Лабораторная работа № 2

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: изучить и программно реализовать на языке высокого уровня метод Ньютона, исследовать его точность и эффективность на тестовых задачах.

Метод Ньютона

Многие прикладные задачи радиофизики и электроники требуют решения систем нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ)

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,\\
&f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,\\
&\vdots\\
&f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,
\end{aligned}
$$

или в векторной форме

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},\ \mathbf{x} \in R^n, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ – вектор-столбец переменных, $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^{\mathrm{T}}$ – вектор-столбец функций, R^n – n-мерное векторное пространство.

Для численного решения таких систем используются итерационные методы. Суть итерационных методов состоит в построении последовательности $\{\mathbf{x}^k\}$, $k = 0,1,2,\ldots$, сходящейся при $k \to \infty$ к точному решению $\mathbf{x}^*$.

Различают одношаговые и многошаговые итерационные методы. В m-шаговом итерационном методе при построении приближения $\mathbf{x}^k$ используются приближения на m предыдущих шагах. Общую схему наиболее распространенных на практике так называемых неявных одношаговых методов можно представить в виде

$$\mathbf{B}_{k+1} \frac{\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k}{t_{k+1}} + \mathbf{F}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{0}, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

при этом $\mathbf{B}_{k+1}$ – [nxn]-неособенная матрица, задающая итерационный процесс, t_{k+1} – числовой параметр. Построение (k+*1*)-го приближения в этой схеме осуществляется посредством решения линейной системы

$$\mathbf{B}_{k+1}\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}^k), \tag{2.2}$$

где

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{B}_{k+1}\mathbf{x}^k - t_{k+1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^k).$$

Если $\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{I}$ для всех k, здесь $\mathbf{I}$ – [nxn]-единичная матрица, то итерационный метод называют явным, так как в этом случае $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)$. Метод является стационарным, когда $\mathbf{B}_{k+1}$ и t_{k+1} не зависят от номера итерации и нестационарным в противном случае.

Качество итерационных методов оценивают по скорости сходимости, определяя ее как степень уменьшения нормы вектора погрешности при выполнении одного итерационного шага:

$$\left\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\right\| \le q\left\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\right\|^p,$$

где q – коэффициент сжатия, p – порядок метода. Если $p = 1$, то итерационный метод имеет линейную сходимость, при $p = 2$ – квадратичную сходимость.

Наиболее часто применяемым на практике при решении систем нелинейных алгебраических уравнений является метод Ньютона, который сочетает в себе квадратичную сходимость с удобством реализации. Он основан на линеаризации системы (2.1) с помощью разложения $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ в ряд Тейлора.

Предположим, что известно k-ое приближение $\mathbf{x}^k$ к точному решению $\mathbf{x}^*$ системы (2.1). Следующее $(k+1)$-ое приближение в методе Ньютона вычисляется как

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta\mathbf{x}^k, \tag{2.3}$$

при этом вектор поправки $\Delta\mathbf{x}^k$ находится путем решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^k)\Delta\mathbf{x}^k = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^k), \tag{2.4}$$

где $\mathbf{J}$ – [nxn]-матрица Якоби, определяемая следующим образом:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 & \cdots & \partial f_1/\partial x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \partial f_n/\partial x_1 & \partial f_n/\partial x_2 & \cdots & \partial f_n/\partial x_n \end{bmatrix}.$$

Из сравнения соотношений (2.2) и (2.4) следует, что метод Ньютона является одношаговым, неявным, нестационарным итерационным правилом.

На каждом шаге итерационного ньютоновского процесса необходимо вычислить вектор невязки $\mathbf{F}(\mathbf{x}^k)$, матрицу Якоби $\mathbf{J}(\mathbf{x}^k)$, решить систему линейных алгебраических уравнений (2.4) относительно вектора - поправки $\Delta\mathbf{x}^k$, определить новое приближение $\mathbf{x}^{k+1}$ по уточняющей формуле (2.3).

Критерием завершения итерационного процесса является одновременное выполнение условий:

$$d_1 \le e_1 \quad \text{и} \quad d_2 \le e_2, \tag{2.5}$$

где

$$d_1 = \max_{1\le i\le n} \left| f_i(\mathbf{x}^k) \right|,$$

$$d_2 = \begin{cases} \max\limits_{1\le i\le n} \left| x_i^{k+1} - x_i^k \right|, & \left| x_i^{k+1} \right| < 1, \\ \max\limits_{1\le i\le n} \left| \dfrac{x_i^{k+1} - x_i^k}{x_i^{k+1}} \right|, & \left| x_i^{k+1} \right| \ge 1, \end{cases}$$

e_1, e_2 – константы, определяющие погрешность решения (они задаются в качестве исходных данных). Эти условия свидетельствуют о том, что в точке приближенного решения задачи становятся меньше заданных как норма вектора невязки, так и норма вектора изменения решения на одной итерации.

Для предотвращения зацикливания следует задать также предельное число итераций, по достижению которого необходимо принудительно завершить вычисления с сообщением $IER = 2$. Причиной зацикливания может быть погрешность решения линейной системы, не позволяющая достичь требуемую в соответствии с условием (2.5) точность.

Описание алгоритма

Алгоритм решения систем нелинейных алгебраических уравнений методом Ньютона реализуется следующим образом:

Алгоритм 2.1

1. Ввести начальное приближение $\mathbf{x}^0$, параметры e_1 и e_2, предельное число итераций NIT и положить $k = 1$.

2. Вывести на экран шапку таблицы, содержащей информацию о сходимости метода: номер итерации, d_1 и d_2.
3. Вычислить вектор невязки:

$$\mathbf{F}^k = \mathbf{F}(\mathbf{x}^k) .$$

4. Вычислить матрицу Якоби:

$$\mathbf{J}^k = \mathbf{J}(\mathbf{x}^k) .$$

5. Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{J}^k \Delta\mathbf{x}^k = -\mathbf{F}^k .$$

6. Уточнить решение:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta\mathbf{x}^k .$$

7. Вычислить по формулам (2.5) и вывести на экран текущие значения d_1 и d_2, текущий номер итерации.
8. Проверить критерий (2.5) завершения итерационного процесса. Если этот критерий выполняется, то выйти из программы.
9. Проверить условие $k \geq NIT$. Если это условие имеет место, то выйти из итерационного процесса с сообщением $IER = 2$.
10. Положить $k = k + 1$ и перейти к п. 3.

Задание

1.Написать, отладить и исследовать на задаче, предложенной преподавателем (см. табл. 2.1), программу численного решения систем нелинейных алгебраических уравнений методом Ньютона. Вычисления выполнить для $e_1 = 10^{-9}$, $e_2 = 10^{-9}$ от начального приближения, приведенного в таблице в порядке $x_1^0, x_2^0, \mathbf{K}$.

Содержание электронного отчета

1.Текст программы;
2.Задача, результаты ее решения, характеристики $d_1(k)$, $d_2(k)$, представленные таблично:

k	d_1	d_2
1		
2		
M		

Таблица 2.1

№ п/п	Система уравнений	Начальное приближение
1.	$\ln(1+\frac{x_1+x_2}{5})-\sin\frac{x_2}{3}-x_1+1.1=0;$ $\cos\frac{x_1x_2}{6}-x_2+0.5=0$	(1; 1)
2.	$x_1-x_2-6\lg x_1-1=0;$ $x_1-3x_2-6\lg x_2-2=0$	(0.5; 0.2)
3.	$x_1^2x_2^2-3x_1^2-6x_2^3+8=0; \quad x_1^4-9x_2+2=0$	(-1.5; 1.5) (-1; 1)
4.	$\sin x_1-x_2=1.32; \quad \cos x_2-x_1=-0.85$	(1; 0)
5.	$x_1^3+x_2^3-6x_1+3=0;$ $x_1^3-x_2^3-6x_2+2=0$	(1; 1) (2; 1.5) (-3; -1.5)
6.	$2x_1^3-x_2^2-1=0; \quad x_1x_2^3-x_2-4=0$	(1; 1)
7.	$\cos(0.4x_2+x_1^2)+x_2^2+x_1^2-1.6=0;$ $1.5x_1^2-x_2^2/0.36-1=0$	(1; -1) (-1; 1)
8.	$2x_1^2-x_1x_2-5x_1+1=0;$ $x_1+3\lg x_1-x_2^2=0$	(3; 2) (3; -2)
9.	$1.5x_1^3-x_2^2-1=0; \quad x_1x_2^3-x_2-4=0$	(1; 1)
10.	$\sin(x_1+1)-x_2=1; \quad 2x_1+\cos x_2=2$	(1; 1)
11.	$x_1^2-x_2^2-1=0; \quad x_1x_2^3-x_2-3=0$	(1; 1) (-1; -1)
12.	$x_1^2-x_2+1=0; \quad x_1-\cos(\frac{p}{2}x_2)=0$	(1; 0)
13.	$x_1^7-5x_1^2x_2^4+1510=0; \;\; x_2^3-3x_1^4x_2-105=0$	(1; 1) (1; -1)
14.	$\mathrm{tg}(x_1x_2+0.2)-x_1^2=0; \quad 0.5x_1^2+2x_2^2=1$	(1; 1)

Продолжение таблицы 2.1

№ п/п	Система уравнений	Начальное приближение
15.	$x_1^3 - x_2^2 - 1 = 0; \quad x_1 x_2^3 - x_2 - 4 = 0$	(1.2; 1.3)
16.	$2x_1 - \sin\dfrac{x_1 - x_2}{2} = 0; \quad 2x_2 - \cos\dfrac{x_1 + x_2}{2} = 0$	(0; 1)
17.	$\cos\dfrac{x_1 - x_2}{3} - 2x_2 = 0; \quad \sin\dfrac{x_1 + x_2}{3} - 2x_1 = 0$	(1; 1)
18.	$e^{x_1 x_2} - x_1^2 + x_2 = 1.1; \quad (x_1 + 0.5)^2 + x_2^2 = 1$	(1; 1) (-1.; 1)
19.	$\sin(x_1 + x_2) - 1.3x_1 = 0.1; \quad x_1^2 + x_2^2 = 1$	(1; 1) (-1; -1)
20.	$x_1 + x_1^2 - 2x_2 x_3 - 0.1 = 0;$ $x_2 - x_2^2 + 3x_1 x_3 + 0.2 = 0;$ $x_3 + x_3^2 + 2x_1 x_2 - 0.3 = 0$	(0; 0; 0)
21.	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0; \quad 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_3 = 0;$ $3x_1^2 - 4x_2 + x_3 = 0$	(1; 1; 1)
22.	$\lg\dfrac{x_2}{x_3} - x_1 + 1 = 0; \quad \dfrac{x_1 x_2}{20} - x_3 + 2 = 0$ $2x_1^2 + x_2 - x_3 - 0.4 = 0;$	(1; 2.2; 2)
23.	$x_1^2 + x_2^3 + x_3^3 - 1 = 0; \quad 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_3 = 0;$ $3x_1^2 - 4x_2 + x_3 = 0$	(1; 1; 1)
24.	$5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 15 = 0;$ $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 - 17 = 0;$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - 9 = 0;$ $x_1 x_3 + x_2 x_4 + x_1^3 - 8 = 0$	(1; 1; 1; 1) (10; 10; 10; 10) (100; 100; 100; 100)