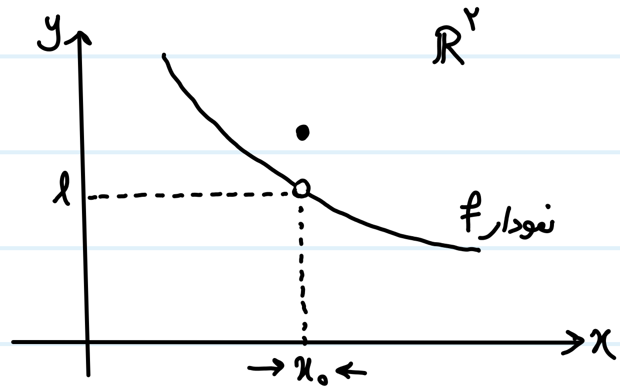
جلسه پانزدهم

یادآوری (از ریاضی ۱)

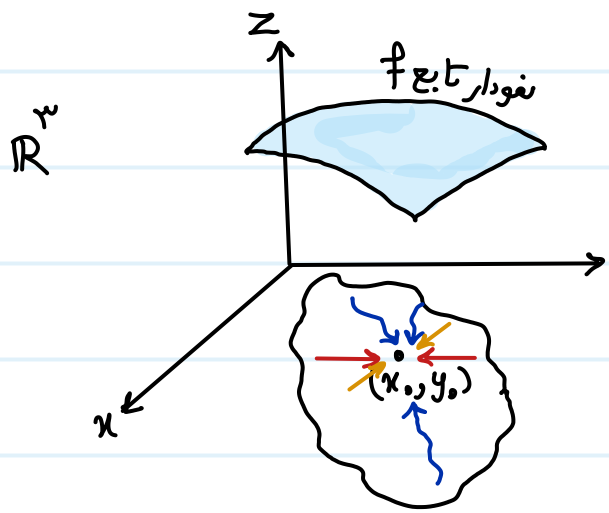
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$$l = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

شرط کافی برای وجود $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$

$f: D\subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



* تذکر: شرط کافی برای وجود $\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)}$ ، عبارتست از وجود و برابری این حد در امتداد کلیهٔ مسیرهای ممکنِ متناهی به نقطهٔ (x_0,y_0) است.

(ادامه مبحث توابع چند متغیره)

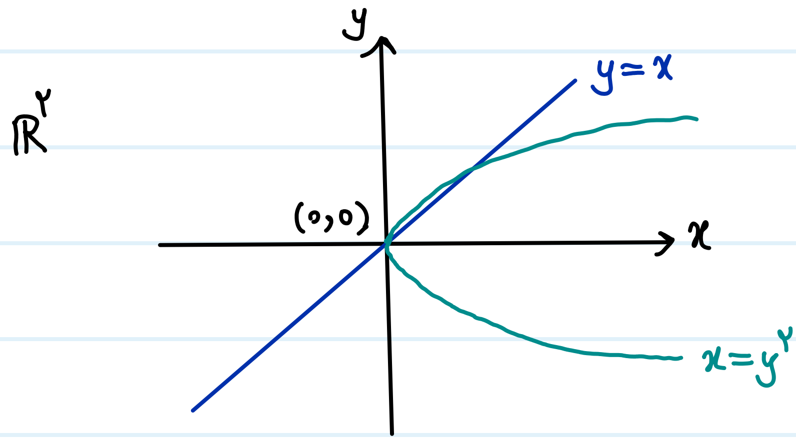
تمرین: بررسی کنید چرا تابع دو متغیرهٔ $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^4}{x^2}$ در نقطهٔ $(0,0)$ ، حد ندارد.

راه حل: کافی است دو مسیر در صفحهٔ (x,y) انتخاب کنیم که هردو از نقطهٔ $(0,0)$ عبور می‌کنند اما مقدار حدی تابع f روی این دو مسیر متفاوت باشد.

حد تابع $f(x,y)$ در امتداد مسیر $y=x$: $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+(x)^4}{x^2}=\lim_{x\to 0}(1+x^2)=1$

حد تابع $f(x,y)$ در امتداد مسیر $x=y^2$: $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{(y^2)^2+y^4}{(y^2)^2} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{2y^4}{y^4} = 2$

حد تابع $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) \neq \lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ ، بنابراین حد تابع $f(x,y)$ در نقطه $(0,0)$ موجود نیست.



* ویژگی های حد توابع دو متغیره : توابع دو متغیره $f(x,y)$ و $g(x,y)$ را در نظر گرفته و فرض کنید برای دو عدد حقیقی L و M داشته باشیم:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad , \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M$$

در این صورت :

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(f(x,y) \pm g(x,y) \right) = L \pm M$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} k f(x,y) = kL$; (برای هر عدد حقیقی k)

(3) $\lim \left(f(x,y)\, g(x,y) \right) = LM$

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} \right) = \dfrac{L}{M}$; (با فرض اینکه $M\neq 0$)

* تعریف (پیوستگی توابع دومتغیره): تابع $f(x,y)$ را در نقطهٔ (x_0,y_0) تابعی پیوسته گوئیم هرگاه:

الف) f در نقطهٔ (x_0,y_0) تعریف شده باشد؛

ب) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ موجود باشد؛

ج) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

مثال: تابع $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^4+1}{e^x+y^2}$ در تمامی نقاط $\mathbb{R}^2$ تابعی پیوسته است. به‌عنوان نمونه،

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=1=f(0,0)$.

مشتقات جزئی (Partial Derivatives)

*تعریف (مشتق جزئی): مشتق جزئی تابع $f(x,y)$ نسبت به x در نقطهٔ (x_0,y_0) را (درصورت وجود حد زیر) با نماد $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ یا $f_x(x_0,y_0)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}}$$

به‌طور مشابه، مشتق جزئی تابع $f(x,y)$ نسبت به y در نقطهٔ (x_0,y_0) را نیز (درصورت وجود مقدار حدی زیر) با نماد $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$ یا $f_y(x_0,y_0)$ نمایش داده و به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}}$$

مثال: مشتق های جزئی تابع $f(x,y)=xy^2$ را نسبت به متغیرهای x و y در نقطه (x_0,y_0) بیابید.

راه حل: طبق تعریف مشتقات جزئی یک تابع داریم:

$$f_x(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)y_0^2-x_0y_0^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{hy_0^2}{h}=y_0^2$$

و به همین ترتیب داریم:

$$f_y(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x_0y_0+x_0h)=2x_0y_0$$

* تذکر: چون (x_0,y_0) نقطه‌ی دلخواهی فرض‌شده بود. لذا می‌توانیم توابع (دو متغیره) جدیدی را به‌صورت زیر معرفی می‌نمائیم:

$$\begin{cases} K(x,y)=f_x(x,y)=y^2 \\ L(x,y)=f_y(x,y)=2xy \end{cases}$$

در محاسبه‌ی $\begin{matrix} f_x \\ f_y \end{matrix}$ ، کافی است $\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$ را ، موقتاً و در حین محاسبات ، به عنوان پارامتری ثابت درنظرگرفته و

تنها نسبت به متغیر $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$ مشتق بگیریم.

* نکته: مشتقات جزئی تابع $f(x,y)$ نسبت به متغیرهایش در نقطهٔ (x_0, y_0) را می‌توان به‌صورت زیر نیز معرفی و محاسبه کرد:

$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \frac{d}{dx}\Big(f(x,y_0)\Big)\Big|_{x=x_0}} \quad (\star)$$

و

$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \frac{d}{dy}\Big(f(x_0,y)\Big)\Big|_{y=y_0}} \quad (\star\star)$$

زیرا، به‌عنوان نمونه، اگر تابع تک متغیرهٔ $g(x)$ را به‌صورت $\underline{g(x) := f(x, \underline{\underline{y_0}})}$ معرفی می‌کنیم، آنگاه طبق تعریف حدی مشتقات جزئی می‌دانیم:

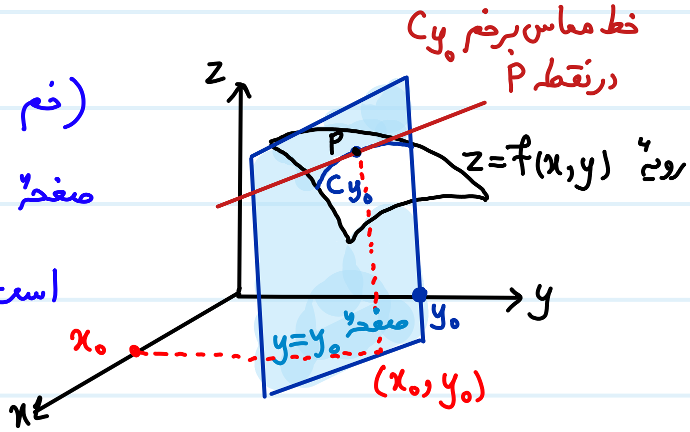
$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

$$= \frac{d}{dx}\Big(g(x)\Big)\Big|_{x=x_0} = \frac{d}{dx}\Big(f(x,y_0)\Big)\Big|_{x=x_0}$$

* تعبیر هندسی مشتقات جزئی: مقدار عددی مشتقات جزئی تابع دو متغیره $f(x,y)$ در نقطهٔ دلخواه (x_0,y_0)، یعنی $f_x(x_0,y_0)$ و $f_y(x_0,y_0)$، را به زبان هندسی می‌توان به‌صورت زیر توصیف کرد:

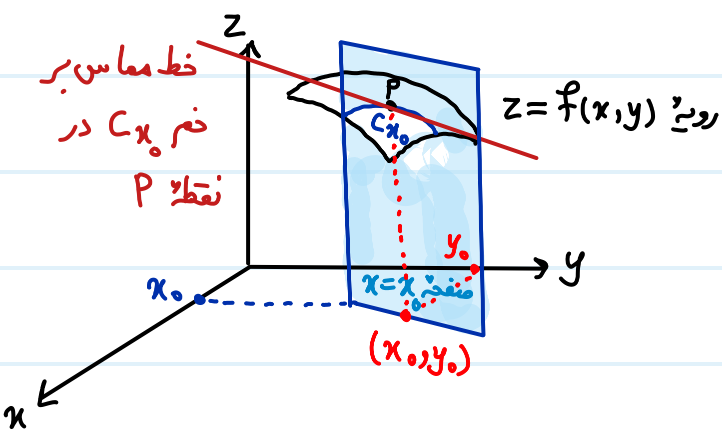
(خم C_{y_0} همان محل تقاطع
صفحهٔ $y=y_0$ و رویهٔ $z=f(x,y)$
است)



$P:(x_0,y_0,z_0=f(x_0,y_0))$

$$f_x(x_0,y_0)=\frac{d}{dx}\left(f(x,y_0)\right)\Big|_{x=x_0}=$$ شیب خط مماس برخم C_{y_0} درنقطهٔ P

(خم C_{x_0} ازتقاطع
صفحهٔ $x=x_0$ و
رویهٔ $z=f(x,y)$)



* مشتقات جزئی مراتب بالاتر: تابع دومتغیره $f(x,y)$ را در نظر بگیرید. دراین صورت از آنجا که مشتقات جزئی (مرتبه اول) تابع $f(x,y)$ یعنی f_x و f_y را نیز به عنوان توابعی دو متغیره برحسب (x,y) خواهیم داشت لذا می توانیم از توابع $f_x(x,y)$ و $f_y(x,y)$ برحسب هر یک از متغیرهای x و y مشتق جزئی گرفته و مشتقات جزئی مراتب بالاتر تابع $f(x,y)$ را (درصورت وجود) به صورت زیر معرفی کنیم:

$$f_{xx}:=\frac{\partial}{\partial x}(f_x)=:\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{xy}:=\frac{\partial}{\partial y}(f_x)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$$

$$f_{yx} := \frac{\partial}{\partial x}\left(f_y\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f_{yy} := \frac{\partial}{\partial y}\left(f_y\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$