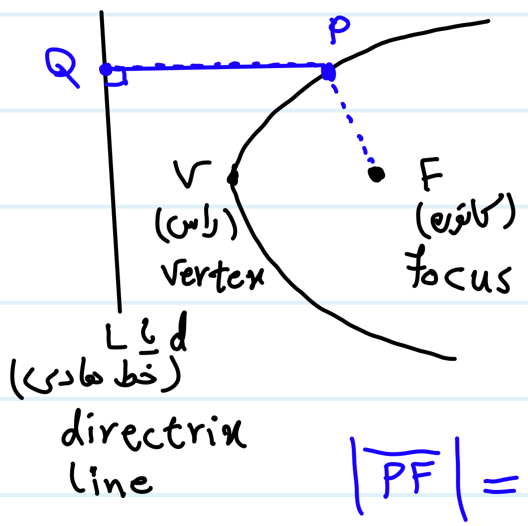
جلسه سوم

(ادامه مبحث مقاطع مخروطی)

* نکته: طبق تعریف مقاطع مخروطی می‌دانیم یک مقطع مخروطی، منحنی حاصل از اشتراک (یا تقاطع) یک صفحه و یک مخروط استاندارد در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌باشد. لذا مقاطع مخروطی، منحنی‌هایی اصطلاحاً صفحه‌ای هستند (یعنی در یک صفحه قرار دارند). بدون از دست دادن کلیت، حداکثر با تقریب یک دوران و یک انتقال روی کل فضای $\mathbb{R}^3$، می‌توانیم (به منظور مطالعه مقاطع مخروطی) فرض کنیم صفحه‌ای که مقطع مخروطی ما روی آن قرار دارد همان صفحه‌ی دو بعدی اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ با مختصات (x,y) است.

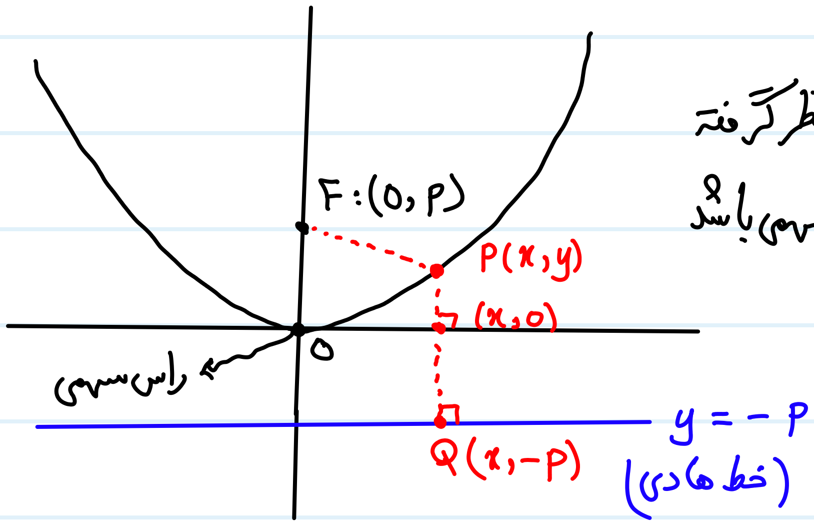
تعریف (سهمی): مکان هندسی کلیه‌ی نقاطی از صفحه‌ی $\mathbb{R}^2$ را که دارای فاصله‌ی یکسانی از یک نقطه‌ی ثابت (کانون) و یک خط ثابت (خط هادی) در $\mathbb{R}^2$ می‌باشند را یک سهمی (Parabola) می‌نامیم.



بعلاوه، نقطه‌ای روی سهمی که کمترین فاصله ممکن را از کانون (و معادلاً خط هادی) سهمی داراست را اصطلاحاً رأس سهمی می‌نامیم.

$$|\overline{PF}| = |\overline{PQ}|$$

* نکته (معادله سهمی): فرض کنیم کانون سهمی ما در امتداد محور yها و در نقطه $F:(0,p)$ قرار داشته و خط هادی سهمی، خط $y=-p$ باشد (به این ترتیب، فرض کرده‌ایم راس سهمی در مبدأ مختصات باشد).



نقطهٔ دلخواه $P:(x,y)$ را روی سهمی در نظر گرفته
و فرض کنید Q نقطه‌ای روی خط هادی سهمی باشد
که کمترین فاصله را از نقطهٔ P دارا است
(بنابراین، طبق شکل بالا، مختصات
نقطهٔ Q عبارتست از $(x,-p)$).

از آنجا که $|\overline{PF}|=|\overline{PQ}|$، با بکارگیری فرمول فاصله بین نقاط، نتیجه می‌گیریم:

$$|\overline{PF}|=\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}=\sqrt{x^2+(y-p)^2}$$

$$\parallel$$

$$|\overline{PQ}|=\sqrt{(x-x)^2+(y-(-p))^2}=\sqrt{(y+p)^2}$$

$$\Longrightarrow \sqrt{x^2+(y-p)^2}=\sqrt{(y+p)^2}\xrightarrow{\text{توان دو}} x^2+(y-p)^2=(y+p)^2$$

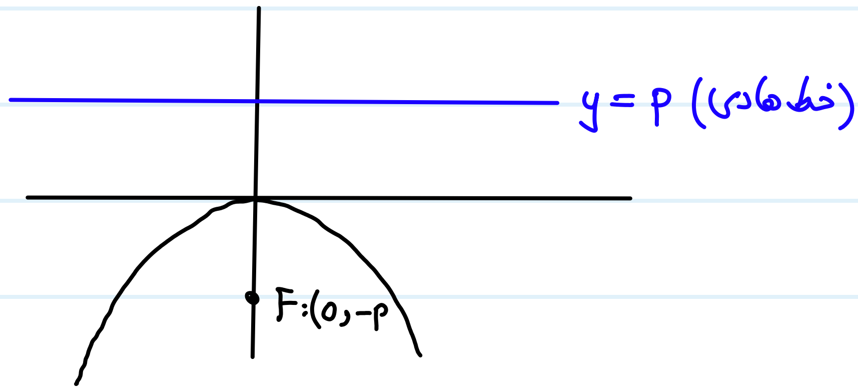
$$\longrightarrow x^2+\cancel{y^2}-2py+\cancel{p^2}=\cancel{y^2}+2py+\cancel{p^2}$$

$$\longrightarrow x^2=4py \quad \text{یا} \quad y=\frac{1}{4p}x^2 \quad ; \quad p \gneq 0$$

(فاصلهٔ راس سهمی تا خط هادی سهمی)

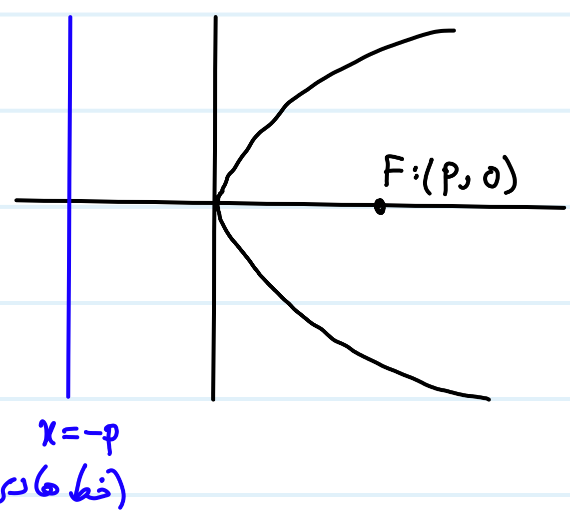
به طور مشابه، اگر فرض کنیم این بار دهانهٔ سهمی رو به پایین باز بوده، کانون سهمی در نقطهٔ $(0,-p)$ و خط هادی $y=p$ باشد، آنگاه معادله سهمی عبارت است از:

$x^2=-4py$ یا $y=-\frac{1}{4p}x^2$ ؛ (که $p>0$)



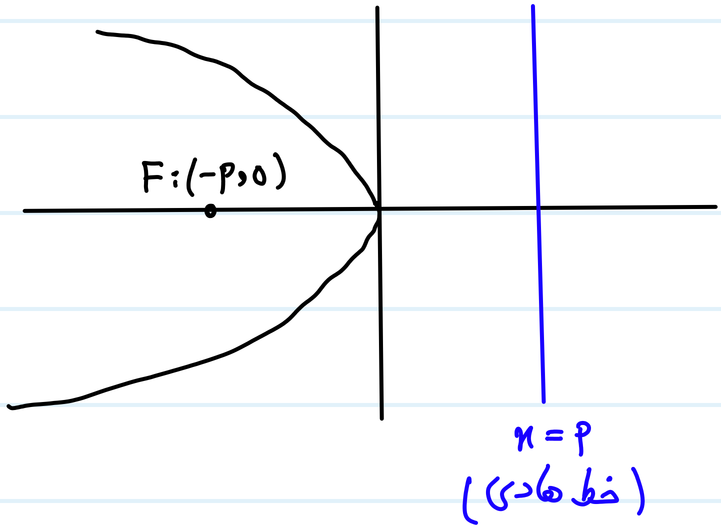
اگر همچنان فرض کنیم رأس سهمی در مبدأ مختصات قرار داشته باشد آنگاه، با تغییر جای متغیرهای x و y می‌توانیم سهمی‌هایی بدست آوریم که دهانهٔ آن‌ها به سمت راست (در جهت مثبت محور xها) یا به سمت چپ (در جهت منفی محور xها) باز می‌شود.

$y^2=4px$ یا $x=\frac{1}{4p}y^2$; $p>0$

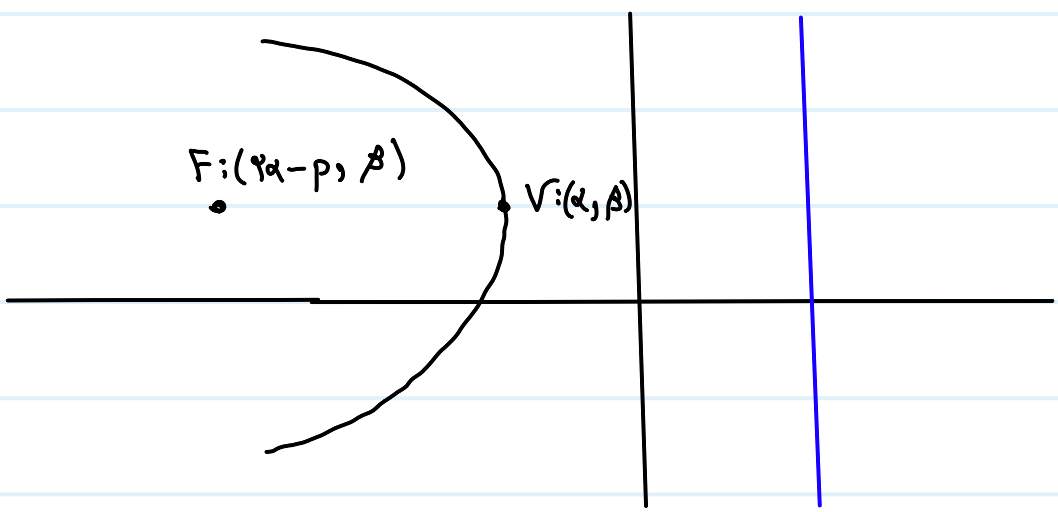


$y^2 = -4px$ یا $x = -\frac{1}{4p}y^2$

; $p>0$



نکته: اگر طبق معمول $p>0$ را یک عدد حقیقی ثابت و مثبت در نظر بگیریم آنگاه معادله کلی یک سهمی که رأس آن در نقطه $V:(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ قرار داشته و معادله خط هادی آن $x=p$ باشد، به صورت زیر می‌باشد:



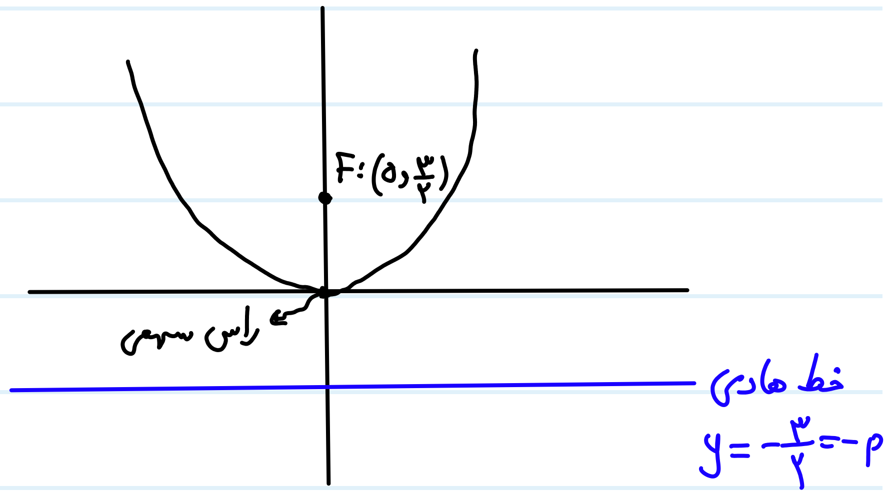
$$(y-\beta)^2 = -4(p-\alpha)(x-\alpha)$$

مثال: نمودار سهمی های زیر را به طور تقریبی رسم کنید.

مثبت مثبت

الف) $x^2 = 6y$

$4p = 6 \Longrightarrow p = \frac{3}{2}$

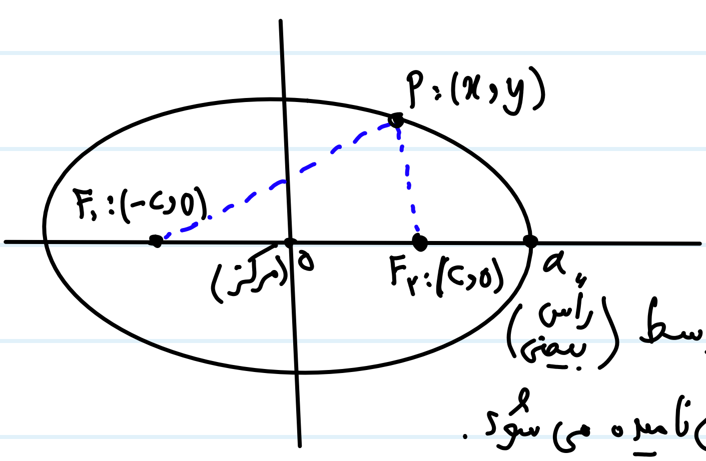


☆ ب) $(y-1)^2 = -4(x+1)$

تمرین

* تعریف (بیضی): مکان هندسی کلیه نقاطی از صفحه $\mathbb{R}^2$ را که مجموع فواصل هر یک از این
ellipse

نقاط از دو نقطه ثابت در صفحه $\mathbb{R}^2$ همواره برابر یک عدد ثابت باشد را یک بیضی می‌نامیم.
این دو نقطه ثابت در صفحه را کانون های بیضی نامیده وخط یا محوری که از کانون های بیضی
عبور می‌کند را محور کانونی بیضی می‌نامیم.



$$|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a$$

نقطه ای روی محور کانونی بیضی که دقیقاً در وسط دو کانون بیضی قرار گرفته است، مرکز بیضی نامیده می‌شود.

بعلاوه، محل برخورد محور کانونی بیضی با خود بیضی را رأس های بیضی می نامیم