جلسه هشتم

توابع برداری
$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad ; \quad n = ۲, ۳, ۴, \ldots \\ x \longmapsto \underset{(\text{بردار})}{f(x)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f: \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1 \\ x \longmapsto \underset{\substack{\text{اسکالر} \\ (\text{عدد حقیقی})}}{f(x)} \end{cases}$$

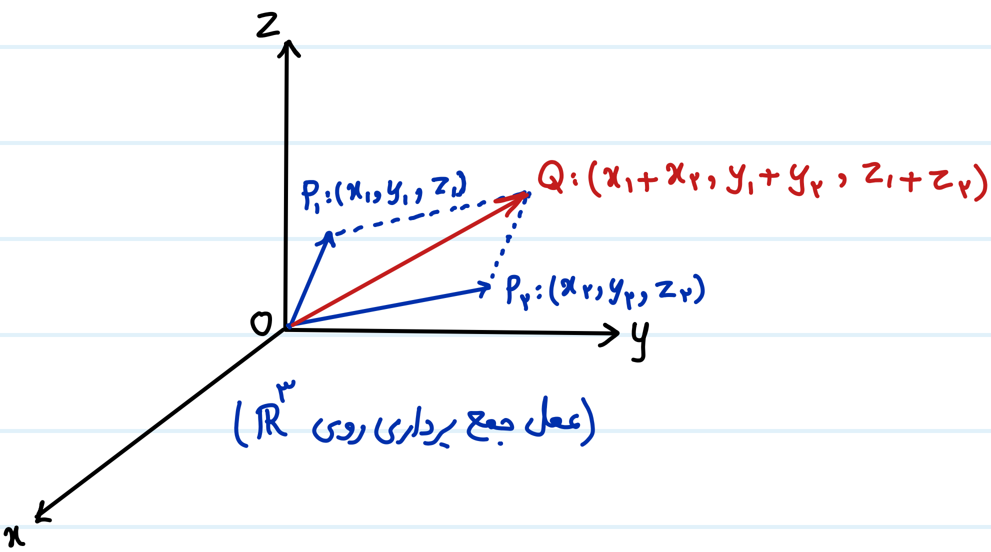
* توابع برداری (یا «توابع بردار مقدار») :

قبل از معرفی توابع برداری، قصد داریم با ساختار برداری فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ (به طور خاص، برای $n=۲,۳$) آشنا شویم:

$$\mathbb{R}^n = \{ P:(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \} \xleftrightarrow{\text{تناظر یک به یک}} \{ \overrightarrow{OP} \mid P:(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \}$$

فرض کنید نقطه $O:(۰,۰,\ldots,۰)$ بیانگر مبدأ مختصات در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ باشد. در این صورت به هر نقطه دلخواه $P \in \mathbb{R}^n$ می‌توان برداری موسوم به بردار مکانی این نقطه یعنی بردار $\overrightarrow{OP}$ (که مبدأ مختصات را به نقطه P وصل می‌کند) را نظیر کرد و بالعکس. طبیعتاً، متناظر با هر بردار مکانی $\overrightarrow{OP}$، تنها یک نقطه یعنی P در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ وجود دارد. به دلیل وجود همین تناظر یک به یک (بین نقاط فضا و بردارهای مکانی متناظر با این نقاط)، می‌توان با تعریف دو عمل «جمع برداری» و «ضرب اسکالر حقیقی در یک بردار» روی فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$، ساختار یک فضای برداری حقیقی را در نظر گرفت.

به عنوان نمونه، فضای اقلیدسی سه بعدی $\mathbb{R}^3$ با دو عمل زیر یک فضای برداری سه بعدی حقیقی را تشکیل می دهد:



(عمل جمع برداری روی $\mathbb{R}^3$)

* جمع برداری: برای هر دو نقطه (یا متناظراً برای هر دو بردار مکانی) دلخواه $(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3$ و (x_1,y_1,z_1)، عمل جمع برداری به صورت زیر تعریف می شود:

$$(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$$

* ضرب اسکالر حقیقی در بردار: برای هر عدد اسکالر حقیقی دلخواه $\alpha\in\mathbb{R}$ و هر نقطه (یا متناظراً هر بردار مکانی) دلخواه $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$، ضرب اسکالر زیر را در نظر می گیریم:

$$\alpha \times (x,y,z) := (\alpha x,\ \alpha y,\ \alpha z)$$

تذکر ۱: با در نظر گرفتن ساختار برداری ارائه شده روی فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$، می توانیم هر عنصر $P\in\mathbb{R}^n$ را هم به عنوان یک نقطه در این فضا و هم به عنوان یک بردار در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ در نظر می گیریم.

تذکر ۲: ساختار برداری ارائه شده روی فضای $\mathbb{R}^3$ را می توان روی هر فضای اقلیدسی دلخواه مثل $\mathbb{R}^n$ (برای $n=2,3,4,\ldots$) نیز به طور مشابه معرفی کرد. اما در این درس، تمرکز ما بیشتر روی فضاهای $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ می باشد.

* تعریف (تابع برداری): هر تابع به شکل $r:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ با ضابطه

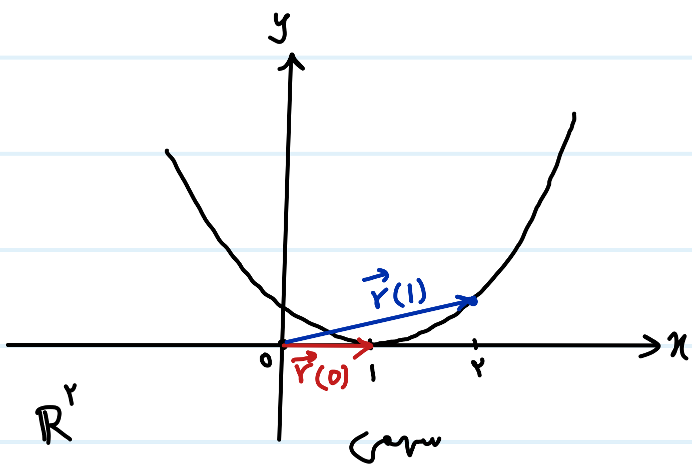
(تک متغیره)

$(f_1,f_2,\dots,f_n:\mathbb{R}\xrightarrow{\text{تابع}}\mathbb{R})$ ← توابع مختصاتی تابع برداری $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$

$r(t)=\left(f_1(t),f_2(t),\dots,f_n(t)\right)$ که مقادیرش بردارهایی در فضا هستند را یک تابع برداری (تک متغیره) می نامند. غالباً تابع برداری $r=r(t)$ را با نماد برداری و به صورت $\vec{r}=\vec{r}(t)$ نمایش می دهند.

مثال: تابع $\vec{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $\vec{r}(t)=(\underbrace{t+1}_{=x},\underbrace{t^2}_{=y})$ تابعی برداری است که نمودار (گراف) آن در $\mathbb{R}^2$ با دستگاه مختصات دکارتی (x,y) توسط معادلهٔ $y=(x-1)^2$ معرفی می‌شود.

در واقع، اگر قرار دهیم $x:=t+1$ و $y:=t^2$ در این صورت بدیهی است که $y=(x-1)^2$:



$\vec{r}(0)=(1,0)$ و $\vec{r}(1)=(2,1)$

*نکته: فرض کنید ذره ای متحرک در حال حرکت در فضای $\mathbb{R}^3$ روی بازهٔ زمانی $I\subseteq\mathbb{R}$ می باشد. در این صورت مکان این ذره در هر لحظهٔ زمانی مانند $t\in I$ را می توان توسط تابع برداری زیر معرفی کرد:

$$\begin{cases}\vec{r}: I\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3\\ \vec{r}(t)=\left(x=f(t),\ y=g(t),\ z=h(t)\right)\end{cases}$$

که در آن توابع مختصاتی $f, g, h, I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بردار مکان ذره متحرک یعنی $\vec{r}(t)$ را مشخص می‌کنند.

ضابطهٔ تابع برداری $\vec{r} = \vec{r}(t)$ را اصطلاحاً یک پارامتری سازی از منحنی حرکت ذره با پارامتر زمانی t می‌نامیم.

در واقع، در هر لحظه، $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ نقطهٔ $P : (f(t), g(t), h(t))$ بیانگر مکان ذرهٔ متحرک ما در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌باشد. حال اگر بردارهای زیر را در امتداد محورهای مختصاتی دکارتی $\mathbb{R}^3$ درنظر بگیریم:

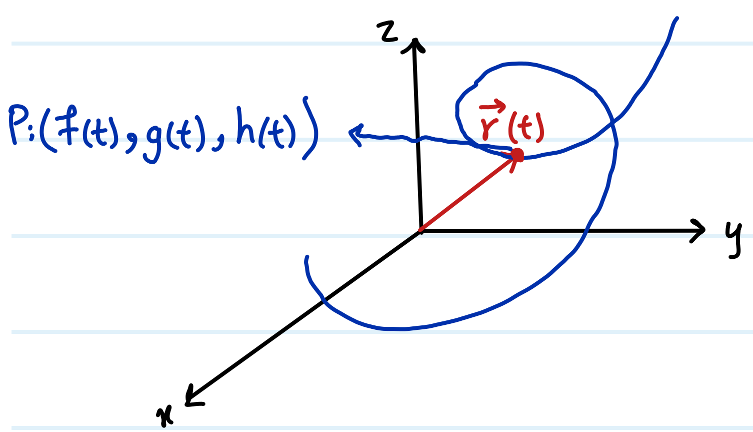
$$\hat{i} := (1, 0, 0) \quad , \quad \hat{j} := (0, 1, 0) \quad , \quad \hat{k} := (0, 0, 1)$$

آنگاه پارامتری سازی $\vec{r} = \vec{r}(t)$ از منحنی حرکت ذرهٔ متحرک ما در فضای $\mathbb{R}^3$ را در هر لحظه $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ می‌توانیم به صورت زیر نیز معرفی کنیم:

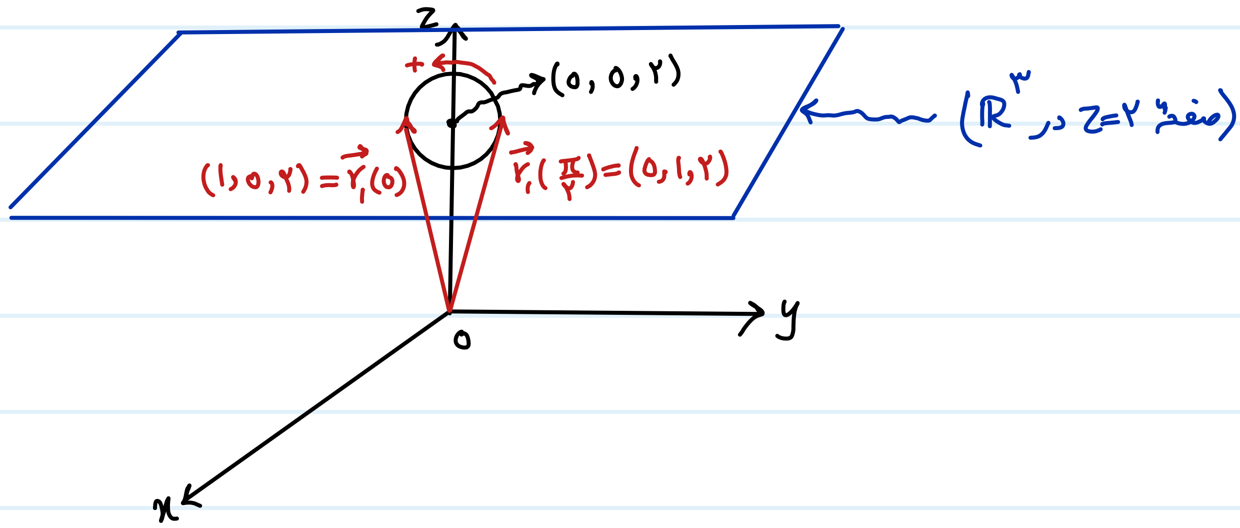
$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{OP} = f(t)\,\hat{i} + g(t)\,\hat{j} + h(t)\,\hat{k}}$$

$$(f(t), 0, 0) + (0, g(t), 0) + (0, 0, h(t)) = (f(t), g(t), h(t))$$

$\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$ را اصطلاحاً بردارهای پایه‌ای استاندارد (متعارف) در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌نامیم



مثال: تابع برداری $\vec{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ را با ضابطهٔ $\vec{r}(t)=(\cos t,\sin t,2)$ در نظر بگیرید.



اگر قرار دهیم: $x:=\cos t$, $y:=\sin t$, $z:=2$

آنگاه از آنجا که $x^2+y^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1$ ، لذا این تابع برداری بیانگر یک پارامتری سازی برای دایره ای به شعاع یک (روی صفحهٔ $z=2$ در فضای $\mathbb{R}^3$) به مرکز نقطهٔ $(0,0,2)$ می باشد:

تذکر: توابع برداری $\begin{cases}\vec{r}_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3\\ t\longmapsto(\cos t,\sin t,\underline{2})\end{cases}$ و $\begin{cases}\vec{r}_2=\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3\\ t\longmapsto(\sin t,\cos t,\underline{2})\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

نمودار (یا گراف) هردو تابع برداری $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ ، دایرهٔ مثال قبلی است ولی $\underline{\vec{r}_1}$ و $\underline{\vec{r}_2}$ دو پارامتری سازی متفاوت برای یک ذرهٔ متحرک را نمایش می دهند.

($\vec{r}_1$: ذره درجهت مثبت مثلثاتی روی دایره حرکت می‌کند)

($\vec{r}_2$: ذره درخلاف جهت مثبت مثلثاتی روی دایره حرکت می‌کند)