Lista 3 de Álgebra Lineal

Castro García José Luis
Macías Hernández Víctor Hugo

13 de mayo de 2018

1. Sean $V = \mathbb{R}^4$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pruebe que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con la adición y el producto por escalares usuales.

Solución

Sea $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4), \vec{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

I) $\vec{u} + (\vec{w} + \vec{v}) = (u_1, u_2, u_3, u_4) + ((v_1, v_2, v_3, v_4) + (w_1, w_2, w_3, w_4)) = (u_1, u_2, u_3, u_4) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3, v_4 + w_4) = (u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2), u_3 + (v_3 + w_3), u_4 + (v_4 + w_4)) = ((u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2, (u_3 + v_3) + w_3, (u_4 + v_4) + w_4) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, u_4 + v_4) + (w_1, w_2, w_3, w_4) = ((u_1, u_2, u_3, u_4) + (v_1, v_2, v_3, v_4)) + (w_1, w_2, w_3, w_4) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

II) $\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2, u_3, u_4) + (v_1, v_2, v_3, v_4) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, u_4 + v_4) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3, v_4 + u_4) = (v_1, v_2, v_3, v_4) + (u_1, u_2, u_3, u_4) = \vec{v} + \vec{u}$

III) Sea $0_v = (0, 0, 0, 0)$. Luego
$0_v + \vec{u} = (0, 0, 0, 0) + (u_1, u_2, u_3, u_4) = (0 + u_1, 0 + u_2, 0 + u_3, 0 + u_4) = (u_1, u_2, u_3, u_4) = \vec{u}$

IV) Sea $-\vec{u} = (-u_1, -u_2, -u_3, -u_4)$. Luego
$\vec{u} + (-\vec{u}) = (u_1, u_2, u_3, u_4) + (-u_1, -u_2, -u_3, -u_4) = (u_1 + (-u_1), u_2 + (-u_2), u_3 + (-u_3), u_4 + (-u_4)) = (0, 0, 0, 0) = 0_v$

V) $\alpha(\beta\vec{u}) = \alpha(\beta(u_1, u_2, u_3, u_4)) = \alpha(\beta u_1, \beta u_2, \beta u_3, \beta u_4) = (\alpha(\beta u_1), \alpha(\beta u_2), \alpha(\beta u_3), \alpha(\beta u_4)) = ((\alpha\beta)u_1, (\alpha\beta)u_2, (\alpha\beta)u_3, (\alpha\beta)u_4) = (\alpha\beta)(u_1, u_2, u_3, u_4) = (\alpha\beta)\vec{u}$

VI) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha((u_1, u_2, u_3, u_4) + (v_1, v_2, v_3, v_4)) = \alpha(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, u_4 + v_4) = (\alpha(u_1 + v_1), \alpha(u_2 + v_2), \alpha(u_3 + v_3), \alpha(u_4 + v_4)) = (\alpha u_1 + \alpha v_1, \alpha u_2 + \alpha v_2, \alpha u_3 + \alpha v_3, \alpha u_4 + \alpha v_4) = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3, \alpha u_4) + (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3, \alpha v_4) = \alpha(u_1, u_2, u_3, u_4) + \alpha(v_1, v_2, v_3, v_4) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

VII) $(\alpha + \beta)\vec{u} = (\alpha + \beta)(u_1, u_2, u_3, u_4) = ((\alpha + \beta)u_1, (\alpha + \beta)u_2, (\alpha + \beta)u_3, (\alpha + \beta)u_4)$
$= (\alpha u_1 + \beta u_1, \alpha u_2 + \beta u_2, \alpha u_3 + \beta u_3, \alpha u_4 + \beta u_4) = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3, \alpha u_4) + (\beta u_1, \beta u_2, \beta u_3, \beta u_4) = \alpha(u_1, u_2, u_3, u_4) + \beta(u_1, u_2, u_3, u_4) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

VIII) $1 \cdot \vec{u} = 1 \cdot (u_1, u_2, u_3, u_4) = (1 \cdot u_1, 1 \cdot u_2, 1 \cdot u_3, 1 \cdot u_4) = (u_1, u_2, u_3, u_4) = \vec{u}$

2. Sea X un conjunto no vacío y $\mathbb{K}$ un campo. Sea $V = \{f : X \to \mathbb{K}\}$ es decir V es el conjunto de todas las funciones que van de X a $\mathbb{K}$. Para todas $f, g \in V$ y para toda $\alpha \in \mathbb{K}$ definimos $f + g$ y αf como $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ y $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ para toda $x \in X$. Pruebe que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Solución

Sea $f, g, h \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Ademas resulta que $\forall x \in X$; $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{K}$.

I) $f + (g + h) = (f + (g + h))(x) = f(x) + (g + h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) = (f + g)(x) + h(x) = ((f + g) + h)(x) = (f + g) + h$

II) $f + g = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x) = g + f$

III) Definiremos a 0_v como la función $0_f : X \to K$ tal que $\forall x \in X$ resulte que $0_f(x) = 0_k$, luego: $f + 0_f = (f + 0_f)(x) = f(x) + 0_f(x) = f(x) + 0_k = f(x) = f$

IV) Definiremos al inverso aditivo como la función $-f : X \to K$ tal que $\forall x \in X$ resulte que $f(x) + (-f(x)) = 0_k$, luego:
$f + (-f) = (f + (-f))(x) = f(x) + (-f(x)) = 0_k = 0_f$

V) $\alpha(\beta f) = (\alpha(\beta f))(x) = \alpha(\beta f)(x) = \alpha\beta f(x) = (\alpha\beta)f(x) = ((\alpha\beta)f)(x) = (\alpha\beta)f$

VI) $\alpha(f+g) = (\alpha(f+g))(x) = \alpha(f+g)(x) = \alpha(f(x)+g(x)) = \alpha f(x)+\alpha g(x) = (\alpha f)(x)+(\alpha g)(x) = \alpha f + \alpha g$

VII) $(\alpha + \beta)f = ((\alpha + \beta)f)(x) = (\alpha + \beta)f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) = (\alpha f)(x) + (\beta f)(x) = \alpha f + \beta f$

VIII) $1_k \cdot f = (1_k \cdot f)(x) = 1_k \cdot f(x) = f(x) = f$

3. Sea $V = \mathbb{R}^2$. Sean $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$. Definimos la una suma $\oplus$ como sigue $(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + 2y_1, x_2 - y_2)$. ¿Es V con esta suma y con el producto por escalares usual un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$? En caso de serlo, demuestrelo; de lo contrario, ejemplifique todas las propiedades que no cumple.

Solución

No es un espacio vectorial, ya que no cumple con la asociación y conmutación sobre $\oplus$:

I) Sea $x = (2, 4), y = (1, 3), z = (5, 6)$, tenemos que $x, y, z \in V$ pero $x \oplus (y \oplus z) = (2, 4) \oplus (1 + 2 \cdot 5, 3 - 6) = (2, 4) \oplus (11, -3) = (2 + 2 \cdot 11, 4 + 3) = (24, 7) \neq (14, -5) = (4 + 2 \cdot 5, 1 - 6) = (4, 1) \oplus (5, 6) = (2 + 2 \cdot 1, 4 - 3) \oplus (5, 6) = (x \oplus y) \oplus z$.

II) Sea $x = (1, 2), y = (3, 6)$, tenemos que $x, y \in V$, pero $x \oplus y = (1 + 2 \cdot 3, 2 - 6) = (7, -4) \neq (5, 4) = (3 + 2 \cdot 1, 6 - 2) = y \oplus x$.

4. Sea $V = \mathbb{R}^3$ el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con la suma y producto usual sobre $\mathbb{R}$. Determine si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de V. Justifique sus respuesta.

(a) $W_1 = \{(x, 0, z) | x, z \in \mathbb{R}\}$

Solución

Sea $u = (u_1, 0, u_2), v = (v_1, 0, v_2) \in W_1$, sea $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Luego $\alpha u + \beta v = (\alpha u_1, 0, \alpha u_2) + (\beta v_1, 0, \beta v_2) = (\alpha u_1 + \beta v_1, 0 + 0, \alpha u_2 + \beta v_2) = (\rho, 0, \sigma)$, con $\rho = \alpha u_1 + \beta v_1$ y $\sigma = \alpha u_2 + \beta v_2$, y como $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$ entonces $(\rho, 0, \sigma) \in W_1$, por lo tanto es un subespacio vectorial.

(b) $W_2 = \{(x, y, z) | (x, y, z) = t(2, 1, 1) - (0, 1, 1), t \in \mathbb{R}\}$

Solución

No es un subespacio vectorial, ya que $\neg\exists t \in \mathbb{R}$ tal que $t(2,1,1)-(0,1,1)=(2t,t-1,t-1)=(0,0,0)=0_v$.

(c) $W_3=\{(x,y,z)|x=2y=3z\}$

Solución

Sea $u=(a,b,c), v=(r,s,t)\in W_3$, por lo tanto podemos expresar a los vectores como $u=(3c,\frac{3}{2}c,c)$ y $v=(3t,\frac{3}{2}t,t)$. Sea $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ luego $\alpha u+\beta v=\alpha(3c,\frac{3}{2}c,c)+\beta(3t,\frac{3}{2}t,t)=(3\alpha c,\frac{3}{2}\alpha c,\alpha c)+(3\beta t,\frac{3}{2}\beta t,\beta t)=(3(\alpha c+\beta t),\frac{3}{2}(\alpha c+\beta t),\alpha c+\beta t)=(3\rho,\frac{3}{2}\rho,\rho)$ con $\rho=\alpha c+\beta t$, pero vemos que $(3\rho,\frac{3}{2}\rho,\rho)\in W_3$, por lo tanto es un subespacio vectorial.

(d) $W_4=\{(x,y,z)|xyz\geq 0\}$

Solución

No es un subespacio vectorial. Sea $u=(x,y,z)\in W_4$, $x=y=z\neq 0$, por lo tando $xyz\geq 0$, tenemos que $-1\in\mathbb{R}$, pero $-1\cdot(x,y,z)=(-x,-y,-z)\notin W_4$ ya que $(-x)(-y)(-z)=-xyz\ngeq 0$.

(e) $W_5=\{(x,y,z)|2x-3y+5z=0\}$

Solución

Sea $u=(a,b,c), v=(r,s,t)\in W_5$, por lo tanto $2a-3b+5c=0$ y $2r-3s+5t=0$.Sea $\alpha\in\mathbb{R}$, luego $\alpha u=\alpha(\alpha a,\alpha b,\alpha c)$, vemos que $2\alpha a-3\alpha b+5\alpha c=\alpha(2a-3b+5c)=0$ y $u+v=(a+r,b+s,c+t)$ y vemos que $2(a+r)-3(b+s)+5(c+t)=(2a-3b+5c)+(2r-3s+5t)=0$, por lo tanto es subespacio vectorial.

(f) $W_6=\{(x,y,z)|\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leq 1\}$

Solución

Tenemos que $u=(0{,}5,0{,}5,0{,}5)\in W_6$, ya que $\sqrt{0{,}5^2+0{,}5^2+0{,}5^2}=0{,}75\leq 1$, Luego $3\in\mathbb{R}$, asi $3(0{,}5,0{,}5,0{,}5)=(3(0{,}5),3(0{,}5),3(0{,}5))$, pero $\sqrt{(3(0{,}5))^2+(3(0{,}5))^2+(3(0{,}5))^2}=\sqrt{9(0{,}5)^2+9(0{,}5)^2+9(0{,}5)^2}=\sqrt{9(0{,}5^2+0{,}5^2+0{,}5^2)}=3\sqrt{0{,}5^2+0{,}5^2+0{,}5^2}=2{,}25\nleq 1$, por lo tanto no es un subespacio vectorial.

5. Sea $V=R_2[x]$, es decir el conjunto de los polinomios con coeficientes en los reales con grado menor o igual a 2, el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con la suma y producto usual. Determine si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de V. Justifique sus respuesta.
   (a) $W_1=\{ax^2+bx+c|a\leq 0\}$.
   (b) $W_2=\{ax^2+c|ac\geq 0\}$.
   (c) $W_3=\{p(x)|p(x)=p(x)\}$.
   (d) $W_4=\{p(x)|p(x)=p(x)\}$.
   (e) $Sea\alpha\in\mathbb{R}$. Entonces $W_5=\{p(x)|p(\alpha)=0\}$.
   (f) $W_6=\{ax^2+bx+c|a+b+c=0\}$.

6. Sea $V=\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con la suma y producto usual. Determine si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de V. Justifique sus respuesta.

(a) $W_1 = \{A||A| = 0\}$.

> **Solución**
> Tenemos que $\forall A[\neg(|A| = 0) \Leftrightarrow (\text{A es invertible})]$

(b) $W_2 = \{A|A^2 = 0_{2\times 2}\}$.

(c) $W_3 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} |a, b, d \in \mathbb{R}\}$.

(d) $W_4 = \{\begin{pmatrix} a & -2b \\ 3b + a & -4a + b \end{pmatrix} |a, b \in \mathbb{R}\}$.

(e) $W_5 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & abc \end{pmatrix} |a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

7. Determine si el siguiente conjunto de polinomios genera a $R_2[x]$. Justifique su respuesta.

(a) $\{1, x^2\}$

> **Solución**
> No genera a $R_2[x]$. Sea $a_0 + a_1x + a_2x^2 \in R_2[x]$, luego $\exists \alpha, \beta$ tales que $\alpha + \beta x^2 = a_0 + a_1x + a_2x^2$ lo que implica que $\alpha = a_0$ y $\beta = a_2$, pero a_1 queda sin asignación, lo que implica $a_1 = 0$.

(b) $\{3, 2x, -x^2\}$

> **Solución**
> Sea $a_0 + a_1x + a_2x^2 \in R_2[x]$. Luego $\exists \alpha, \beta, \gamma$ tales que $3\alpha + 2\beta x - \gamma x^2 = a_0 + a_1x + a_2x^2$, por lo tanto $3\alpha = a_0$, $2\beta = a_1$ y $3 - \gamma = a_0$, es decir, $\alpha = \frac{a_0}{3}$, $\beta = \frac{a_1}{2}$ y $\gamma = -a_0$, por lo tanto generan a $R_2[x]$.

(c) $\{1 + x, 2 + 2x - 3x^2, x^2\}$

> **Solución**
> Sea $a_0 + a_1x + a_2x^2 \in R_2[x]$. Luego $\exists \alpha, \beta, \gamma$ tales que $\alpha(1 + x) + \beta(2 + 2x - 3x^2) + \gamma(x^2) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, asi:
> $\alpha(1 + x) + \beta(2 + 2x - 3x^2) + \gamma(x^2) = (\alpha + 2\beta) + (\alpha + 2\beta)x + (-3\beta + \gamma)x^2 = a_0 + a_1x + a_2x^2$
> Por lo tanto tenemos el siguiente sistema (cuyas indeterminadas son α, β y γ):
> $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a_0 \\ 1 & 2 & 0 & a_1 \\ 0 & -3 & 1 & a_2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 - a_0 \\ 0 & -3 & 1 & a_2 \end{array}\right)$$
> por lo tanto nos restringimos a que $a_1 - a_0 = 0$, es decir $a_1 = a_0$, por lo que no genera a $R_2[x]$.

(d) $\{1, 1 + x, 1 + x^2\}$

> **Solución**
> Sea $a_0 + a_1x + a_2x^2 \in R_2[x]$. Luego $\exists \alpha, \beta, \gamma$ tales que $\alpha + \beta(1 + x) + \gamma(1 + x^2) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, asi:
> $\alpha + \beta(1 + x) + \gamma(1 + x^2) = (\alpha + \beta + \gamma) + \beta x + \gamma x^2 = a_0 + a_1x + a_2x^2$
> Por lo tanto tenemos el siguiente sistema (cuyas indeterminadas son α, β y γ):
> $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & a_2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_0 - a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & a_2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a_0 - a_1 - a_2 \\ 0 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & a_2 \end{array}\right)$$
> por lo tanto el sistema tiene solucion unica, así el conjunto genera a $R_2[x]$.

8. Para cada conjunto del inciso anterior, determine si son linealmente independientes.
9. Determine que figuras geometricas representan los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$.
   (a) $\langle\{\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix}\}\rangle$

   > **Solución**
   > Representa un plano, ya que los vectores son no paralelos, por lo que solo se necesita calcular su vector normal para crear la ecuación del plano.

   (b) $\langle\{\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-6\\-4\end{pmatrix}\}\rangle$

   > **Solución**
   > Representa una recta, ya que el segundo vector es igual a -2 veces el primer vector, por lo que uno puede actuar como el punto P_0 de la recta mientras que el otro puede actuar como el vector dirección.

10. Determine para que valores de a y b los vectores $\begin{pmatrix}1\\2\\a\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\b\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\b\\0\end{pmatrix}$ son $l.d.$ en $\mathbb{R}^4$.
11. Determine si los polinomios $1+x$, $2+4x^2$, $4x+5x^3$, $2x^2-x^4$, $-2+2x^4$, $1-x+x^2-x^3+x^4$ son $l.i.$ o son $l.d.$ en $R_4[x]$.

    > **Solución**
    > Son $l.d.$, ya que $dim(R_4[x]) = 5$, por lo tanto un conjunto de 6 elementos (como el que se nos da) no puede ser $l.i.$

12. Sean $v, u, w \in V$, donde V es un espacio vectorial. Pruebe que si u,v y w son linealmente independientes, entonces $u+v$, $u+w$ y $v+w$ son linealmente independientes.
13. Encuentre una base para los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$.

Hecho en LaTeX.