جلسه دوازدهم

مثال: منحنی هموار C با مجموعه نقاط $\left(r=e^{2t},\ \theta=t,\ z=e^{2t}\right)$ در مختصات استوانه‌ای در فضای $\mathbb{R}^3$ داده شده است. مطلوبست محاسبهٔ طول قطعی از این منحنی روی بازهٔ زمانی $[0, \ln 2]$.

جواب: می‌دانیم:

$$L=\int_0^{\ln 2}\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\;dt$$

اما داریم:

$$\frac{dr}{dt}=2e^{2t}\ ,\quad \frac{d\theta}{dt}=1\ ,\quad \frac{dz}{dt}=2e^{2t}$$

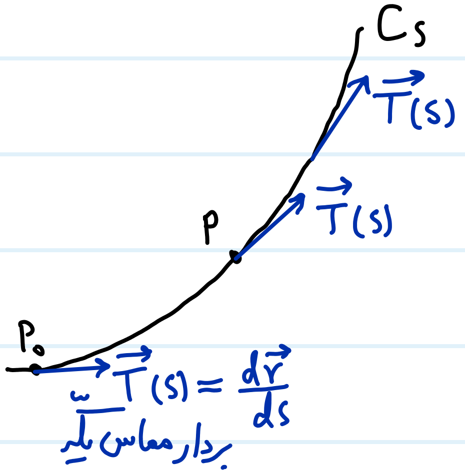
$$\Longrightarrow L=\int_0^{\ln 2}\sqrt{4e^{4t}+e^{4t}+4e^{4t}}\;dt=3\int_0^{\ln 2} e^{2t}\,dt=\frac{3}{2}\left(e^{2t}\Big|_{t=0}^{\ln 2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left(e^{2\ln 2}-e^{0}\right)=\frac{3}{2}\left(4-1\right)=\frac{9}{2}$$

* انحنای یک خم (Curvature of a curve)

(خمیدگی یک خم)

* تعریف (انحنای یک خم هموار): انحنای خم هموار $\vec{r}=\vec{r}(s)$ در هر نقطه از خم را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:



kappa (کاپا)

$$\boxed{K:=\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|}$$

نکته ۱ : هر چقدر $\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|$ در نقطه‌ای مانند P روی خم هموار C، عدد بزرگتری باشد، بردار مماس یکه

$\vec{T}$ وقتی ذرهٔ متحرک از نقطهٔ P عبور می‌کند با سرعت بیشتری تغییر جهت داده و لذا انحنای خم هموار C در نقطهٔ P عدد بزرگتری است (و بالعکس).

در ادامه خواهیم دید انحنای دایره‌ای به شعاع r در تمامی نقاط دایره برابر عدد ثابت $K=\frac{1}{r}$ می‌باشد.

نکته ۲: اگر خم هموار $\vec{r}=\vec{r}(t)$ برحسب پارامتری دلخواه مانند t پارامتری شده باشد، آنگاه انحنای خم هموار را در هر نقطه از خم می‌توان با به‌کارگیری قاعدهٔ زنجیری در مشتق‌گیری محاسبه کرد:

$$K=\frac{1}{|\vec{v}|}\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right| \quad ; \quad \vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{r}\,'(t)$$

زیرا در واقع داریم:

$$K=\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|=\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}\right|=\frac{1}{\left|\frac{ds}{dt}\right|}\cdot\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|=\frac{1}{|\vec{v}|}\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|$$

مثال: دایره‌ای به شعاع $a\in\mathbb{R}>0$ که توسط تابع برداری $\vec{r}(t)=(a\cos t)\hat{i}+(a\sin t)\hat{j}$ پارامتری شده است را در نظر گرفته و نشان دهید انحنای این دایره در تمامی نقاطش برابر $K=\frac{1}{a}$ می‌باشد.

راه حل: می‌دانیم

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=-(a\sin t)\hat{i}+(a\cos t)\hat{j}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}|=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}=\sqrt{a^2}=|a|=a$$

بنابراین داریم:

$$\vec{T}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=(-\sin t)\hat{i}+(\cos t)\hat{j} \Rightarrow \frac{d\vec{T}}{dt}=(-\cos t)\hat{i}-\sin t\,\hat{j}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|=\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}=1 \;/\therefore\; \Rightarrow K=\frac{1}{a}\times 1=\frac{1}{a}$$

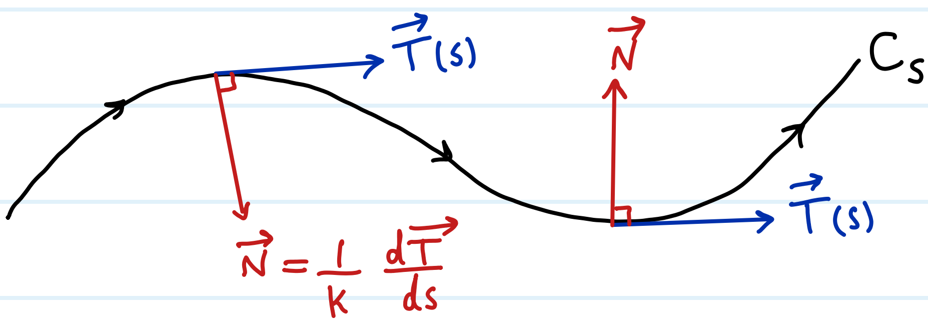
تعریف (بردار نُرمال یکّه اصلی / Principal unit normal vector):

در هر نقطه از یک خم هموار با انحنای ناصفر $K\neq 0$، بردار زیر را بردار نُرمال یکّه اصلی می‌نامیم:

$$\vec{N}=\frac{1}{K}\,\frac{d\vec{T}}{ds}$$

(به عبارتی دیگر، بردار $\vec{N}$ همان یکّه شدهٔ بردار $\frac{d\vec{T}}{ds}$ است؛ یعنی: $\vec{N}=\dfrac{\frac{d\vec{T}}{ds}}{\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|}$.)

*نکته (الف): بردار $\vec{N}=\frac{1}{K}\frac{d\vec{T}}{ds}$ جهت تقعّر خم هموار C را نشان می‌دهد (و همانطور که خواهیم دید همواره بر $\vec{T}$ عمود است).



*نکته (ب): فرض کنید $\vec{r}=\vec{r}(t)$ یک پارامتری سازی دلخواه از خم هموار C برحسب پارامتر t باشد. دراین صورت با به‌کارگیری قانون زنجیری در مشتق‌گیری می‌توانیم بردار نرمال یکّه اصلی $\vec{N}$ را برحسب t به‌صورت زیر بدست آوریم:

$$\boxed{\vec{N} = \frac{1}{\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|} \cdot \frac{d\vec{T}}{dt}}$$

زیرا در واقع داریم:

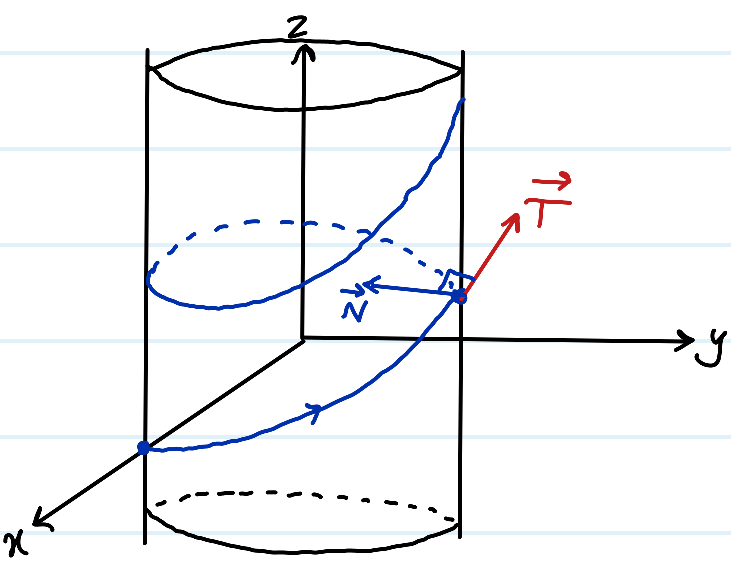
$$\vec{N} = \frac{\frac{d\vec{T}}{ds}}{K} = \frac{\frac{d\vec{T}}{ds}}{\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|} = \frac{\left(\frac{d\vec{T}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}\right)}{\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\cdot\left(\frac{dt}{ds}\right)\right|} = \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}\cdot\cancel{\left(\frac{dt}{ds}\right)}}{\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|\cdot\cancel{\left|\frac{dt}{ds}\right|}} = \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|}$$

(چون $\frac{dt}{ds} > 0$)

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{|\vec{v}|} > 0$$

* تمرین: تابع انحنا (K) و بردار های $\vec{T}$ و $\vec{N}$ را برای خم هموار زیر بیابید:

$$\vec{r}(t) = (a\cos t)\hat{i} + (a\sin t)\hat{j} + (bt)\hat{k} \quad ; \quad a, b > 0$$



جواب: بردار $\vec{T}$ را می‌توانیم با استفاده از بردار سرعت $\vec{v}$ بیابیم:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (-a\sin t)\hat{i} + (a\cos t)\hat{j} + b\hat{k}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow \vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big((-a\sin t)\hat{i} + (a\cos t)\hat{j} + b\hat{k}\Big)$$

برای یافتن $\vec{N}$ به بردار $\frac{d\vec{T}}{dt}$ نیاز داریم:

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-a\cos t, -a\sin t, 0\right)$$

$$\Rightarrow \left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right| = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \vec{N} = \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|} = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

درنتیجه:

$$K = \frac{1}{|\vec{v}|}\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right| = \underbrace{\frac{a}{a^2+b^2}}_{\text{تابع ثابت است}}$$