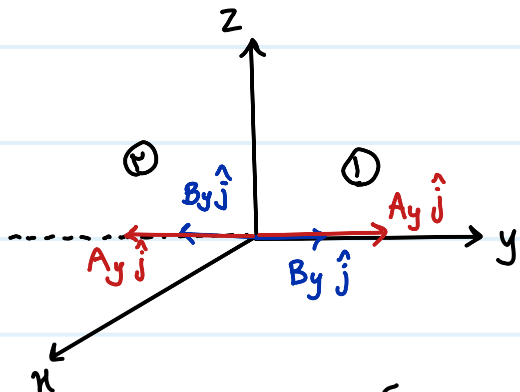
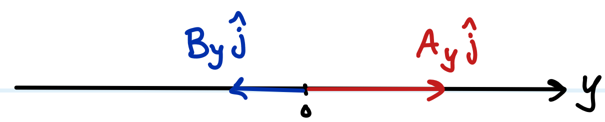
جلسه هجدهم

تمرین : مقدار اسکالر حاصل از ضرب نقطه‌ای بردارهای $A_y\hat{j}$ و $B_y\hat{j}$ چیست؟

الف) $|A_y|\,|B_y|$ ؛

$\boxed{\text{ب)}}$ $A_y B_y$.





$$(A_y\hat{j})\cdot(B_y\hat{j}) = \begin{cases} A_y B_y & ;\ A_y \geqslant 0\ ,\ B_y \geqslant 0 \ \text{اگر} \rightsquigarrow \theta = 0 \quad ① \\ (-A_y)(-B_y) & ;\ A_y < 0\ ,\ B_y < 0 \ \text{اگر} \rightsquigarrow \theta = 0 \quad ② \\ A_y(-B_y)\times(-1) & ;\ A_y \geqslant 0\ ،\ B_y < 0 \ \text{اگر} \rightsquigarrow \theta = \pi \\ (-A_y)(B_y)\times(-1) & ;\ A_y < 0\ ,\ B_y \geqslant 0 \ \text{اگر} \rightsquigarrow \theta = \pi \end{cases}$$

☆ تمرین امتیازی: فرض کنید برای محاسبهٔ ضرب نقطه‌ای دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ صرفاً مجازیم از فرمول $\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\theta$ استفاده نماییم. نشان دهید برای هر سه بردار دلخواه $\vec{A}$، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ داریم:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{B}) + (\vec{A}\cdot\vec{C})$$

* مشتق جهتی (Directional Derivative)

* تعریف (مشتق جهتی): مشتق جهتی تابع $f(x,y)$ درنقطه‌ی $P_0:(x_0,y_0)$ و در جهت بردار یکه‌ی $\vec{u}=u_1\hat{i}+u_2\hat{j}$ را درصورت وجود حد زیر، با نماد $(D_{\vec{u}}f)(P_0)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{(D_{\vec{u}}f)(P_0)=\lim_{s\to 0}\frac{f(x_0+su_1,\,y_0+su_2)-f(x_0,y_0)}{s}}=\lim_{s\to 0}\frac{f(P_0+s\vec{u})-f(P_0)}{s}$$

بر روشن‌تر شدن مفهوم مشتق جهتی یک تابع، در ادامه، به چند نکته مهم اشاره می‌کنیم.

* نکته ۱: به ازای هر نقطه دلخواه و مشخص $P_0:(x_0,y_0)$ و هر بردار یکه‌ی دلخواه و ثابت $\vec{u}=u_1\hat{i}+u_2\hat{j}$، مقدار مشتق جهتی $(D_{\vec{u}}f)(P_0)$، طبق تعریف، برابر است با:

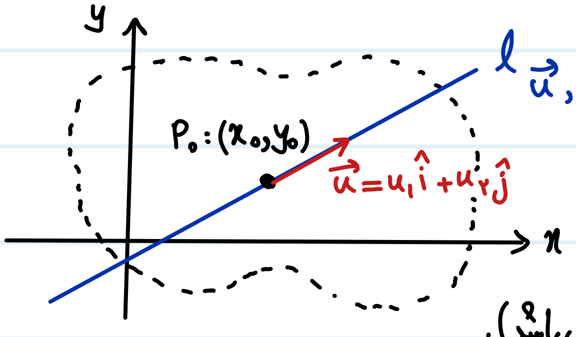
$$(D_{\vec{u}}f)(P_0)=\frac{d}{ds}\Big(f(x_0+su_1,\,y_0+su_2)\Big)\Big|_{s=0}$$

که می‌توانیم آن را (صرفاً برای ساده نویسی) به صورت زیر نیز بنویسیم:

$$(D_{\vec{u}}f)(P_0)=\left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{u},P_0}$$

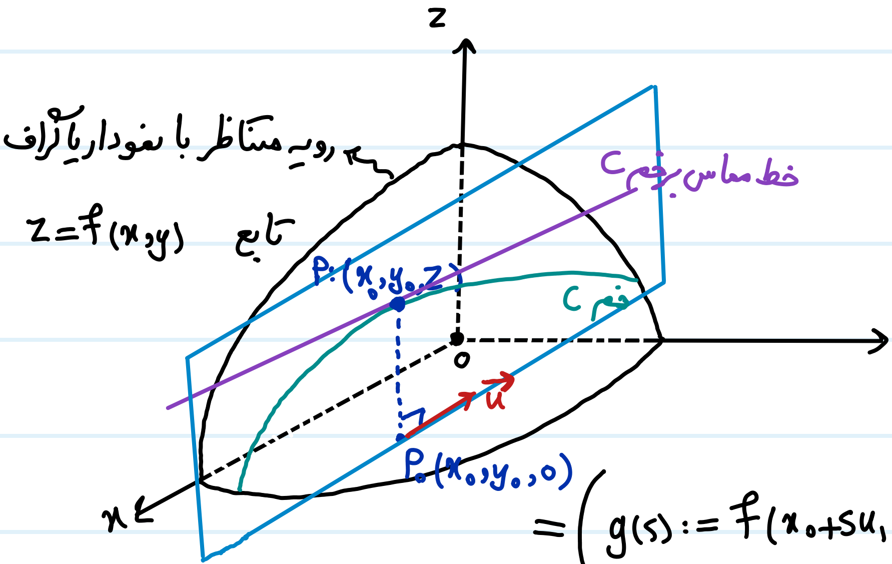
از این رو، مشتق جهتی $(D_{\vec{u}}f)(P_0)$ بیانگر سرعت تغییرات تابع f درلحظه گذر، از نقطه‌ی P_0 در جهت بردار یکه‌ی $\vec{u}$ می باشد.

$l_{\vec{u},P_0}:(x=x_0+su_1,\ y=y_0+su_2)$



(یا به عبارتی دیگر، مشتق جهتی $(D_{\vec{u}}f)(P_0)$ بیانگر سرعت تغییرات تابع f درنقطه P_0 و درامتداد خط $l_{\vec{u},P_0}$ می‌باشد).

*نکته ۲: (مشتق جهتی، تعمیمی از مفهوم مشتق جزئی است !)



خم C : خم حاصل از اشتراک نمودار تابع
$z=f(x,y)$ و صفحهٔ قائمی به صفحهٔ (x,y)
گذرنده از نقطهٔ P_0 و شامل بردار $\vec{u}$ می باشد.

$= \left(\text{نمودار یا گراف تابع} \quad g(s):=f(x_0+su_1\,,\, x_0+su_2)=f(P_0+s\vec{u}) \right)$

در نتیجه، در حالت خاص $\vec{u}=\hat{i}$ داریم:

$$\boxed{(D_{\hat{i}}f)(P_0)=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0:(x_0,y_0)}}$$

و در حالتی که $\vec{u}=\hat{j}$ داریم:

$$\boxed{(D_{\hat{j}}f)(P_0)=\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{P_0:(x_0,y_0)}}$$

*نکته ۳: (فرمولی غیرخطی برای محاسبهٔ مقدار مشتق جهتی یک تابع چند متغیره):

خط $\ell_{\vec{u},P_0}:(x=x(s)=x_0+su_1\,,\ y=y(s)=y_0+su_2)$ گذرا از نقطهٔ $P_0:(x_0,y_0)$ که توسط پارامتر طول قوس s پارامتری شده است را در نظر گرفته و جهت حرکت در امتداد این خط را همان جهت بردار یکه $\vec{u}=u_1\hat{i}+u_2\hat{j}$ ، یعنی در جهت افزایش پارامتر s ، در نظر بگیرید.

در این صورت، طبق نکته ۱ و قانون زنجیری در مشتق گیری از توابع چند متغیره، داریم:

$$(D_{\vec{u}} f)(P_0) = \frac{d}{ds}\left(f\left(x(s) = x_0 + s u_1 ,\ y(s) = y_0 + s u_2\right)\right)\Bigg|_{s=0}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\Bigg|_{(x(0),\,y(0))} \times \overbrace{\frac{dx}{ds}\Bigg|_{s=0}}^{=u_1} + \frac{\partial f}{\partial y}\Bigg|_{(x(0),\,y(0))} \times \overbrace{\frac{dy}{ds}\Bigg|_{s=0}}^{=u_2}$$

لذا، طبق تعریف ضرب نقطه‌ای بردارها، داریم:

ضرب نقطه‌ای بردارها

$$\boxed{(D_{\vec{u}} f)(P_0) = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}\right)\Bigg|_{P_0}}_{\nabla f|_{P_0}} \cdot \vec{u}}$$

$\nabla f|_{P_0}$ ⟵ بردار گرادیان f در نقطه P_0

∇ نابلا (nabla) یا دل (del)