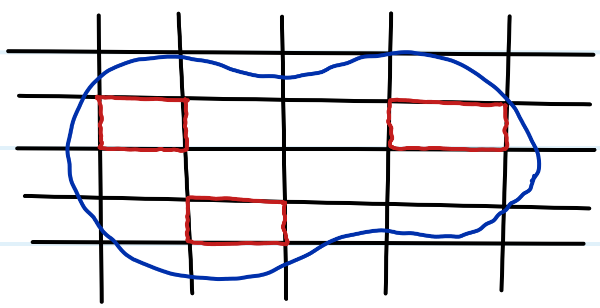
جلسه بیست و سوم

کاربرد هایی از انتگرال گیری دوگانه

* محاسبه مساحت ناحیه کراندار مانند R در صفحه (x,y)

اگر تابع ثابت $f(x,y)=1$ را روی ناحیه کراندار R در صفحه (x,y) درنظر بگیریم، آنگاه هر مجموع ریمان دلخواه از تابع f روی ناحیه R را می توان به صورت زیر نوشت:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\underbrace{f(x_k,y_k)}_{=1}\Delta A_k=\sum_{k=1}^{n}\Delta A_k$$

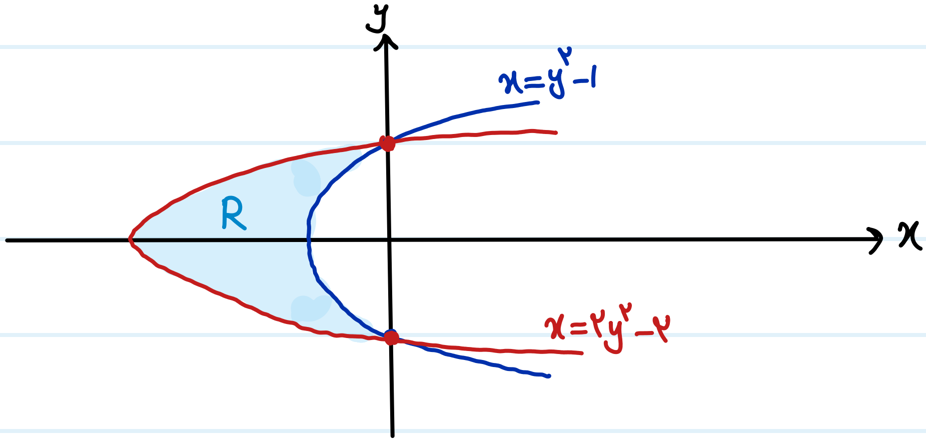


که به وضوح بیانگر مجموع مساحت های مستطیل های کوچک حاصل از افراز ناحیه R بوده و لذا تخمین از مساحت واقعی ناحیه R در صفحه (x,y) می باشد. بنابراین با توجه به مفهوم انتگرال دوگانه تعریف زیر را داریم:

* تعریف (مساحت ناحیه R در صفحه): فرض کنید R ناحیه‌ای کراندار در صفحه (x,y) باشد، دراین صورت مساحت ناحیه R برابر است با:

$$\boxed{A=\iint_R 1\,dA}$$

تمرین ۱ : مساحت ناحیهٔ محصور به سهمی های $x = y^2 - 1$ و $x = 2y^2 - 2$ را (مطابق شکل) محاسبه نمایید.



جواب: مطابق شکل، محل برخورد نمودار سهمی های $x = y^2 - 1$ و $x = 2y^2 - 2$ با یکدیگر و محل برخورد این دوسهمی با محور x ها ازجمله نقاط مهم روی مرز ناحیهR (محصور به این دوسهمی) می باشند.

برای یافتن محل برخورد این دو سهمی، کافی است قرار دهیم:

$$y^2 - 1 = 2y^2 - 2 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \xrightarrow[x = 2y^2 - 2]{x = y^2 - 1} x = 0$$

مختصات نقاط برخورد دوسهمی : $(0, +1)$, $(0, -1)$

از طرفی برای بدست آوردن مختصات محل برخورد این دو سهمی با محور x ها، کافی است در معادلات این دو سهمی قرار دهیم $\underline{y=0}$ ، لذا محل برخورد مرز ناحیهٔ R بامحور x ها، نقاطی با مختصات $(-1, 0)$ و $(-2, 0)$ می باشند.

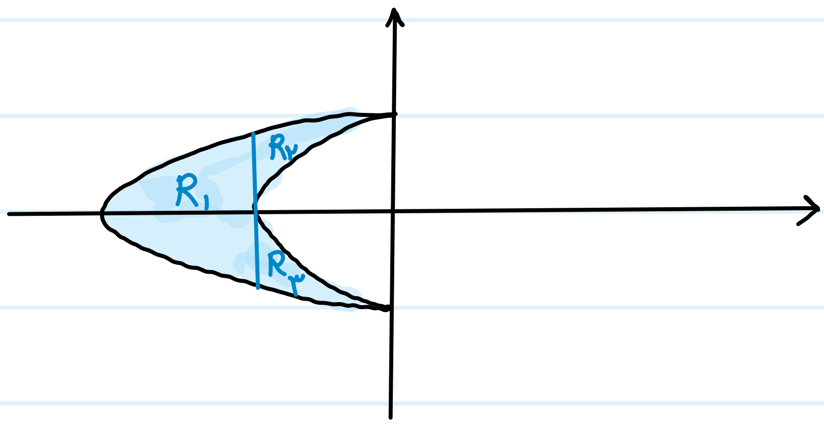
با به کارگیری روش برش های افقی، می توانیم مساحت ناحیهٔ R را به صورت زیر محاسبه نماییم:

$$A = \iint_R dA = \int_{-1}^{1} \left(\int_{x=2y^2-2}^{x=y^2-1} 1 \; dx \right) dy = \int_{-1}^{1} (-y^2+1)\, dy = \left(-\frac{y^3}{3} + y \right) \Bigg|_{y=-1}^{1}$$

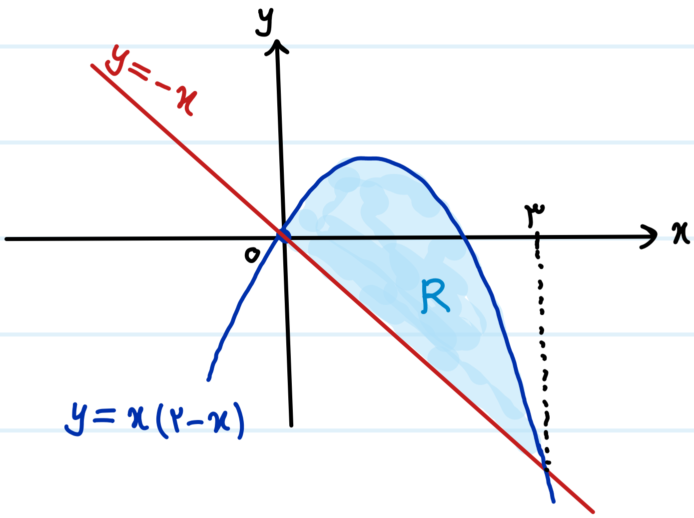
$$= \left(\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right) = \frac{4}{3}$$

اگر از روش برش های عمودی می رفتیم :

$$A = \iint_{R} dA = \iint_{R_1} dA + \iint_{R_2} dA + \iint_{R_3} dA$$



تمرین ۲: مطلوبست محاسبهٔ مساحت ناحیهٔ محصور بین نمودار توابع $y=-x$ و $y=x(2-x)$ (مطابق شکل).



جواب:
$$-x = x(2-x) \Rightarrow -x = 2x - x^2 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3)=0$$

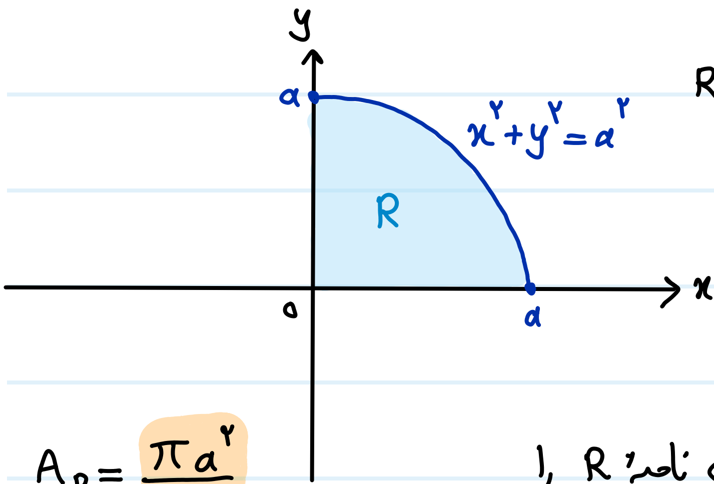
$x=0$, $x=3$ $\Longrightarrow$ مختصات نقاط برخورد توابع $y=-x$ و $y=x(2-x)$ روی مرز ناحیهٔ R : $(0,0)$ و $(3,-3)$

لذا مساحت ناحیهٔ R را می‌توانیم با استفاده از روش برش‌های عمودی بصورت زیر محاسبه کنیم:

$$A = \iint_R dA = \int_{x=0}^{3} \left(\int_{y=-x}^{y=x(2-x)} 1 \, dy \right) dx = \int_0^3 (3x - x^2)\, dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{x=0}^{3}$$

$$= \left(\frac{27}{2} - \frac{27}{3} \right) = \frac{9}{2}$$

تمرین ۳: مساحت ناحیه $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq a^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$ را برای عدد ثابت $a\in\mathbb{R}>0$ بیابید.



جواب: مثلاً با به‌کارگیری روش برش‌های عمودی، مساحت ناحیهٔ R را می‌توانیم به‌صورت زیر محاسبه نمائیم:

$$A_R=\boxed{\frac{\pi a^2}{4}}$$

$$A=\iint_R dA=\int_{x=0}^{a}\left(\int_{y=0}^{y=\sqrt{a^2-x^2}} 1\ dy\right)dx=\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

متغیر جدید u را به‌صورت $x=:a\sin u$ (یا معادلاً به‌صورت $u:=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$) تعریف کرده و سپس با استفاده از روش تغییر متغیر در انتگرال‌گیری از توابع یک متغیره (از ریاضی ۱) مقدار مساحت ناحیهٔ R را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

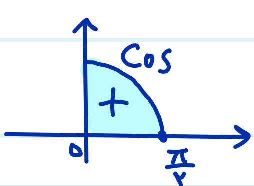
$$x=a\sin u \Longrightarrow dx=(a\cos u)\,du \quad , \quad \begin{cases} x=a \rightsquigarrow u=\frac{\pi}{2} \\ x=0 \rightsquigarrow u=0 \end{cases}$$

لذا:

$$A=\iint_R dA=\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\underbrace{(1-\sin^2 u)}_{=\cos^2 u}}\ (a\cos u)\,du$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos u)(a\cos u)\,du=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\,du=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2u))\,du$$

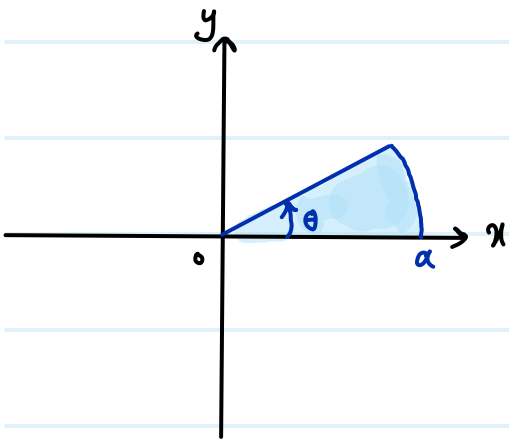
$|\cos u|=\cos u \ ; \ u\in(0,\frac{\pi}{2})$



$$\cos(2u)=\cos^2 u-\sin^2 u$$
$$=\cos^2 u-(1-\cos^2 u)$$
$$=2\cos^2 u-1$$
$$\Longrightarrow \cos^2 u=\frac{1}{2}(1+\cos(2u))$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(u+\frac{\sin(2u)}{2}\right)\Big|_{u=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\frac{\pi a^2}{4}}$$

* تذکر: می‌توان دید مساحت قطاعی دایره‌ای به شعاع a و زاویهٔ قطاعی θ برابر است با: $\frac{1}{2}a^2\theta$



$$\frac{\text{مساحت قطاع}}{\text{زاویه قطاع (به رادیان)}} = \frac{\pi a^2}{2\pi} = \frac{A_\theta}{\theta}$$

$$\Longrightarrow A_\theta = \frac{\pi a^2\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}a^2\theta$$

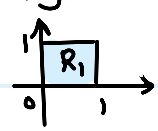
* میانگین مقادیر یک تابع روی ناحیه‌ی کراندار در صفحهٔ (x,y)

میانگین مقادیر تابع دو متغیره $f(x,y)$ را روی ناحیهٔ کراندار R در صفحهٔ (x,y) به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{\frac{1}{\text{مساحت ناحیهٔ } R}\iint_R f\,dA}$$

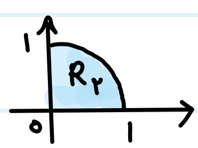
تمرین: میانگین مقادیر تابع $f(x,y)=xy$ را روی نواحی کراندار زیر محاسبه کنید:

$$R_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1\}$$



و

$$R_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 1,\quad x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0\}$$



جواب:

روی R_1: $\frac{1}{\text{مساحت } R_1}\iint_{R_1} f\,dA = \frac{1}{1}\int_0^1\int_0^1 xy\,dx\,dy = \int_0^1\left(\frac{x^2}{2}y\right)\Big|_{x=0}^{1}dy = \int_0^1\left(\frac{1}{2}y\right)dy = \frac{1}{4}$

روی R_2 : $\displaystyle \frac{1}{\text{مساحت } R_2}\iint_{R_2} f\,dA$

(در تمرین قبلی، دیدیم مساحت ناحیهٔ R_2 برابر است با: $\frac{1}{4}\pi(1)^2=\frac{\pi}{4}$ لذا:)

$$=\frac{1}{\frac{\pi}{4}}\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}} xy\,dx\right)dy=\frac{4}{\pi}\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}y\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}}=\frac{2}{\pi}\int_0^1(1-y^2)y\,dy$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2\pi}$$