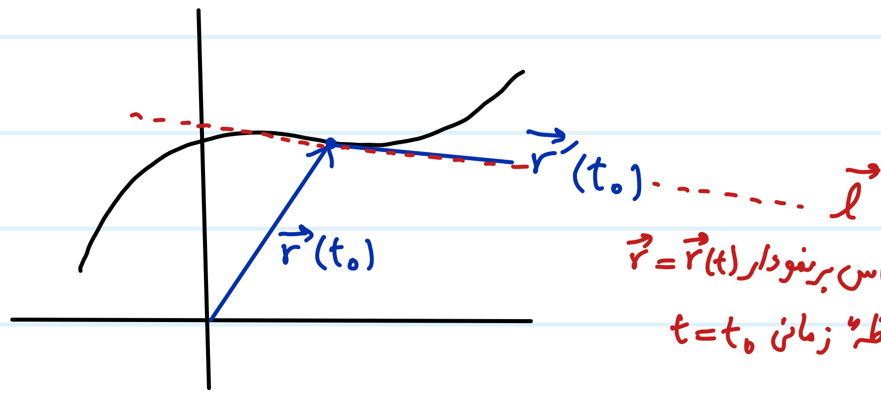
جلسه یازدهم

(یادآوری)



خط‌های مماس بر نمودار $\vec{r}=\vec{r}(t)$
در لحظه‌ی زمانی $t=t_0$

$$t_0=0:\ \vec{\ell}(t)=\vec{r}(0)+t\,\vec{r}'(0)$$

$$\begin{cases}\vec{\ell}_1(t)=\vec{r}(t_0)+(t-t_0)\,\vec{r}'(t_0)\\ \vec{\ell}_2(t)=\vec{r}(t_0)+t\,\vec{r}'(t_0)\end{cases}$$

ℓ_1 و ℓ_2 دو پارامتری‌سازی از خط مماس ℓ هستند

با این تفاوت که:

$$\begin{cases}\vec{\ell}_1(t_0)=\vec{r}(t_0)\\ \vec{\ell}_2(0)=\vec{r}(t_0)\end{cases}$$

قوانین مشتق‌گیری توابع برداری:

۱) $$\frac{d}{dt}(\vec{c})=\vec{0}$$

۲) $$\frac{d}{dt}\left(f(t)\,\vec{r}(t)\right)=f'(t)\,\vec{r}(t)+f(t)\,\vec{r}'(t)$$

قانون لایب نیتز:
(Leibniz rule)

۳) $$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}(f(t))\right)=f'(t)\,\vec{r}'(f(t))$$

قانون زنجیری:
(chain rule)

پارامتر طول قوس (Arc length parameter)

هدف: قصد داریم با پارامتر طول قوس و ویژگی های پارامتری سازی حاصل از بکارگیری این پارامتر آشنا شویم.

* تعریف (طول یک خم/طول یک منحنی هموار): طول خم هموار $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ روی بازه زمانی $[a,b]$ (یا به عبارتی طول مسیر طی‌شده توسط ذره‌ای متحرک روی این منحنی هموار از لحظه زمانی $t=a$ تا $t=b$) برابر است با:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = \int_a^b |\vec{v}|\, dt \quad ; \quad |\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$$

اندازهٔ بردار سرعت ذره در هر لحظه

* نکته: فرض کنید C یک منحنی هموار در $\mathbb{R}^3$ باشد که توسط پارامتر t پارامتری شده است. بعلاوه نقاط روی این منحنی را به صورت $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ نمایش دهید. در این صورت چنانچه نقطه‌ای مانند $P(t_0)$ را به عنوان نقطه شروع حرکت ذره‌ای روی این منحنی هموار در نظر گرفته و جهت حرکت ذره با گذر زمان (یعنی با افزایش مقدار پارامتر t) را روی منحنی C، جهت مثبت حرکت روی C در نظر گیریم، آنگاه مسافت طی شده توسط این ذره متحرک روی منحنی هموار C را با شروع از لحظهٔ $t=t_0$ تا هر زمان دلخواه t می‌توان به صورت تابعی از زمان و توسط فرمول زیر محاسبه نمود:

$$\boxed{S(t) := \int_{t_0}^{t} |\vec{v}(u)|\, du = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2 + (z'(u))^2}\, du}$$

پارامتر طول قوس منحنی

حاصل از تابع برداری $\vec{r} = \vec{r}(t)$

مثال: منحنی هموار $C: \begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t+3 \end{cases}$ را با نقطه‌ی شروع $(-1,3) \in \mathbb{R}^2$ درنظر گرفته و معادله

پارامتری منحنی C را برحسب پارامتر طول قوس بیان کنید.

جواب: چون این منحنی در صفحه‌ی دو بعدی $\mathbb{R}^2$ با مختصات دکارتی (x,y) قرار دارد لذا برای بکارگیری فرمول مربوط به طول قوس $s(t)$ کافی است متغیر z (و لذا $z'(u)$) را برابر صفر قرار دهیم.

از طرفی داریم:

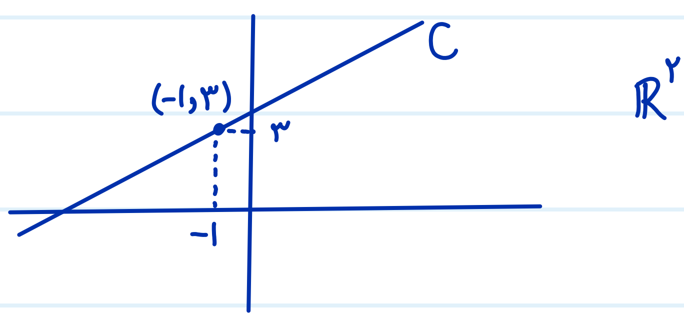
$$\begin{cases} x(u) = 2u-1 \\ y(u) = u+3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x'(u) = 2 \\ y'(u) = 1 \end{cases} \quad ;$$

(u نام دیگری برای پارامتر زمانی است)

$$\Rightarrow s(t) = \int_{t_0=0}^{t} \sqrt{(2)^2+(1)^2}\, du = \int_0^t \sqrt{5}\, du = \sqrt{5}\, t \Rightarrow t = \frac{s}{\sqrt{5}}$$

حال چنانچه در نمایش منحنی هموار C، پارامتر t را برحسب پارامتر s بنویسیم، پارامتری سازی C برحسب طول قوس s بدست می‌آید:

$$\begin{cases} x(s) = \frac{2s}{\sqrt{5}} - 1 \\ y(s) = \frac{s}{\sqrt{5}} + 1 \end{cases}$$



* تعریف / قرارداد: پارامتری سازی حاصل از پارامتر طول قوس را (به دلیل ویژگی های هندسی مطلوبش که جلوتر خواهیم دید)، پارامتری سازی هندسی می‌نامیم.

* نکته: می دانیم می توان $S=S(t)=\int_{t_0}^{t} \left|\vec{v}(u)\right| du$ را به عنوان تابعی حقیقی ـ مقدار (با مقادیر مثبت حقیقی) روی بازه زمانی $[t_0,t]\in \mathbb{R}$ در نظر گرفت. در این صورت با بکارگیری قضیه اساسی حساب می توانیم نتیجه بگیریم:

$$\boxed{\frac{ds}{dt}=\left|\vec{v}(t)\right|=\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|}$$

به طور ضمنی نیز (چون فرض کرده ایم منحنی ها همگی هموار باشند) می توان نتیجه گرفت:

$$\boxed{\frac{ds}{dt} \underset{\neq}{>} 0}$$

* تعریف (بردار مماس یکه): بردار $\vec{T}(t):=\dfrac{\vec{r}'(t)}{\left|\vec{r}'(t)\right|}$ (که برداری با طول 1 می باشد) را
(Unit tangent vector)
بردار مماس یکه بر منحنی هموار پارامتری شده توسط تابع برداری $\vec{r}=\vec{r}(t)$ می نامیم.

با توجه به نکته قبل، می توان دید چنانچه تابع برداری $\vec{r}$ برحسب پارامتر طول قوس S پارامتری شده باشد آنگاه بردار مماس یکه بر منحنی هموار پارامتری شده $\vec{r}=\vec{r}(s)$ را می توان توسط فرمول زیر معرفی نمود:

$$\boxed{\vec{T}=\frac{d\vec{r}}{ds}}$$

در واقع، طبق تعریف $\vec{T}$، می دانیم:

$$\vec{T}=\frac{\vec{r}'(t)}{\left|\vec{r}'(t)\right|}=\frac{dr}{dt}\times\frac{1}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|}\xrightarrow{\text{طبق نکته قبل}}\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{1}{\frac{ds}{dt}}=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{dt}{ds}=\frac{d\vec{r}}{ds}$$

* فرمول $\vec{T}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}$ بیان می‌کند که اگر پارامتری سازی هندسی را برای تابع برداری $\vec{r} = \vec{r}(s)$

در نظر بگیریم آنگاه بردار $\frac{d\vec{r}}{ds}$ همواره برداری با طول 1 بوده و همان بردار مماس یکه بر منحنی هموار داده شده است.

تمرین: می‌توان دید چنانچه معادله پارامتری منحنی هموار $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (به جای نمایش در مختصات دکارتی) در مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) روی فضای $\mathbb{R}^3$ ارائه شده باشد آنگاه طول این منحنی هموار روی بازهٔ زمانی $[t_0, t]$ برابر است با:

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

دلیل: در واقع اگر (x, y, z) مختصات دکارتی نقطه‌ای دلخواه در فضای $\mathbb{R}^3$ بوده و (r, θ, z) نمایش همین نقطه در مختصات استوانه‌ای باشد، آنگاه داریم:

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta \quad , \quad z = z$$

از طرفی می‌دانیم (طبق قاعده لایب نیتز):

قانون ضرب در مشتق گیری

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\frac{d\theta}{dt}\sin\theta$$

و

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\frac{d\theta}{dt}\cos\theta$$

$$\Rightarrow L = \int_{t_0}^{t_1} \left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(\begin{array}{l} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \cos^2\theta + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \sin^2\theta \cancel{- 2r \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\cos\theta} \\ + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \sin^2\theta + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \cos^2\theta \cancel{+ 2r \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\cos\theta} \\ + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \end{array} \right)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt$$

* به طور مشابه می توان دید اگر منحنی هموار $\vec{r} = \vec{r}(t)$ در مختصات کروی (ρ, θ, φ) داده شده باشد آنگاه طول قوس این منحنی هموار طی شده روی بازهٔ زمانی $[t_0, t_1]$ برابر است با:

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2 \sin^2\varphi \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\; dt$$