンカレ数  $Po$  は歳差運動で課される 2 つの角速度の比を表し、歳差運動を特徴づけるパラメータである。ポアンカレ数は無次元パラメータでありながら符号が意味を持ち、ポアンカレ数が正の値のとき、2 つの回転軸それぞれの角速度ベクトルは同じ符号となる。すなわち、回転が同じ向きであることを表現している。反対に、ポアンカレ数が負の値のときは回転が異なった向きであることを表現している。ポアンカレ数の値が 0 に近いときは角速度ベクトル  $\Omega_o$  のみが存在する状態、すなわち単に自転している状態に近い結果となる。反対に、ポアンカレ数の値を 1 または -1 に近づけるときには、ポアンカレ数だけでなく歳差角  $\alpha$  も重要な値となる。歳差角が 90 度に近いときには、ポアンカレ数を 1 または -1 に近づけると 2 つの角速度ベクトル  $\Omega_o$ 、 $\Omega_p$  の回転運動の効果が強く現れるようになる。一方、歳差角が 0 度に近いときには、ポアンカレ数を 1 に近づけると  $(\Omega_o + \Omega_p) \hat{e}_o$  の角速度ベクトルで回転する状態に近くなり、ポアンカレ数を -1 に近づけると  $(\Omega_o - \Omega_p) \hat{e}_o$  の角速度ベクトルで回転する状態に近くなる。すなわち、歳差運動においては歳差角  $\alpha$  も重要なパラメータである。

本研究では歳差運動が球体内部の磁気流体に及ぼす影響を調べるためにすべてのモデルで  $Pr = 1$ 、 $Pm = 6$ 、 $E = 7 \times 10^{-4}$  と固定した上でポアンカレ数  $Po$  と歳差角  $\alpha$  を変化させた計 6 モデルでシミュレーションを行い、流れ構造とダイナモ機構を解析した。各計算モデルのモデル名、ポアンカレ数、歳差角を Table 1 に示す。モデル名の頭文字 P はポアンカレ数を意味し、P の後の数字がポアンカレ数の絶対値の小数点第二位までを表す。また、アンダースコアの後の A は angle、すなわち歳差角を意味し、A に続く数は歳差角の小数点第一位までを表す。例えば、 $Po = -0.2$ 、 $\alpha = 23.4$  のモデルのモデル名は P020\_A234 となる。本研究ではポアンカレ数はすべて負の数とし、全モデルで  $\Omega_o = 1.0$  とした。

計算の空間解像度は、Yin 格子、Yang 格子それぞれで  $nr \times n\theta \times n\phi = 201 \times 204 \times 608$  であり、Zhong 格子では  $nx \times ny \times nz = 222 \times 222 \times 222$  である。計算機は地球シミュレータ (NEC SX-ACE, JAMSTEC) を使用した。

Table 1: Parameters of all simulation in this study.  $Po$ ,  $\alpha$  are the Poincaré number and the angle between the rotation axis and the precession axis, respectively.

	$Po$	$\alpha$
P005_A600	-0.05	60.0
P020_A600	-0.2	60.0
P030_A600	-0.3	60.0
P050_A600	-0.5	60.0
P020_A234	-0.2	23.4
P020_A900	-0.2	90.0

### 3 シミュレーション結果

本章で示す可視化結果は、すべて回転系における可視化結果である。また、各図に描かれた2本の線分はそれぞれ歳差軸 ( $\hat{e}_p$ ) と自転軸 ( $\hat{e}_o$ ) であり、各軸を  $\pm 1.2$  倍して表示している。

#### 3.1 流れ構造

本節では、各モデルの流れ構造について解析する。本節で取り上げる結果は、Table 1 に示した各モデルにおいて初期磁場を入れない、すなわち磁場が存在しないモデルでのシミュレーション結果である。これは、まず磁場の影響が無い状態での流れ構造を解析するためである。磁場無しのシミュレーションにおける各モデルの全運動エネルギーの時間変化を Fig. 6 に示す。ここで、運動エネルギーは以下の式で表される：

$$E_{\text{kin}} = \int \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 dV. \quad (60)$$

図の横軸は粘性拡散時間  $\tau_\nu$  で規格化されており、 $\tau_\nu$  は、

$$\tau_\nu = \frac{a^2}{\nu}, \quad (61)$$

で表される。 $a$  は粘性拡散領域の典型的な長さであり、本研究では全球の半径  $R$  とする。本研究では、すべてのモデルで磁気拡散時間は  $\tau_\nu = 1429$  である。 $0.11894\tau_\nu$  における各モデルの運動エネルギーの値を Table 2 に示す。

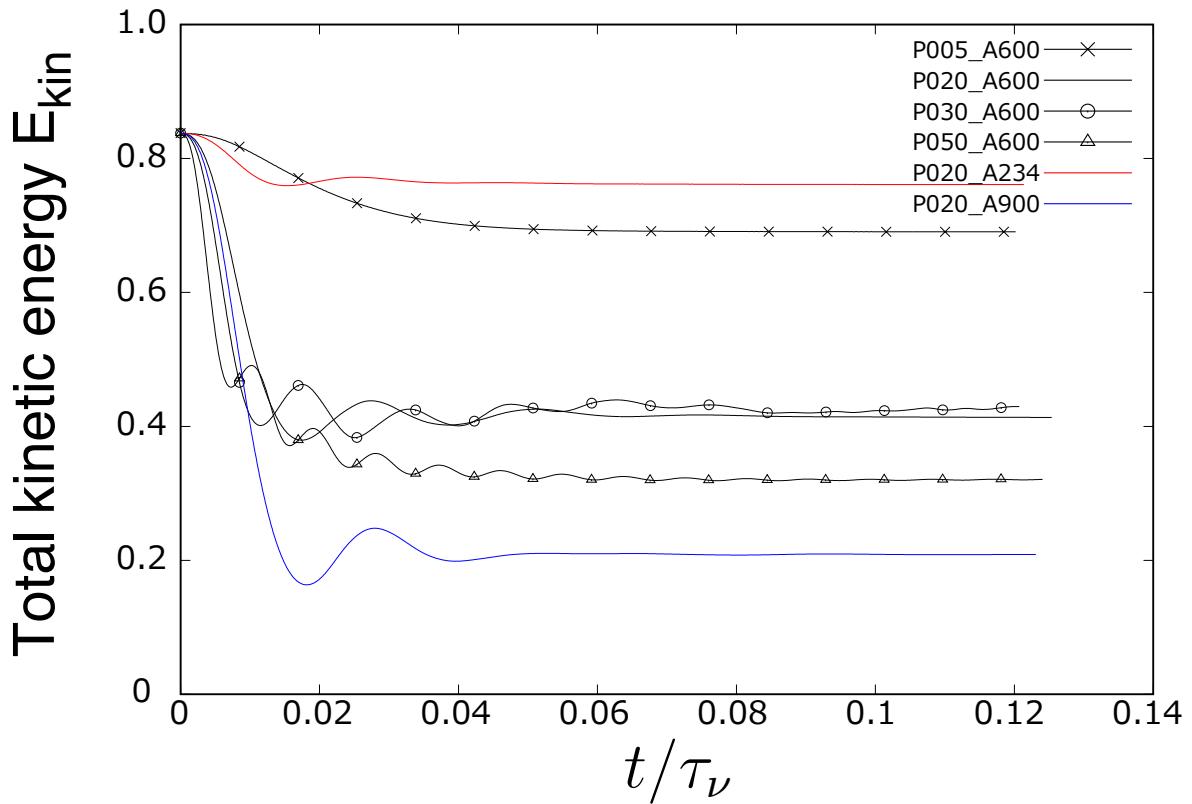


Fig. 6: Time development of total kinetic energy with each model without initial magnetic field.  $\tau_\nu$  is the viscous diffusion time.

Table 2: Total kinetic energy of each model at  $0.11894\tau_\nu$ .

	$E_{\text{kin}}$
P005_A600	0.69047
P020_A600	0.41353
P030_A600	0.42893
P050_A600	0.32074
P020_A234	0.76105
P020_A900	0.20875

運動エネルギーが緩和した状態では流れ構造は時間変化せず、流れは定常状態となっている。本研究では初期条件として自転軸に沿った剛体回転を課しているため、 $t = 0.0$ における運動エネルギーの値はその剛体回転の運動エネルギーである。すべてのモデルで、運動エネルギーの値は初期値よりも減少した。A600 のモデルでは P030 の場合を除いて、P005、P020、P050 とポアンカレ数の値を 0 から  $-1$  に近づけるにつれて運動エネルギーの値が減少している。P020 で固定し歳差角を変化させた各モデルでは、歳差角を 0 度から 90 度に近づけるにつれて運動エネルギーの値が減少している。各モデルにおける運動エネルギーの値の違いは、歳差運動の影響の強弱によって引き起こされていると考えられる。A600 のモデルでは、ポアンカレ数を  $-1$  に近づけると  $\Omega_p$  の影響が増すため、P050\_A600 モデルが歳差運動の影響を最も受けて流れが変形され、運動エネルギーの値が小さくなつたと解釈できる。P020 のモデルでは、歳差角 23.4 度のモデルよりも歳差角 90 度のモデルの方が歳差運動の効果が強く現れるため、P020\_A900 モデルは運動エネルギーの値が小さくなつたと解釈できる。

歳差運動によって流れが特に強く影響を受けるのは球の内部である。 $0.11894\tau_\nu$  における  $|\mathbf{v}|$  の  $zy$ ,  $zx$ ,  $xy$  平面での断面図を Fig. 7 と Fig. 8 に示す。図において各行がモデルを、各列が左から  $yz$  断面、 $zx$  断面、 $xy$  断面を表している。すべてのモデルで球内部に遅い流れがあり、球内部から表面に向かうにつれて流速は上昇し、球表面が最も速い流れとなっている。これは、本研究の境界条件の設定より当然の結果である（第 2.2 章参照）。Fig. 7 と Fig. 8 の  $xy$  断面図を比較すると、速い流れはポアンカレ数が 0 に近い値のとき、または歳差角が 0 度に近いほど球内部にまで現れている。反対に、ポアンカレ数が  $-1$  に近いとき、または歳差角が 90 度に近いときほど内部の遅い流れは球の表面近くにまで現れている。特に、歳差角を 90 度にしたときに遅い流れは最も球の表面にまで現れている。

ここで、P020\_A600 と P020\_A900 の球内部の遅い流れの様子を見るために、 $|\mathbf{v}| \leq 0.2$  の流線を表示した結果を Fig. 9 に示す。P020\_A600 では遅い流れによって球の直径程の長さの渦構造が形成されている一方、P020\_A900 では渦構造は形成されていない。これは、P020\_A900 では歳差運動の効果が強く、渦構造を形成できないほどに流れが変形されたためと考えられる。これらの流れさらに詳しく解析するために、Fig. 10 に渦構造を始点とした一本の流線の様子を示す。P020\_A600 の内部では、遅い流れが渦を巻きながら球の表面に向かっている。P020\_A900 の内部では、遅い流れが不規則に球内部を流れている。P020\_A600 のような球内部の渦構造は P005\_A600、P030\_A600、P050\_A600、P020\_A234 でも形成されている。P020\_A600 と比較して、P005\_A600 はより自転軸に沿った渦構造

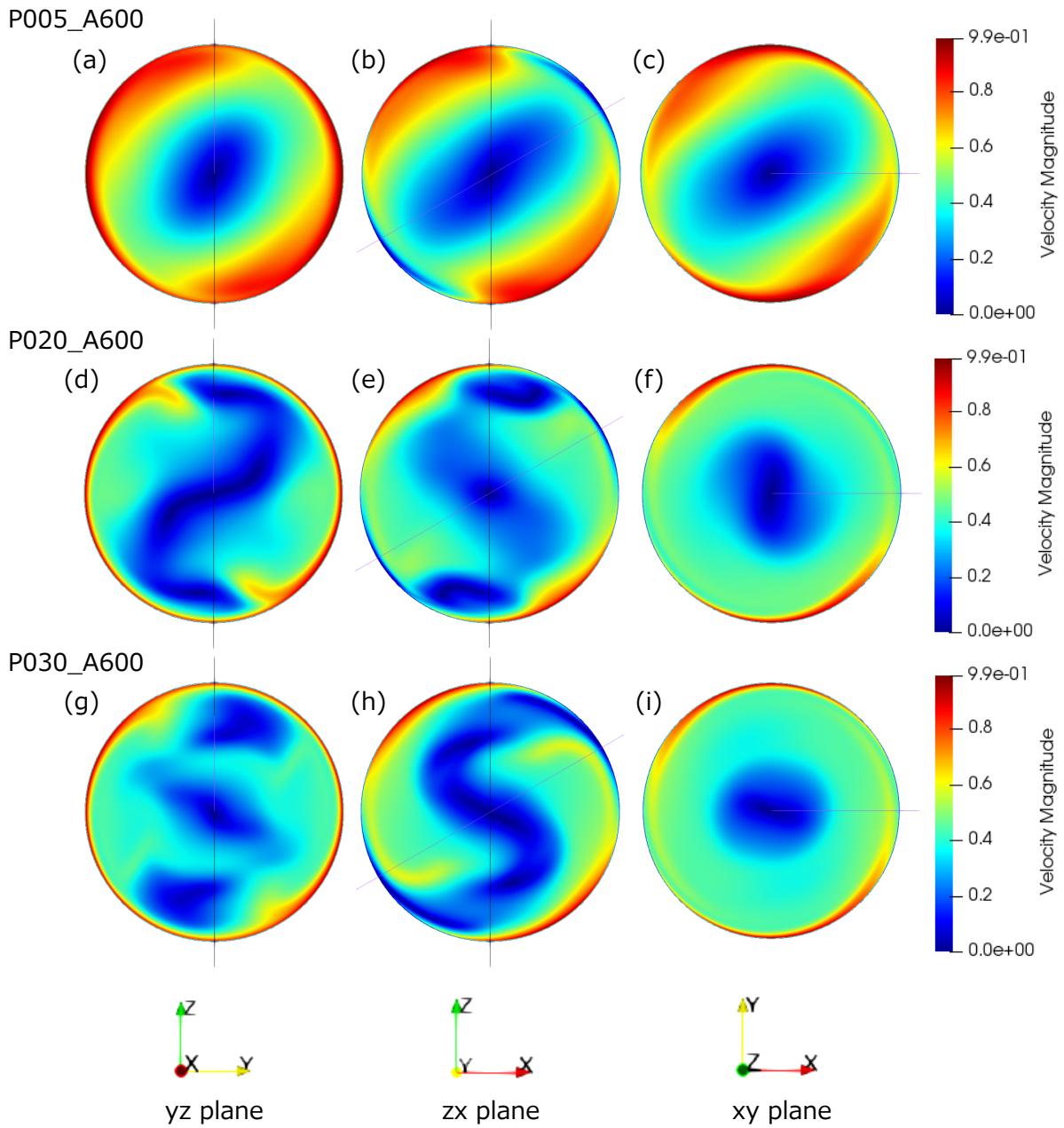


Fig. 7: Snapshots of velocity amplitude  $|\mathbf{v}|$ . (a)(d)(g) in  $y-z$  plane, (b)(e)(h) in  $z-x$  plane, (c)(f)(i) in  $x-y$  plane. (a)-(c) P005\_A600, (d)-(f) P020\_A600, (g)-(i) P030\_A600.

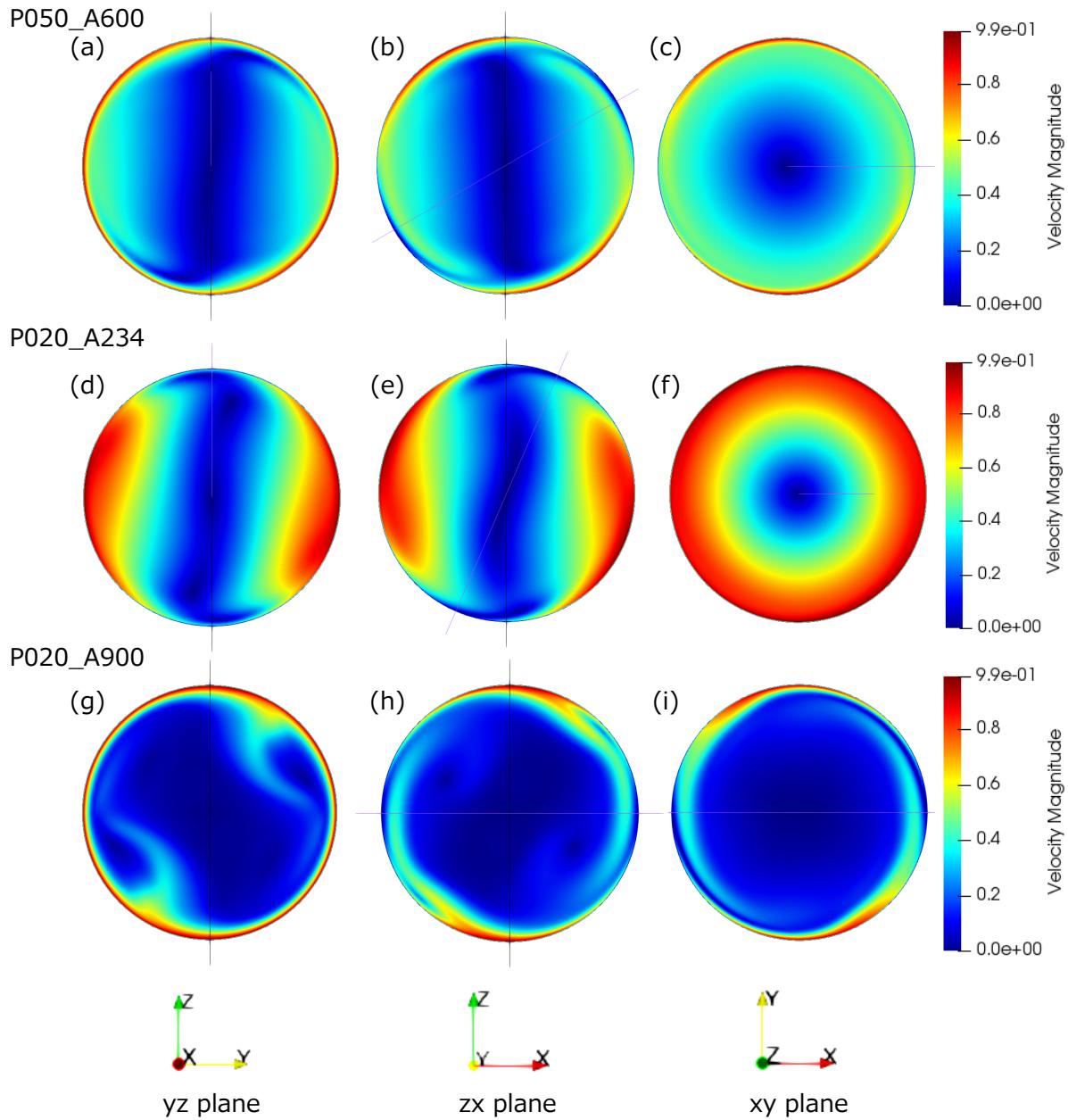


Fig. 8: Snapshots of velocity amplitude  $|\mathbf{v}|$ . (a)(d)(g) in  $y$ - $z$  plane, (b)(e)(h) in  $z$ - $x$  plane, (c)(f)(i) in  $x$ - $y$  plane. (a)-(c) P050\_A600, (d)-(f) P020\_A234, (g)-(i) P020\_A900.

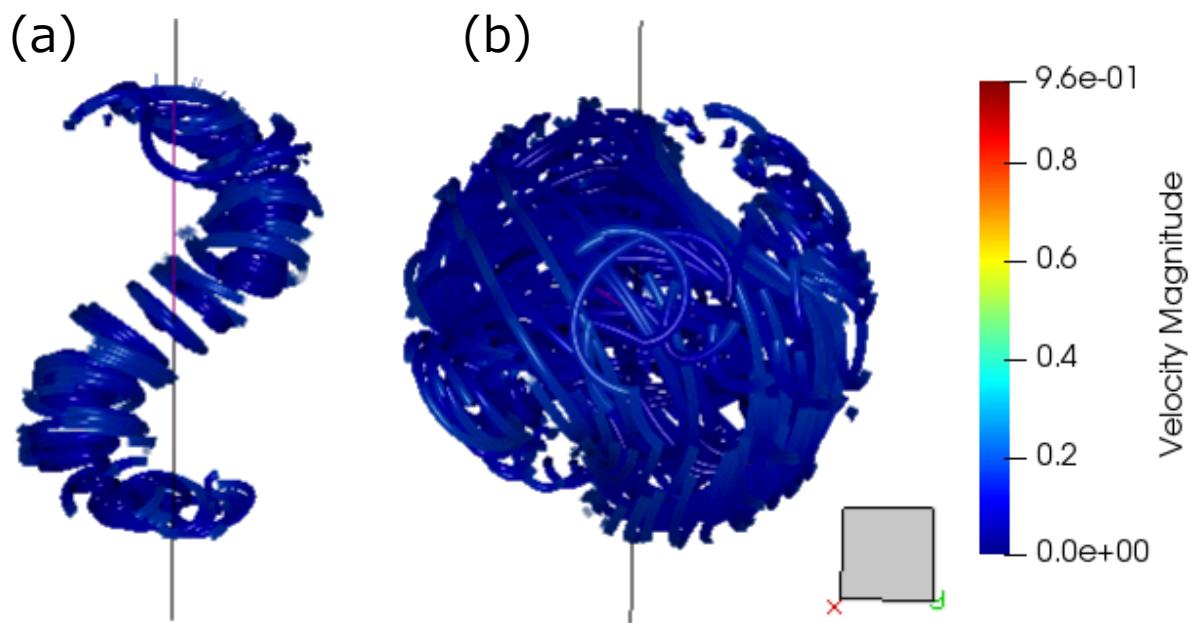


Fig. 9: Streamlines for  $|\mathbf{v}| \leq 0.2$  from  $x$ -axis. (a) P020\_A600, (b) P020\_A900.

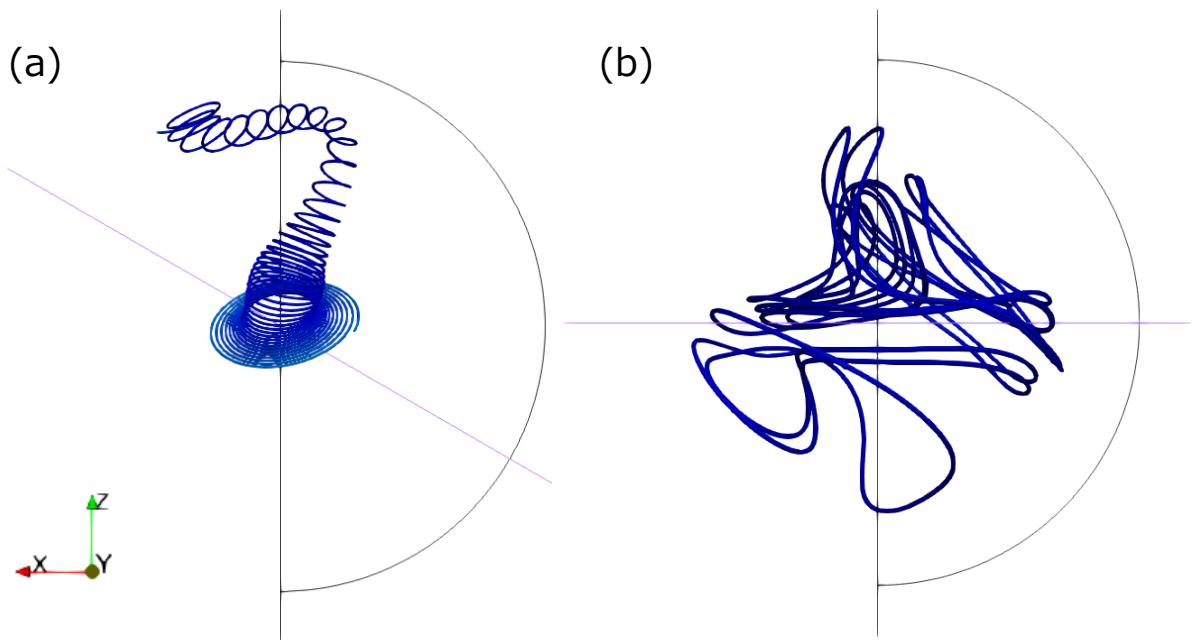


Fig. 10: Streamlines from  $y$ -axis. Seed point is near the slowly flow at near the center of sphere. (a) P020\_A600, (b) P020\_A900.

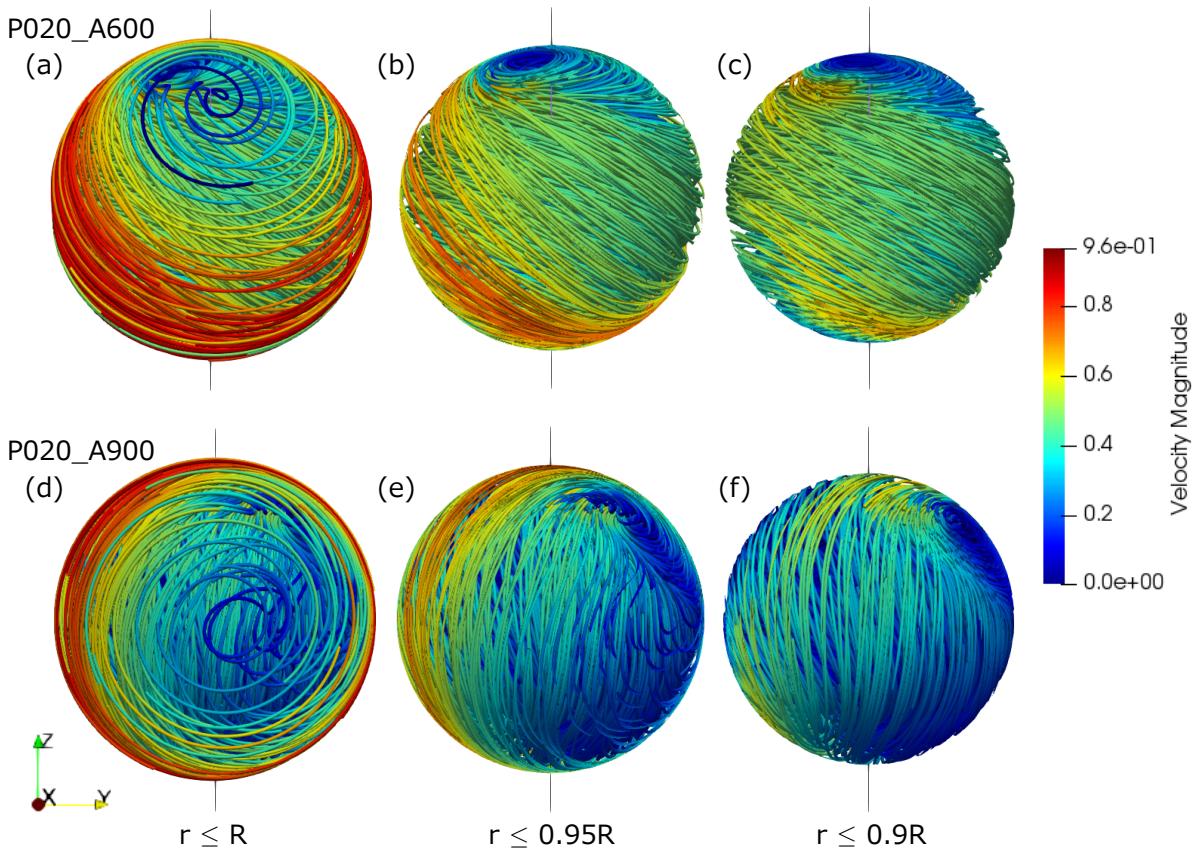


Fig. 11: Streamlines from  $x$ -axis for model (a)-(c) P020\_A600, (d)-(f) P020\_A900. (a)(d) Streamlines at  $r \leq R$ , (b)(e)  $r \leq 0.95R$ , (c)(f)  $r \leq 0.9R$ .

(Fig. 7 (b)) が、P050\_A600 はより歳差軸に沿った渦構造 (Fig. 8 (a) (b)) が形成されている。また、P020\_A234 は自転軸と歳差軸の双方に沿った渦構造 (Fig. 8 (d) (e)) が、P030\_A600 は P020\_A600 に近い渦構造 (Fig. 7 (d) - (i)) が形成されている。

次に、球表面の流れの様子を解析するために、Fig. 11 に P020\_A600 と P020\_A900 の流線を示す。1段目が P020\_A600、2段目が P020\_A900 であり、左列から順に  $r \leq R$ 、 $r \leq 0.95R$ 、 $r \leq 0.9R$  の領域の流線のみを表示している。P020\_A600、P020\_A900 とともに、 $r \leq R$  の場合に自転軸に垂直な流線が現れているが、これは境界条件として課した回転運動である。P020\_A600 では  $r \leq 0.95R$  の場合に、回転軸が歳差軸の方向に傾いた流れができつつあり、その傾向は  $r \leq 0.9R$  の場合により顕著に現れている。P020\_A900 では  $r \leq 0.95R$  の場合に、回転軸が  $y$  軸の方向に傾いた流れができつつあり、その傾向は  $r \leq 0.9R$  の場合により顕著に現れている。

### 3.2 磁場構造

本節では、第 3.1 章で取り上げた各モデルに初期磁場を課してシミュレーションした結果について述べる。第 2.3 章で述べた初期磁場を課したときの全運動エネルギーと全磁気エネルギーの時間変化を Fig. 12 に示す。ここで、全磁気エネルギーの値は以下の式で表

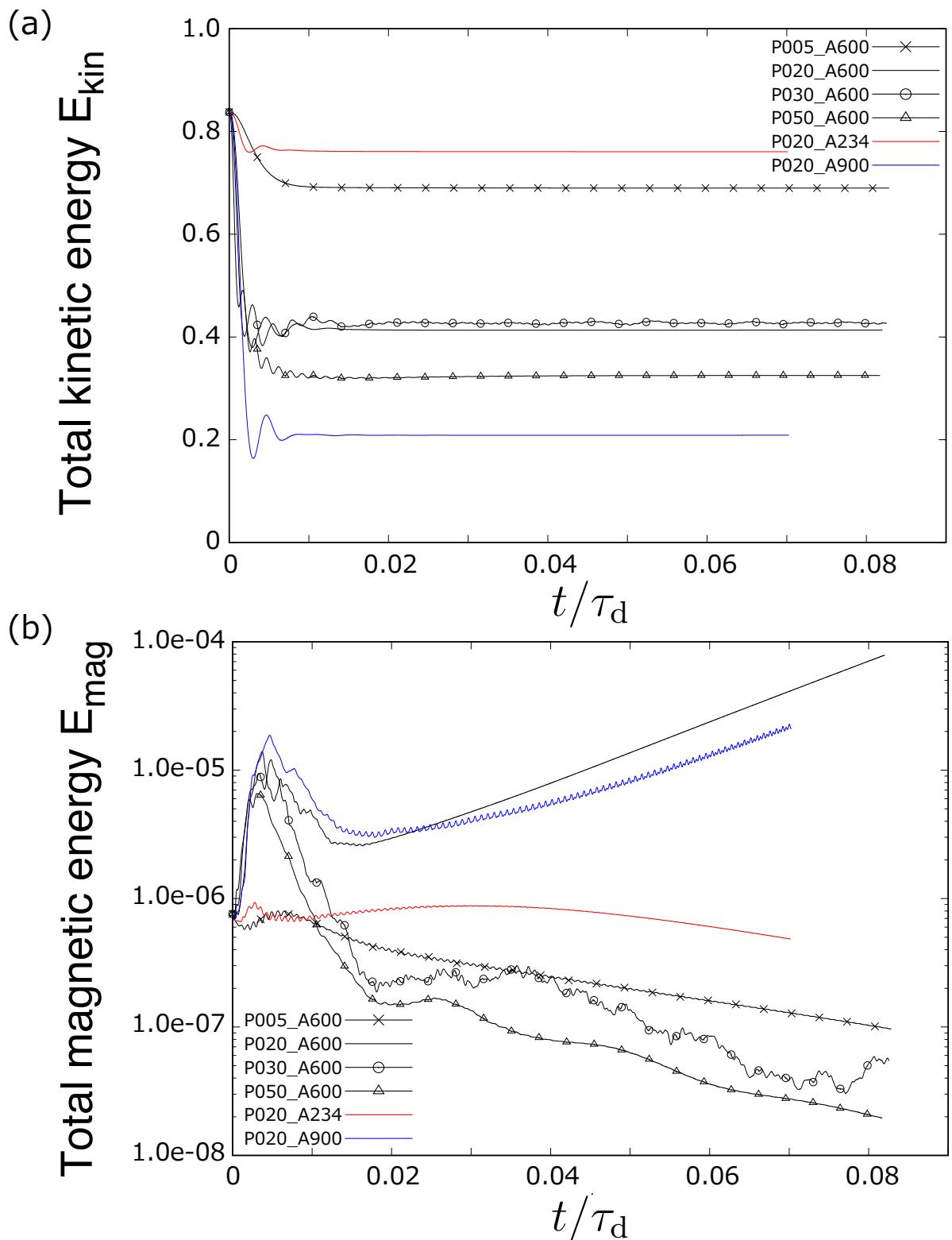


Fig. 12: Time development of (a) total kinetic energy (b) total magnetic energy.  $\tau_d$  is the magnetic diffusion time.

される：

$$E_{\text{mag}} = \int \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 dV. \quad (62)$$

図の横軸は磁気拡散時間  $\tau_d$  で規格化されており、 $\tau_d$  は、

$$\tau_d = \frac{a^2}{\eta}, \quad (63)$$

で表される。 $a$  は磁気拡散領域の典型的な長さであり、本研究では全球の半径  $R$  とする。本研究では、すべてのモデルで磁気拡散時間は  $\tau_d = 8571$  である。

第 2.3 章で述べた初期磁場を課したとき、全運動エネルギーと流れ構造は第 3.1 で示した結果と同じとなった。つまり、本シミュレーションでは初期磁場の有無は流れ構造に影響を与えていない。これは、今回課した初期磁場の値が第 2.3 で述べた通り  $O(10^{-7})$  程度と弱いためであると考えられる。ただし、今後シミュレーションを進め、磁場がさらに発展した場合にはローレンツ力（式 (36) 右辺第 3 項）による磁場から流れへのフィードバックが効き始め、流れ構造が変化する可能性がある。

Fig. 12 の磁気エネルギーの図より、P020\_A600 と P020\_A900 モデルでのみ磁場の発展が見られ、その他のモデルでは磁場が減衰した。また、P020\_A900 は P020\_A600 に比べて磁場の発展が緩やかであり、磁気エネルギーの振動も見られた。今回は計算時間の都合上、約  $0.08\tau_d$  までの計算結果を示しているが、今後計算を続ければ P020\_A600 と P020\_A900 モデルはさらに磁場が発展し、反対にその他のモデルは磁場が消失すると予想される。

磁場が発展した P020\_A600 と P020\_A900 の磁場構造について述べる。P020\_A600 では磁場が強い部分は 2箇所現れており、ともに球表面 ( $0.95R \leq r \leq 0.98R$ ) に位置する。また、この磁場が強い 2箇所は原点に対して点対称な位置に存在する。磁場の各成分 ( $B_r, B_t, B_p$ ) の、半径  $r = 0.97R$  での球面分布を Fig. 13 に示す。球面の可視化にはモルワイデ図法を用いている。磁場の経度成分  $B_p$  が最も大きい値を示しており、動径成分  $B_r$  が最も小さい値となっている。動径成分  $B_r$  は 2 点のみで強く現れており、P020\_A600 モデルはダイポール磁場を形成するということがわかる。また、 $x$  軸真上、 $z$  軸真上から見た磁力線の様子を Fig. 14 に示す。Fig. 14 の左図が  $x$  軸真上から見た図、右図が  $z$  軸真上から見た図である。磁場が強い箇所は歳差軸 ( $z$  軸) と自転軸 ( $zx$  平面において  $z$  軸から  $x$  軸方向に 60 度傾けた軸) の間で、僅かに  $-y$  方向にずれた位置に存在することがわかる。

P020\_A900 では P020\_A600 モデルと比較して、磁場が強い部分は動径方向、緯度・経度方向ともに広い範囲に分布している。 $0.07\tau_d$  における  $|\mathbf{B}|$  の  $yz, zx, xy$  平面での断面図を Fig. 15 に示す。Fig. 15 より、動径方向  $0.79R \leq r \leq 0.97R$  の範囲で磁場が強く現れていることがわかる。また、Fig. 15zx 断面より、球内部の  $r = 0.58R$  付近にも 2箇所、磁場が現れていることが確認でき、その  $|\mathbf{B}|$  の大きさは、表面付近の最も磁場が強い箇所と比較して約 0.4 倍程度の大きさである。これらの磁場が強い箇所は原点に対して点対称な位置に存在する。磁場が強く現れている半径  $r = 0.95R$  での磁場の各成分 ( $B_r, B_t, B_p$ ) の球面分布を Fig. 16 に示す。P020\_A600 と同様に、磁場の経度成分  $B_p$  が最も大きい値、動径成分  $B_r$  が最も小さい値となっている。動径成分  $B_r$  は球面に広く分布しており、P020\_A900 はダイポール磁場とはなっていないことがわかる。また、 $x$  軸真上、 $z$  軸真上から見た磁力線の様子を Fig. 17 に示す。

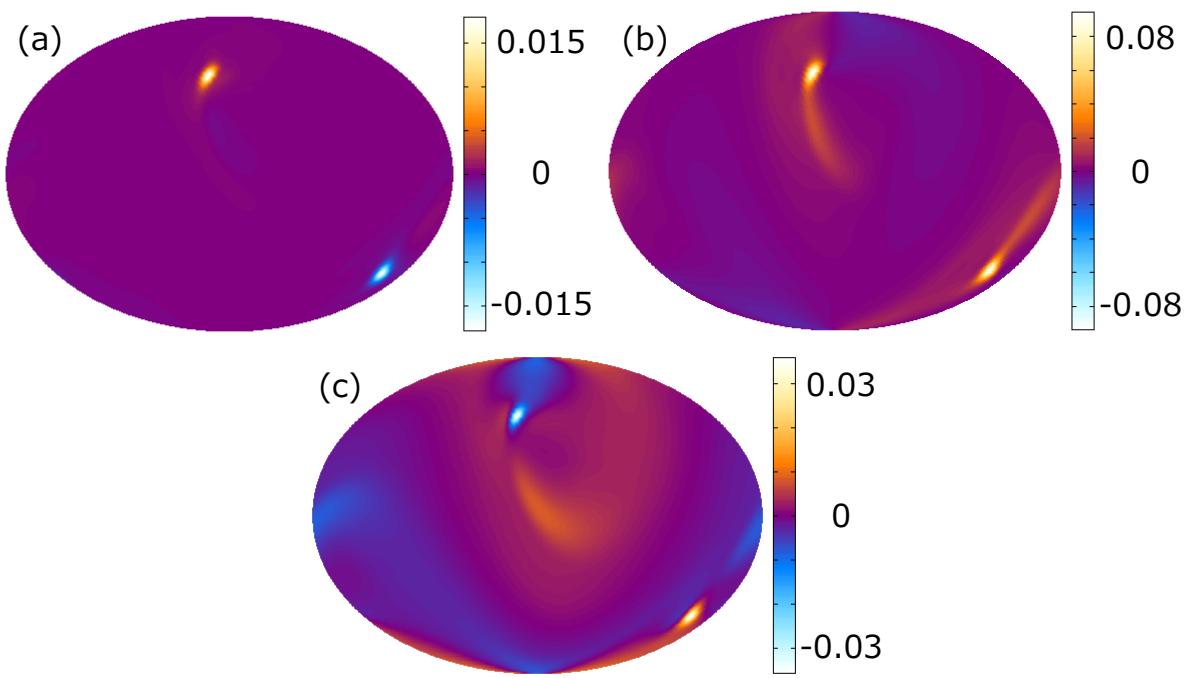


Fig. 13: Snapshots in longitude-latitude Mollweide Projection of (a) radial magnetic field  $B_r$ , (b) latitude magnetic field  $B_t$ , (c) longitude magnetic field  $B_p$  at  $r = 0.97R$  for model P020\_A600.

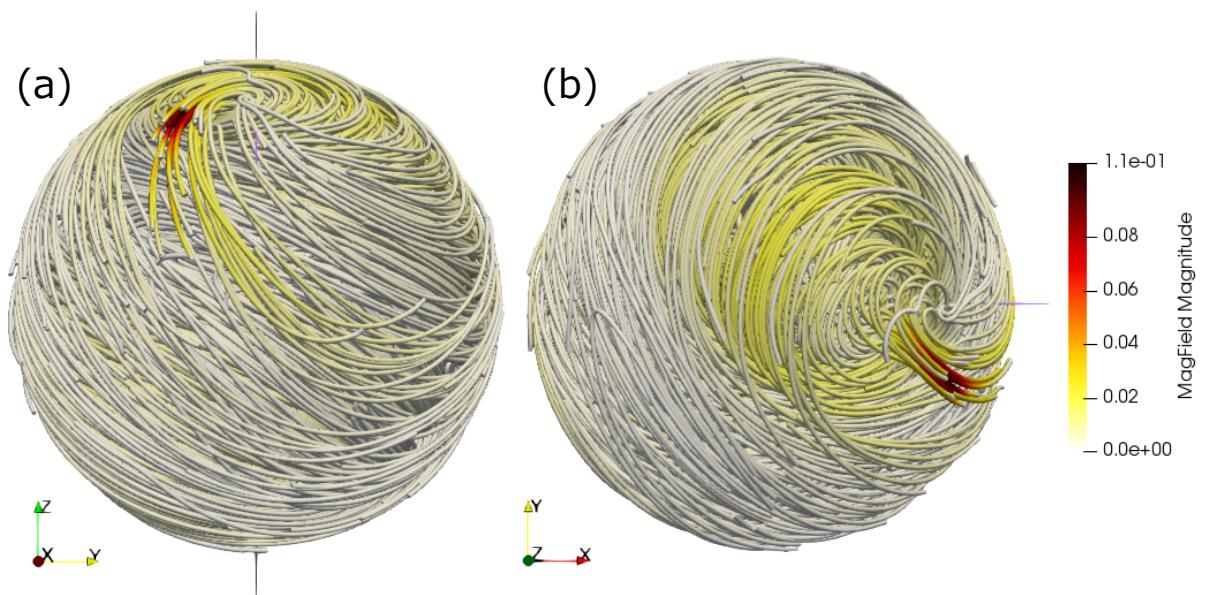


Fig. 14: Magnetic field lines for model P020\_A600 from (a)  $x$ -axis, (b)  $z$ -axis.

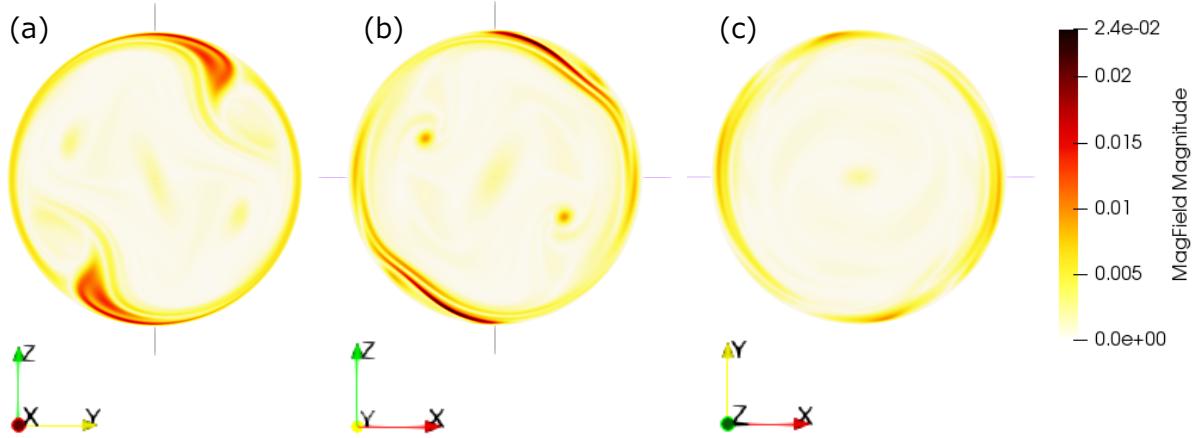


Fig. 15: Snapshots of magnetic field amplitude  $|B|$  for model P020\_A900. (a) in  $y$ - $z$  plane, (b) in  $z$ - $x$  plane, (c) in  $x$ - $y$  plane.

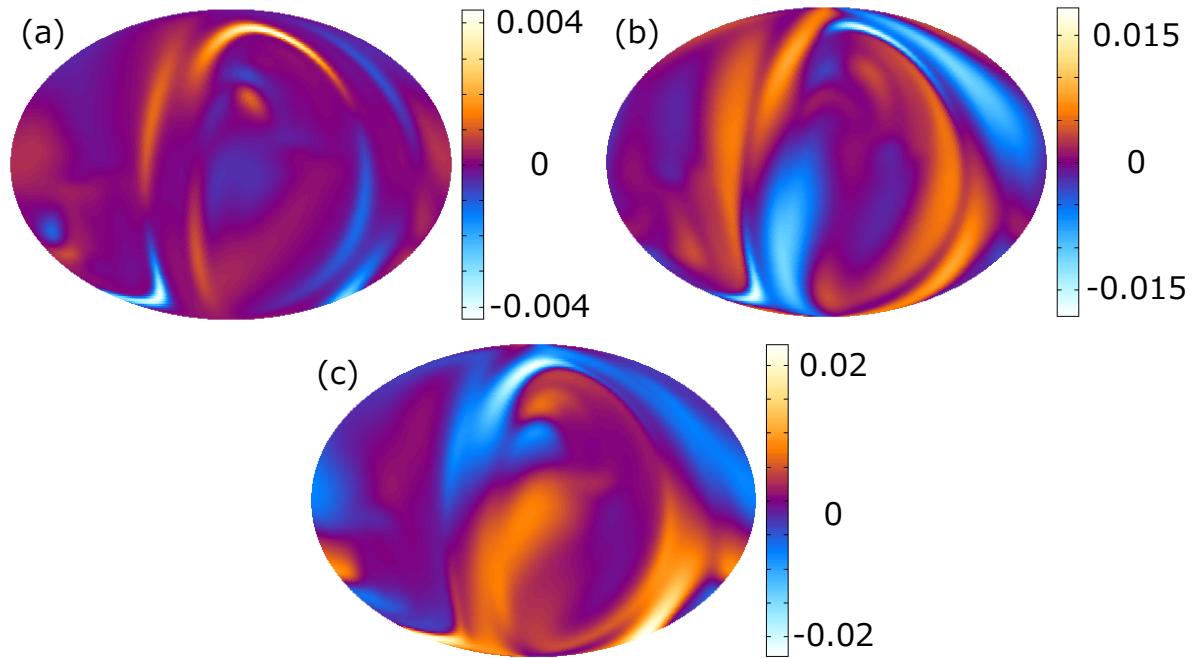


Fig. 16: Snapshots in longitude-latitude Mollweide Projection of (a) radial magnetic field  $B_r$ , (b) latitude magnetic field  $B_t$ , (c) longitude magnetic field  $B_p$  at  $r = 0.95R$  for model P020\_A900.

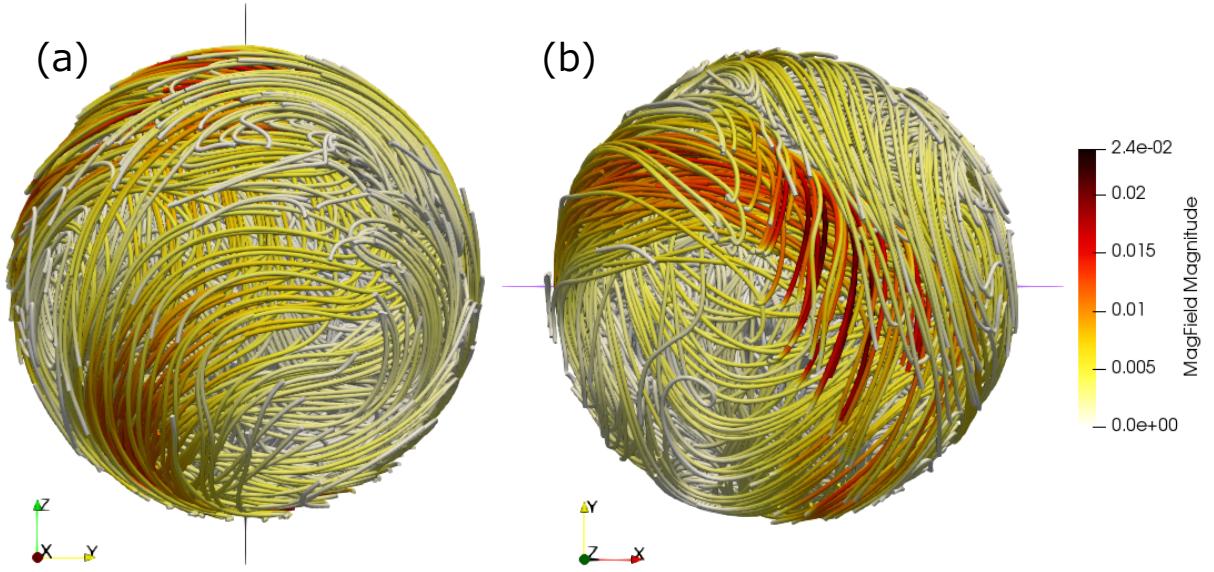


Fig. 17: Magnetic field lines for model P020\_A900 from (a)  $x$ -axis, (b)  $z$ -axis.

## 4 考察

本章では磁場が発展した P020\_A600 と P020\_A900 モデルのダイナモ機構、すなわち磁場生成のメカニズムを調べる。

第 3.2 章では磁場が強く現れている箇所のみを見ていたが、磁場が強く現れている場所と磁場が生成されている場所は異なる可能性がある。すなわち、ある場所で磁場が生成され、移流効果によってその磁場が運ばれた結果、磁場が生成された場所とは異なる位置で磁場が強くなることもあり得る。磁気エネルギーの時間発展の式、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B^2}{2} \right) = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) - \eta \mathbf{J}^2, \quad (64)$$

の右辺第二項:

$$D = -\mathbf{v} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}). \quad (65)$$

をここではダイナモ項と呼ぶ。ダイナモ項  $D$  は流れから磁場へのエネルギー変換率を表しており、 $D$  の値が大きい場所では磁場が生成されている。

まずは P020\_A600 モデルについて述べる。P020\_A600 モデルにおいてダイナモ項  $D$  が最も強く現れているのは球表面 ( $r = 0.99R$ ) の 2 箇所である。Fig. 18 に、 $r = 0.99R$  におけるダイナモ項  $D$  と  $|\mathbf{B}|$  の球面分布を示す。また、Fig. 19 (a) に、球の原点と磁場が強く現れている 2 箇所の計 3 点を含む平面における  $|\mathbf{B}|$  の断面図を、(b) に (a) と同じ平面におけるダイナモ項  $D$  の断面図をそれぞれ示す。Fig. 18 と Fig. 19 より、ダイナモ項  $D$  が強い箇所は磁場が強く現れている箇所と近いことがわかる。すなわち、P020\_A600 モデルでは磁場が生成されている場所と磁場が強く現れている場所はほとんど一致している。また、Fig. 10 で見たとおり、P020\_A600 の内部の遅い流れは渦を巻きながら球の表面に湧き出している。さらに、Fig. 10 と Fig. 10 を比較すると、その湧き出した流れが球

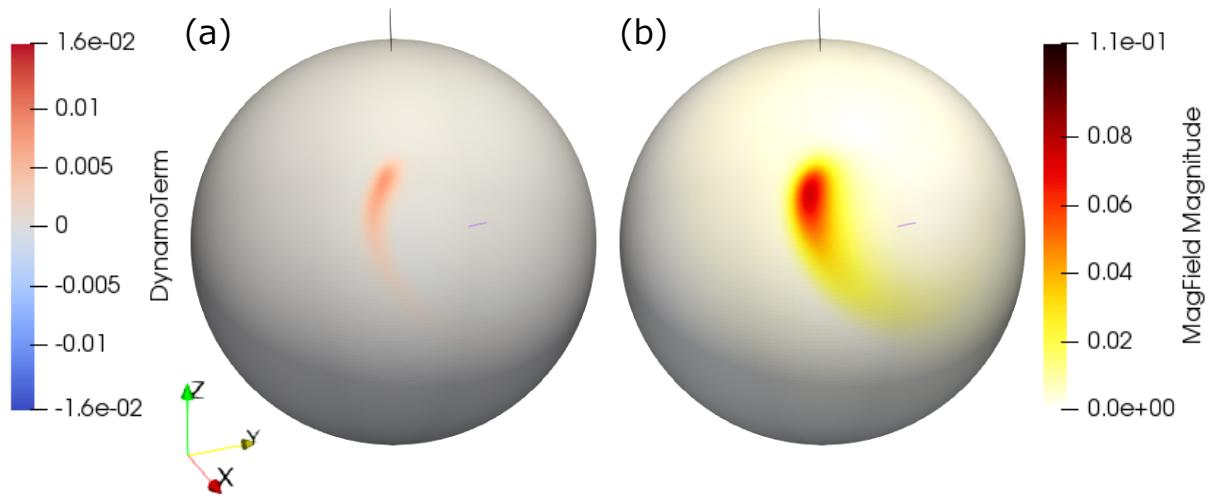


Fig. 18: Distributions at  $r = 0.99R$  for model P020\_A600. (a) dynamo term  $D$  (b) magnetic field amplitude  $|\mathbf{B}|$ .

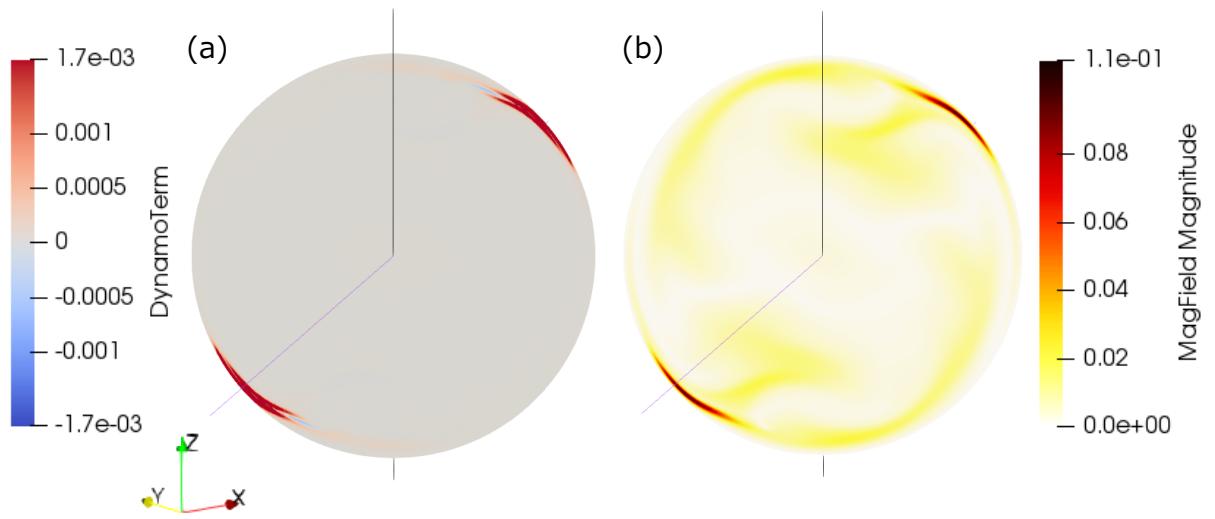


Fig. 19: Distributions on a cross section (a) dynamo term  $D$ , (b) magnetic field amplitude  $|\mathbf{B}|$  for model P020\_A600.

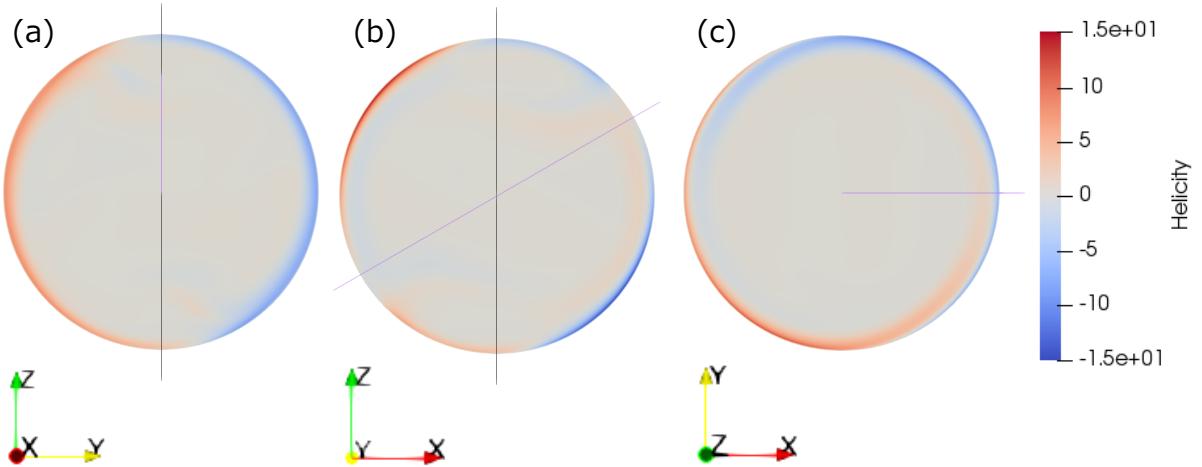


Fig. 20: Distributions on cross section of helicity for model P020\_A600. (a) in  $y$ - $z$  plane, (b) in  $z$ - $x$  plane, (c) in  $x$ - $y$  plane.

表面にぶつかる箇所で磁場が強く現れていることがわかる。これらの結果は、球内部の遅い流れによる渦構造が螺旋を描いており、その螺旋構造の近くで磁場が生成されている、すなわち螺旋型の流れがダイナモの起源である可能性を示唆している。流れの螺旋構造は磁場を発展させ、ダイナモを引き起こすことが知られている [?]. そこで、P020\_A600 のダイナモ機構を調べるためにあたり、ヘリシティ  $h$  の値を調べる。ヘリシティは流れの螺旋具合を表す量であり、以下で表される：

$$h = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (66)$$

ここで  $\boldsymbol{\omega}$  は渦度を表し、

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}, \quad (67)$$

である。ヘリシティの絶対値が大きい部分では流れが螺旋を描いている。また、ヘリシティが正の値の箇所では右巻き（時計回り）、負の値では左巻き（反時計回り）の螺旋が存在する。 $0.08\tau_d$  におけるヘリシティの  $yz$ ,  $zx$ ,  $xy$  平面での断面図を Fig. 20 に示す。Fig. 20 より、ヘリシティは球表面で強い値を示しており、反対に球内部にはヘリシティは現れていない。Fig. 18 との比較のために、半径  $r = 0.99R$  でのヘリシティの球面分布を Fig. 21 に示す。Fig. 18 (a) と Fig. 21 より、ダイナモ項  $D$  が強く現れている箇所とヘリシティが強く現れている箇所は異なることがわかる。つまり、ヘリシティの分布より以下 2 つのことがわかる。

- (1) 球内部の遅い流れによる渦構造のヘリシティは、球表面のヘリシティに比べて非常に弱い。
- (2) 磁場が生成されている場所とヘリシティが強い場所は異なっている。

よって、P020\_A600 モデルにおけるダイナモ機構は、螺旋型流れによるものではないと結論付けられる。

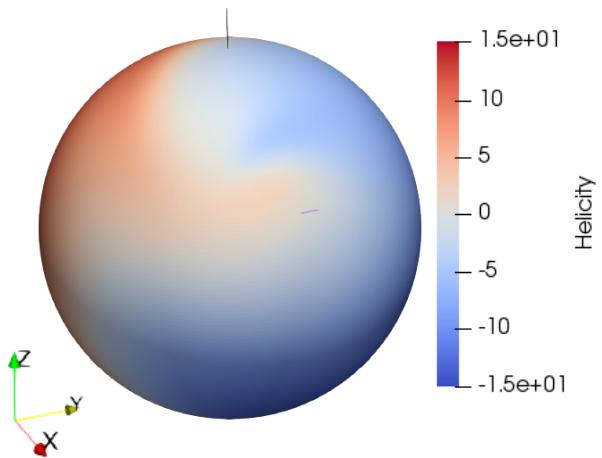


Fig. 21: Helicity distribution at  $r = 0.99R$  for model P020\_A600.

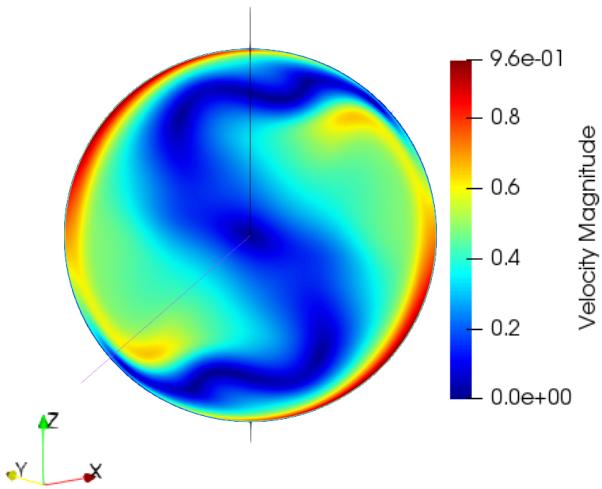


Fig. 22: Velocity amplitude  $|\mathbf{v}|$  at same slice plane with Fig. 19 for model P020\_A600.

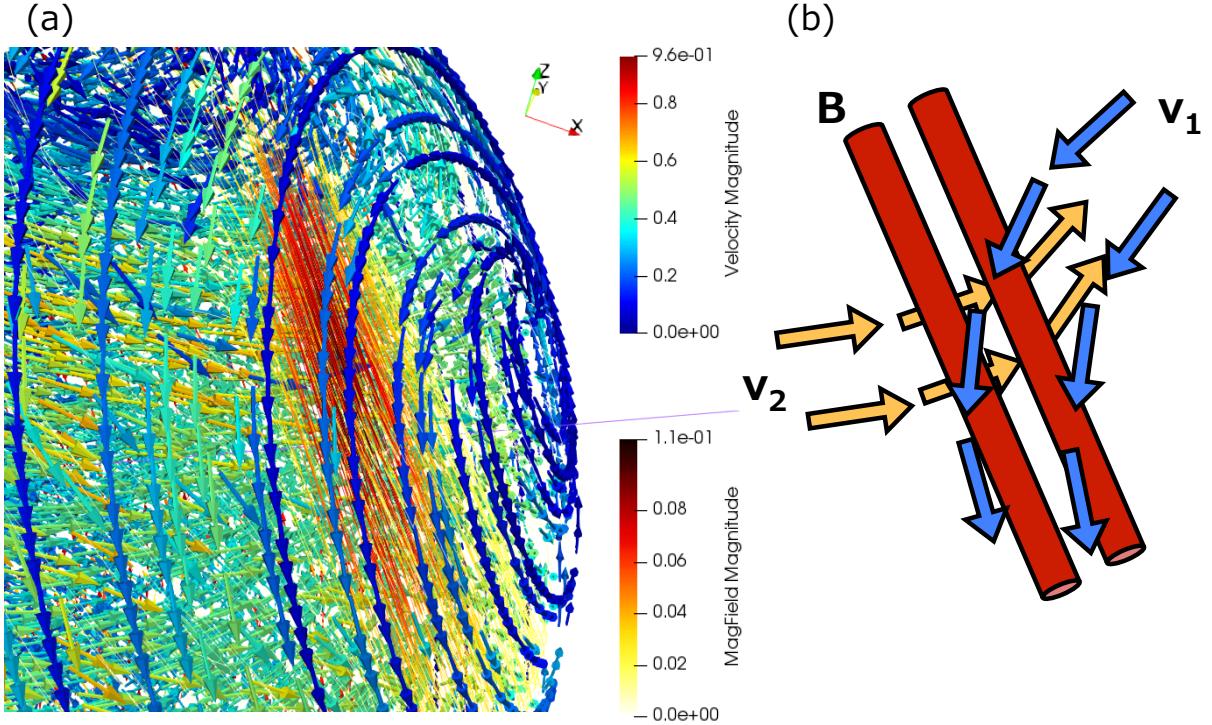


Fig. 23: (a) Snapshot of magnetic field lines and vector glyphs of velocity. (b) Schematic view of (a).

Fig. 22 に、P020\_A600 の  $|v|$  の断面図を示す。Fig. 22 は Fig. 19 と同様に、球の原点と磁場が強く現れている 2箇所の計 3 点を含む平面における断面図である。Fig. 19 (b) と Fig. 22 より、磁場は球表面の流れが遅い箇所 ( $|v| = 0.1$  程度) で生成されており、そのすぐ内側 ( $0.75R \leq r \leq 0.95R$ ) には  $|v| = 0.65$  程度の流れが存在することがわかる。すなわち、強さが異なる流れが近接している領域の近くで磁場は生成されている。続いて、Fig. 23 (a) に、磁力線と速度  $v$  の 3 次元ベクトル図を重ねて表示した図を示す。ここで、磁力線は  $|\mathbf{B}|$  の値が大きい箇所のみを表示している。Fig. 23 より、磁力線の動径方向上部には弱い流れが、動径方向下部には  $|v| = 0.65$  程度の流れが存在し、これらの流れの向きは異なっていることがわかる。その様子を模式的に表した図が Fig. 23 (b) である。つまり、磁場は速度の強さ、向きがともに異なる流れが近接している領域の近くで強く現れていることがわかる。以上より、速度シア近傍で磁場は強く現れており、磁場が強く現れている場所と磁場が生成されている場所もほとんど一致している。すなわち、P020\_A600 では速度シアがダイナモの起源である。実際に、速度シアが磁場を発展させることは知られている [?].

続いて、P020\_A900 モデルについて述べる。P020\_A900 モデルにおいてダイナモ項  $D$  が最も強く現れているのは球表面 ( $r = 0.99R$ ) である。Fig. 24 に、半径  $r = 0.99R, 0.95R$  におけるダイナモ項  $D$ 、 $|\mathbf{B}|$ 、ヘリシティの球面分布を示す。Fig. 24 (a) と (c) より、半径  $r = 0.99R$  でダイナモ項  $D$  が強く現れている場所と磁場が強く現れている場所はほぼ一致している。一方、磁場が最も強く現れている半径  $r = 0.95R$  でのダイナモ項  $D$  の値は、半径  $r = 0.99R$  におけるダイナモ項  $D$  の値より小さい（約 0.33 倍）。つまり、磁

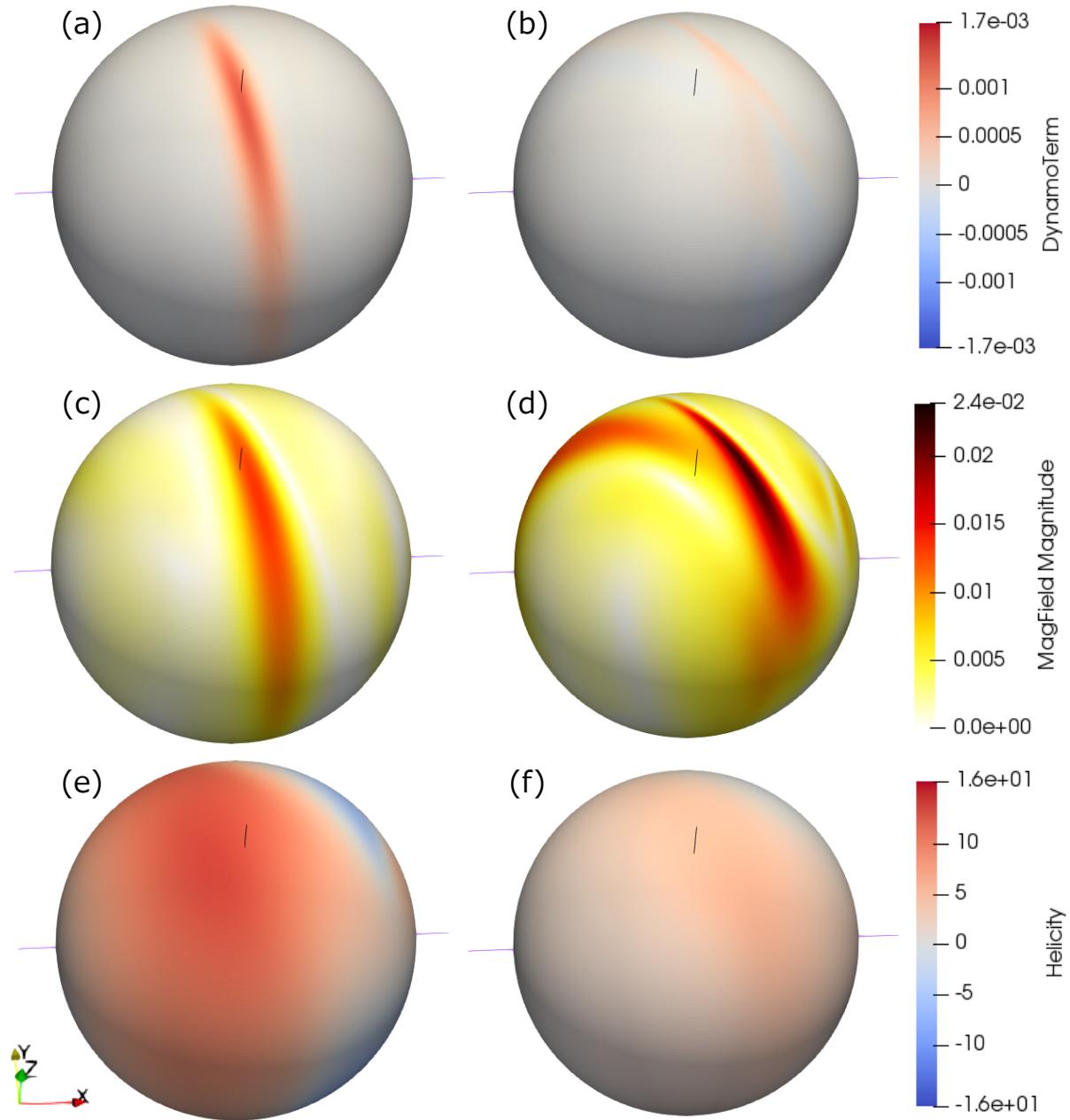


Fig. 24: Snapshots at (a)(c)(e)  $r = 0.99R$  (b)(d)(f)  $r = 0.95R$  for model P020\_A900. (a)(b) dynamo term  $D$  (c)(d) magnetic field amplitude  $|\mathbf{B}|$  (e)(f) helicity.

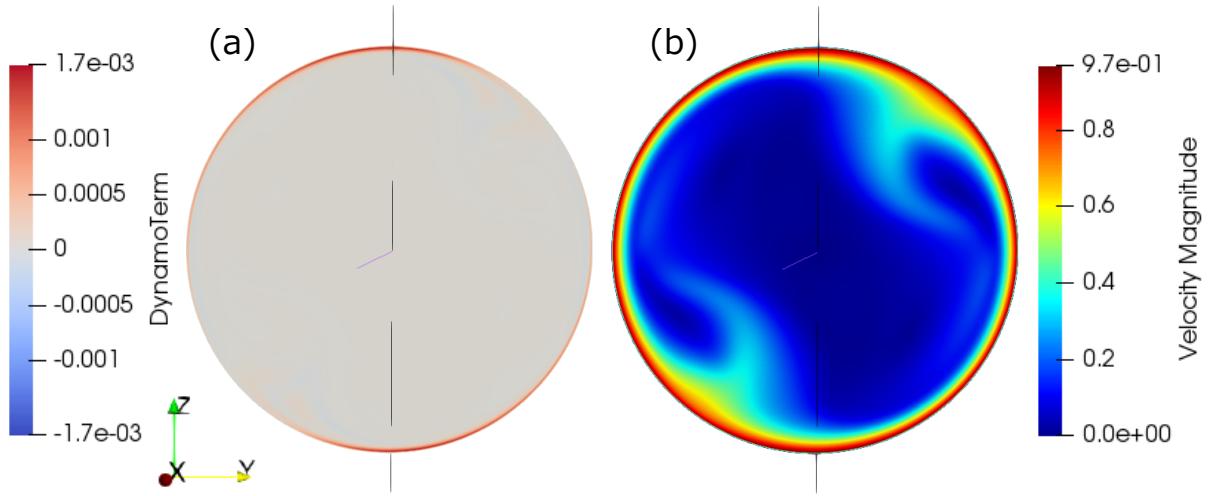


Fig. 25: Snapshots for model P020\_A900. (a) dynamo term  $D$  (b) velocity amplitude  $|\mathbf{v}|$ .

場が生成されている場所でも磁場が現れてはいるが、最も磁場が強く現れている場所からは外れているということがわかる。また、Fig. 24 (a) と (e) より、ダイナモ項  $D$  が強く現れている場所の分布とヘリシティが強く現れている場所の分布は異なっていることがわかる。つまり、P020\_A900 モデルも P020\_A900 モデルと同様に、螺旋型の流れ構造が磁場を生成しているわけではない。Fig. 25 に、ダイナモ項  $D$  と  $|\mathbf{v}|$  の断面図を示す。ここで Fig. 25 は球の原点とダイナモ項  $D$  が強く現れている場所を含んだ平面における断面図である。Fig. 25 より、磁場は球表面の速度が速い領域で生成されていることがわかる。Fig. 26 (a) に P020\_A900 の速度  $\mathbf{v}$  の 3 次元ベクトル図を、(b) 磁力線を、(c) に Fig. 25 と同じ平面におけるダイナモ項  $D$  の断面図を示す。Fig. 26 (a) (b) より、磁場が強く現れている場所で速度シアが見られる。また、Fig. 26 (a) (c) より、速度シアの近傍でダイナモ項  $D$  が強く現れている。以上より、P020\_A900 も P020\_A600 と同様、速度シアによるダイナモである。

## 5 結論

地球ダイナモのエネルギー源の観点から言えば内核の存在が不可欠である。近年の研究から内核の誕生年代は約 7 億年前と比較的最近であることがわかった。地球誕生当初は外核の液体鉄自体が十分な熱を持っていたため、マントルとの温度勾配により熱対流が駆動され、ダイナモのエネルギー源となっていたと考えられる。しかし、内核が誕生する直前の時期には外核は十分に冷えていたと考えられ、熱対流がダイナモのエネルギー源となることはない。一方、古地磁気学の研究から約 35 億年から地球に磁場が存在していたことが明らかになっており、内核誕生以前のダイナモのエネルギー源は謎とされてきた。本研究ではそのエネルギー源の 1 つとして提唱されている歳差運動に注目したダイナモシミュレーションを行った。

歳差ダイナモ研究は球や球殻ジオメトリで行われており、その大半がスペクトル法を用いた計算を行っている。スペクトル法は低解像度でも高い精度の解が得られるという特

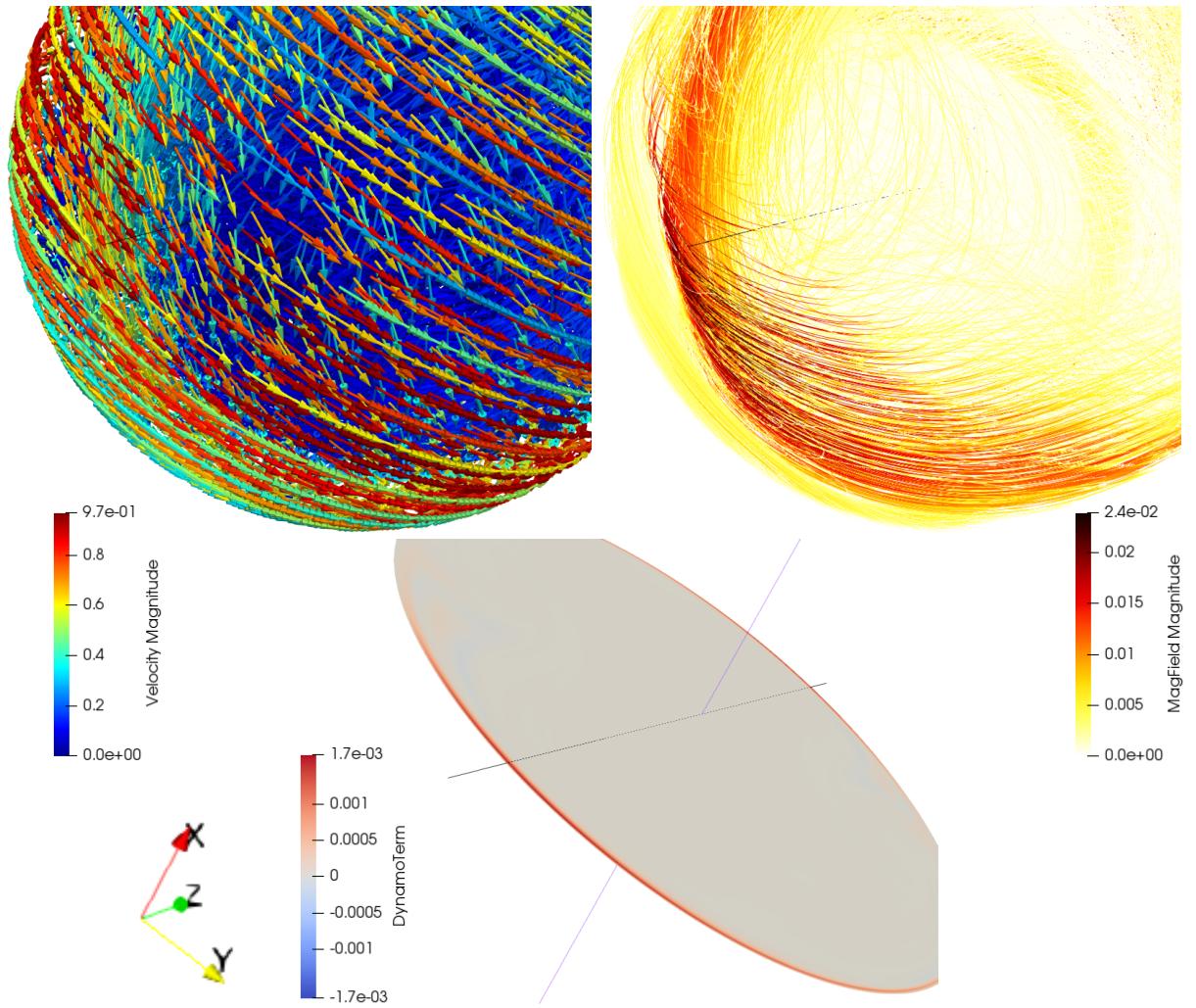


Fig. 26: Snapshots for model P020\_A900. (a) vector glyphs of velocity (b) magnetic field lines (c) dynamo term  $D$  at same plane with Fig. 25.

徴がある一方、高解像度の計算を行おうとすると計算コストが非線形に増大してしまう。本研究では将来的な低エクマン数での高解像度計算を見据え、高効率かつ高並列な球ジョメトリ計算が可能な有限差分法計算格子である「Yin-Yang-Zhong 格子」を用いてシミュレーションを行った。

本研究では  $Pr = 1$ ,  $Pm = 6$ ,  $E = 7 \times 10^{-4}$  と固定した上でポアンカレ数  $Po$  と歳差角  $\alpha$  を変化させた計 6 モデルでシミュレーションを行い、以下の結果を得た：

- 磁場を課していないモデルでの数値計算結果より、P030\_A600 以外のモデルでは  $0.1\tau_\nu$  には流れは定常状態に達した。そのときの全運動エネルギーの値は、歳差角が等しいモデルではポアンカレ数が 0 に近いほど大きな値に、ポアンカレ数が等しいモデルでは歳差角が 0 に近いほど大きな値となった。これらの特徴は  $\mathcal{O}(10^{-7})$  程度の初期磁場を課したモデルでも同様であった。
- すべてのモデルで、球の内部に遅い流れが、球の内部から表面に向かうにつれて速い流れが形成された。速い流れはポアンカレ数が 0 に近い値のとき、または歳差角が 0 度に近いほど球内部にまで現れた。反対に、ポアンカレ数が -1 に近いとき、または歳差角が 90 度に近いときほど内部の遅い流れは球の表面近くにまで現れた。特に、歳差角を 90 度にしたときに遅い流れは最も球の表面にまで現れた。
- 速度は球表面で最も速く、そこから球内部に向かうにつれて流れは遅くなる。どのモデルでも、球表面のすぐ内側 ( $r \leq 0.95R$ ) で流れの方向は変化している。
- 球内部の遅い流れは P020\_A900 以外のモデルで渦構造を形成した。P005\_A600 と P020\_A234 では渦は自転軸に沿って、P050\_A600 では渦は歳差軸に沿って現れた。P002\_A600 と P030\_A600 では渦は自転軸からも歳差軸からも外れて現れた。これらの渦構造は螺旋を描きながら球表面に向かって湧き出している。P020\_A900 では渦構造はできず、遅い流れは不規則に崩れて現れた。
- 初期磁場を与えたモデルでは、P020\_A600 と P020\_A900 で磁場の発展が見られ、その他のモデルでは磁場が減衰した。すなわち、歳差角 60 度のモデルではポアンカレ数  $Po = -0.2$  のときのみ磁場が発展し、そこから  $Po$  を 0 に近づけても ( $Po = -0.05$ )、反対に -1 に近づけても ( $Po = -0.3, -0.5$ ) 磁場は減衰した。
- P020\_A600 の磁場は、球表面（特に半径  $r = 0.97R$ ）の 2箇所に強く現れ、その位置は原点に対して点対称だった。磁場の動径方向成分  $B_r$  の半径  $r = 0.97R$  における球面分布を見ると、 $B_r$  は 2 点のみで強く現れており、P020\_A600 はダイポール磁場を形成することがわかった。
- P020\_A900 の磁場は、球表面（特に強く現れるのは半径  $r = 0.95R$ ）に広く分布し、その分布は原点に対して点対称だった。磁場の動径方向成分  $B_r$  の半径  $r = 0.95R$  における球面分布を見ると、 $B_r$  は球面上に広く分布しており、P020\_A900 はダイポール磁場を形成していないことがわかった。
- P020\_A600 では、磁場が生成されている場所と磁場が強く現れている場所はほとんど一致していた。また、磁場が形成されている場所とヘリシティが強く現れている

場所は一致しなかった。つまり、P020\_A600 のダイナモメカニズムは螺旋型流れによるものではない。磁場が強く現れている場所ではその動径方向上部と下部で流れの強さ・向きともに違う流れが見られた。つまり、P020\_A600 におけるダイナモメカニズムは速度シアによるものである。

- P020\_A900 では、磁場が生成されている場所は磁場が強く現れてはいるが、磁場が最も強く現れている場所とは異なっていた。また、P020\_A900 でも磁場が強く現れている場所、磁場が生成されている場所とともに、その近辺に速度シアが見られた。すなわち、P020\_A900 も速度シアによるダイナモである。

今後の課題として、磁気拡散時間までのシミュレーションを行う必要がある。今回、磁場の発展が見られた P020\_A600 と P020\_A900 モデルにおいても、磁気拡散時間までシミュレーションを進めれば磁場が減衰する可能性がある。また、今回シミュレーションを行わなかった組み合わせ（例えば  $(Po = -0.05, \alpha = 90)$  や  $(Po = -0.05, \alpha = 90)$  など）におけるシミュレーションを行うことで、ポアンカレ数と歳差角が流れ構造と磁場に及ぼす影響をより体系的に調べることができる。今回注目しなかったプラントル数、磁気プラントル数、エクマン数もダイナモ機構にとって重要なパラメータである。特に低エクマン数の計算を進めて行くことで現実の地球ダイナモにより近い研究結果を得ることが今後の課題である。

## 謝辞

長い間ご指導、ご助言頂きました陰山聰教授に深く感謝申し上げます。堀久美子助教にも、研究内容へのコメントや助言をいただきました。また、大阪大学の後藤晋教授、並びにその研究室の皆様には歳差流体の実験装置を見学させていただき、研究を進める上で非常に参考になりました。本研究への取り組みにあたってご助力いただいた皆さんに深く感謝申し上げます。

## A 解像度によるエネルギーの変化

解像度の変化が運動エネルギーと磁気エネルギーに与える影響を調べるために、P020\_A600 モデルの空間解像度（第 2.4 章参照）から約 8 倍の空間解像度としたモデル（Yin 格子、Yang 格子それぞれで  $nr \times n\theta \times n\phi = 401 \times 404 \times 1208$ 、Zhong 格子で  $nx \times ny \times nz = 436 \times 436 \times 436$ ）のシミュレーションを行った。P020\_A600 モデルと約 8 倍の空間解像度としたモデルにおける運動エネルギーと磁気エネルギーの時間変化を Fig. 27 に示す。Fig. 27 の黒線が P020\_A600 モデル、青線が約 8 倍の空間解像度としたモデルである。Fig. 27 より、空間解像度を増やしたときに運動エネルギー・磁気エネルギーともに値に違いが見られるため、空間解像度についてはさらなる検証が必要である。

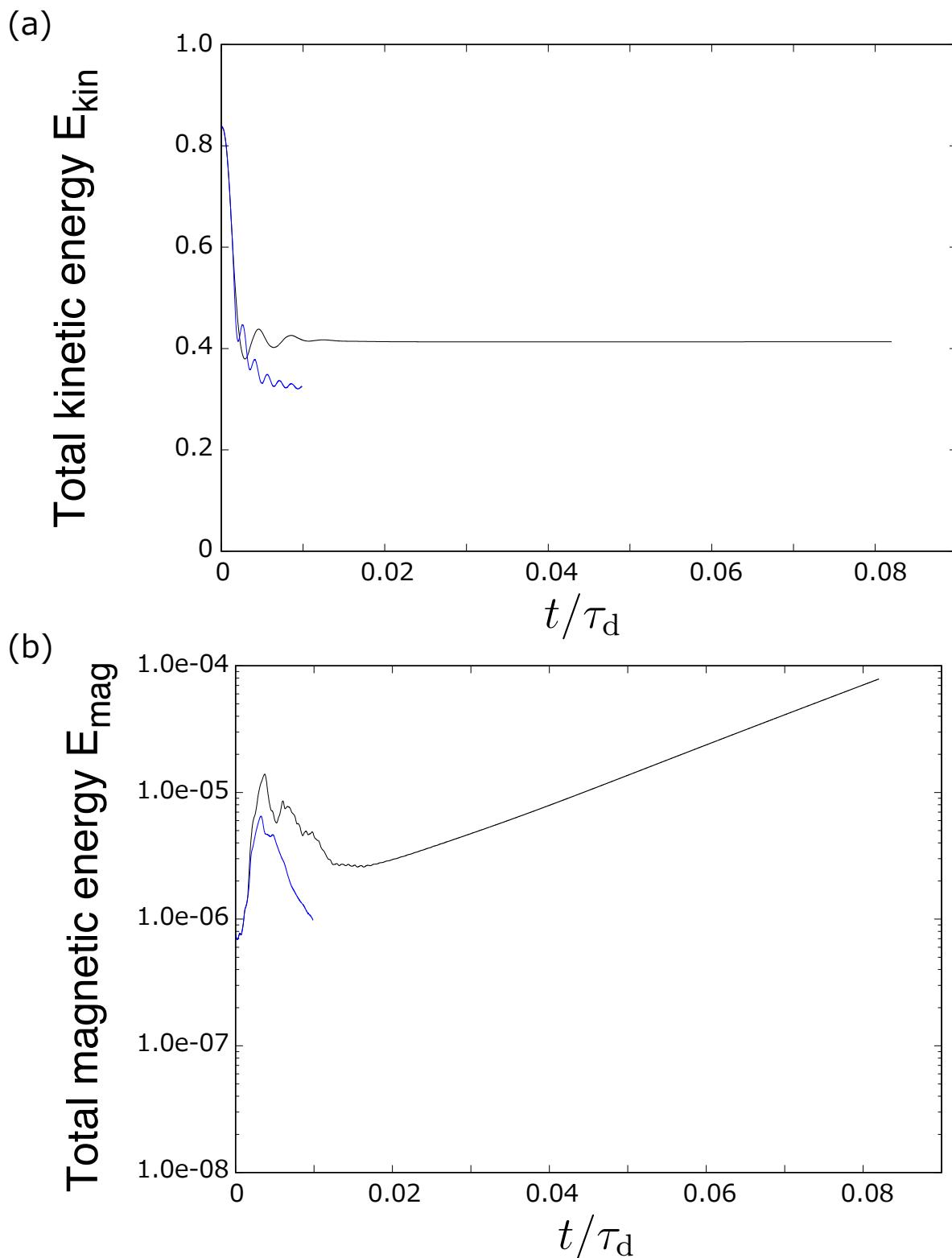


Fig. 27: Time development of (a) total kinetic energy (b) total magnetic energy.  $\tau_d$  is the magnetic diffusion time. Black line is P020\_A600 and blue line is the model which has 8 times spatial resolution from P020\_A600.