جلسه هفدهم

* قانون زنجیری برای توابعی با سه متغیر مستقل میانی: تابع مشتق پذیر $w=f(x,y,z)$ را در نظر گرفته فرض کنید x و y و z نیز توابعی مشتق پذیر برحسب t باشند. در این صورت w نیز تابعی مشتق پذیر برحسب t بوده و داریم:

$$\boxed{\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}}$$

* قانون زنجیری برای توابعی با سه متغیر مستقل میانی و دو متغیر مستقل نهایی: فرض کنید $w=f(x,y,z)$ که در آن $x=g(r,s)$، $y=h(r,s)$ و $z=k(r,s)$. اگر توابع f، g، h و k همگی توابعی مشتق پذیر باشند، آنگاه مشتقات جزئی تابع w برحسب r و s را می‌توان توسط فرمول زیر محاسبه کرد:

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}}$$

و

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}}$$

تمرین : تابع $w = xy + \ln z$ را وقتی $x = \frac{v^2}{u}$ ، $y = u+v$ و $z = \cos u$ درنظرگرفته و مقدار $\frac{\partial w}{\partial v}$ را وقتی $u_0 = -1$ و $v_0 = 2$ محاسبه کنید.

جواب: در این تمرین، متغیر وابستهٔ $w = w(x, y, z)$ دارای سه متغیر مستقل میانی $x = x(u, v)$، $y = y(u, v)$ و $z = z(u, v)$ و دو متغیر مستقل نهایی u و v می‌باشد. لذا با به‌کارگیری قانون زنجیری داریم:

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$

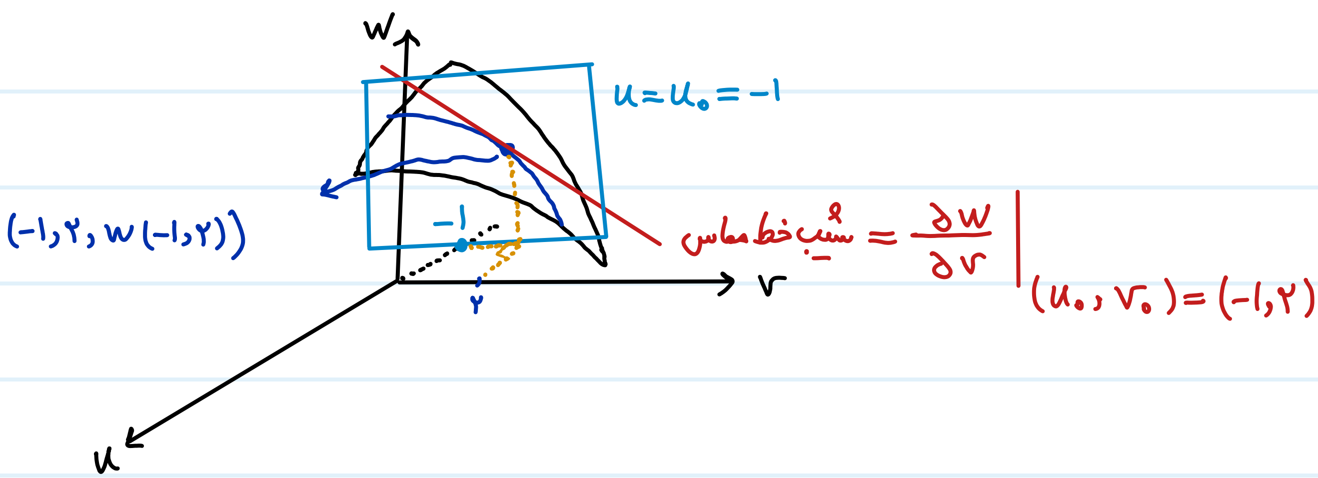
از طرفی داریم:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = x \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{2v}{u} \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial v} = y \times \left(\frac{2v}{u}\right) + x \times (1) + \cancelto{0}{\frac{1}{z} \times (0)} = (u+v)\left(\frac{2v}{u}\right) + v^2$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial w}{\partial v}\right|_{(u_0, v_0) = (-1, 2)} = (-1+2)\left(\frac{4}{-1}\right) + \frac{4}{-1} = -8$$



* فرمول برای مشتق گیری از توابع ضمنی : می خواهیم از قانون زنجیری برای مشتق گیری از توابع ضمنی استفاده کنیم.

فرض کنیم رابطهٔ ضمنی $w = F(x,y) = 0$ بیانگر ارتباط بین متغیرهای x و $y = y(x)$ باشد که در آن (بدون از دست دادن کلیت) فرض کرده ایم :

WLOG

$$\begin{cases} x = x(t) \\ , \\ y = y(t) \end{cases}$$

* هدف : یافتن $\frac{dy}{dx}$.

از آنجا که ، طبق مفروضات ، $w = w(t) = 0$ لذا:

$$0 = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

حال چنانچه فرض کنیم $\underline{\underline{x = x(t) = t}}$ تابعی همانی برحسب x باشد (یا به عبارتی داشته باشیم $x=t$)
در این صورت داریم :

$$0 = F_x \times \overbrace{\frac{dx}{dx}}^{=1} + F_y \times \frac{dy}{dx}$$

و در نتیجه به شرط اینکه $F_y = \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ ، با حل معادلهٔ بالا برحسب $\frac{dy}{dx}$ نتیجه می گیریم:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}} \quad ; \quad F_y \neq 0$$

مثال: تابع $y=y(x)$ در رابطهٔ ضمنی $y^3-x^2y-2x^3=8$ صدق می‌کند، مطلوبست $\frac{dy}{dx}$.

راه‌حل: قرار می‌دهیم $w=F(x,y):=y^3-x^2y-2x^3-8=0$ لذا:

$$\begin{cases} F_x=-2xy-6x^2 \\ , \\ F_y=3y^2-x^2 \end{cases} \Longrightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{2xy+6x^2}{3y^2-x^2} \quad ; \quad \text{به‌شرطی که: } 3y^2-x^2\neq 0$$

* نکته: فرض کنید رابطهٔ ضمنی $w=F(x,y,z)=0$ بیانگر ارتباط سه متغیر x، y و $z=(x,y)$ باشد که در آن x و y متغیرهای مستقل هستند و (بدون از دست دادن کلیت) فرض کرده‌ایم:

$$\begin{cases} x=x(r) \\ , \\ y=y(s) \\ , \\ z=z\big(x(r),y(s)\big)=z(r,s) \end{cases}$$

r و s متغیرهای مستقل نهایی؛

* هدف: یافتن $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$.

بنابه مفروضات، داریم $w=w(r,s)=0$ و در نتیجه:

$$\begin{cases} 0=\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dr}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dr}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \\ , \\ 0=\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \end{cases}$$

حال چنانچه فرض کنیم $x=x(r)=r$ و $y=y(s)=s$، آنگاه داریم:

$$\begin{cases} 0 = F_x \overbrace{\frac{dx}{dx}}^{=1} + F_y \overbrace{\frac{dy}{dx}}^{=0} + F_z \frac{\partial z}{\partial x} \\ , \\ 0 = F_x \times 0 + F_y \times 1 + F_z \frac{\partial z}{\partial y} \end{cases} \xrightarrow[F_z = \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0]{\text{به شرط اینکه}} \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y}} \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}}$$

مثال: رابطهٔ ضمنی $\sin(x+y)+\sin(y+z)+\sin(x+z)=0$ را برای معرفی متغیر z به عنوان تابعی مشتق‌پذیر برحسب x و y در نظر بگیرید. می‌خواهیم مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را در نقطهٔ $(x_0, y_0, z_0) = (\pi, \pi, \pi)$ محاسبه کنیم.

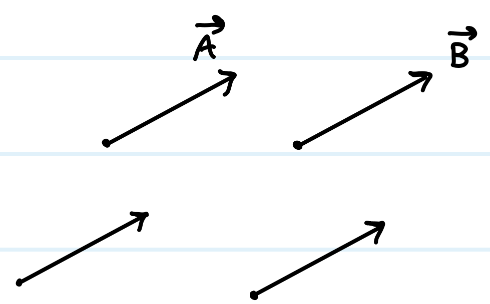
پاسخ:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = -1 = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$$

* مقدمات و یادآوری چند نکته در ارتباط با بردارها

* قرارداد (نمادگذاری):

الف) اصطلاحاً گوئیم دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ با یکدیگر برابرند هرگاه دارای جهت و اندازه یکسانی باشند (در اینجا نقطهٔ شروع این دو بردار اهمیتی ندارد)؛ لذا کلیه بردارهای زیر، بردارهای یکسانی فرض می‌شوند:



ب) برداری با طول/اندازه 1 را اصطلاحاً برداری یکه / برداری واحد (unit vector) می‌نامیم.

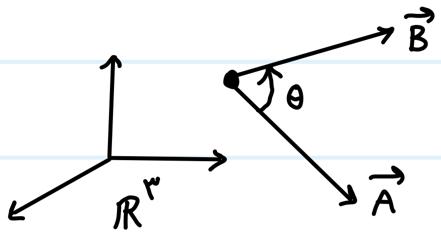
بردارهای یکه را با نماد $\hat{A}$ و $\hat{B}$ و ... نمایش می‌دهیم.

متناظر با هر بردار ناصفر دلخواهی مثل $\vec{A}$ می‌توان برداری یکه به صورت $\hat{A} = \dfrac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$ تعریف نمود.

(ج) هر برداری که دارای اندازهٔ صفر باشد را یک بردار صفر یا بردار پوچ نامیده و آن را با نماد $\vec{0}$ نمایش می‌دهیم.

تذکر: برای یک بردار پوچ، جهت مفهومی خوش تعریف نیست (زیرا در عمل فرقی نمی‌کند که برای برداری با طول صفر، چه جهتی را در نظر بگیریم).

* ضرب نقطه‌ای دو بردار: ضرب نقطه‌ای بردارهای $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ و $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ که (مطابق شکل) با یکدیگر زاویهٔ θ می‌سازند، به صورت زیر تعریف می‌شود:



$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}$$

☆ تمرین امتیازی: نشان دهید چرا $|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$. (با مفروضات تعریف ضرب نقطه‌ای دو بردار)

به سادگی می‌توان از تعریف، ویژگی‌های مقدماتی زیر را نتیجه گرفت:

۱) $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

۲) $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

۳) $(c\vec{A}) \cdot \vec{B} = c(\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad ; \forall c \in \mathbb{R}$

تذکر ۱: عبارت های $\underbrace{\vec{A}}_{\text{بردار}}\cdot(\underbrace{\vec{B}\cdot\vec{C}}_{\text{عدد}})$ و $(\underbrace{\vec{A}\cdot\vec{B}}_{\text{عدد}})\cdot\underbrace{\vec{C}}_{\text{بردار}}$ هردو نامفهوم و بی معنی هستند.

تذکر ۲: اگر بردارهای $\vec{A}$, $\vec{B}$ برهم عمود باشند (که در این صورت می نویسیم $\vec{A}\perp\vec{B}$) آنگاه

بدیهی است $\vec{A}\cdot\vec{B}\overset{\cos 90^\circ=0}{=}0$.

بنابراین اگر $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$ آنگاه لزوماً نمی توان نتیجه گرفت که $\vec{A}=\vec{0}$ یا $\vec{B}=\vec{0}$ (برخلاف ضرب معمولی اعداد حقیقی).