جلسه دهم

یادآوری (مشتق توابع برداری):

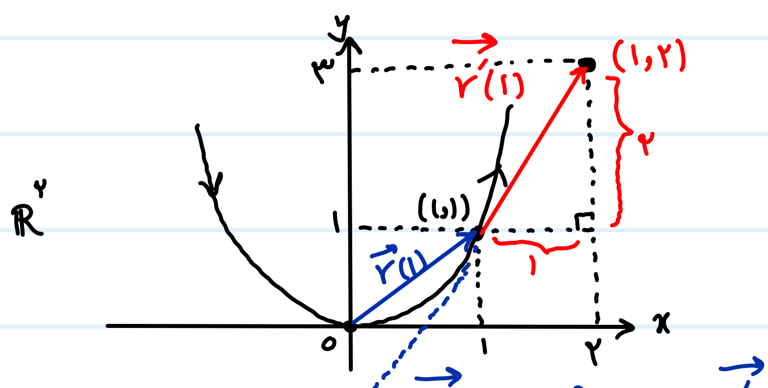
$$\begin{cases} \vec{r}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3 \\ \vec{r}(t)=f(t)\,\hat{i}+g(t)\,\hat{j}+h(t)\,\hat{k} \end{cases}$$

$$\vec{r}\,'(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\left(\frac{df}{dt}\right)\hat{i}+\left(\frac{dg}{dt}\right)\hat{j}+\left(\frac{dh}{dt}\right)\hat{k}$$

ادامه مبحث (مشتق توابع برداری):

مثال: تابع برداری $\vec{r}(t)=(t,t^2)\in\mathbb{R}^2$ را به ازای نقاط $t\in\mathbb{R}$ درنظر بگیرید. اگر قرار دهیم $x:=t$ و $y:=t^2$ آنگاه بدیهی است که این تابع برداری منحنی $y=x^2$ را در $\mathbb{R}^2$ پارامتری می‌کند.

بعلاوه داریم: $\vec{r}\,'(t)=(1,2t)$



$$\vec{r}(1)=(1,1)$$

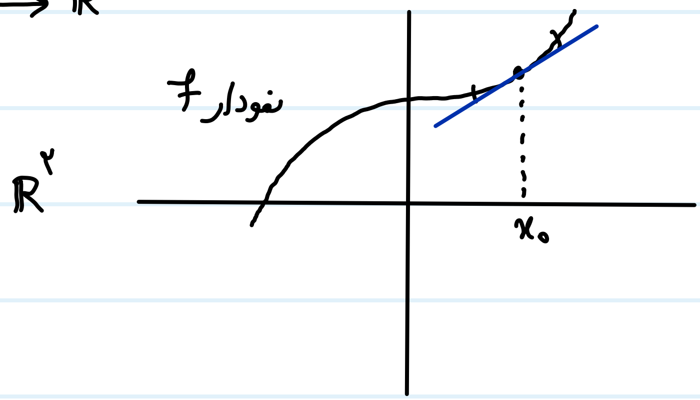
$$\vec{r}\,'(1)=(1,2)$$

خط مماس $\vec{l}(t)=\vec{r}(t_0)+\vec{r}\,'(t_0)\,(t-t_0)$

برای رسم بردار مماس $\vec{r}\,'(1)$ ابتدا مکان ذره در لحظه $t=1$ یعنی $\vec{r}(1)$ را می‌یابیم. سپس از آنجا که $\vec{r}\,'(1)=(1,2)$، از نقطه $(1,1)$ به اندازه $+1$ واحد در راستای محور xها و به اندازه $+2$ واحد در راستای محور yها حرکت کرده و نقطه انتهایی بردار $\vec{r}\,'(1)$ را در صفحه $\mathbb{R}^2$ مشخص می‌کنیم؛ نقطه ابتدایی بردار $\vec{r}\,'(1)$ همان نقطه $(1,1)$ است زیرا $\vec{r}(1)=(1,1)$.

$\operatorname{graph} f = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\} \subset \mathbb{R}^2$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$



* تعریف (خط مماس بر منحنی توابع برداری): تابع برداری $\vec{r} = \vec{r}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} + h(t)\hat{k}$ را در نظر بگیرید. بردار $\vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$ ، وقتی ناصفر باشد، را بردار مماس بر منحنی تابع برداری $\vec{r} = \vec{r}(t)$ درنقطهٔ $P : (f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ می‌نامیم.

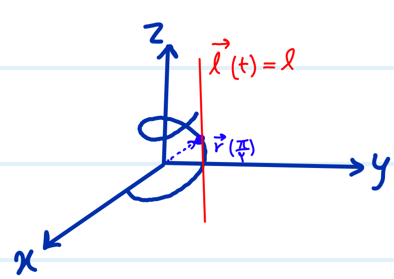
خط مماس بر منحنی تابع برداری $\vec{r} = \vec{r}(t)$ درنقطهٔ P را خط گذرا از این نقطه که به موازات بردار $\vec{r}\,'(t_0)$ درفضای $\mathbb{R}^3$ قرار دارد، تعریف می‌کنیم. در واقع، معادلهٔ پارامتری خط مماس بر منحنی تابع برداری $\vec{r}(t)$ درنقطهٔ P را می‌توان توسط تابع برداری زیر معرفی کرد:

$$\boxed{\vec{\ell} = \vec{\ell}(t) := \vec{r}(t_0) + (t - t_0)\,\vec{r}\,'(t_0)}$$

مثال: مطلوبست معادلهٔ پارامتری خط مماس بر منحنی تابع برداری $\vec{r}(t) = (\cos t)\hat{i} + (\sin t)\hat{j} + t\hat{k}$ درنقطهٔ $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

جواب: می‌دانیم $\vec{r}\,'(t) = (-\sin t)\hat{i} + (\cos t)\hat{j} + \hat{k}$ لذا: $\vec{r}\,'(\frac{\pi}{2}) = (-1)\hat{i} + (0)\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{r}(\frac{\pi}{2}) = (0)\hat{i} + \hat{j} + \frac{\pi}{2}\hat{k}$

$$\Rightarrow \vec{\ell}(t) = \vec{r}(\tfrac{\pi}{2}) + (t - \tfrac{\pi}{2})\,\vec{r}\,'(\tfrac{\pi}{2}) = (\tfrac{\pi}{2} - t)\hat{i} + \hat{j} + t\hat{k}$$



تعریف: اگر $\vec{r}$ بردار مکانی ذره ای متحرک در امتداد یک منحنی هموار در فضا باشد آنگاه بردار $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ را بردار سرعت ذره می نامیم که بر مسیر حرکت ذره مماس است.

در هر لحظه زمانی، جهت بردار $\vec{v}$ بیانگر جهت حرکت ذره و اندازه بردار $\vec{v}$ معرف اندازه سرعت ذره متحرک می باشد.

مشتق بردار سرعت ذره را در صورت وجود بردار شتاب ذره نامیده و با نماد زیر معرفی می کنیم:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

* قوانین مشتق گیری از توابع برداری: فرض کنید $\vec{u} = \vec{u}(t)$ و $\vec{v} = \vec{v}(t)$ دو تابع برداری مشتق پذیر، $\vec{C} \in \mathbb{R}^n$ برداری ثابت، $c \in \mathbb{R}$ اسکالر (scalar) حقیقی دلخواه و $f = f(t)$ تابعی حقیقی-مقدار / تابعی اسکالر و مشتق پذیر باشد. در این صورت داریم:

(۱) $\frac{d}{dt}(\vec{C}) = \vec{0}$

(۲) $\frac{d}{dt}\left(c\,\vec{u}(t)\right) = c\,\vec{u}'(t)$

(۳) $\frac{d}{dt}\left(f(t)\,\vec{u}(t)\right) = f'(t)\,\vec{u}(t) + f(t)\,\vec{u}'(t)$

(۴) $\frac{d}{dt}\left(\vec{u}(t) \pm \vec{v}(t)\right) = \vec{u}'(t) \pm \vec{v}'(t)$

(۵) $\frac{d}{dt}\left(\vec{u}\left(f(t)\right)\right) = f'(t)\,\vec{u}'\left(f(t)\right)$ قانون زنجیری در مشتق گیری