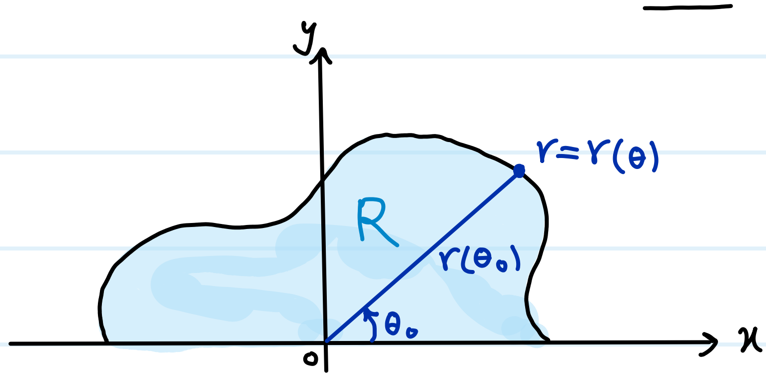
جلسه بیست و پنجم

* تکنیک هایی برای انتگرال گیری دوگانه در مختصات قطبی

* فرمول محاسبهٔ مساحت نواحی کراندار در مختصات قطبی: اگر R ناحیه ای کراندار درصفحهٔ $\mathbb{R}^2$ با مختصات قطبی باشد، آنگاه مساحت ناحیهٔ R برابر است با:

$$A = \iint_R \underbrace{r\,dr\,d\theta}_{=dA}$$



* روش تغییر یک انتگرال دوگانه در مختصات دکارتی به انتگرال دوگانه در مختصات قطبی:

این کار را در دو گام انجام می دهیم

گام اول: در انتگرال دوگانهٔ $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$ (روی ناحیهٔ کراندار R) قرار می دهیم

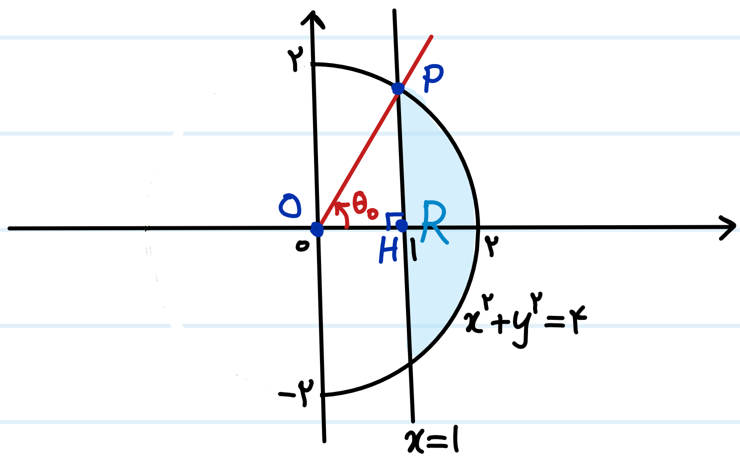
$$\begin{cases} x := r\cos\theta \\ \text{و} \\ y := r\sin\theta \end{cases}$$

و به جای فرم $dx\,dy$ قرار می دهیم $r\,dr\,d\theta$.

گام دوم: حدود انتگرال گیری قطبی را برای مرز ناحیه کراندار R تعیین کرده و مقدار انتگرال دکارتی مورد نظر را با استفاده از فرمول زیر در مختصات قطبی محاسبه می کنیم:

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,\underline{dx\,dy} = \iint_{R(=G)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\underline{r\,dr\,d\theta}}$$

تمرین ۱: ناحیه کراندار محصور بین خط $x=1$ و درون دایره ای به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع ۲ را در صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ (مطابق شکل) درنظر گرفته و مساحت ناحیهٔ معرفی شده را در مختصات قطبی محاسبه نمایید.



راه حل: از آن جا که $x=r\cos\theta$، لذا در امتداد خط عمودی $x=1$ داریم $r\cos\theta=1$ یا به عبارتی معادل $r=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$. روی دایرهٔ مورد نظر نیز داریم $r=2$. به این ترتیب، حدود انتگرال گیری برای متغیر r روی ناحیهٔ مورد نظر مشخص می شود. حال برای تعیین حدود انتگرال گیری برای متغیر θ، اگر مثلث $O\hat{P}H$ را مطابق شکل درنظر بگیریم، داریم:

$$\cos\theta_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

لذا حد بالایی انتگرال گیری برای متغیر θ برابر است با $\frac{\pi}{3}$ و به دلیل تقارن ناحیه مورد نظر نسبت به محور x ها، حد پایین برای θ برابر است با $-\frac{\pi}{3}$. در نتیجه مساحت ناحیهٔ R عبارتست از:

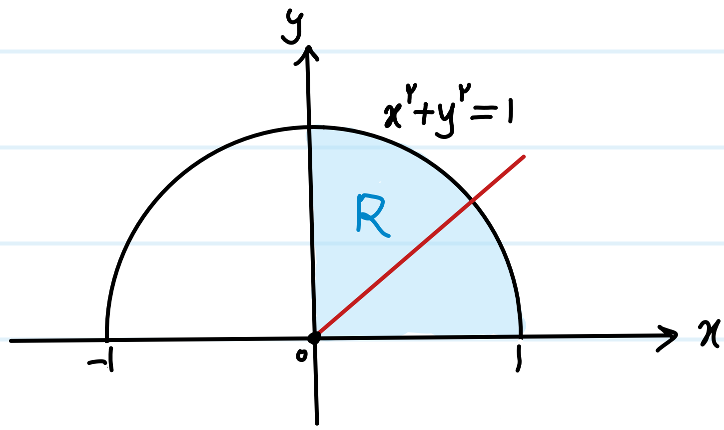
$$A = \int_{\theta=-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{r=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta}^{r=2} r\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \Big(2-\underbrace{\frac{\sec^2\theta}{2}}_{=\frac{1}{2\cos^2\theta}}\Big)\,d\theta = \left(2\theta - \frac{1}{2}\tan\theta\right)\Big|_{\theta=-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= 2\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

تمرین ۲: ابتدا انتگرال زیر را در مختصات قطبی بیان کرده و سپس مقدار انتگرال قطبی نظیر را محاسبه نمایید:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \underbrace{(x^2+y^2)}_{=r^2} \underbrace{dx\, dy}_{=r\,dr\,d\theta}$$

(برش های افقی)



$$x = \sqrt{1-y^2} \Longrightarrow x^2+y^2=1$$

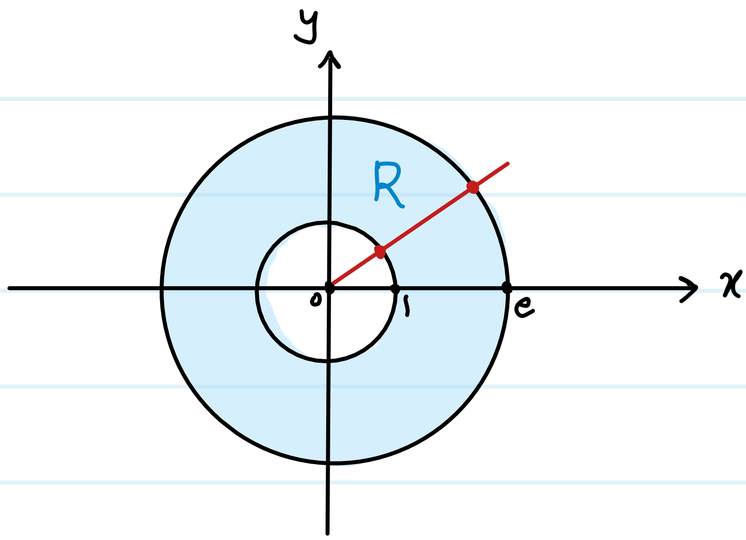
$$A = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=1} r^3\, dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4}-0\right) d\theta = \frac{\pi}{8}$$

$$x^2+y^2=r^2 \Rightarrow r^2=1 \Rightarrow r=1$$

تمرین ۳: انتگرال دکارتی $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$ را برای تابع $f(x,y)=\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

روی ناحیه $e^2 \cong 2{,}7\ldots$ (نپر) ; $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant e^2\}$ (مطابق شکل) در

مختصات قطبی محاسبه نمایید.



$$\iint\limits_{R} \frac{\ln(x^{۲}+y^{۲})}{x^{۲}+y^{۲}} \boxed{dx\,dy} = \int_{\theta=0}^{۲\pi} \int_{r=1}^{r=e} \frac{۲\ln(r)}{r^{۲}} \boxed{r\,dr\,d\theta}$$

$$= ۲\int_{\theta=0}^{۲\pi} \Big(\underbrace{\int_{r=1}^{r=e} \frac{\ln(r)}{r}\,dr}_{} \Big)\, d\theta = ۲\int_{\theta=0}^{۲\pi} \Big(\int_{u=0}^{u=1} u\,du \Big)\, d\theta$$

$$\begin{cases} u := \ln(r) \\ du = \dfrac{dr}{r} \end{cases} \qquad \begin{cases} r=e \Rightarrow u=1 \\ r=1 \Rightarrow u=0 \end{cases}$$

$$= ۲\int_{0}^{۲\pi} \left(\frac{u^{۲}}{۲}\right)\Big|_{0}^{1} d\theta = ۲\left(\frac{1}{۲}\right)(۲\pi) = ۲\pi$$

* تمرین تحویلی: مساحت ناحیه کراندار R محصور بین دایره‌ای به شعاع یک به مرکز $(0,1)$ و خطی به معادله‌ی $y=\sqrt{3}x$ را (مطابق شکل) در دستگاه مختصات قطبی محاسبه نمایید.