جلسه چهارم

نکته (معادله یک بیضی): فرض کنید کانون های بیضی روی محور x ها و در نقاط $F_1:(-c,0)$، $F_2:(c,0)$ قرار داشته باشند. نقطه دلخواه $P:(x,y)$ را روی یک بیضی در نظر بگیرید. طبق تعریف هندسی یک بیضی، می دانیم: $|\overline{PF_1}|+|\overline{PF_2}|=2a$

بنابراین، طبق فرمول فاصله بین نقاط، نتیجه می گیریم:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2} \Rightarrow (x+c)^2+\cancel{y^2}=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+\cancel{y^2}$$

$$\Rightarrow (x+c)^2-4a^2-(x-c)^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow x^2+2cx+c^2-4a^2-x^2+2cx-c^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{4}cx-\cancel{4}a^2=-\cancel{4}a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \Rightarrow cx-a^2=-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2\left((x-c)^2+y^2\right) \Rightarrow c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2\left(x^2-2cx+c^2+y^2\right)$$

$$\Rightarrow c^2x^2-\cancel{2a^2cx}+a^4=a^2x^2-\cancel{2a^2cx}+a^2c^2+a^2y^2$$

$$\Rightarrow a^4-a^2c^2=a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2$$

$$\xRightarrow{\div a^2} \boxed{a^2-c^2=\frac{x^2(a^2-c^2)}{a^2}+y^2}$$

بعد از ساده کردن معادله بالا، به معادله زیر می رسیم:

$$\boxed{\frac{x^2(a^2-c^2)}{a^2}+y^2=\underbrace{a^2-c^2}_{=:\,b^2\,;\ b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\ (b\in\mathbb{R}>0)}}$$

از آنجا که کانون های بیضی در داخل منحنی بیضی قرار دارند، با توجه به شکل بیضی می دانیم $a > c$ ولذا $a^2 - c^2 \underset{\neq}{>} 0$ عددی ناصفر و همیشه مثبت است

بنابراین می توانیم طرفین تساوی معادله آخر را بر عبارت ناصفر $(a^2 - c^2)$ تقسیم کرده و به معادلهٔ زیر برسیم:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

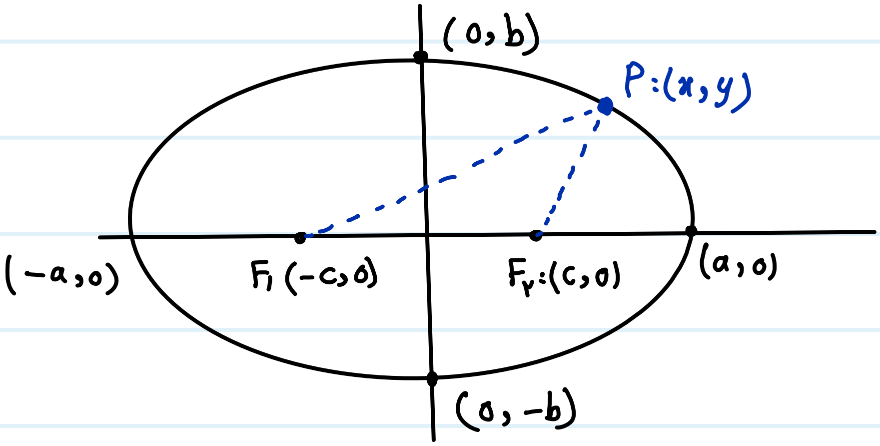
حال اگر به ازای یک عدد حقیقی ناصفر $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ، عبارت مثبت $a^2 - c^2$ را به صورت $b^2 = a^2 - c^2$ معرفی کنیم، آنگاه معادلهٔ بیضی استاندارد را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad ; \quad b^2 = a^2 - c^2 > 0$$

تذکر: درحالت کلی تر، اگر مرکز بیضی در نقطه ای به مختصات $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ قرار داشته باشد آنگاه معادلهٔ بیضی بالا به شکل زیر تغییر می کند:

$$\frac{(x - \mu_1)^2}{a^2} + \frac{(y - \mu_2)^2}{b^2} = 1$$

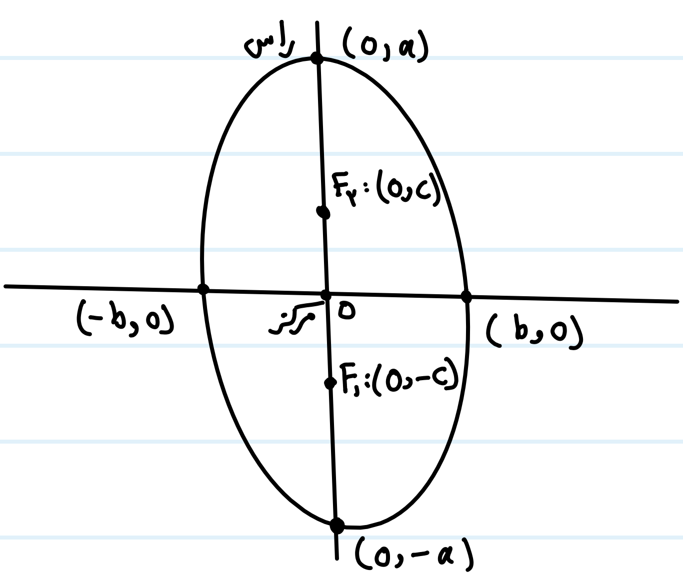
البته در این بیضی به مرکز (μ_1, μ_2) ، مختصات کانون های بیضی و درنتیجه مختصات رأس های بیضی نیز انتقال پیدا کرده و تغییر می کند



* نکته: اگر در محاسبات مربوط به یافتن معادلهٔ بیضی استاندارد در قرار داد $b^2 = a^2 - c^2$ فرض کنیم
$b \in \mathbb{R} > 0$ عددی مثبت است آنگاه، عملاً فرض کرده ایم $0 < b < a$ و از این رو معادلهٔ
بدست آمده یعنی معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ معادلهٔ یک بیضی است که کانون هایش روی
محور xها قرار داشته و لذا کشیدگی بیشتر را در امتداد محور x ها دارد

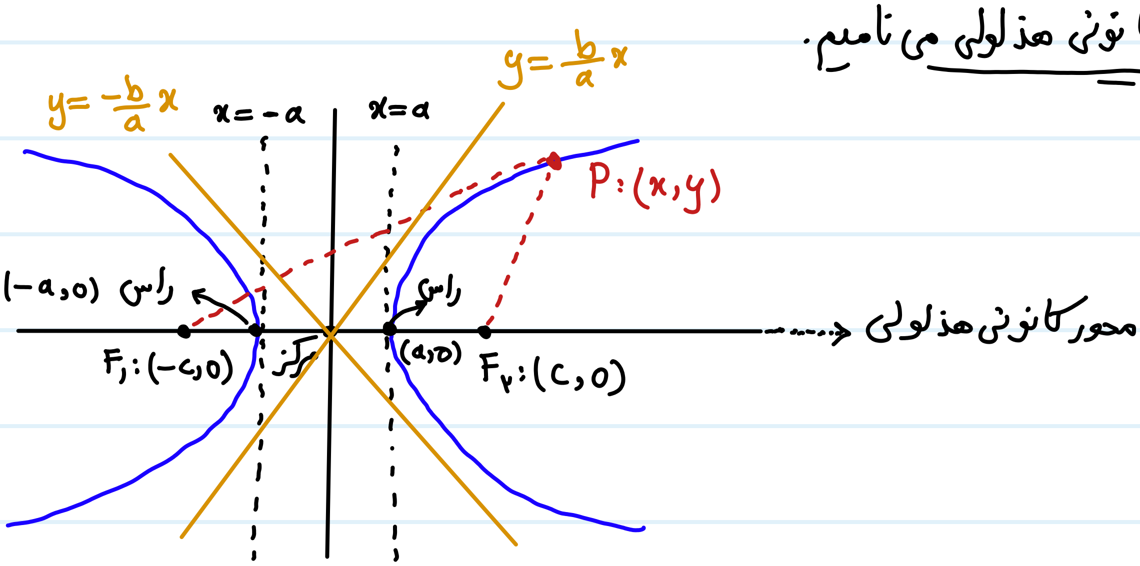
حال اگر به طور مشابه به قبل، فرض کنیم $b^2 := a^2 - c^2$ که $0 < b < a$ آنگاه، معادلهٔ یک بیضی که
کانون هایش روی محور yها قرار داشته باشد (و لذا کشیدگی بیضی در امتداد محور y ها بیشتر باشد)
به صورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1} \quad ; \quad b^2 = a^2 - c^2 \ , \ 0 < b < a$$



* تعریفِ (هذلولی) : مکان هندسی کلیهٔ نقاطی از صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ را که تفاضل فواصل هریک از
(Hyperbola)

این نقاط از دو نقطهٔ ثابت در صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ همواره برابر عددی ثابت باشد را یک هذلولی می‌نامیم.
این دو نقطهٔ ثابت در صفحه را کانون های هذلولی نامیده و محوری که از کانون های هذلولی
عبور می‌کند را محور کانونی هذلولی می‌نامیم.



همچنین، نقطه‌ای روی محور کانونی هذلولی که دقیقاً در وسط دو کانون هذلولی قرار گرفته است،
مرکز هذلولی نامیده می‌شود. بعلاوه، محل برخورد محور کانونی هذلولی با خود هذلولی را راس های
هذلولی می‌نامیم.

$$\left|\,|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}|\,\right| = 2a \quad (\text{عددی ثابت})$$

* نکته: (معادلهٔ یک هذلولی) : فرض کنیم کانون‌های هذلولی در نقاط $F_2:(c,0)$ و $F_1:(-c,0)$ قرار داشته و $P:(x,y)$ نقطه‌ای دلخواه روی این هذلولی باشد. طبق تعریف می‌دانیم:

$$\left|\,|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}|\,\right| = 2a$$

بنابراین، مجدداً طبق فرمول فاصله بین نقاط، نتیجه می‌گیریم:

$$|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Longrightarrow (x+c)^2 + \cancel{y^2} = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + \cancel{y^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2}$$

$$\Rightarrow 4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2(a^2-c^2)}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2$$

اما با توجه به نمودار هذلولی، می‌دانیم $a < c$ ولذا $a^2 - c^2 \underset{\neq}{<} 0$ عددی ناصفر و در واقع همیشه منفی است. بنابراین می‌توانیم طرفین رابطه آخر را بر عدد ناصفر (a^2-c^2) تقسیم کرده و به معادله هذلولی زیر برسیم

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$$

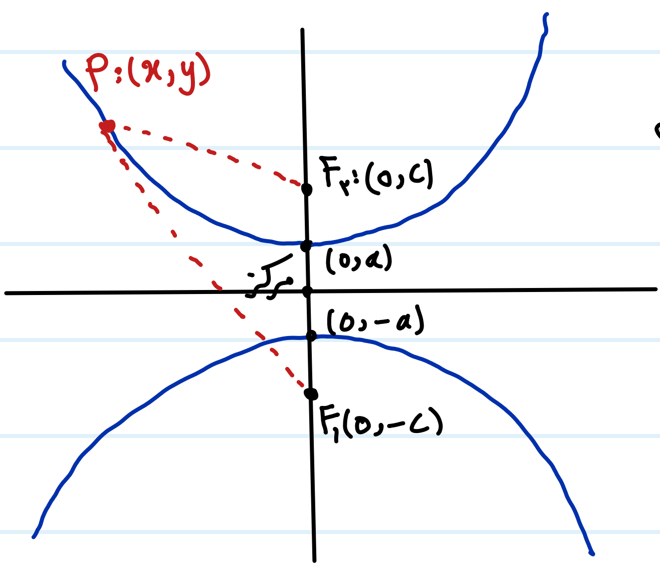
حال اگر عدد حقیقی و مثبت $b \in \mathbb{R} > 0$ را طوری درنظر بگیریم که $-b^2 := a^2 - c^2$ آنگاه معادله هذلولی استاندارد بالا را می‌توانیم بصورت زیر معرفی کنیم:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad ; \quad -b^2 = a^2 - c^2 < 0$$

این هذلولی دارای خطوط جانبی $\boxed{y = \pm \frac{b}{a} x}$ می‌باشد

نکته: به‌طور مشابه می‌توان دید که معادلهٔ یک هذلولی استاندارد که مرکزش در مبدأ مختصات قرار داشته باشد و کانون هایش روی محور yها قرار دارند به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1} \quad ; \quad -b^2 = a^2 - c^2 < 0$$



در این هذلولی، محور کانونی در واقع همان محور yهاست و کانون ها در نقاط $(0, \pm c)$ و رأس های هذلولی در نقاطی به مختصات $(0, \pm a)$ قرار دارند.

معادلهٔ خطوط جانبی این هذلولی نیز عبارتند از: $\boxed{y = \pm \frac{a}{b} x}$