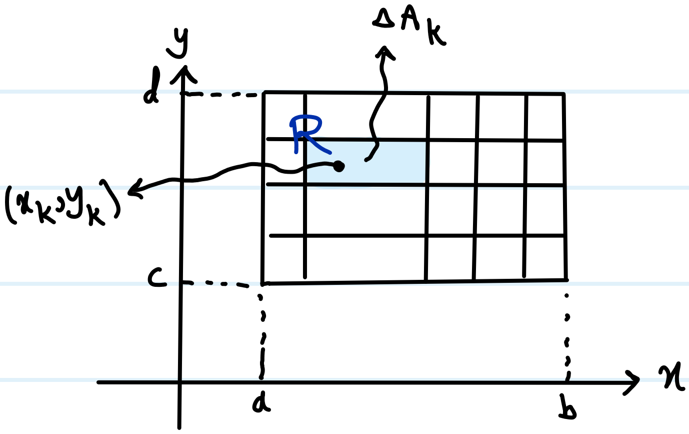
جلسه بیست و دوم

یادآوری



$R = [a,b] \times [c,d]$

$P: P_1 \times P_2$

مجموع ریمان

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_k f(x_k, y_k)\Delta A_k = \iint_R f(x,y)\, dA = \iint_R f(x,y)\, dx\, dy$$

شرط کافی: پیوستگی f روی R

* انتگرال های چندگانه روی نواحی کراندار

مشابه قبل، با در نظر گرفتن شبکه‌ای از خطوطی که به‌موازات محورهای x و y رسم شده‌اند و از روی ناحیهٔ R می‌گذرند، ناحیهٔ کراندار و دلخواه R را به زیرمستطیل هایی افراز کنیم. اما این بار بایستی تنها مستطیل هایی را در نظر بگیریم که تماماً درون ناحیهٔ R قرار دارند. حال اگر همانند قبل، مستطیل های حاصل از افراز ناحیهٔ R را اندیس گذاری کرده و مساحت مستطیل k-ام را با نماد ΔA_k نمایش دهیم، آنگاه یک مجموع ریمان تابع دو متغیرهٔ $f(x,y)$ را روی ناحیهٔ R می‌توانیم به‌صورت زیر محاسبه نماییم:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k$$

که در آن (x_k, y_k) مختصات نقطه‌ای دلخواه از مستطیل k-ام است.

دراین‌صورت مقدار انتگرال دوگانهٔ تابع $f(x,y)$ را روی ناحیهٔ R به‌صورت زیر خواهیم داشت:

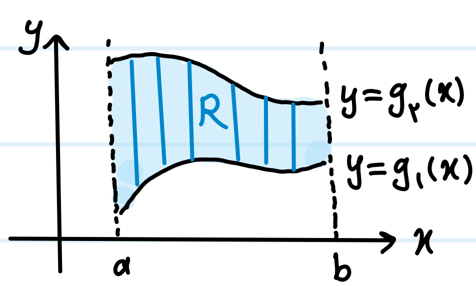
$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k = \iint f(x,y)\,dA$$

(عنصر سطح = area element)

* نکته (شکل کلی تر قضیهٔ فوبینی): فرض کنید $f(x,y)$ تابعی پیوسته روی ناحیهٔ کراندار R باشد. دراین‌صورت:

(۱) اگر برای توابع پیوستهٔ g_1 و g_2 روی بازهٔ بستهٔ $[a,b]$، ناحیهٔ R را به‌صورت زیر داشته باشیم:

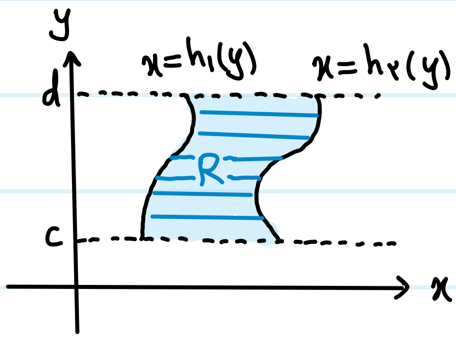
$$R = \{(x,y) \mid x \in [a,b],\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$$



آنگاه داریم:

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx}$$

(۲) اگر برای توابع پیوسته h_1 و h_2 روی بازهٔ بستهٔ $[c,d]$،



ناحیه R را به صورت زیر داشته باشیم:

$$R = \{(x,y) \mid h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y) \quad , \quad y\in[c,d]\}$$

آنگاه داریم:

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy}$$

* روش محاسبهٔ مقدار انتگرال دوگانه $\iint_R f(x,y)\,dA$: به دو شیوهٔ کلی زیر می‌توانیم مقدار انتگرال دوگانهٔ

تابع دو متغیرهٔ $f(x,y)$ را روی ناحیه کراندار R محاسبه نمائیم.

الف) روش برش های عمودی روی ناحیهٔ R : برای محاسبهٔ مقدار $\iint_R f(x,y)\,dA$ می‌توانیم از

انتگرال گیری تودرتو، ابتدا نسبت به y و سپس نسبت به x به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

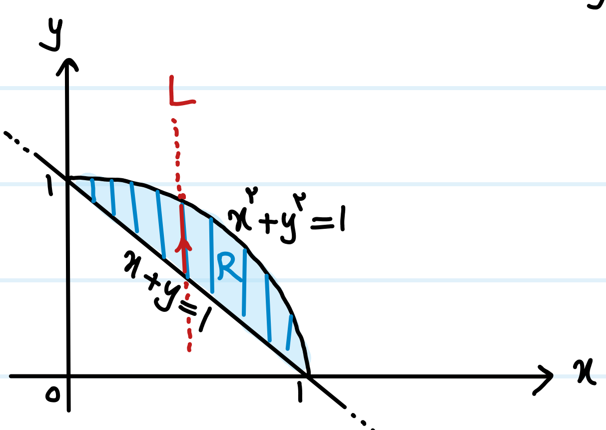
گام اول: مشخص کردن ناحیهٔ کراندار R در صفحهٔ (x,y) : برای این کار لازم است منحنی هایی که معرّف

مرز ناحیهٔ R هستند (یعنی توابع پیوستهٔ g_1 و g_2 در قضیهٔ فوبینی)

گام دوم: تعیینِ حدود انتگرال گیری برای متغیرِ y به عنوان توابعی برحسب x : برای این منظور خطوطی مانند L را در نظر بگیرید که بر محور xها عمود بوده و از روی ناحیهٔ R می گذرد. نقاطی که خط L مرز ناحیهٔ R را قطع می کند بیانگر حدود متغیرِ y روی ناحیهٔ R است که این حدود را به عنوان توابعی برحسب x بیان می کنیم.

گام سوم: تعیینِ حدود انتگرال گیری برای متغیرِ x : برای این منظور بازه ای را برای متغیرِ x تعیین می کنیم که اگر خط L (در گام قبلی) را به موازات خودش (یعنی عمود بر محور x ها) روی بازهٔ تغییرات x حرکت دهیم، خط L از روی کلیهٔ نقاط ناحیه R عبور کند.

به عنوان مثال، اگر ناحیهٔ کراندار R را ناحیهٔ محصور بین نمودار های $x+y=1$ و $x^2+y^2=1$ در صفحهٔ (x,y) داشته باشیم، آنگاه مقدار انتگرال دوگانه $\iint_R f(x,y)\,dA$ را با استفاده از روش برش های عمودی می توان به صورت زیر محاسبه نمود:



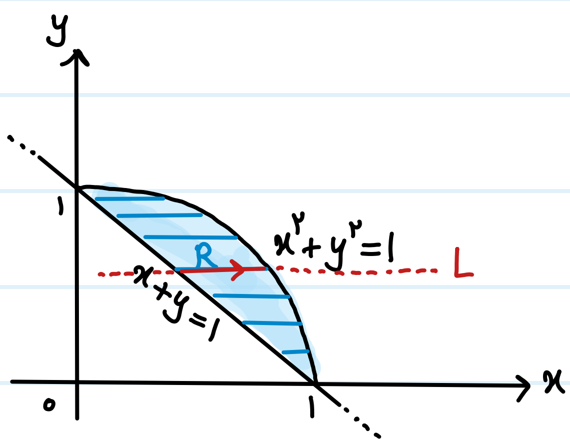
$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$$

ب) استفاده از روش برش های افقیِ ناحیهٔ R : برای محاسبهٔ $\iint_R f(x,y)\,dA$ می توانیم، برعکس روش قبلی، از انتگرال گیری تودرتو، ابتدا نسبت به x و سپس نسبت به y، به صورت زیر اقدام کنیم.

گام اول : مشخص کردن ناحیهٔ کراندار R در صفحهٔ (x, y) : برای این کار لازم است منحنی هایی که بیانگر مرز ناحیهٔ R هستند (یعنی توابع پیوستهٔ h_1 و h_2 در قضیهٔ فوبینی) را مشخص کنیم.

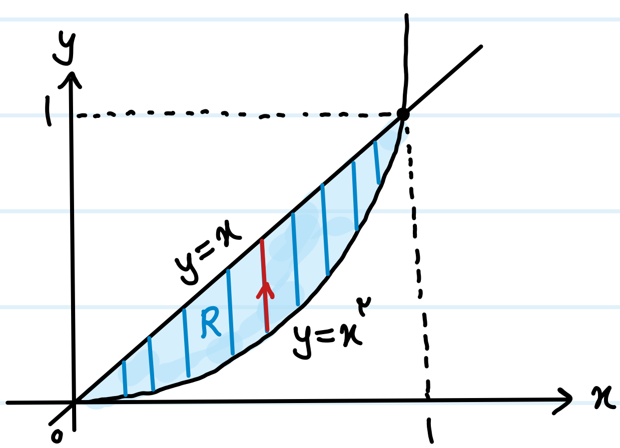
گام های دوم و سوم را مشابه به روش قبلی اما با خطوط افقی L (نه عمودی) که به موازات محور x ها قرار داشته و از روی ناحیهٔ R می گذرند، برمی داریم.

به عنوان مثال، مقدار $\iint_R f(x,y)\,dA$ را روی ناحیهٔ R (مطابق شکل) و با به کارگیری روش برش های افقی می توانیم به صورت زیر محاسبه کنیم:



$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=1-y}^{x=\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

* مثال: می خواهیم مقدار انتگرال $\iint_R f(x,y)\,dA$ را برای تابع $f(x,y) = xy^2$ روی ناحیهٔ R محصور بین نمودار توابع $y=x$ و $y = x^2$ در صفحهٔ (x,y)، به دو روش برش های عمودی و افقی محاسبه کنیم.



الف) روش برش های عمودی: ابتدا ناحیهٔ R را در صفحهٔ (x,y) مشخص می کنیم. برای این منظور لازم است محل برخورد نمودار تابع $y=x$ و $y=x^2$ را مشخص کنیم:

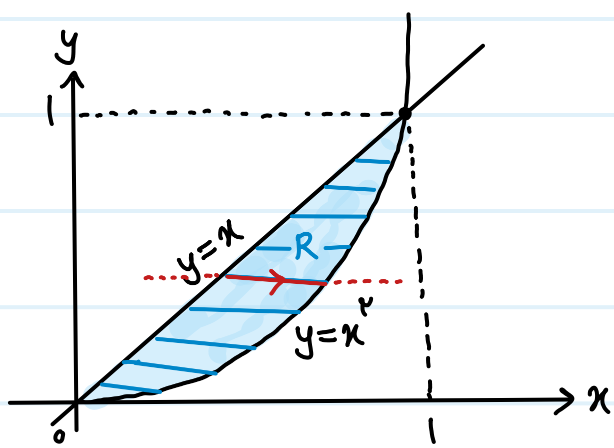
$$x=x^2 \Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow x=0 \;,\; x=1$$

در این صورت داریم:

$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_{x=0}^{x=1}\left(\int_{y=x^2}^{y=x} xy^2\,dy\right)dx=\int_{x=0}^{x=1}\left(x\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=x}dx$$

$$=\int_{x=0}^{x=1}\left(\frac{x^4}{3}-\frac{x^7}{3}\right)dx=\left(\frac{x^5}{15}-\frac{x^8}{24}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{15}-\frac{1}{24}=\frac{1}{40}$$

ب) روش برش های افقی: با انتخاب برش های افقی روی ناحیهٔ R، مقدار انتگرال دوگانه مورد نظر را می توانیم به صورت زیر محاسبه نماییم:



$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_{y=0}^{y=1}\left(\int_{x=y}^{x=\sqrt{y}} xy^2\,dx\right)dy=\int_{y=0}^{y=1}\left(\frac{y^3}{2}-\frac{y^4}{2}\right)dy$$

$$=\left(\frac{y^4}{8}-\frac{y^5}{10}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1}=\frac{1}{8}-\frac{1}{10}=\frac{1}{40}$$

* ویژگی های انتگرال های دوگانه: اگر $f(x,y)$ و $g(x,y)$ توابعی پیوسته روی ناحیهٔ کراندار R باشند، آنگاه روابط زیر همواره برقرارند:

(۱) برای هر عدد ثابت $c \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\iint_R c\, f(x,y)\, dA = c \iint_R f(x,y)\, dA$$

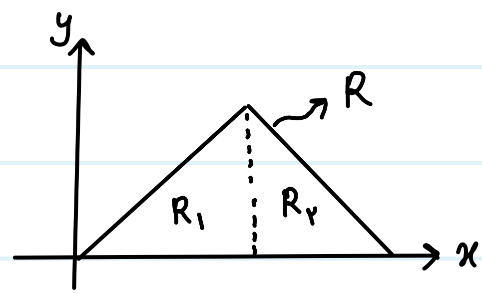
(۲)

$$\iint_R \big(f(x,y) \pm g(x,y)\big)\, dA = \iint_R f(x,y)\, dA \pm \iint_R g(x,y)\, dA$$

(۳) الف. اگر روی ناحیهٔ R داشته باشیم $f(x,y) \geqslant 0$ آنگاه $\iint_R f(x,y)\, dA$.

ب. اگر روی ناحیهٔ R داشته باشیم $f(x,y) \geqslant g(x,y)$ آنگاه $\iint_R f(x,y)\, dA \geqslant \iint_R g(x,y)\, dA$

(۴) اگر ناحیهٔ R را به صورت اجتماع نواحی R_1 و R_2 داشته باشیم که به جز در مرزشان هیچ اشتراکی باهم نداشته باشند آنگاه داریم:



$$\iint_R f(x,y)\, dA = \iint_{R_1} f(x,y)\, dA + \iint_{R_2} f(x,y)\, dA$$