جلسه شانزدهم

(یادآوری)

$$w = f(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f_x$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = f_y$$

نکته: در ردهٔ بزرگی از توابع تساوی زیر برقرار است. (اما در حالت کلی این رابطه همیشه برقرار نیست!)

$$f_{xy} = f_{yx}$$

(ادامه مبحث) مشتقات جزئی

مثال: مطلوب است ضابطه توابع f_{xy} و f_{yx} برای تابع $f(x,y) = \frac{x}{ye^x} - xy^2$.

راه حل: ابتدا مشتقات جزئی مرتبه اول را محاسبه می کنیم:

$$f_x = \frac{1}{y}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{e^x}\right) - y^2\frac{d}{dx}(x) = \frac{1}{y}\left(\frac{e^x - xe^x}{e^{2x}}\right) - y^2$$

و

$$f_y = \frac{x}{e^x}\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y}\right) - x\frac{d}{dy}\left(y^2\right) = \frac{x}{e^x}\left(-\frac{1}{y^2}\right) - 2xy$$

ولذا داریم:

$$\underrightarrow{f_{xy}} = \frac{\partial}{\partial y}(f_x) = \left(\frac{e^x - xe^x}{e^{2x}}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right) - 2y$$

و

$$\underrightarrow{f_{yx}} = \frac{\partial}{\partial x}(f_y) = \left(\frac{e^x - xe^x}{e^{2x}}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right) - 2y$$

* بنابراین برای تابع $f(x,y)$ در این مثال داریم: $f_{xy} = f_{yx}$.

* نکته: چنانچه مشتقات جزئی مرتبهٔ اول و مرتبهٔ دوم غیرمکرر تابع $f(x,y)$ (یعنی توابع f_x، f_y، f_{xy} و f_{yx}) در تمامی نقاط مجموعه‌ای موجود و پیوسته باشند، آنگاه در تمامی نقاط همان مجموعه داریم: $f_{xy} = f_{yx}$.

برای رسم توابع:
wolfram + plot

نامثال: تابع

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

را درنظر بگیرید. در این صورت می‌توان دید روی $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ داریم: $f_{xy} = f_{yx}$.

ولی

$$\begin{cases} f_{xy}(0,0) = -1 \\ , \\ f_{yx}(0,0) = +1 \end{cases} \leftarrow$$

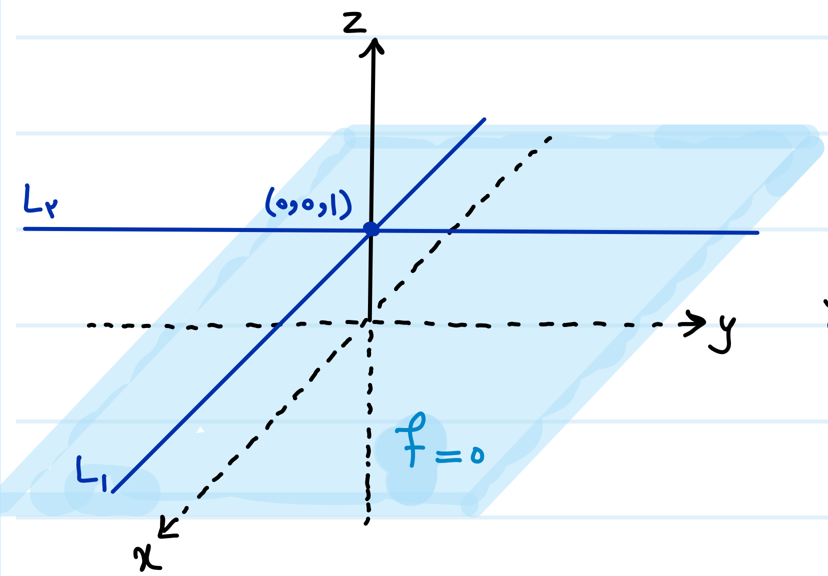
$\neq$

دلیل: عدم پیوستگی f_{xy} و f_{yx} در $(0,0)$.

* تذکر: (از ریاضی ۱) می دانیم اگر تابعی (تک متغیره) در نقطه ای مشتق پذیر باشد، آنگاه در آن نقطه پیوسته نیز می باشد.

سؤال: آیا گزارهٔ بالا برای توابع دو متغیره نیز صحیح می باشد؟ خیر

مثال: تابع دو متغیره $f(x,y) := \begin{cases} 0 \;; & xy \neq 0 \\ 1 \;; & xy = 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.



$\{x, y, z = f(x,y) \mid (x,y) \in D_f\} \subset \mathbb{R}^3$

گراف/نمودار این تابع (مطابق شکل)

شامل خطوط $L_1 : \{(x,0,1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ و

$L_2 : \{(0,y,1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ و تمامی نقاط واقع در چهار ناحیهٔ

بدون مرز مشخص شده در صفحه (x,y) می باشد.

می توان دید مقدار $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}$ و $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}$

هر دو موجود و برابر صفر هستند ولی (همانطور که از گراف/نمودار تابع f نیز مشهود است) تابع $f(x,y)$ در

نقطه $(0,0)$ پیوسته نمی باشد. (زیرا حد تابع $f(x,y)$ در $(0,0)$ وجود ندارد.)

در واقع برای یافتن مقدار عددی $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}$ کافی است در ضابطهٔ تابع قرار دهیم $y=0$ و سپس از

تابع بدست آمده برحسب تنها متغیر باقی مانده یعنی x مشتق بگیریم و در نهایت در نتیجه بدست آمده قرار دهیم

$x=0$. لذا

$$\text{شیب خط } L_1 \text{ در نقطه } (0,0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \frac{d}{dx}\left(\underbrace{f(x,0)}_{=1}\right)\Big|_{x=0} = 0$$

به طور مشابه می‌توان دید :

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)} = 0 = \text{شیب خط ۲ را در نقطه } (0,0)$$

لذا پاسخ سؤال آخر، در حالت کلی منفی است.

* نکته : اگر مشتقات جزئی مرتبه اول تابع دو متغیره $f(x,y)$ (یعنی توابع f_x و f_y) در تمامی نقاط ناحیه‌ای در صفحه‌ی (x,y) موجود و پیوسته باشند، آنگاه تابع f در تمامی نقاط آن ناحیه، تابعی پیوسته است.

(در واقع، تابعی در شرایط این نکته صدق کند را اصطلاحاً تابعی دیفرانسیل پذیر می‌نامند).

* قانون زنجیری در مشتق گیری از توابع چند متغیره

هدف: قصد داریم با مشتق توابع چند متغیره‌ای آشنا شویم که متغیرهایشان نیز توابعی از متغیرهای دیگری هستند. می‌خواهیم به بررسی مشتق ترکیب توابع چند متغیره بپردازیم. برای این منظور، به قانون زنجیری در مشتق گیری نیاز داریم.

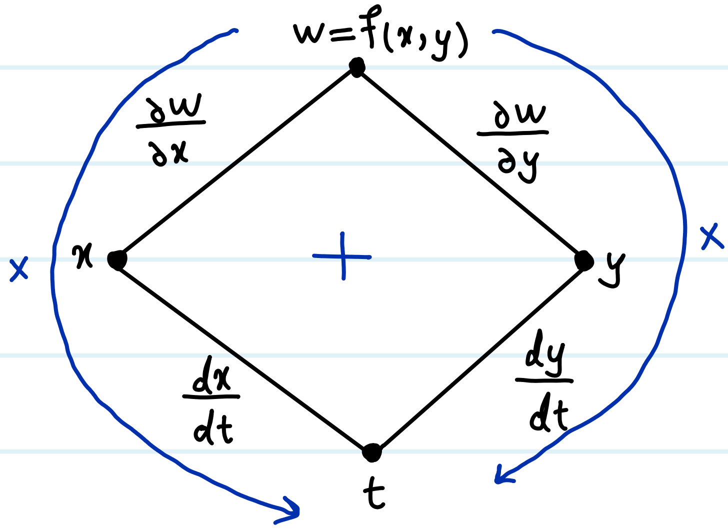
* قانون زنجیری برای توابعی با دو متغیر مستقل: اگر $w=f(x,y)$ تابعی مشتق پذیر برحسب x و y بوده و $x=x(t)$ و $y=y(t)$ توابعی مشتق پذیر برحسب t باشند، آنگاه تابع ترکیبی $w=f(x(t),y(t))$ نیز تابعی مشتق پذیر برحسب t بوده و داریم:

$$\frac{dw}{dt}=f_x\big(x(t),y(t)\big)x'(t)+f_y\big(x(t),y(t)\big)y'(t)$$

یا:

$$\boxed{\frac{dw}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}}$$

* قرارداد: در قانون زنجیری از آنجا که $w=f(x,y)$ تابعی برحسب دو متغیرِ x و y است لذا w را متغیری وابسته به متغیرهای مستقل x و y می‌نامیم. اما از آنجا که خودِ $x=x(t)$ و $y=y(t)$ نیز توابعی برحسب متغیر t می‌باشند، اصطلاحاً می‌گوئیم، x و y متغیرهای مستقل میانی برای w بوده و متغیر t، متغیر مستقل نهایی برای w است


$w=f(x,y)$
$\frac{\partial w}{\partial x}$
$\frac{\partial w}{\partial y}$
x
y
×
+
×
$\frac{dx}{dt}$
$\frac{dy}{dt}$
t