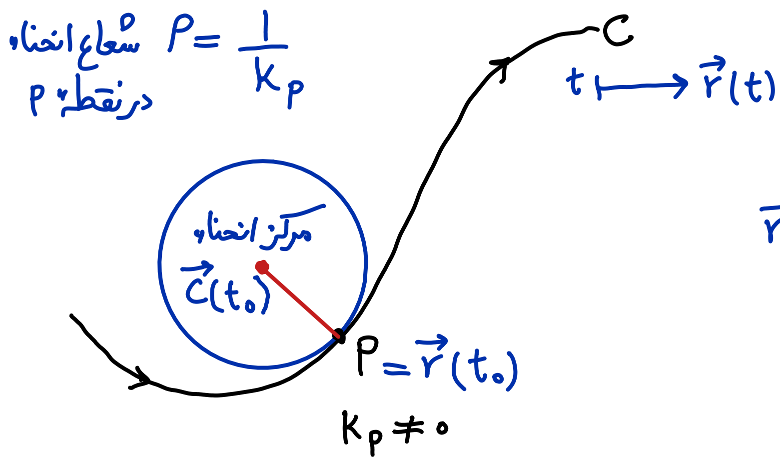
جلسه چهاردهم



یادآوری (دایره انحناء)

مرکز انحناء در نقطه P : $\vec r(t_0)+\dfrac{1}{K(t_0)}\vec N(t_0)$

(ادامه مبحث دایره انحناء)

تمرین: دایرهٔ انحنای نمودار سهمی $y=x^2$ را در مبدأ مختصات $\mathbb{R}^2$ بیابید.

راه حل: می دانیم نمودار سهمی $y=x^2$ را می توان توسط تابع برداری $\vec r(t)=t\hat i+t^2\hat j$ به ازای پارامتر $t=x$ پارامتری سازی کرد. لذا داریم:

$$\vec v=\frac{d\vec r}{dt}=\hat i+2t\hat j \Longrightarrow |\vec v|=\sqrt{1+4t^2}$$

$$\Longrightarrow \vec T(t)=\frac{\vec v(t)}{|\vec v(t)|}=(1+4t^2)^{-\frac{1}{2}}\hat i+2t(1+4t^2)^{-\frac{1}{2}}\hat j$$

$$\Longrightarrow \frac{d\vec T}{dt}=-4t(1+4t^2)^{-\frac{3}{2}}\hat i+\left(2(1+4t^2)^{-\frac{1}{2}}-8t^2(1+4t^2)^{-\frac{3}{2}}\right)\hat j$$

بنابراین در مبدأ مختصات، یعنی به ازای پارامتر $t=x=0$، انحنای نمودار سهمی $y=x^2$ برابر است با:

$$K(0)=\frac{1}{|\vec v(0)|}\left|\frac{d\vec T}{dt}(0)\right|=\frac{1}{\sqrt{1}}\sqrt{0^2+2^2}=2$$

(البته با به‌کارگیری فرمول $K(x)=\dfrac{\|f''(x)\|}{(1+(f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}$ برای تابع $f(x)=x^2$ نیز می‌توانستیم به نتیجه $K(0)=2$ برسیم.)

بنابراین شعاع انحنای نمودار سهمی $y=x^2$ در مبداء، برابر است با $\rho(0)=\dfrac{1}{K(0)}=\dfrac{1}{2}$.

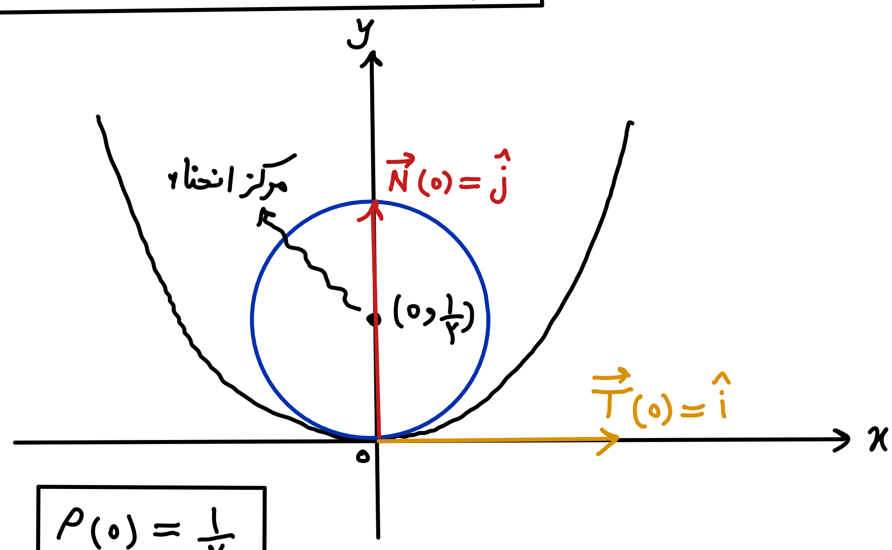
از طرفی در مبدأ داریم $t=0$، لذا $\vec{T}(0)=\hat{i}$ و $\vec{N}(0)=\dfrac{\vec{T}'(0)}{|\vec{T}'(0)|}=\dfrac{2\hat{j}}{2}=\hat{j}$ و بنابراین مرکز انحناء

عبارتست از نقطه‌ای که بردار مقابل مکانش را نشان می‌دهد:

$$\vec{r}(0)+\frac{1}{K(0)}\vec{N}(0)=\vec{0}+\frac{1}{2}\overrightarrow{(0,1)}=\overrightarrow{(0,\frac{1}{2})}$$

درنتیجه دایرهٔ انحنای نمودار سهمی $y=x^2$ در مبدأ مختصات، دایره‌ای با معادلهٔ زیر است:

$$\boxed{(x-0)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$



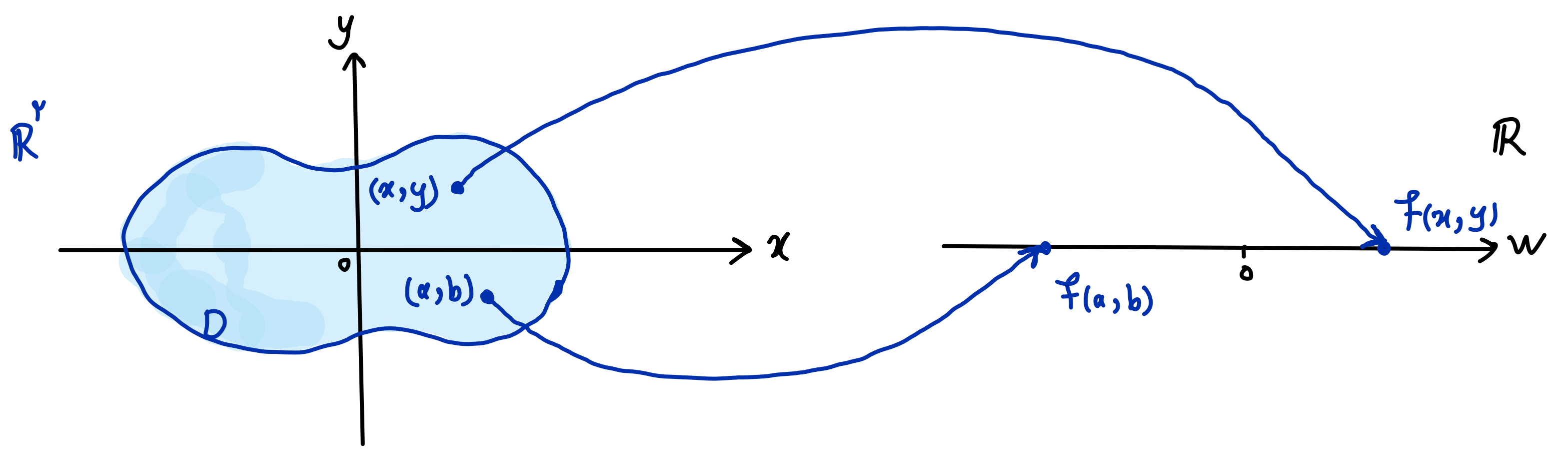
$$\boxed{\rho(0)=\frac{1}{2}}$$

توابع چند متغیره (Multi-variable Functions)

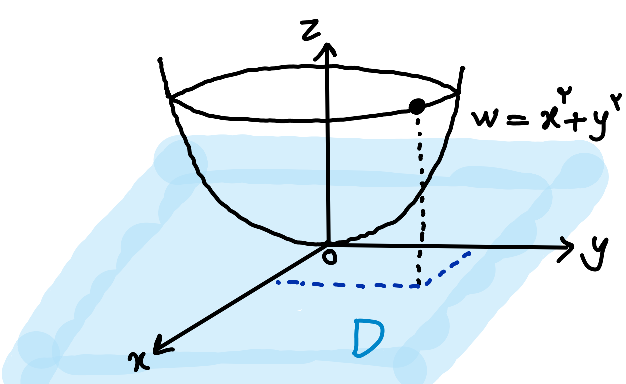
* تعریف (توابع چند متغیرهٔ حقیقی-مقدار): فرض کنید D مجموعه ای از n-تایی های مرتب $(x_1, \dots, x_n)$ از اعداد حقیقی $x_i \in \mathbb{R}$ باشد؛ یعنی $D \subseteq \mathbb{R}^n$. ضابطه یا قانونی به نام f که به هر عنصر از مجموعه D بتواند یک عدد حقیقیِ منحصر به فرد مانند $w = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ نظیر کند را یک تابع چند متغیره حقیقی-مقدار می‌نامیم. مجموعهٔ D را دامنهٔ تابع f و مجموعه کلیهٔ مقادیر تابع f یعنی مجموعهٔ $f(D) = \{f(x_1, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_n) \in D\} \subseteq \mathbb{R}$ را مجموعهٔ مقادیر تابع f می نامیم.

متغیر $w = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$، متغیر وابسته به n متغیر مستقل $x_1, x_2, \dots, x_n$ تحت ضابطهٔ تابع f نامیده می شود.

تذکر: درحالت $n=2$، یعنی وقتی $D \subseteq \mathbb{R}^2$، تابع دو متغیرهٔ حقیقی-مقدار f روی D در واقع، تابعی است که به صورت زیر عمل می‌کند:



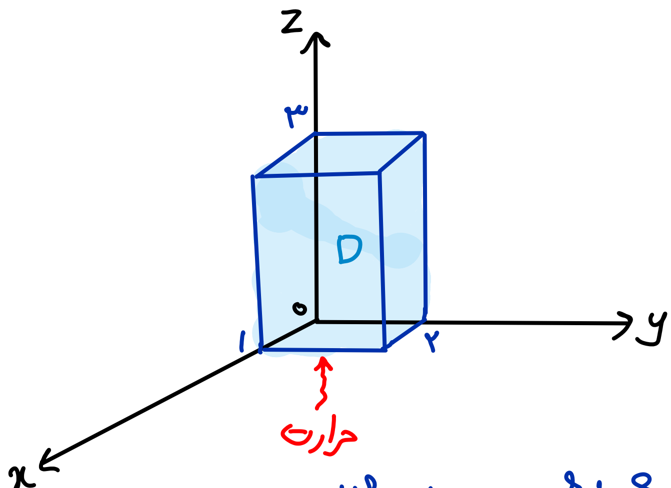
مثال ۱: تابع $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x,y) = x^2 + y^2$ یک تابع دو متغیره (حقیقی-مقدار) است و همانطور که می دانیم نمودار یا گراف این تابع، یعنی مجموعه نقاط $\{(x,y,w) \mid w = f(x,y) = x^2+y^2\}$ معرّف یک سهمی‌گون (استاندار) می باشد:



مثال ۲: قرار دهید $D=[0,1]\times[0,2]\times[0,3]\subseteq\mathbb{R}^3$ که مجموعهٔ کلیهٔ ۳-تایی های مرتبی به صورت زیر است:

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x\in[0,1]\ ,\ y\in[0,2]\ ,\ z\in[0,3]\}$$

در این صورت $f:D\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x,y,z)=x+e^{yz}$ یک تابع سه-متغیره (حقیقی-مقدار) روی D باشد.



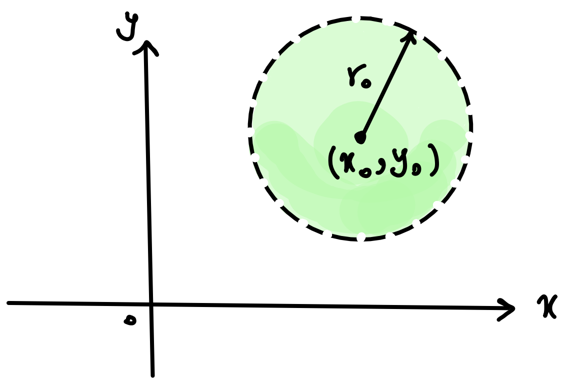
* تذکر: توابع چند متغیره می‌توانند تعابیر متفاوتی داشته باشند. به عنوان مثال، $f(x,y,z)$ می‌تواند معرّف درجهٔ گرمای نقطه‌ای به مختصات $(x,y,z)\in D$ باشد.

* در ادامهٔ مبحث توابع چند متغیره (حقیقی-مقدار)، روی توابع دو متغیره تمرکز خواهیم کرد. در واقع، کلیهٔ مفاهیم حسابان روی توابع دو متغیره را می‌توان به توابع چند متغیره تعمیم داد؛ لذا برای سادگی، در ادامه فقط در مورد توابع دو متغیره صحبت خواهیم کرد. $(n=2)$

* قرارداد (تعریف همسایگی یک نقطه): فرض کنید (x_0,y_0) نقطه‌ای دلخواه در صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ (با مختصات دکارتی) باشد. در این صورت، منظور ما از یک همسایگی حول نقطهٔ (x_0,y_0)، زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^2$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r_0\}\subset\mathbb{R}^2$$

که در آن $0<r_0$ یک عدد حقیقی مثبت و ثابت است. این مجموعه از نقاط را اصطلاحاً یک دیسک باز/گوی باز (open disk) به مرکز (x_0,y_0) و به شعاع r_0 نیز می‌نامند.



(یادآوری از ریاضی ۱)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \underset{L}{f(x_0)}| < \varepsilon$$

$\boxed{\text{پیوستگی } f \text{ در } x_0}$ L

حد

حد توابع دو متغیره حقیقی-مقدار:

تعریف: فرض کنیم تابع دو متغیره $f(x,y)$ در یک همسایگی از نقطه (x_0, y_0)، به جز احتمالاً در خود نقطه (x_0, y_0)، تعریف شده باشد. گوئیم وقتی (x,y) به نقطه (x_0, y_0) میل می‌کند، مقادیر تابع $f(x,y)$ به عدد حدی L میل می‌کنند و می‌نویسیم $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = L$ هرگاه برای هر عدد حقیقی $\varepsilon > 0$، متناظراً عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر نقطه (x,y) که در رابطه $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ صدق می‌کند، داشته باشیم: $|f(x,y) - L| < \varepsilon$.