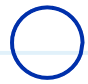
جلسه سیزدهم

* Plane curves خم‌های صفحه‌ای 

Space curves خم‌های فضایی 

* نکته (تمرین مروری): فرض کنید $t \longmapsto \vec{r}(t)$ مسیر حرکت ذره‌ای متحرک در فضا باشد. در این صورت می‌توان دید بردار شتاب این ذرهٔ متحرک به صورت زیر قابل ارائه است:

$$\vec{a}(t)=\vec{r}''(t)=\underbrace{v'(t)\,\vec{T}(t)}_{\text{شتاب مماس}}+\underbrace{K(t)\,\big(v(t)\big)^{2}\,\vec{N}(t)}_{\text{شتاب نرمال / مرکزگرا}}$$

که در آن $v(t):=\|\vec{v}(t)\|=\|\vec{r}'(t)\|$ برابر اندازه سرعت حرکت ذره در هر لحظه می‌باشد.

دلیل: می‌دانیم بردار مماس یکه بر منحنی حرکت ذره متحرک در هر لحظه عبارتست از:

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}\Longrightarrow \vec{r}'(t)=v(t)\,\vec{T}(t) \qquad (1)$$

در نتیجه با به‌کارگیری قوانین مشتق‌گیری، داریم:

$$\vec{a}(t)=\vec{r}''(t)=\frac{d}{dt}\vec{r}'(t)\overset{(1)}{=}\frac{d}{dt}\Big(v(t)\,\vec{T}(t)\Big)=v'(t)\,\vec{T}(t)+v(t)\,\vec{T}'(t) \qquad (2)$$

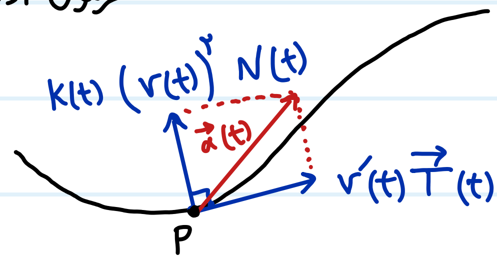
از طرفی می‌دانیم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{بردار نرمال یکه}=\vec{N}(t)=\dfrac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} \\[2em] \text{تابع انحناء}=K(t)=\dfrac{1}{\|\vec{v}(t)\|}\,\|\vec{T}'(t)\|=\dfrac{1}{v(t)}\,\|\vec{T}'(t)\| \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \vec{T}'(t)=\|\vec{T}'(t)\|\,\vec{N}(t)=K(t)\,v(t)\,\vec{N}(t)$$

با جایگذاری در رابطه ②

فرمول ادعا شده، اثبات می‌شود



(ادامه مبحث) انحنا / خمیدگی یک خم

هدف: قصد داریم به مطالعهٔ خم های صفحه‌ای (یعنی خم هایی که تماماً در یک صفحه قرار دارند) بپردازیم.

از آن‌جا که دوران یا انتقال یک خم تغییری در ماهیت و شکل هندسی خم ایجاد نمی‌کند، برای سادگی فرض می‌کنیم خم هموار صفحه‌ای ما خمی در صفحهٔ دو بعدی اقلیدس $\mathbb{R}^2$ با دستگاه مختصات (x,y) باشد؛ لذا اگر C یک خم هموار صفحه‌ای باشد، آنگاه یک پارامتری سازی برای خم C را می‌توان توسط تابعی برداری با ضابطهٔ $\vec r(t)=x(t)\hat i+y(t)\hat j$ در صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ ارائه نمود.

* انحنای نمودار تابع $y=f(x)$ در صفحهٔ $\mathbb{R}^2$:

فرض کنید تابع $y=f(x)$ تابعی تا دو مرتبه مشتق‌پذیر باشد (یعنی y'' وجود داشته باشد). می‌دانیم نمودار تابع $y=f(x)$ را در صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ با مختصات دکارتی (x,y) می‌توانیم توسط تابع برداری $\vec r(x)=x\hat i+f(x)\hat j$ پارامتری سازی کنیم. در این صورت با به کارگیری فرمول محاسبهٔ تابع انحنای یک خم برحسب پارامتر دلخواه x، یعنی فرمول $K=\frac{1}{|\vec v|}\left\|\frac{d\vec T}{dx}\right\|$ که در آن $\vec v=\frac{d\vec r}{dx}$ و $\vec T=\frac{\vec v}{\|\vec v\|}$، با محاسباتی سرراست نتیجه می‌گیریم انحنای نمودار تابع $y=f(x)$ عبارت است از:

$$\boxed{K(x)=\frac{|f''(x)|}{\left(1+(f'(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}}} \quad (*)$$

این فرمول نشان می‌دهد مقدار انحنای نمودار تابع $y=f(x)$ در هر نقطه با قدر مطلق مشتق مرتبهٔ دوم تابع در آن نقطه ارتباطی مستقیم دارد. از این رو به عنوان مثال، انحنای هر خط دلخواهی به معادلهٔ $y=ax+b$

(برای اعداد ثابت دلخواه a, b) در تمامی نقاط برابر صفر است.

تمرین: تابع انحنای نمودار تابع $y=\ln(\cos x)$ را روی بازهٔ $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ بدست آورید.

پاسخ: به دو روش این تابع انحناء را می یابیم.

روش اول (استفاده از فرمول (*)): می دانیم انحنای نمودار تابع $y=f(x)$ عبارتست از:

$$K(x)=\frac{|f''(x)|}{\left(1+(f'(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

برای تابع $f(x)=\ln(\cos x)$ داریم:

$$f'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x \Longrightarrow f''(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$$

لذا از آنجا که داریم $1+\tan^2 x=\sec^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ لذا:

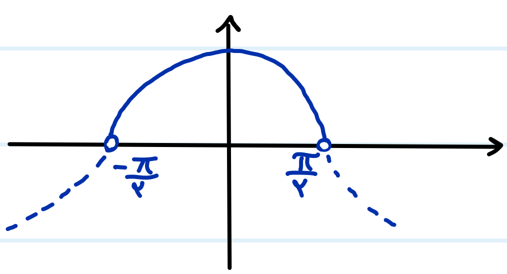
$$K(x)=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^3 x}} \Longrightarrow K(x)=\cos x$$

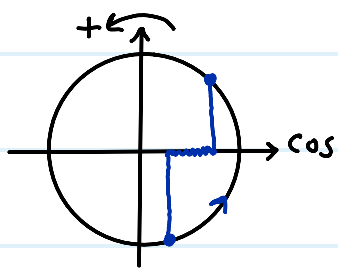
روش دوم (بکارگیری مستقیم از فرمول انحناء $K=\frac{1}{\|\vec{v}\|}\left\|\frac{d\vec{T}}{dx}\right\|$):

می دانیم نمودار تابع $y=\ln(\cos x)$ را می توان توسط تابع برداری $\vec{r}(x)=x\hat{i}+\ln(\cos x)\hat{j}$ پارامتری کرد.

از این رو داریم:

$$\vec{v}(x)=\frac{d\vec{r}}{dx}=1\hat{i}-(\tan x)\hat{j} \Longrightarrow \|\vec{v}(x)\|=\sqrt{1+\tan^2 x}=|\sec x|=\frac{1}{|\cos x|}=\frac{1}{\cos x}$$





از طرفی داریم:

$$\vec{T}(x) = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = (\cos x)\hat{i} - (\sin x)\hat{j}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{T}}{dx} = (-\sin x)\hat{i} - (\cos x)\hat{j} \Longrightarrow \left\|\frac{d\vec{T}}{dx}\right\| = 1$$

$$\Rightarrow K(x) = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\left\|\frac{d\vec{T}}{dx}\right\| = \cos x$$

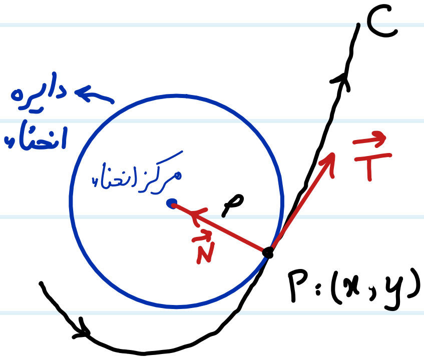
* دایرهٔ انحنا، برای خم های صفحه ای (Circle of Curvature)

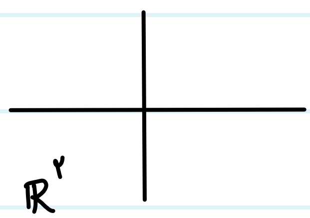
* تعریف (دایرهٔ انحنا): دایرهٔ انحنای یک خم هموار صفحه ای مثل C در نقطه ای مانند P روی C با انحنای ناصفر $K \neq 0$ عبارتست از دایره ای واقع در صفحه ای که خم هموار C در آن قرار دارد به طوری که:

(۱) این دایره خم C را در نقطهٔ P لمس کرده و در این نقطه بر آن مماس باشد (یعنی دایرهٔ انحنا و خم در نقطه تماس P دارای یک خط مماس مشترک باشند)؛

(۲) دایره و خم در نقطهٔ تماس P دارای انحنای یکسانی باشند؛

(۳) دایره در سمت تقعّر خم C در نقطهٔ P قرار داشته باشد.





* شعاع دایرهٔ انحنای خم صفحه ای C در نقطهٔ P را اصطلاحاً شعاع انحنای خم در نقطهٔ P نامیده و آن را با حرف یونانی ρ نمایش می دهند. از آنجا که شعاع و انحنای یک دایره با یکدیگر نسبت عکس دارند، با توجه به ویژگی (۲)، اندازهٔ شعاع انحنای خم C در نقطه تماس P برابر است با: $\boxed{\rho = \frac{1}{K}}$

که در آن K همان انحنای خم C در نقطهٔ P است.

در ضمن، مرکز دایرهٔ انحنا، را اصطلاحاً مرکز انحنای خم C در نقطه تماس P می نامیم.