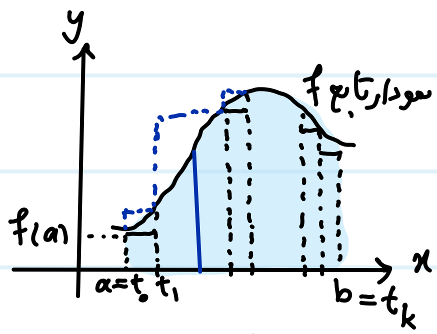
جلسه بیست و یکم

یادآوری (ریاضی ۱)

$f: D_f^{\subset \mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$



partion
(اِفراز)

$I = [a, b] \subset D_f \subset \mathbb{R}$

$P : \{ t_0 = a ,\ t_1 , \dots , t_{k-1} , t_k = b \}$ یک افراز از $[a, b]$

$\| P \| = max$ { طول زیربازه های حاصل از افراز P روی $[a,b]$ }

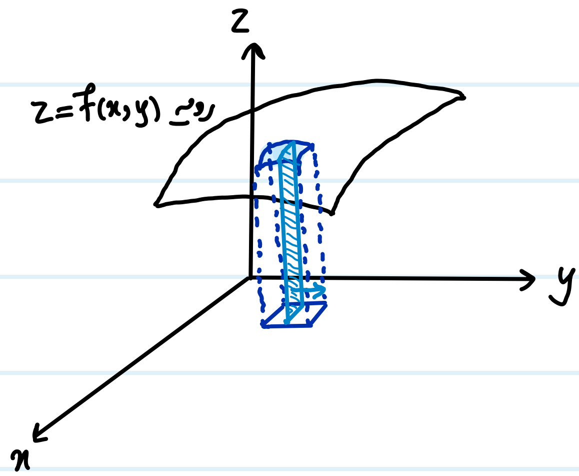
$\| P \| \longrightarrow 0$

$\lim_{\|P\| \to 0}$ (مجموع مساحت مستطیل های قرارگرفته روی زیربازه های حاصل از افراز P روی $[a,b]$) $= \int_a^b f(x)\, dx$

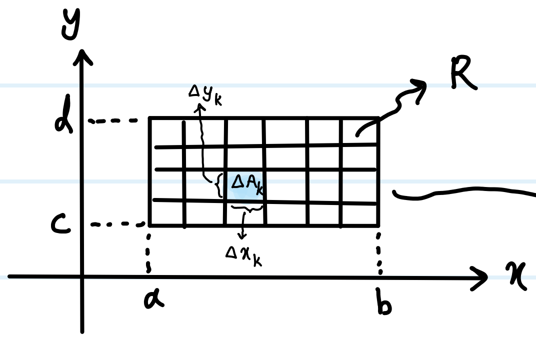
شرط کافی برای وجود حد بالا پیوستگی f روی $[a, b]$

یک مجموع ریمان تابع f روی $[a, b]$ متناظر با افراز P

$$f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto z=f(x,y)$$



$$R \subset D_f \subset \mathbb{R}^2$$



فرض: R یک ناحیه مستطیل شکل است

این شبکه از (زیر) مستطیل های داخل R را یک افراز از ناحیه $R \subset D_f \subset \mathbb{R}^2$ می‌نامیم

$$R=[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[a,b],\ y\in[c,d]\}$$

$$\boxed{\Delta A_k := (\Delta x_k)(\Delta y_k)}$$

افراز از P $\leftarrow$ $P: (P_1, P_2)$

P_1: افراز از $[a,b]$

P_2: افراز از $[c,d]$

انتگرال های چندگانه روی نواحی مستطیلی

هدف: قصد داریم مفهوم انتگرالِ توابع دو متغیره $f(x,y)$ روی ناحیه ای مستطیلی شکل مانند R در صفحهٔ (x,y) را مطالعه نماییم.

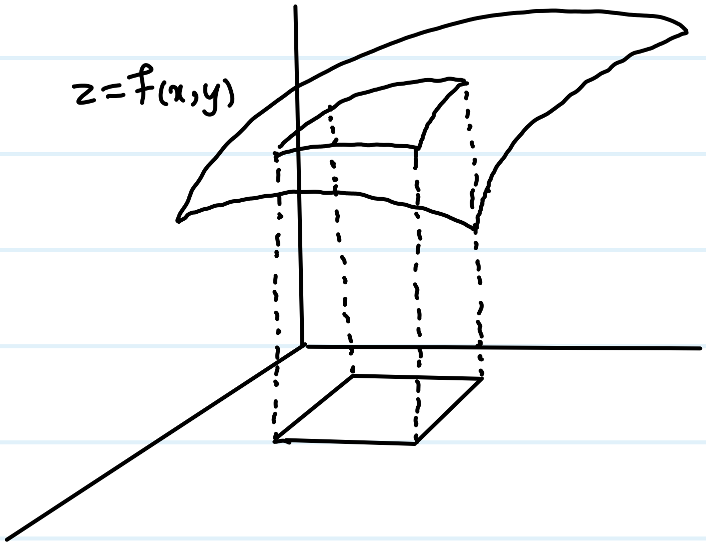
مشابه تعریفِ انتگرال توابع یک متغیره، که آن را به صورت حد حاصل جمعی از اعداد معنی دار یعنی به صورت حد مجموع ریمان تابع معرفی می‌کردیم، برای معرفی انتگرال توابع چند متغیره نیز به مفهوم مجموع ریمان تابع نیاز داریم.

* تعریف (یک مجموع ریمان روی ناحیه R): به ازای هر افراز دلخواه از ناحیه مستطیلی R، که ناحیهٔ R را به n مستطیلِ کوچک‌تر افراز می‌کند، می‌توانیم یک مجموع ریمان مانند S_n به صورت زیر روی ناحیهٔ R بسازیم:

ابتدا از هر مستطیل کوچک حاصل از افراز R مانند مستطیلِ kام (که $k=1,2,\ldots,n$) نقطه‌ای دلخواه به مختصات (x_k,y_k) را انتخاب می‌کنیم. سپس مقدار تابع f را در کلیهٔ نقاط انتخابی (x_k,y_k) محاسبه می‌کنیم. در این صورت مجموع زیر را یک مجموع ریمان تابع f روی ناحیهٔ R می نامیم؛

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\,\Delta A_k \qquad ; \qquad (\Delta x_k \,\Delta y_k = \text{مساحت مستطیلِ kام} =: \Delta A_k)$$

*نکته: تابع دو متغیره $f(x,y)$ را روی ناحیهٔ R در صفحهٔ (x,y) در نظر بگیرید. هرچه افرازی که از ناحیهٔ R درنظر می‌گیریم، اصطلاحاً، افرازی ظریف‌تر باشد (یعنی هرچه مستطیل های حاصل از افراز R، مستطیل هایِ کوچک‌تر و لذا تعداد شان برای پوشاندن کل ناحیهٔ R بیشتر باشد)، مجموع های ریمان، تخمین های بهتری را از حجم محصور به ناحیهٔ R و رویهٔ $z=f(x,y)$ روی ناحیهٔ R ارایه می کنند.



* «ظرافت» یک افراز را با استفاده از مفهوم نُرم یا اندازه‌ی یک افراز می‌توانیم تعریف کنیم.
(norm)

* تعریف (نُرم یا اندازه‌ی یک افراز): نُرم یا اندازه‌ی یک افراز مانند P از ناحیه‌ای مثل R را با نماد $\|P\|$ نمایش داده و آن را به‌صورت زیر، به‌عنوان مقدار بزرگ‌ترین عرض یا طول مستطیل‌های حاصل از افراز P روی ناحیه‌ی R، تعریف می‌کنیم:

$n =$ تعداد مستطیل‌های حاصل از افراز P روی ناحیه‌ی R است ;

$$\boxed{\|P\| := \max_{1\leqslant k\leqslant n} \{\Delta x_k , \Delta y_k\}}$$

* هرچه $\|P\|$ عدد کوچک‌تری باشد، طبیعتاً افراز P، افراز ظریف‌تری خواهد بود.

* تعریف (توابع چند متغیره‌ی انتگرال‌پذیر): تابع دو متغیره‌ی $f(x,y)$ را تابعی انتگرال‌پذیر روی ناحیه‌ی مستطیلی R نامیم هرگاه مقدار حد مجموع‌های ریمان

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k , y_k)\,\Delta A_k$$

به ازای افرازهای دلخواه از ناحیه‌ی R و انتخاب‌های دلخواه از نقاط (x_k , y_k) موجود و برابر عددی یکسان باشد.

این مقدار حدی را اصطلاحاً انتگرال دوگانهٔ تابع دو متغیرهٔ $f(x,y)$ روی ناحیهٔ R نامیده و آن را با نماد زیر نمایش می‌دهیم:

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dA := \iint_R f(x,y)\,dx\,dy}$$

* نکته: هر تابع پیوسته مانند $f(x,y)$ روی ناحیهٔ R، تابعی انتگرال‌پذیر روی R است.

* تذکر: اگر ناحیهٔ مستطیلی R را به صورت ناحیهٔ $R=[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[a,b], y\in[c,d]\}$ در نظر بگیریم، آنگاه مقدار انتگرال دوگانهٔ تابع $f(x,y)$ روی ناحیهٔ R را (درصورت وجود) می‌توانیم به‌صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

یعنی برای محاسبهٔ انتگرال دوگانهٔ تابع f روی ناحیهٔ R، کافی است ابتدا $A(y) := \int_a^b f(x,y)\,dx$

را (با فرض اینکه موقتاً y را پارامتری ثابت درنظر گرفته باشیم) محاسبه کرده و سپس مقدار انتگرال دوگانهٔ

بالا را به صورت $\int_a^b A(y)\,dy$ (برحسب تنها متغیر باقی‌مانده یعنی y) بدست آوریم.

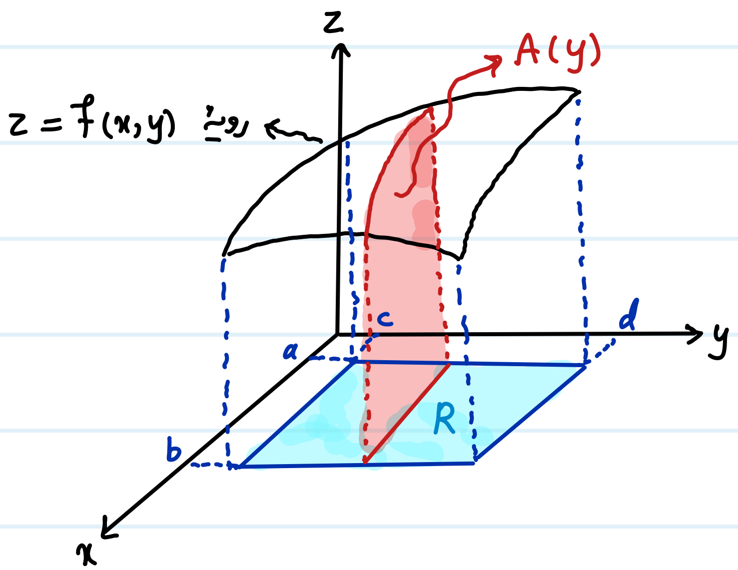
بنابراین، انتگرال‌گیری دوگانه از تابع $f(x,y)$ در واقع به معنی دوبار انتگرال (تو در تو) از تابع دو متغیرهٔ $f(x,y)$ است.

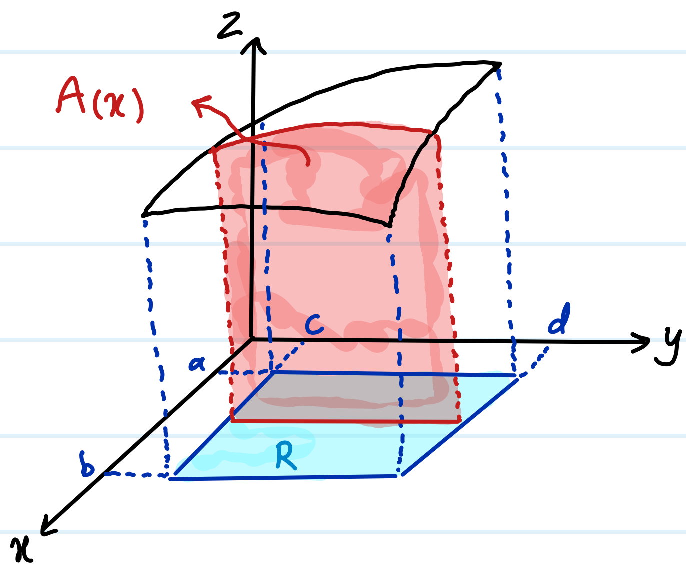
* نکته (قضیه فوبینی Fubini's Theorem):

برای هر تابع پیوسته مانند $f(x,y)$ روی ناحیه مستطیلی $R=[a,b]\times[c,d]$ داریم:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,\underline{dx\,dy} = \int_a^b\int_c^d \underline{dy\,dx}$$

یعنی ترتیب انتگرال گیری (تو در تو) در انتگرال های دوگانه اهمیتی ندارد:





$$\int_c^d \underbrace{\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)}_{=A(y)} dy$$

$$\int_a^b \underbrace{\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)}_{=A(x)} dx$$

* تمرین: مطلوبست مقدار انتگرال دوگانهٔ $I := \iint_R f(x,y)\, dA$ برای تابع $f(x,y) = 1 + e^x y$

روی ناحیهٔ $R = [0,1] \times [1,2]$.

جواب: به دو صورت زیر می‌توانیم مقدار I را محاسبه کنیم:

$$I = \int_1^2 \left(\int_0^1 (1 + e^x y)\, dx \right) dy = \int_1^2 \left((x + e^x y \Big|_{x=0}^{1} \right) dy = \int_1^2 (1 + (e-1)y)\, dy$$

$$= y + (e-1)\frac{y^2}{2} \Big|_{y=1}^{2} = \frac{3e-1}{2}$$

$$I = \int_0^1 \left(\int_1^2 (1 + e^x y)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(y + e^x \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=1}^{2} dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{3}{2} e^x\right) dx$$

$$= \left(x + \frac{3}{2} e^x \right) \Big|_{x=0}^{1} = \frac{3e-1}{2}$$

تمرین: مطلوبست مقدار انتگرال دوگانهٔ $\iint f(x,y)\, dA$ به ازای تابع

$f(x,y) = x \cos(xy) \cos^2(\pi x)$ روی ناحیهٔ R در صفحهٔ (x,y):

. $R = [0, \frac{1}{2}] \times [0, \pi]$

جواب: $\left(\frac{1}{3\pi} \right)$.