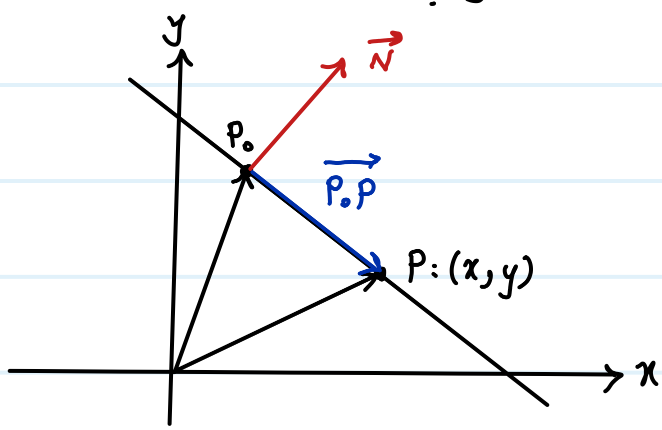
جلسه بیستم

یادآوری: بردار گرادیان همواره بر خم‌های تراز عمود است.

(ادامه مبحث) بردار گرادیان

* تذکر (معادله خط مماس بر یک خم تراز در یک نقطه): خطی را در صفحه $\mathbb{R}^2$ در نظر بگیرید که از نقطه $P_0:(x_0, y_0)$ گذشته و بر بردار $\vec{N} = A\hat{i} + B\hat{j}$ عمود باشد.



$$\overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}$$

اگر نقطه‌ای دلخواه روی این خط را با مختصات $P:(x,y)$ در نظر بگیریم آنگاه (مطابق شکل) بدیهی است که بردار تغییر مکان از P_0 به P یعنی بردار $\overrightarrow{P_0P} = (x-x_0)\hat{i} + (y-y_0)\hat{j}$ برداری در امتداد خط مورد نظر بوده و لذا بر بردار $\vec{N}$ عمود است؛ یعنی داریم $\vec{N} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$

در نتیجه معادله خط گذرا از نقطه $P_0:(x_0,y_0)$ و عمود بر بردار $\vec{N} = A\hat{i} + B\hat{j}$ عبارتست از:

$$\boxed{A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0}$$

حال، با توجه به تذکر بالا، اگر بردار $\vec{N}$ را بردار گرادیان $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0}\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{P_0}\hat{j}\right) = \nabla f\Big|_{P_0:(x_0,y_0)}$

در نظر بگیریم آنگاه معادلهٔ خط مماس بر خم تراز تابع f که از نقطهٔ $\left(x_0, y_0, f(x_0,y_0)\right)$ $=\left(P_0:(x_0,y_0), f(P_0)\right)$

می‌گذرد عبارتست از:

$$\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0}\right)(x-x_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{P_0}\right)(y-y_0)=0 \quad \text{و} \quad z=f(x_0,y_0)}$$

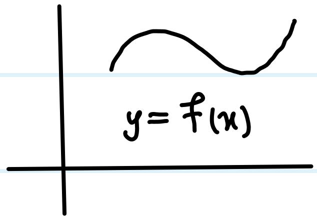
* قوانین جبری برای گرادیان

(۱) قانون جمع و تفریق: $\nabla(f\pm g)=\nabla f\pm\nabla g$

(۲) برای هر اسکالر (یا عدد) حقیقی $k\in\mathbb{R}$ داریم: $\nabla(kf)=k\nabla f$

(۳) قانون ضرب (قانون لایب نیتز): $\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$

(۴) قانون تقسیم (خارج قسمت) توابع: $\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\nabla f-f\nabla g}{g^2}$



یک رویه تراز تابع $f(x,y,z)$ متناظر با مقدار ثابت $c=a^2$ می باشد

کره در $\mathbb{R}^3$

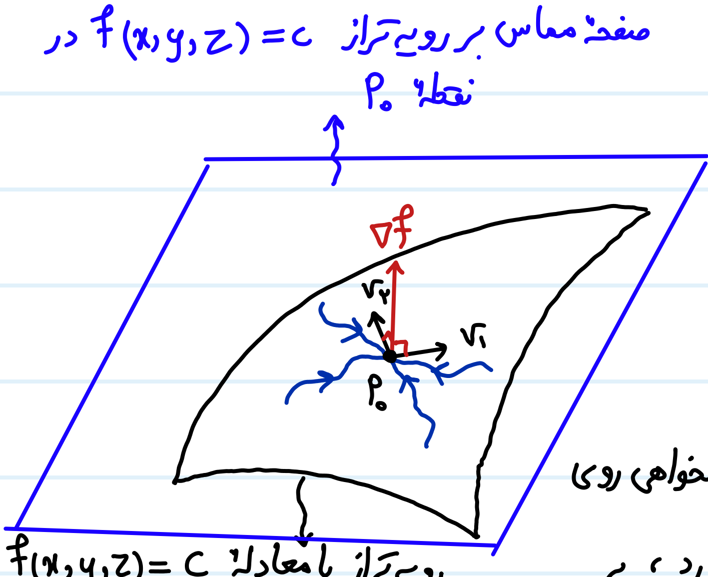
مثال:

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2}$$

$$f(x,y,z)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$$

$$\{(x,y,z,f(x,y,z)) \mid f(x,y,z)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

تعریف (رویه تراز) (level surface) : فرض کنید $f(x,y,z)$ یک تابع سه متغیره دلخواه باشد. برای مقدار ثابت c از تابع $f(x,y,z)$، مکان هندسی کلیهٔ نقاطی به شکل $\{(x,y,z,c) \mid f(x,y,z)=c\}$ را یک رویه تراز برای تابع سه متغیره f متناظر با مقدار ثابت c می نامیم.



* نکته: بردار گرادیان تابع سه متغیره $f(x,y,z)$ همواره بر کلیهٔ خم های هموار که روی رویه های تراز تابع قرار دارند، عمود است.

(مطابق شکل) بردار های سرعت حرکت در امتداد هر خم هموار دلخواهی روی رویهٔ تراز f (متناظر با مقدار ثابت c) که از نقطه P_0 می گذرد، بر بردار ∇f در نقطهٔ P_0 عمود است.

بنابراین خطوط مماس بر چنین خم های هموار همگی روی صفحه‌ای قرار می گیرند که از نقطهٔ P_0 گذشته و بر بردار $\nabla f|_{P_0}$ عمود است؛

این صفحه را، از آنجا که شامل کلیهٔ خطوط مماس بر خم های هموار گذرا از نقطهٔ P_0 می باشد، صفحهٔ مماس بر رویهٔ تراز f در نقطهٔ $P_0:(x_0,y_0,z_0)$ می نامیم.

* تعریف (صفحهٔ مماس): تابع سه متغیرهٔ مشتق پذیر $f(x,y,z)$ و مقدار $c\in\mathbb{R}$ از آن را در نظر بگیرید. صفحهٔ مماس بر رویهٔ تراز $f(x,y,z)=c$ در نقطهٔ $P_0:(x_0,y_0,z_0)$ عبارتست از صفحه ای که از نقطهٔ P_0 گذشته و بر بردار $\nabla f\big|_{P_0}$ عمود است.

* به همین ترتیب، با مفروضات تعریف بالا، خطی هم راستا با بردار $\nabla f\big|_{P_0}$ که از نقطهٔ P_0 روی رویهٔ تراز می گذرد را اصطلاحاً خط قائم بر رویهٔ تراز f در نقطهٔ P_0.

* نکته: طبق تعریف بالا، معادلهٔ صفحهٔ مماس بر رویهٔ تراز $f(x,y,z)=c$ در نقطهٔ $P_0:(x_0,y_0,z_0)$ عبارتست از:

$$\boxed{f_x(P_0)(x-x_0)+f_y(P_0)(y-y_0)+f_z(P_0)(z-z_0)=0}$$

که در آن (به عنوان مثال) $f_x(P_0)=\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0}$.

به همین ترتیب، معادلهٔ خط قائم بر رویهٔ تراز $f(x,y,z)=c$ در نقطهٔ $P_0:(x_0,y_0,z_0)$ عبارتست از:

$$x=x_0+f_x(P_0)t\quad,\quad y=y_0+f_y(P_0)t\quad,\quad z=z_0+f_z(P_0)t\quad;\ t\in\mathbb{R}$$

* تذکر: اگر f را تابعی دو متغیره برحسب (x,y) در نظر بگیریم آنگاه معادلهٔ صفحهٔ مماس بر رویه‌ای که توسط گراف یا نمودار تابع f در فضای $\mathbb{R}^3$ مشخص می‌شود (یعنی صفحهٔ مماس بر رویهٔ $z=f(x,y)$) در نقطهٔ $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ عبارتست از:

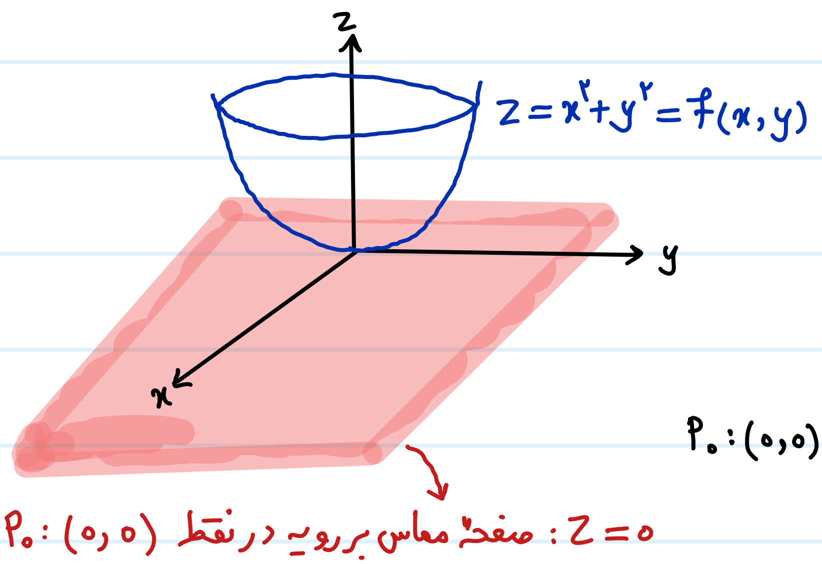
$$\boxed{f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0}$$

دلیل (سرخط اثبات) : اگر قرار دهیم: $F(x,y,z):=f(x,y)-z$

آنگاه رویهٔ $z=f(x,y)$ دقیقاً همان رویهٔ تراز تابع $F(x,y,z)$ متناظر با مقدار ثابت $c=0$ است.

$$\begin{cases} F_x=f_x \\ F_y=f_y \\ F_z=-1 \end{cases}$$

مثال: رویهٔ $z=x^2+y^2=:f(x,y)$ را در نظر بگیرید (که در واقع معرف یک سهمی‌گون در فضای $\mathbb{R}^3$ است).



در این صورت معادلهٔ خط مماس بر این رویه در نقطهٔ $P_0:(0,0)$ عبارتست از صفحهٔ $z=0$ ؛

زیرا:
$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}=2x\Big|_{(0,0)}=0$$
و
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}=2y\Big|_{(0,0)}=0$$

لذا طبق تذکر قبلی، $z=0$ (یعنی صفحهٔ (x,y)) همان صفحهٔ مماس بر رویه در مبدأ مختصات است.