جلسه پنجم

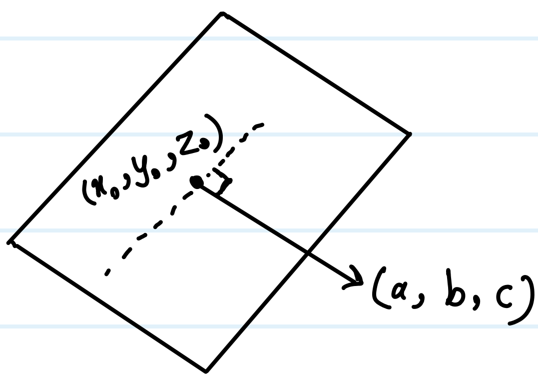
رویه های درجه دوم   کره در $\mathbb{R}^3$: $x^2+y^2+z^2=1$

(یادآوری) مکان هندسی کلیه نقاطی در فضای $\mathbb{R}^3$ با مختصات دکارتی (x,y,z) که توسط معادله ای از درجه دو برحسب x و y و z معرفی می‌شوند را یک رویه درجه دوم (Quadric Surface) می‌نامیم.

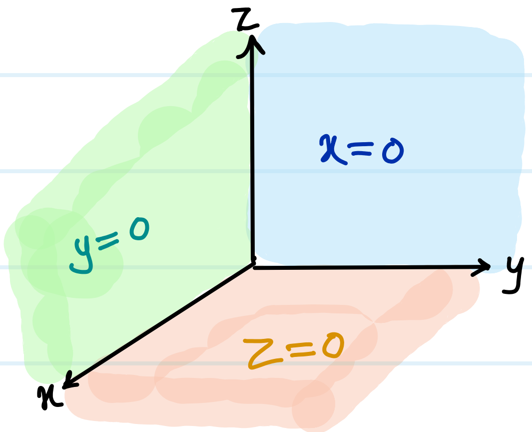
* نکته: منحنی حاصل از تقاطع یک صفحه و یک رویه درجه دو (به جز موارد خاص)، یک مقطع مخروطی می‌باشد.

* در واقع، هر یک معادله از درجه یک برحسب x، y و z در دستگاه مختصات دکارتی برای فضای $\mathbb{R}^3$ معرف یک صفحه در $\mathbb{R}^3$ می‌باشد. شکل کلی معادله یک صفحه در $\mathbb{R}^3$ به صورت زیر می‌باشد:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$



بنابراین به عنوان مثال، هر یک از معادلات $x=0$، $y=0$ و $z=0$ معرف یک صفحه در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌باشد که به ترتیب عبارتند از صفحه (y,z)، صفحه (x,z) و صفحه (x,y) در $\mathbb{R}^3$:

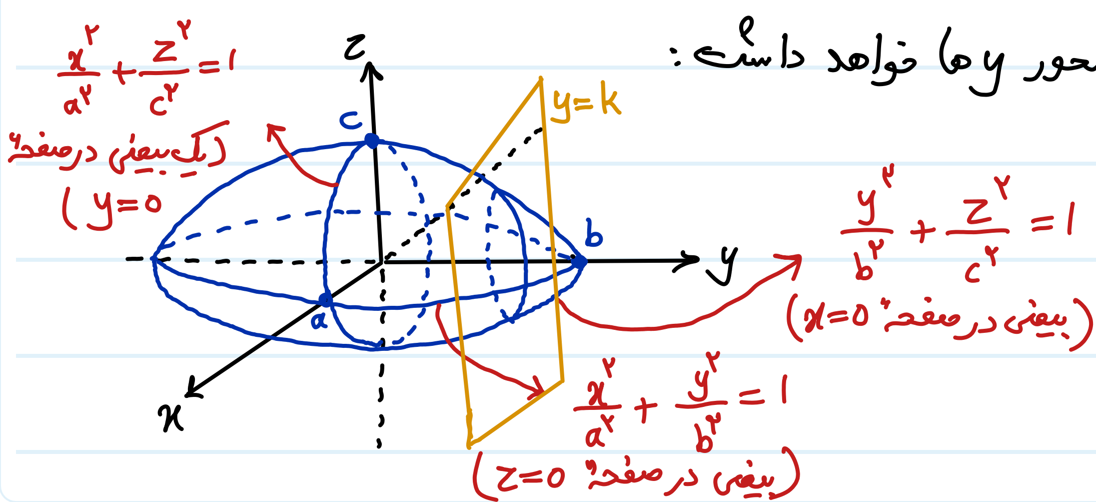


به همین ترتیب، معادلهٔ $z=k$ که در آن $k\in\mathbb{R}$ عددی ثابت و دلخواه است، بیانگر صفحه‌ای در فضای $\mathbb{R}^3$ است که به موازات صفحهٔ $z=0$ و به فاصلهٔ $|k|$ از آن قرار داد.

* بیضی‌گون (Ellipsoid) : به ازای هر سه عدد ثابت و مثبت $a,b,c\in\mathbb{R}_{>0}$ ، معادلهٔ درجه دوم زیر معرف یک <u>بیضی‌گون</u> در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌باشد:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$

اگر در معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ عدد ثابت و مثبت b از دو عدد مثبت دیگر (یعنی از a و c) بزرگ‌تر باشد، آنگاه بیضی‌گونی که توسط این معادله معرفی می‌شود، بیشترین کشیدگی را در راستای محور yها خواهد داشت:



* کلیهٔ مقاطع یک بیضی‌گون با صفحه های فضای $\mathbb{R}^3$، بیضی می‌باشند. به عنوان مثال، معادلهٔ بیضی حاصل از تقاطع بیضی‌گون بالا با صفحهٔ $y=k$ را می‌توان به صورت زیر و از قرار دادن $y=k$ در معادلهٔ بیضی‌گون بدست آورد:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2}$$

$$\xrightarrow[\text{عبارت (ناصفر) سمت راست تقسیم می‌کنیم}]{\text{طرفین معادله را بر}} \frac{x^2}{\underbrace{a^2\left(1-\frac{k^2}{b^2}\right)}_{=:A^2}}+\frac{z^2}{\underbrace{c^2\left(1-\frac{k^2}{b^2}\right)}_{=:C^2}}=1$$

* تذکر: می‌دانیم صفحه $y=k$ تنها زمانی می‌تواند بیضی‌گون ما را قطع کند که داشته باشیم:

$$\left(1-\frac{k^2}{b^2}\right)\geqslant 0 \overset{\text{یا معادلاً}}{\Longleftrightarrow} k^2\leqslant b^2 \Longleftrightarrow -b\leqslant k\leqslant b$$

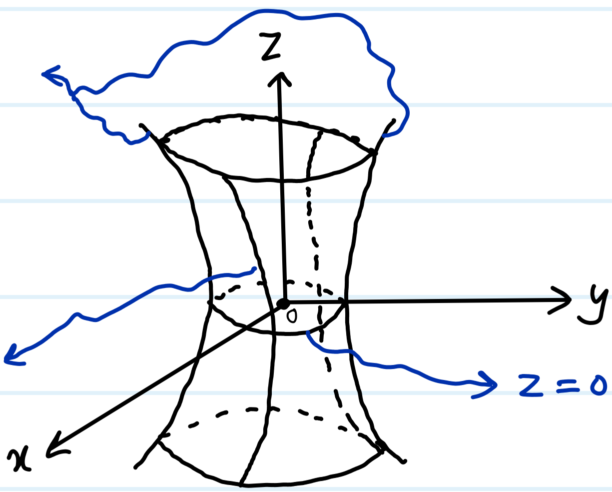
حال اگر $k=\pm b$ آنگاه محل تقاطع صفحهٔ $y=\pm b$ با بیضی‌گون، نقطهٔ $(0,\pm b,0)$ خواهد بود. اما چنانچه $|k|<b$ آنگاه تقاطع بدست آمده (همانطور که محاسبات ما تایید می‌کند) قطعاً یک بیضی در صفحهٔ $y=k$ است.

* هذلولی‌گون یکپارچه (Hyperboloid of One Sheet): به ازای هر سه عدد ثابت و مثبت $a,b,c\in\mathbb{R}>0$، معادلهٔ درجهٔ دوم زیر (که در آن تنها یک جمله با ضریب منفی ظاهر شده است)، معادله یک هذلولی‌گون یکپارچه در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌باشد:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$

$$x=0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

(هذلولی)



$$y=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

(هذلولی)

$$z=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

(بیضی)

مقطع هذلولی‌گون یکپارچه روبه‌رو با هر صفحه به معادلهٔ $x=k\in\mathbb{R}\setminus\{\pm a\}$ و یا $y=k\in\mathbb{R}\setminus\{\pm b\}$ یک هذلولی خواهد بود. به عنوان مثال، محل تقاطع آن با صفحه $y=k$ عبارت است از:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2}}$$

حالت ۱ :

$$|k|<b \Longrightarrow 1-\frac{k^2}{b^2}>0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2}>0$$

(هذلولی) در صفحه $y=k$

$; \ |k|<b$

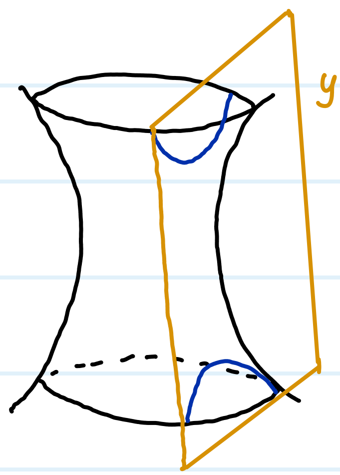
حالت ۲ :

$$|k|>b \Longrightarrow 1-\frac{k^2}{b^2}<0$$

$$\Rightarrow \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=-\left(1-\frac{k^2}{b^2}\right)>0$$

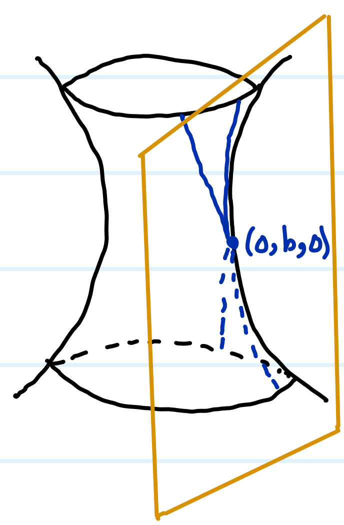
(هذلولی) در صفحه $y=k$

$; \ |k|>b$



حالت ۳ :

$$|k|=b \Longleftrightarrow k=\pm b \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \Longleftrightarrow z=\pm\frac{c}{a}x$$



ابزارهای ترسیم‌های هندسی : Math / plot

math world / wolfram

* Maple
* Matlab

اما محل تقاطع این هذلولی گون یکپارچه با صفحه‌ی $z=k$ یک بیضی به معادله‌ی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}$$ می‌باشد.

آنچه در جلسه بعد خواهید دید:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$