Лабораторная работа № 1

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАУССА С ВЫБОРОМ ГЛАВНОГО ЭЛЕМЕНТА

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: изучить и программно реализовать на языке высокого уровня метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу, исследовать его точность и эффективность на тестовых задачах.

Метод Гаусса

К необходимости решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) приводят многие прикладные задачи физики, радиофизики, электроники, других областей науки и техники. По этой причине разработке и исследованию методов решения СЛАУ уделяется повышенное внимание.

Для решения СЛАУ используются как прямые методы, позволяющие получить в случае отсутствия ошибок округления точное решение за конечное, заранее известное количество арифметических операций, так и итерационные методы. Итерационные методы используются для решения СЛАУ большого порядка, а также для уточнения решения, полученного прямыми методами.

Из прямых методов популярным у вычислителей является метод Гаусса (исключения переменных) с выбором главного (максимального по модулю) элемента в столбце. Поиск главного элемента позволяет, с одной стороны, ограничить рост коэффициентов на каждом шаге исключения и, следовательно, уменьшить влияние ошибок округления на точность решения, с другой, обеспечить для невырожденных систем выполнение условия $a_{kk} \neq 0$ (отсутствие аварийных остановов вследствие деления на нуль).

Пусть задана система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ &\dots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Процесс ее решения методом Гаусса делится на два этапа, называемых соответственно прямым и обратным ходом.

На первом этапе система (1.1) путем последовательного исключения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сводится к эквивалентной системе с верхней треугольной матрицей коэффициентов:

$$
\begin{aligned}
x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + \ldots + u_{1,n-1}x_{n-1} + u_{1n}x_n &= q_1, \\
x_2 + u_{23}x_3 + \ldots + u_{2,n-1}x_{n-1} + u_{2n}x_n &= q_2, \\
&\ldots \\
x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n &= q_{n-1}, \\
x_n &= q_n.
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

Исключение переменной x_k (k-й шаг прямого хода Гаусса) включает вычисление k-й строки треугольной матрицы:

$$u_{kj} = a_{kj}^{(k-1)} \big/ a_{kk}^{(k-1)}; \;\; j = \overline{k+1, n}, \tag{1.3}$$

k-го свободного члена:

$$q_k = b_k^{(k-1)} \big/ a_{kk}^{(k-1)}, \tag{1.4}$$

преобразование уравнений системы (1.1) с номерами $k+1, k+2, \ldots, n$:

$$
\begin{gathered}
a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)}u_{kj}; \; b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)}q_k, \\
i = \overline{k+1, n}; \;\; j = \overline{k+1, n}.
\end{gathered} \tag{1.5}
$$

В соотношениях (1.5) переменной внутреннего цикла является *j*, переменной внешнего цикла – *i*. Полное число шагов, за которое выполняется прямой ход Гаусса, равно *n*, т. е. расчеты по формулам (1.3) ÷ (1.5) выполняются для $k = \overline{1, n}$.

На втором этапе (обратный ход Гаусса) решают систему (1.2):

$$x_n = q_n; \quad x_k = q_k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj} x_j; \quad k = \overline{n-1, 1}, \tag{1.6}$$

последовательно определяя неизвестные $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$.

Описание алгоритма

Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу выглядит следующим образом:

Алгоритм 1.1

1. Присвоить компонентам массива перестановок $IOR(k)$ исходные значения:

$$IOR(k) = k, \quad k = \overline{1, n},$$

принять, после этого, $k = 1$.

2. Найти индекс p, для которого

$$|a_{mk}| \ge |a_{lk}|, \quad m = IOR(p), \quad l = IOR(i), \quad i = \overline{k, n}.$$

Это можно сделать так:

2.1. Положить AKK=0;

2.2. Вычислить в цикле ($i = \overline{k, n}$):

2.2.1. $l = IOR(i)$;

2.2.2. Если $|a[l, k]| < AKK$, то перейти к п. 2.2.1;

2.2.3. $M = l; \quad p = i; \quad AKK = |a[l, k]|$.

3. Поменять местами значения $IOR(k)$ и $IOR(p)$, если $p \ne k$:

$$IOR(p) = IOR(k); \quad IOR(k) = M$$

и выбрать ведущий элемент

$$AMAIN = a[M, k].$$

Если $AMAIN = 0$, то выйти из программы с информацией об ошибке ($IER = 1$).

4. Исключить переменную x_k с помощью соотношений (1.3) ÷ (1.5) (прямой ход Гаусса):

4.1. $a[M, j] = a[M, j] / AMAIN; \quad j = \overline{k, n}$;

4.2. $b[M] = b[M] / AMAIN$;

4.3. Вычислить в цикле по i ($i = \overline{k+1, n}$):

4.3.1. $l = IOR(i)$;

4.3.2. $a[l, j] = a[l, j] - a[l, k]a[M, j]; \quad j = \overline{k+1, n}$;

4.3.3. $b[l] = b[l] - a[l, k]b[M]$.

5. Увеличить значение k на единицу и вернуться к п. 2, если $k < n$, иначе завершить прямой ход, вычислив

$$l = IOR[n]; \quad b[l] = b[l] / a[l, n]; \quad x[n] = b[l].$$

Если $a[l, n] = 0$, то выйти из программы с сообщением $IER = 1$.

6. Выполнить в цикле для $k = \overline{n-1, 1}$ (обратный ход Гаусса):

$$l = IOR[k]; \quad x[k] = b[l] - \sum_{j=k+1}^{n} a[l, j]x[j].$$

Сделаем комментарии к описанному алгоритму. Выбор ведущего элемента a_{kk} предполагает перестановку строк системы (1.1). Программно это нетрудно сделать, переставляя соответствующие строки матрицы коэффициентов и соответствующие компоненты вектора свободных членов. Подобную операцию можно и не выполнять, если ввести вспомогательный одномерный массив перестановок IOR. Первоначально в пункте 1 алгоритма его элементам $IOR(k)$, $k = \overline{1, n}$, присваиваются исходные значения $IOR(k) = k$. Обратиться к элементу a_{kj} матрицы коэффициентов с привлечением массива перестановок, значит использовать элемент $a[l, j], l = IOR(k)$, так как первоначально $IOR(k) = k$. Если $IOR(k) = p$, то обращение к элементам $a[l, j], l = IOR[k]$, приводит к использованию коэффициентов $p-$го уравнения системы. Следовательно, вместо перестановок строк матрицы коэффициентов достаточно поменять местами $IOR[k]$ и $IOR[p]$. Такой подход реализован в приведенном алгоритме при выборе ведущего элемента.

Выбор ведущего элемента по столбцу обеспечивает выполнение условия $a_{kk} \neq 0$, если матрица решаемой системы не вырождена. Сообщение $IER = 1$ в пунктах 3 и 5 алгоритма свидетельствует о вырожденности матрицы.

Задание

1. Написать, отладить и исследовать на задачах (табл. 1.1), предложенных преподавателем, программу численного решения систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу.
2. Вычислить для каждой задачи вектор невязки (для этого до начала выполнения прямого хода Гаусса матрицу $\mathbf{A}$ и вектор $\mathbf{b}$ необходимо сохранить)

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b}$$

и оценить его норму

$$d = \max_{1 \le i \le n} |F_i|.$$

Содержание электронного отчета

1. Текст программы.
2. Задачи, результаты их решения, вычисленные значения нормы вектора невязки.

Таблица 1.1

№	Матрица коэффициентов **A**			Вектор **b**
1	6	13	-17	2
	13	29	-38	4
	-17	-38	50	-5
2	1	2	1	1
	-1	-2	2	1
	0	1	1	2
3	2.30	5.70	-0.80	-6.49
	3.50	-2.70	5.30	19.20
	1.70	2.30	-1.80	-5.09
4	2.75	1.78	1.11	15.71
	3.28	0.71	1.15	43.78
	1.15	2.70	3.58	37.11
5	8.64	1.71	5.42	10.21
	-6.39	4.25	1.84	3.41
	4.21	7.92	-3.41	12.29
6	21.547	-95.510	-96.121	-49.930
	10.223	-91.065	-7.343	-12.465
	51.218	12.264	86.457	60.812
7	2.60	-4.50	-2.00	19.07
	3.00	3.00	4.30	3.21
	-6.00	3.50	3.00	-18.25
8	2.31	31.49	1.52	40.95
	4.21	22.42	3.85	30.24
	3.49	4.85	28.72	42.81
9	2.50	-3.00	4.60	-1.05
	-3.50	2.60	1.50	-14.46
	-6.50	-3.50	7.30	-17.73
10	0.14	0.24	-0.84	1.11
	1.07	-0.83	0.56	0.48
	0.64	0.43	-0.38	-0.83
11	2.74	-1.18	3.17	2.18
	1.12	0.83	-2.16	-1.15
	0.81	1.27	0.76	3.23
12	1.80	2.50	4.60	2.20
	3.10	2.30	-1.20	3.60
	4.51	-1.80	3.60	-1.70

Продолжение табл. 1.1

№	Матрица коэффициентов **A**				Вектор **b**
13	2.0	1.0	-0.1	1.0	1.0
	0.4	0.5	4.0	-8.5	2.0
	0.3	-1.0	1.0	5.2	3.0
	1.0	0.2	2.5	-1.0	-1.0
14	2.21	3.65	1.69	6.99	-8.35
	8.30	2.62	4.10	1.90	-10.65
	3.92	8.45	7.78	2.46	12.21
	3.77	7.21	8.04	2.28	15.45
15	3.81	0.25	1.28	0.75	4.21
	2.25	1.32	4.58	0.49	6.47
	5.31	6.28	0.98	1.04	2.38
	9.39	2.45	3.35	2.28	10.48
16	7.90	5.60	5.70	-7.20	6.68
	8.50	-4.80	0.80	3.50	9.95
	4.30	4.20	-3.20	9.30	8.60
	3.20	-1.40	-8.90	3.30	1.00
17	0.1582	1.1675	0.1768	0.1871	1.6471
	0.1968	0.2071	1.2168	0.2271	1.7471
	0.2368	0.2471	0.2568	1.2671	1.8471
	1.1161	0.1254	0.1397	0.1490	1.5471
18	4.11	-1.26	-5.99	1.29	-0.75
	-1.26	2.00	4.00	0.00	1.08
	3.18	-1.97	0.49	-1.00	3.38
	1.29	3.81	-1.56	0.00	0.87
19	1	1	1	1	10
	1	2	-2	3	11
	2	0	1	0	5
	3	1	2	2	19
20	2	3	11	5	2
	1	1	5	2	1
	2	1	3	2	-3
	1	1	3	4	-3