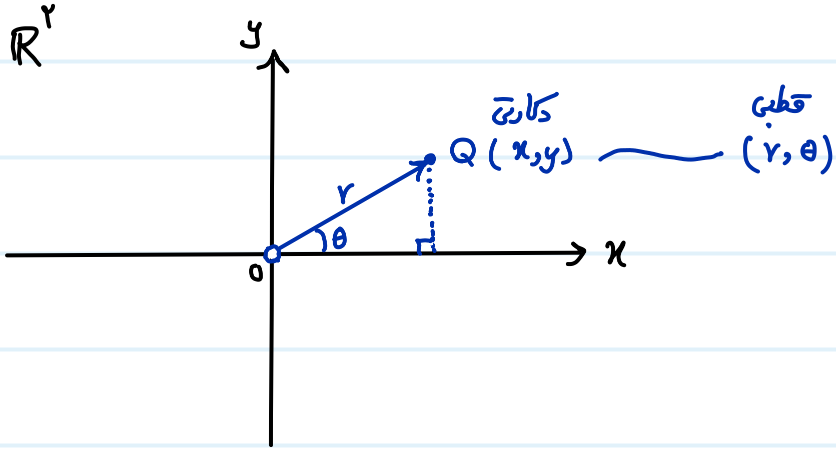
جلسه هفتم

(یادآوری)

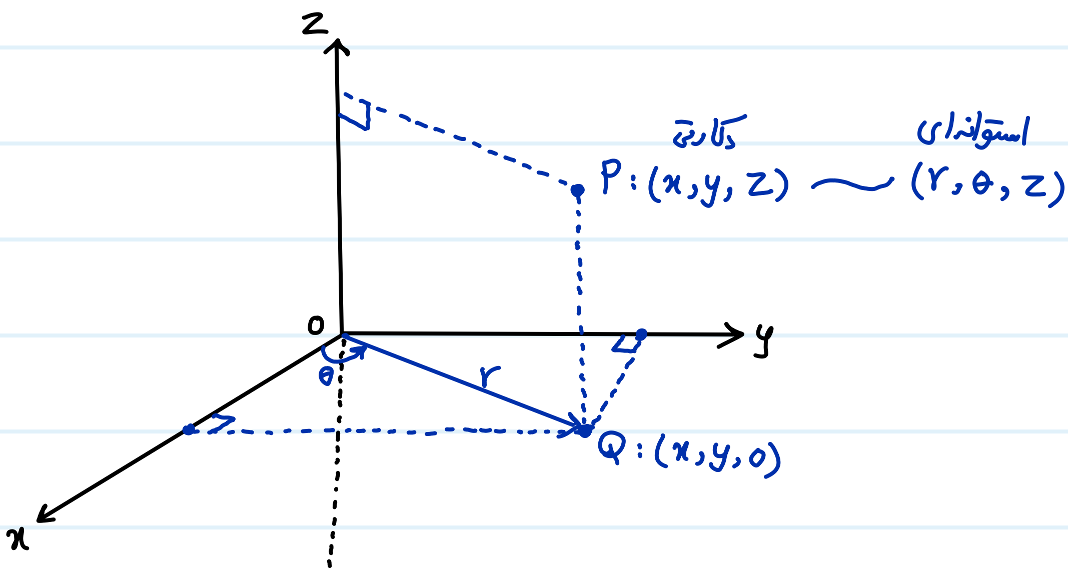
$\mathbb{R}^2$



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\boxed{\theta \in [0, 2\pi)}$$

$$r \underset{\neq}{>} 0$$



$P:(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{$ محور zها $\}$

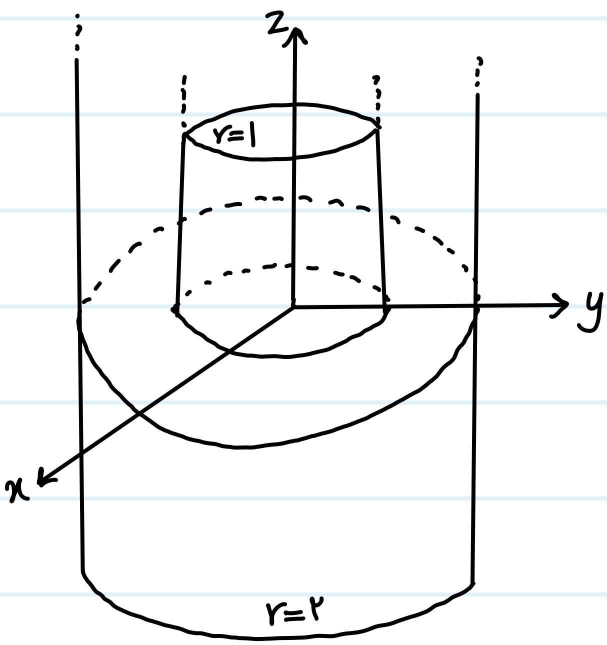
$\in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

$\in \mathbb{R}^2 \setminus \{x=0,\ y=0\}$

تمرین ۱ : مکان هندسی کلیه نقاطی در $\mathbb{R}^3$ بیابید که در دستگاه مختصات استوانه‌ای توسط معادله زیر معرفی می‌شوند :

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

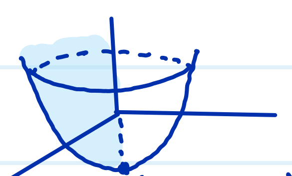
جواب : از آنجا که $r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2)$ لذا عبارت r^2-3r+2 تنها به ازای $\underline{r=1}$ و $\underline{r=2}$ برابر صفر می‌شود و بنابراین مکان هندسی کلیه نقاطی که در معادله بالا (در دستگاه مختصات استوانه‌ای) صدق می‌کنند عبارتند از دو استوانه تو در تو به شعاع‌های $\underline{1}$ و $\underline{2}$ در فضای $\mathbb{R}^3$



تمرین ۲: معادله $x^2+y^2+2x-z=4$ را در دستگاه مختصات دکارتی روی فضای (x,y,z) در $\mathbb{R}^3$ درنظر گرفته و آن را در دستگاه مختصات استوانه‌ای بازنویسی کنید.

$$(x+1)^2+y^2 = z+5$$

(سهمی‌گون بیضوی)



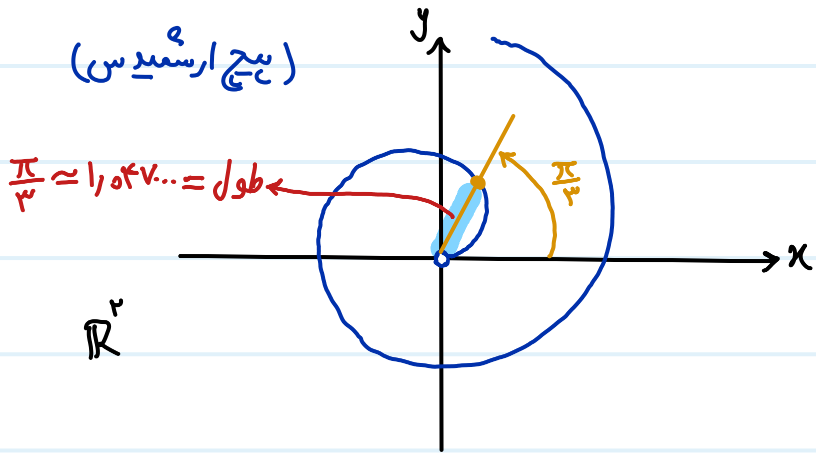
جواب: می‌دانیم $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ لذا:

$$\begin{cases} x^2+y^2 = r^2 \\ , \\ 2x = 2r\cos\theta \end{cases}$$

لذا معادله داده شده را می‌توان به صورت زیر در دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) بیان کرد.

$$r^2 + 2r\cos\theta - z = 4$$

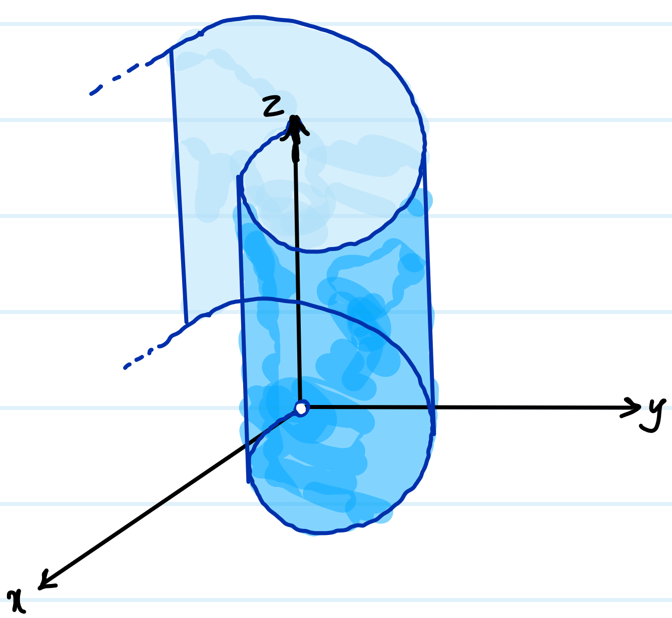
مثال (پیچ ارشمیدس):



معادله $\boxed{r=\theta}$ را در دستگاه مختصات قطبی برای صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ (که در آن θ برحسب رادیان اندازه‌گیری می‌شود) در نظر بگیرید.

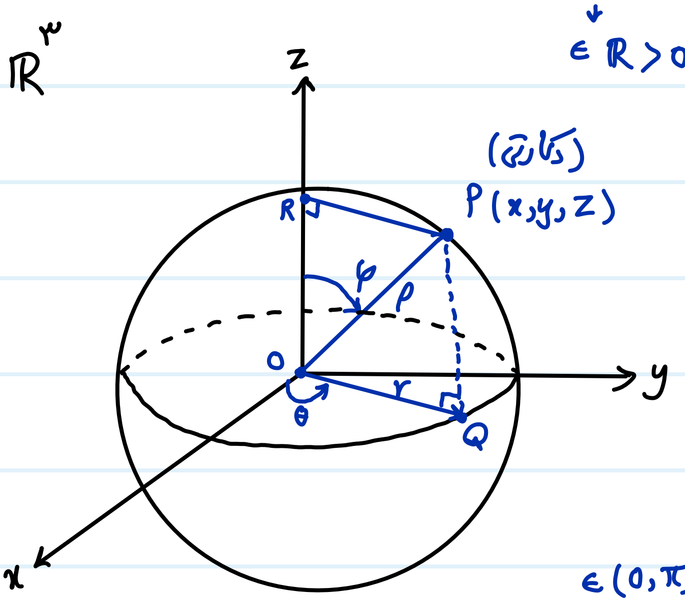
این معادله معرّف یک منحنی معروف موسوم به پیچ ارشمیدس می‌باشد.

لذا معادله $\underline{r=\theta}$، در مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) روی فضای $\mathbb{R}^3$، معرّف رویه‌ای استوانه‌ای (یا سیلندر) در فضای $\mathbb{R}^3$ به صورت زیر می‌باشد که منحنی مولد آن همین پیچ ارشمیدس است:



* دستگاه مختصات کروی: اگر سه تایی مرتب (x,y,z) بیانگر مختصات دکارتی نقطه‌ای (دلخواه)
مثل P در فضای $\mathbb{R}^3\setminus\{\text{محور}z\text{ها}\}$ باشد، آنگاه نقطه P را در دستگاه مختصات کروی می‌توان توسط سه تایی مرتب
(ρ,θ,φ) معرفی کرد که $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\in\mathbb{R}>0$



$\rho \rightarrow$ rho ژ

$\theta \rightarrow$ theta تِتا

$\varphi \rightarrow$ phi فای

$\in(0,\pi)$

برابر فاصله اقلیدسی نقطه P تا مبدأ مختصات است، φ زاویه‌ای است که بردار $\overrightarrow{OP}$ با جهت مثبت محور zها می‌سازد و θ زاویه‌ای است که بردار $\overrightarrow{OQ}$ (یعنی بردار مکان پای عمود نقطه P در صفحه (x,y)) با جهت مثبت محور xها می‌سازد.

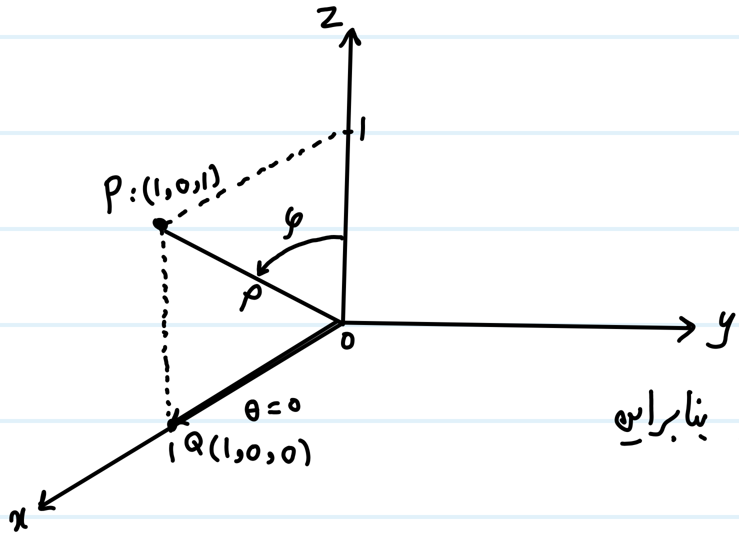
با در نظر گرفتن مثلث $\overset{\triangle}{OPR}$، می‌توان دید:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{z}{\rho} \Rightarrow z=\rho\cos\varphi \\ , \\ \sin\varphi = \dfrac{|\overline{PR}|}{\rho} = \dfrac{|\overline{OQ}|}{\rho} = \dfrac{r}{\rho} \Rightarrow r=\rho\sin\varphi \end{cases}$$

حال از آنجا که می‌دانیم $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ , \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \end{cases}$$

مثال: نقطه P را با مختصات دکارتی (۱,۰,۱) در فضای $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید. در این صورت داریم:



$$\rho=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{z=\rho\cos\varphi} 1=\sqrt{2}\cos\varphi \Longrightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}$$

از طرفی می‌دانیم $y=\rho\sin\varphi\sin\theta$ لذا چون $y=0$ بنابراین $\sin\theta=0$ و درنتیجه $\boxed{\theta=0}$.

لذا نمایش نقطه P در مختصات کروی عبارتست از: $\boxed{\sqrt{2},\ 0,\ \frac{\pi}{4}}$

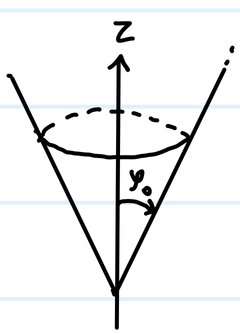
* نکته: دستگاه مختصات کروی را روی $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید. در این صورت:

① معادله $\rho=\rho_0$ (ثابت)، به ازای عدد حقیقی، مثبت و ثابت $\rho_0\in\mathbb{R}>0$، معرف کره‌ای به شعاع ρ_0 در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌باشد.

② معادله $\theta=\theta_0$ (ثابت)، به ازای زاویه ثابت θ_0، معرف نیم‌صفحه‌ای در فضای $\mathbb{R}^3$ که به محور zها تکیه کرده است

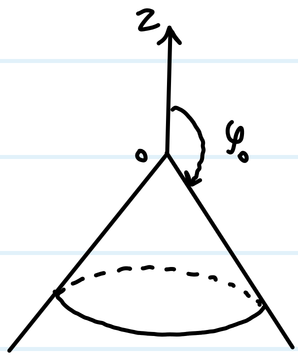
③ به ازای زاویه ثابت و دلخواه $\varphi_0\in(0,\pi)$، مکان هندسی کلیه نقاطی که مختصات کروی آن‌ها در معادله $\varphi=\varphi_0$ صدق می‌کند را می‌توان به صورت زیر رده‌بندی کرد:

(الف) اگر $0<\varphi_0<\frac{\pi}{2}$ آنگاه $\varphi=\varphi_0$ معرف نیمه بالایی یک مخروط استاندارد است.



(ب) اگر $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ آنگاه $\varphi = \varphi_0$ دقیقاً خود صفحه‌ی (x,y) را در فضای $\mathbb{R}^3$ معرفی می‌کند.

(ج) برای هر زاویه‌ی ثابت $\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \pi$ ، معادله $\varphi = \varphi_0$ بیانگر نیمه‌ی پایینی یک مخروط استاندارد است:



★ تمرین: رویه‌ای که توسط معادله‌ی $\rho = \sin\theta \sin\varphi$ (در دستگاه مختصات کروی) در فضای $\mathbb{R}^3$ معرفی می‌شود را در نظر بگیرید.

ابتدا معادله‌ی این رویه را در مختصات دکارتی / استوانه‌ای بیان کرده و نوع رویه را تشخیص دهید.