جلسه نهم

(یادآوری)

هر تابعی به شکل
$$\begin{cases} \vec{r}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t \longmapsto \vec{r}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)) \end{cases}$$
را تابعی برداری می‌نامند.

f_i ها را توابع مختصاتی / توابع مؤلفه‌ای برای تابع برداری $\vec{r} = \vec{r}(t)$

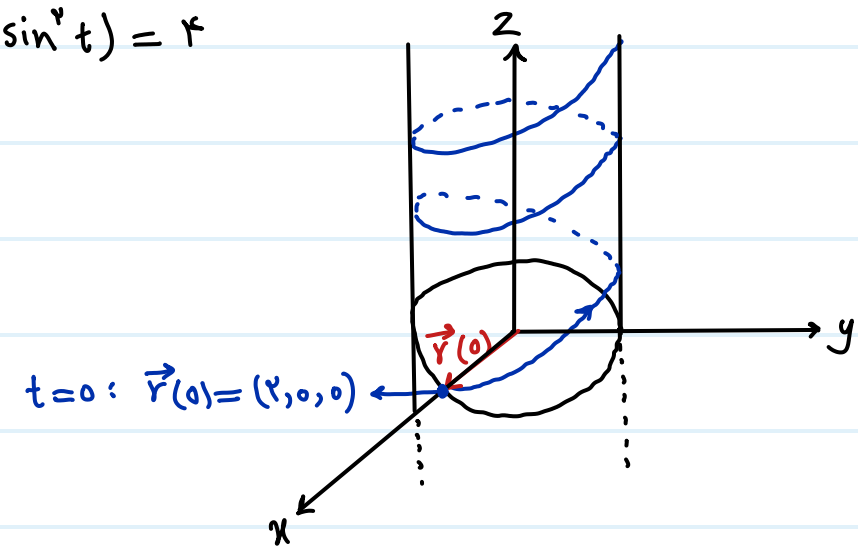
$\underline{n=3}$: $\vec{r}(t) = f_1(t)\,\hat{i} + f_2(t)\,\hat{j} + f_3(t)\,\hat{k}$; $\hat{i} = (1,0,0)$, $\hat{j} = (0,1,0)$, $\hat{k} = (0,0,1)$

(ادامه مبحث) توابع برداری

مثال: تابع برداری $\vec{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ را با ضابطه $r(t)=(2\cos)\hat{i}+(2\sin)\hat{j}+3t\,\hat{k}$ در نظر بگیرید. این تابع برداری یک منحنی مارپیچی (helix) را روی سطح استوانه‌ای قائم که روی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع $\underline{2}$ ساخته شده است، پارامتری می‌کند؛ زیرا اگر قرار دهیم:

$$x:=2\cos t \quad , \quad y=2\sin t \quad , \quad z:=3t$$

$$\Longrightarrow x^2+y^2=4(\cos^2 t+\sin^2 t)=4$$



چنانچه در ضابطه تابع برداری $\vec{r}=\vec{r}(t)$ به‌جای مؤلفه سوم یعنی به‌جای $\underline{3t}$ قرار دهیم $3t^2$ آنگاه منحنی مارپیچی «کشیده‌تری» خواهیم داشت و چنانچه به جای آن قرار دهیم $\frac{3t}{2}$، مارپیچ «فشرده‌تری» بدست می‌آید.

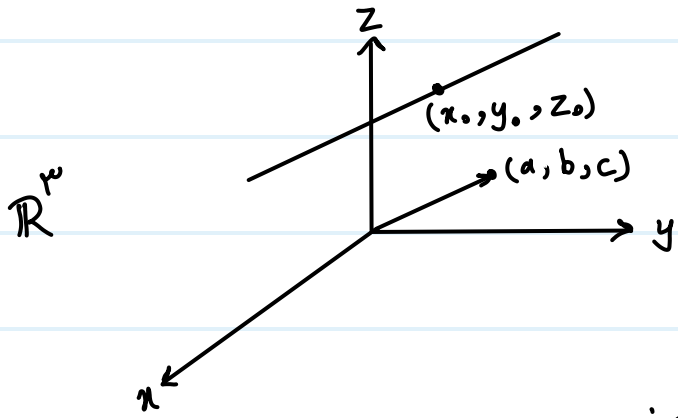
مثال: در فضای سه بعدی اقلیدسی $\mathbb{R}^3$ با مختصات دکارتی، معادله خطی که از نقطه (x_0,y_0,z_0) گذشته و به موازات بردار مکانی (a,b,c) قرار داد را می‌توانیم توسط معادلات زیر معرفی کنیم:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \quad ; \quad a,b,c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$x=x_0 \ , \ \frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \quad ; \quad a=0 \ , \ b,c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\text{- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -} \quad ; \quad a,c\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \ , \ b=0$$

$$\text{- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -} \quad ; \quad a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \ , \ c=0$$



حال اگر پارامتر حقیقی $t \in \mathbb{R}$ را به صورت زیر معرفی کنیم:

$$t := \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

آنگاه مختصات نقاط دلخواه (x, y, z) را روی خط داده شده به صورت زیر برحسب پارامتر t خواهیم داشت:

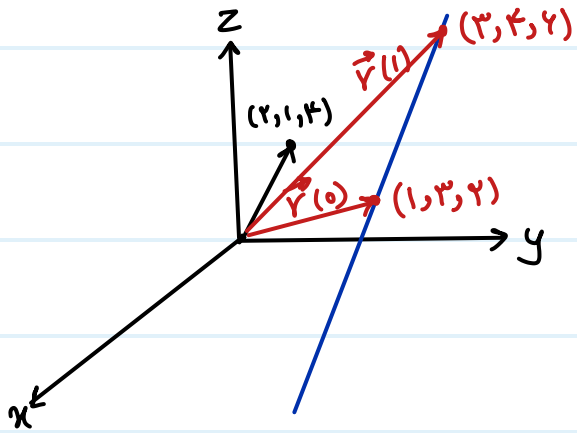
$$x = at + x_0 \quad , \quad y = bt + y_0 \quad , \quad z = ct + z_0$$

بنابراین خط معرفی شده در بالا را می‌توانیم توسط تابع برداری زیر (برحسب پارامتر $t \in \mathbb{R}$) پارامتری کنیم:

$$\begin{cases} \vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \\ t \longmapsto (at + x_0 \, , \, bt + y_0 \, , \, ct + z_0) \quad (; a, b, c \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

$$= t(a, b, c) + (x_0, y_0, z_0)$$

مثلاً $\begin{cases} \vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \\ \vec{r}(t) = (1 + 2t, 3 + t, 2 + 4t) \end{cases}$ بیانگر یک پارامتری سازی از خطی است که از نقطهٔ $(1, 3, 2) \in \mathbb{R}^3$ گذشته و به موازات بردار مکانی نقطهٔ $(2, 1, 4)$ قرار داد:



$$\begin{cases} \vec{r} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{r}(t) = \left(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\right) \end{cases} \quad ; \quad f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

توابع مختصاتی $\vec{r}$

* تعریف (حد توابع برداری): فرض کنید تابع برداری $\vec{r}(t) = f_1(t)\hat{i} + f_2(t)\hat{j} + f_3(t)\hat{k}$ روی بازه‌ای باز در $\mathbb{R}$ شامل نقطه t_0 (به جز احتمالاً در خود t_0) تعریف شده و $\vec{L} = (l_1, l_2, l_3)$ برداری در $\mathbb{R}^3$ باشد. در این صورت می‌گوییم وقتی t به t_0 میل می‌کند، مقادیر تابع برداری $\vec{r} = \vec{r}(t)$ به بردار $\vec{L}$ میل می‌کنند و می‌نویسیم $\boxed{\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{L}}$ هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، متناظراً عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر فاصلهٔ t از t_0 کمتر از δ باشد (یعنی $0 < |t - t_0| < \delta$) آنگاه طول بردار حاصل از تفاضل بردارهای $\vec{r}(t)$ و $\vec{L}$ کمتر از ε دلخواه داده شده باشد (یعنی داشته باشیم $|\vec{r}(t) - \vec{L}| < \varepsilon$).

از تعریف تحلیلی ارائه شده برای حد توابع برداری می‌توان نتیجه زیر را بدست آورد:

در واقع حد تابع برداری $\vec{r}(t) = f_1(t)\hat{i} + f_2(t)\hat{j} + f_3(t)\hat{k}$، وقتی t به t_0 میل می‌کند، (درصورت وجود)

برابر $\vec{L} = (l_1, l_2, l_3) \in \mathbb{R}^3$ است هرگاه حد هر سه تابع حقیقی مقدار f_1، f_2، f_3 (وقتی t به t_0 میل می‌کند) موجود بوده و داشته باشیم:

$$\lim_{t \to t_0} f_1(t) = l_1 \quad , \quad \lim_{t \to t_0} f_2(t) = l_2 \quad , \quad \lim_{t \to t_0} f_3(t) = l_3$$

به عبارتی دیگر، درصورت وجود سه حد بالا داریم:

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t \to t_0} f_1(t)\right)\hat{i} + \left(\lim_{t \to t_0} f_2(t)\right)\hat{j} + \left(\lim_{t \to t_0} f_3(t)\right)\hat{k}$$

☆ تمرین تحویلی: نتیجه بالا را از تعریف تحلیلی حد توابع برداری بدست آورید.

مثال: برای تابع برداری $\vec{r}(t)=\hat{i}+(\cos t)\hat{j}+(\sin t)\hat{k}$ مقدار حدی $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)$ برای هر $t_0\in\mathbb{R}$ موجود است؛ به عنوان نمونه داریم:

$$\lim_{t\to 0}\vec{r}(t)=\underbrace{\hat{i}+\hat{j}}_{=(1,1,0)}\in\mathbb{R}^3$$

اما $\lim\limits_{t\to 1}\left(\frac{1}{t-1},t^2\right)$ وجود ندارد زیرا $\lim\limits_{t\to 1}\frac{1}{t-1}$ موجود نیست.

* تعریف (پیوستگی توابع برداری): تابع برداری $\vec{r}=\vec{r}(t)$ را تابعی پیوسته در نقطه $t=t_0$ از دامنه اش می‌نامیم هرگاه $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)$.

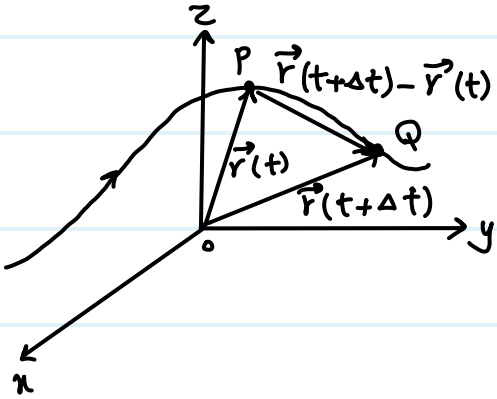
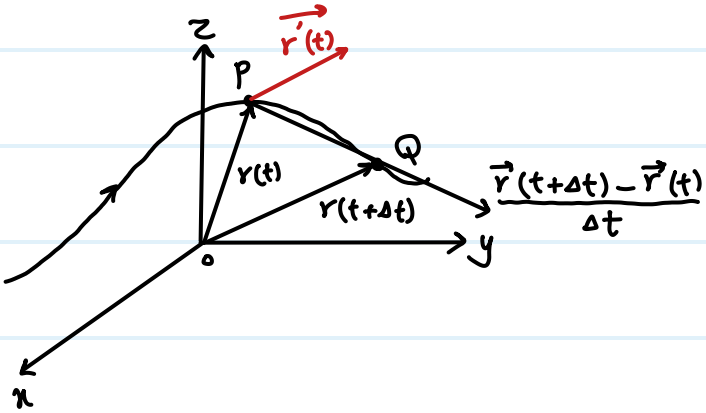
تابع برداری $\vec{r}=\vec{r}(t)$ را تابعی پیوسته گوییم هرگاه در تمامی نقاط دامنه اش پیوسته باشد.

بنابراین، تابع برداری $\vec{r}(t)=f_1(t)\hat{i}+f_2(t)\hat{j}+f_3(t)\hat{k}$ تابعی پیوسته است هرگاه توابع مختصاتی اش (یعنی f_1,f_2,f_3) هر سه توابعی پیوسته باشند.

* تعریف (مشتق توابع برداری): تابع برداری $\vec{r}(t)=f_1(t)\hat{i}+f_2(t)\hat{j}+f_3(t)\hat{k}$ را تابعی مشتق پذیر در نقطه t گوییم هرگاه هر سه تابع f_1 و f_2 و f_3 در نقطه t مشتق پذیر باشند.

مشتق تابع برداری $\vec{r}(t)$، خود، تابعی برداری است که به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\boxed{\vec{r}'(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\left(\frac{df_1}{dt}\right)\hat{i}+\left(\frac{df_2}{dt}\right)\hat{j}+\left(\frac{df_3}{dt}\right)\hat{k}}$$

* نمودار یا گراف تابع برداری $\vec{r}=\vec{r}(t)$ (یا به عبارتی ، مسیر یا منحنی حرکت ذره‌ای که توسط تابع برداری $\vec{r}(t)$ پارامتری شده است) یک منحنی همواره (smooth) نامیده می‌شود

هرگاه تابع برداری $\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{r}'(t)$ تابعی پیوسته بوده و هیچ‌گاه برابر بردار صفر نشود ؛ یعنی هرگاه توابع مختصاتی f_1 , f_2 , f_3 هر سه مشتق پذیر با مشتق پیوسته بوده و همزمان صفر نشوند.