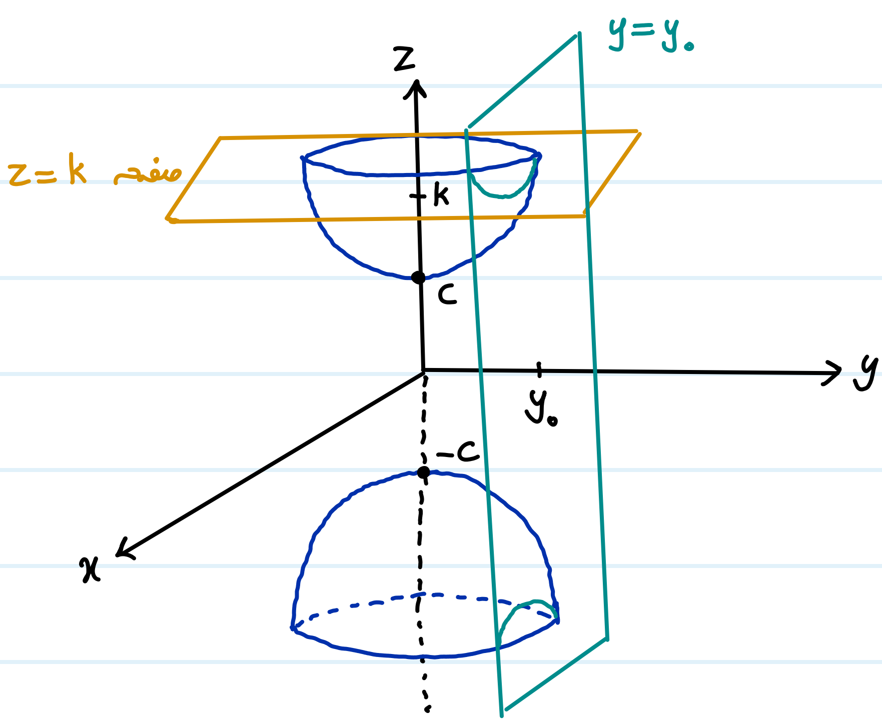
جلسه ششم

* هذلولی‌گون دو پارچه (Hyperboloid of Two Sheets): به ازای سه عدد حقیقی مثبت و ثابت $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$ معادله زیر که در آن دو جمله با ضریب منفی ظاهر شده‌اند، معادله یک هذلولی‌گون دو پارچه در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌باشد.

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$

صفحه $z=k$ تنها به شرطی می‌تواند این رویه را قطع کند که $|k|\geqslant c$. محل تقاطع برای $|k|>c$، یک بیضی است و برای $k=\pm c$ یک نقطه است.

اما هر صفحه به معادله $x=k$ یا $y=k$ رویه را در یک هذلولی قطع می‌کند.



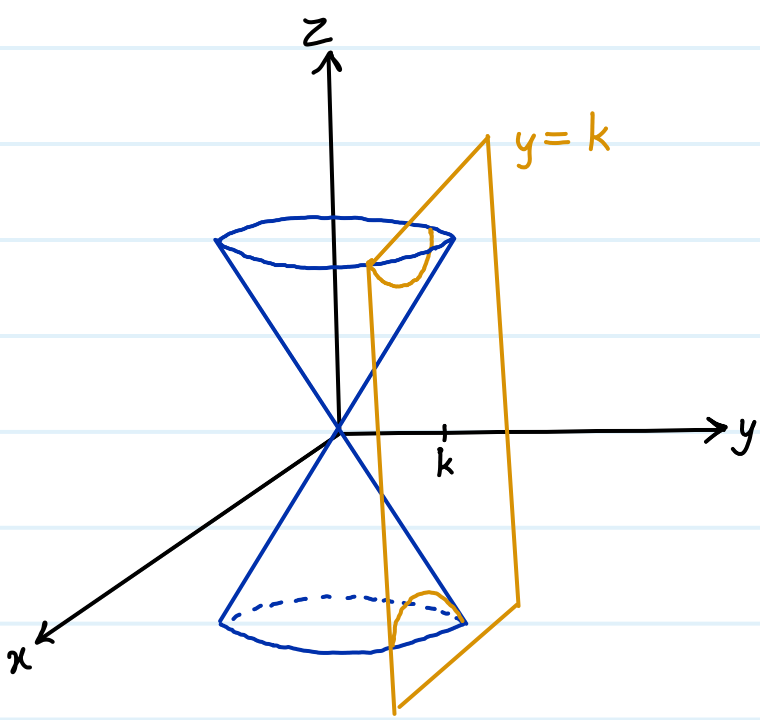
* مخروط بیضوی (Elliptical Cone): معادله درجه دوم زیر معرف یک مخروط بیضوی در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌باشد.

$$\boxed{z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R} > 0$$

محل تقاطع این رویه با صفحه $z = k \neq 0$ یک بیضی است اما محل برخورد آن با صفحه $z = 0$، نقطه $(0, 0, 0)$ است.

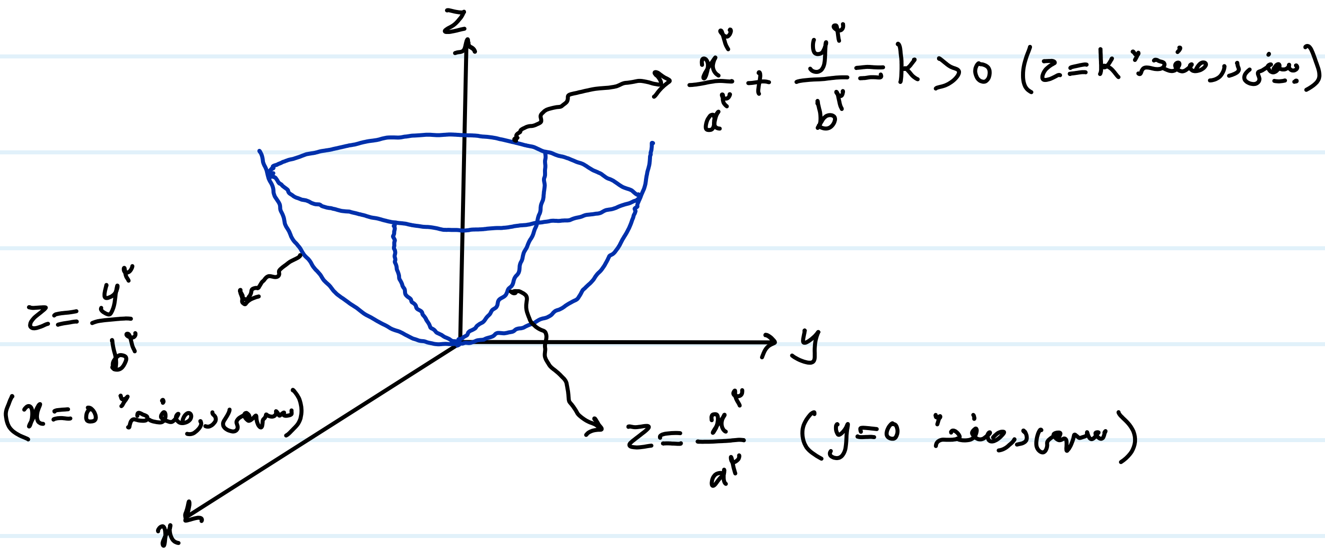
(اگر در معادله $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ داشته باشیم $a = b$، آنگاه، رویه حاصل را یک مخروط استاندارد در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌نامیم)

محل تقاطع این مخروط با صفحه $y = 0$، دو خط به معادلات $z = \pm \frac{1}{a} x$ می‌باشد. به همین ترتیب محل برخورد این مخروط با صفحه $x = 0$، دو خط به معادلات $z = \pm \frac{1}{b} y$ بوده و تقاطع مخروط با صفحه $x = k \neq 0$ یک هذلولی است.



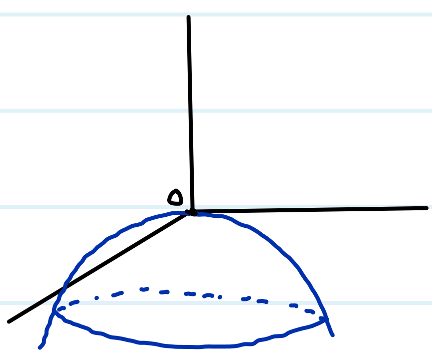
* سهمی‌گون بیضوی (Elliptical Paraboloid): معادله درجه دوم زیر معرف یک سهمی‌گون بیضوی در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌باشد:

$$\boxed{z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}} \quad ; \qquad a,b\in\mathbb{R}>0$$



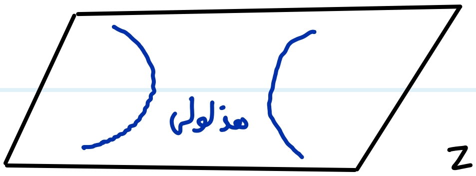
این رویه درجه دوم را یک سهمی‌گون می‌نامیم، زیرا از بسیاری از زوایا به شکل یک سهمی دیده می‌شود.

* تذکر: معادلهٔ $z=-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ ، نیز معادلهٔ یک سهمی‌گون بیضوی است:

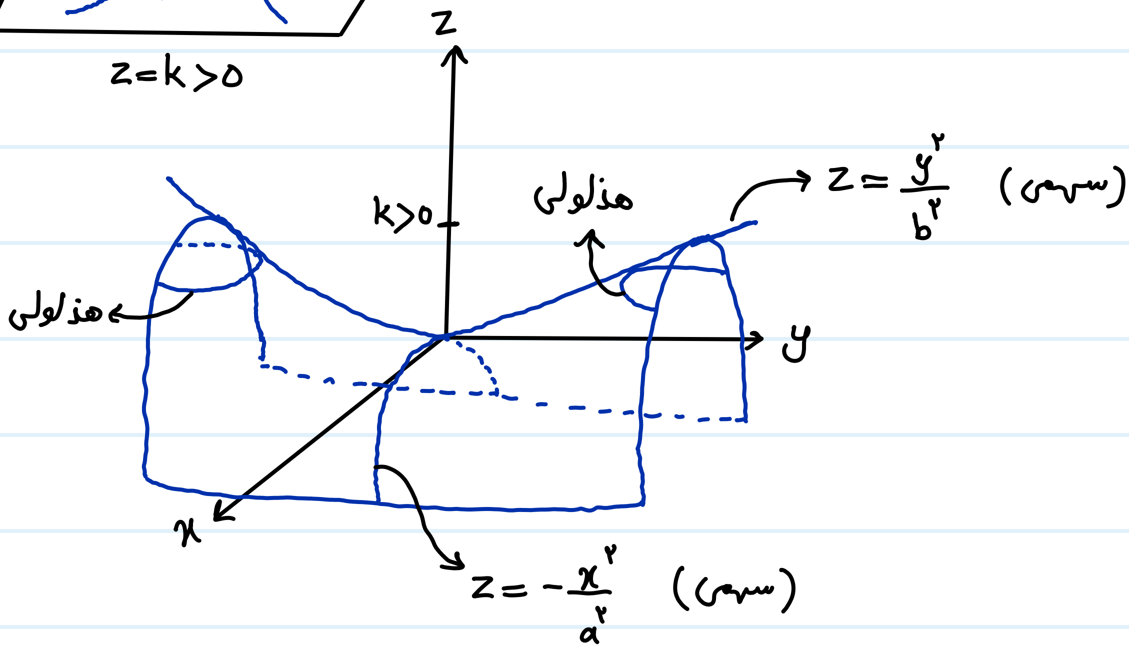


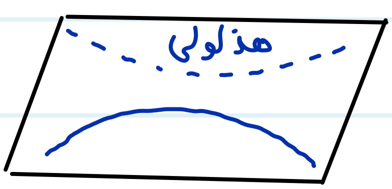
سهمی‌گون هذلولی (Hyperbolic Paraboloid) : معادله درجه دوم زیر معرف یک سهمی‌گون هذلولی در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌باشد:

$$\boxed{z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}} \quad ; \quad a,b \in \mathbb{R} > 0$$



$z=k>0$





$z=k<0$

این رویه را به دلیل شکل آن، رویه زین اسبی نیز می‌نامند.

* نقطه $(0,0,0)$ یعنی مبدأ مختصات در فضای $\mathbb{R}^3$ که نقطه ای روی سهمی گون هذلولی (رویه زین اسبی) بالا است را یک نقطه زینی (Saddle point) و یا نقطه mini-max می‌نامند.

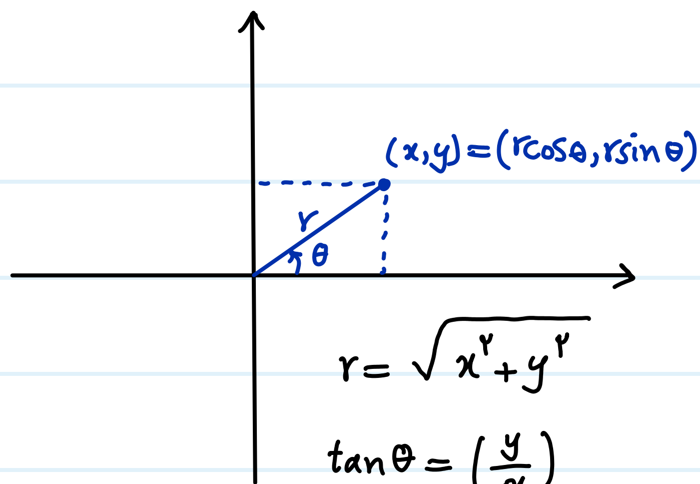
* تمرین: معادله زیر چه رویه‌ای را مشخص می‌کند؟

$$\boxed{z^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

دستگاه های مختصات

یادآوری (دستگاه مختصات قطبی روی $\mathbb{R}^2$): از ریاضی ۱ می‌دانیم هر نقطه در صفحه $\mathbb{R}^2$ با مختصات دکارتی (x,y) را می‌توان توسط دوتایی مرتب (r,θ)، به صورت زیر نیز (بدون ابهام) نمایش داد؛ زوج مرتب (r,θ) را اصطلاحاً مختصات قطبی نقطه (x,y) می‌نامیم.

تذکر: معمولاً برای انتخاب زاویه θ قرارداد می‌کنیم $\theta\in[0,2\pi]$ و $r \geq 0$.

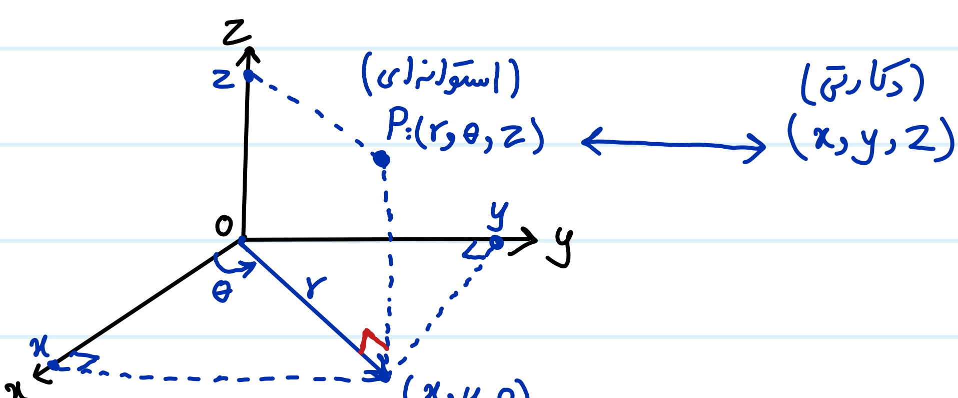


$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\tan\theta=\left(\frac{y}{x}\right)$$

دستگاه های مختصات روی فضای $\mathbb{R}^3$

* دستگاه مختصات استوانه‌ای: فرض کنیم P نقطه‌ای در فضای $\mathbb{R}^3$ با مختصات دکارتی (x,y,z) باشد. دراین‌صورت، نمایش P در دستگاه مختصات استوانه‌ای عبارتست از سه‌تایی مرتب (r,θ,z) که در آن (r,θ) همان نمایش قطبی نقطه (x,y) در صفحه $\mathbb{R}^2$ می‌باشد.

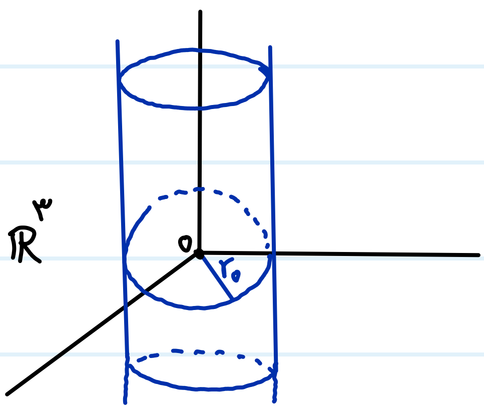


مثال: نقطه $P \in \mathbb{R}^3$ با مختصات دکارتی $(1, 1, 2)$ دارای نمایش به صورت زیر در دستگاه مختصات استوانه است: $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 2\right)$

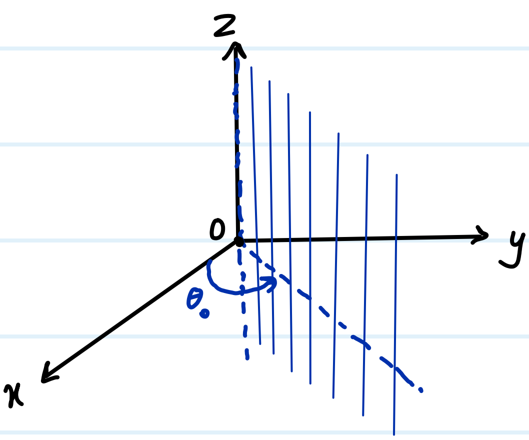
زیرا نمایش قطبی $(1, 1)$ در صفحه $\mathbb{R}^2$ عبارتست از:

$$\left(r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\ ,\ \theta = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}\right)$$

* نکته: ① فرض کنید $r_0 \in \mathbb{R} > 0$ یک عدد حقیقی مثبت و ثابت باشد. در این صورت، در دستگاه مختصات استوانه‌ای برای $\mathbb{R}^3$، معادله $\underline{r = r_0}$ معرّف استوانه‌ای قائم با مقطع دایره‌ای شکل به شعاع r_0 می‌باشد:



② به ازای زاویه‌ای ثابت مثل θ_0، معادله $\underline{\theta = \theta_0}$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای معرف نیم‌صفحه‌ای در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌باشد که به محور z ها تکیه کرده است.



۳) برای هر عدد حقیقی و ثابت $k \in \mathbb{R}$ ، معادلهٔ $z=k$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای
(مشابه به دستگاه مختصات دکارتی) صفحه‌ای در فضای $\mathbb{R}^3$ به موازات صفحهٔ (x, y) است: