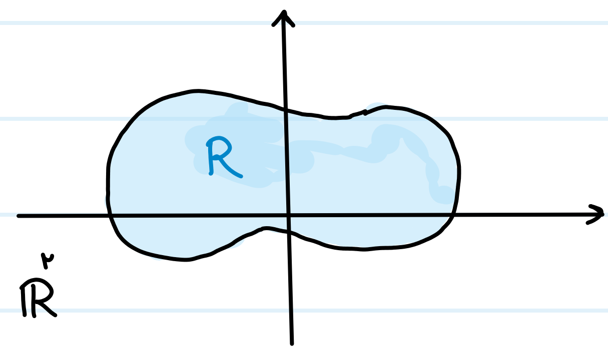
جلسه بیست و ششم

یادآوری:

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta = x(r,\theta) \\ y = r\sin\theta = y(r,\theta) \end{array}\right.$$

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,\underline{dx\,dy} = \iint_{R=G} f(r,\theta)\,\underline{r\,dr\,d\theta}}$$



* تغییر مختصات در انتگرال گیری دوگانه

هدف: قصد داریم ببینیم چطور می‌توان در محاسبه‌ی یک انتگرال دوگانه، روی ناحیه‌ای کراندار درصفحه‌ی $\mathbb{R}^2$ از تغییر متغیرهایی به شکل کلی زیر استفاده کرد:

$$\left\{\begin{array}{l} x = g(u,v) \\ y = h(u,v) \end{array}\right.$$

برای شروع مبحث به مفهوم « دترمینان ژاکوبی » نیاز داریم.

* تعریف (دترمینان ژاکوبی): فرض کنید در محاسبه‌ی مقدار یک انتگرال دوگانه روی ناحیه‌ای کراندار
Jacobian determinant
به تغییر دستگاه مختصات با استفاده از تغییر متغیرهای $\left\{\begin{array}{l} x = g(u,v) \\ y = h(u,v) \end{array}\right.$ نیاز داریم.

در این صورت « دترمینان ژاکوبی » (x,y) نسبت به (u,v) را با یکی از نمادهای

(ژاکوبین تغییر مختصات)

$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$J(u,v) = \underbrace{\frac{\overbrace{\partial(x,y)}^{\text{دستگاه مختصات قدیم}}}{\partial(u,v)}}_{\text{دستگاه مختصات جدید}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Carl Gustav Jacob Jacobi ریاضی‌دان آلمانی (1804 - 1851)

مثال: دترمینان ژاکوبی (ژاکوبین) تغییر مختصات $\begin{cases} x = u+v \\ y = 2u - 3v \end{cases}$ از (x,y) به دستگاه

مختصاتی جدید (u,v) برابر است با:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3-2 = -5$$

حال اگر تغییر دستگاه مختصاتی را ، برعکس، این بار از دستگاه مختصاتی (u,v) به دستگاه مختصاتی (x,y) درنظر بگیریم، آنگاه برای محاسبهٔ دترمینان ژاکوبی این تغییر مختصات می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

ابتدا بایستی u و v را برحسب (x, y) بیان کرده و سپس ژاکوبین $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ را محاسبه نمائیم:

$$\begin{cases} x = u + v \rightsquigarrow u = x - v \\ y = 2u - 3v \Rightarrow y = 2(x-v) - 3v = 2x - 5v \Rightarrow v = \frac{1}{5}(2x - y) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y \end{cases}$$

$$\Longrightarrow u = x - v = x - \left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y\right) = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}y$$

لذا u و v را برحسب x و y می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{cases} u = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}y \\ v = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{vmatrix} = -\frac{3}{25} - \frac{2}{25} = -\frac{1}{5}$$

نکته ۱: درحالت کلی، دترمینان‌های ژاکوبی تغییر مختصات از (x, y) به (u, v) و بالعکس در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$\boxed{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}}$$

نکته ۲: برای محاسبهٔ انتگرال دوگانه $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$ روی ناحیه کراندار R درصفحهٔ $\mathbb{R}^2$

در دستگاه مختصاتی جدید (u,v) از فرمول زیر کمک می گیریم:

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R_{(x,y)}=G_{(u,v)}} f(u,v)\,\underbrace{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|}_{}\,du\,dv}$$

قدر مطلق دترمینان ژاکوبی تغییر مختصات از (x,y) به (u,v)

به عنوان مثال، اگر دستگاه مختصات جدید، دستگاه مختصات قطبی با متغیرهای جدید (r,θ) باشد، آنگاه از آنجا که می دانیم:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

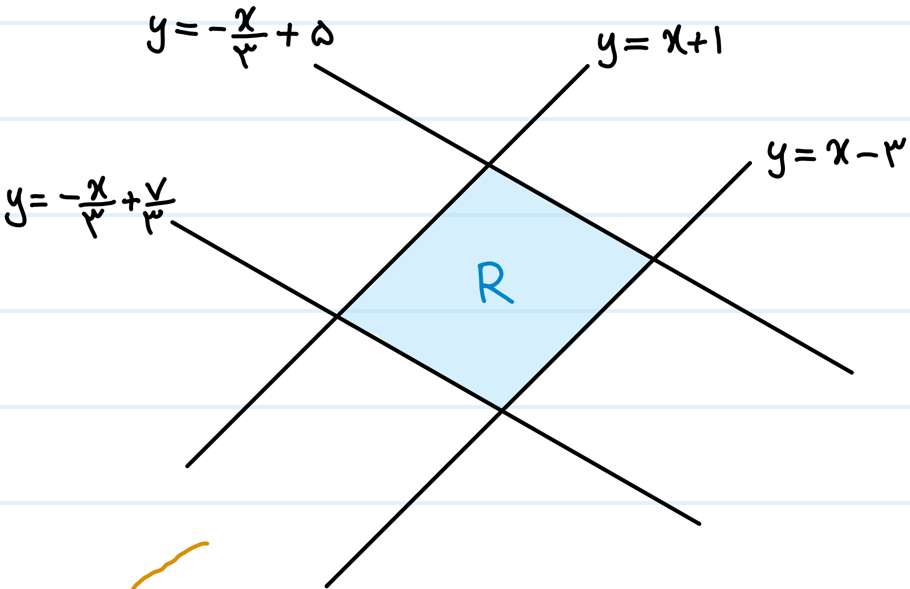
لذا:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

و لذا فرمول محاسباتی بیان شده در نکته ۲، به شکل آشنای زیر بدست می آید:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R=G} f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

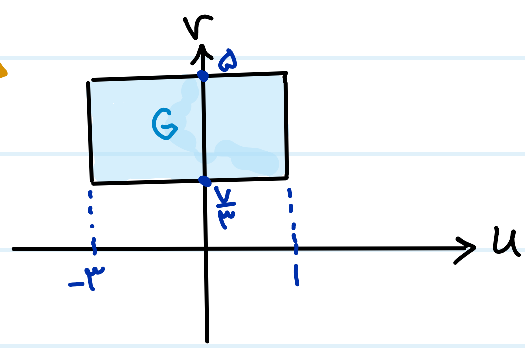
تمرین: با استفاده از تغییر مختصات مناسب، ناحیه انتگرال‌گیری R (مطابق شکل) را به ناحیه‌ای مستطیل شکل در صفحه $\mathbb{R}^۲$ با مختصات جدید (u, v) تبدیل کرده و سپس مقدار انتگرال دوگانه $\iint_R (y-x)\,dx\,dy$ را در مختصات جدید (u, v) روی ناحیه مستطیل شکل G محاسبه نمایید:



راه حل: با توجه به معادله خطوط مرزی ناحیه R، اگر قرار دهیم:

$$\begin{cases} u := y - x \\ v := y + \frac{x}{۳} \end{cases}$$

در این صورت، با این تغییر مختصات، ناحیه R به ناحیه‌ای مستطیل شکل در صفحه $\mathbb{R}^۲$ به صورت $\{(u, v) \mid -۳ \leqslant u \leqslant ۱ ,\ \frac{۷}{۳} \leqslant v \leqslant ۵\}$ تبدیل خواهد شد:



لذا از آنجا که دترمینان ژاکوبی این تغییر مختصات برابر است با:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{-1-\frac{1}{3}} = -\frac{3}{4}$$

$$\Longrightarrow \iint_R (y-x)\,dx\,dy = \int_{v=\frac{7}{3}}^{5} \int_{u=-3}^{1} u \left|-\frac{3}{4}\right| du\,dv = -8$$

* تمرین امتیازی: مطلوبست محاسبهٔ $\iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy$ در دستگاه مختصاتی جدید (u, v) که تحت این تغییر مختصات R به ناحیه‌ای مستطیل شکل تبدیل می‌شود.