# جلسه نوزدهم

(یادآوری)

$f(x,y)$

$\vec{u} = u_1 \hat{i} + u_2 \hat{j}$

ضرب نقطه‌ای بردارها

$$\left(D_{\vec{u}} f\right)(P_0) = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}\right)}_{\text{"بردار گرادیان } f\text{"}} \cdot \underbrace{\left(u_1 \hat{i} + u_2 \hat{j}\right)}_{=u}$$

(ادامه مبحث مشتق جهتی)

* تعریف (بردار گرادیان یک تابع چند متغیره در یک نقطه): بردار گرادیان تابع $f(x,y)$ درنقطه‌ی $P_0:(x_0,y_0)$ را با نماد $\nabla f\big|_{P_0}$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

nabla نابلا

del دِل

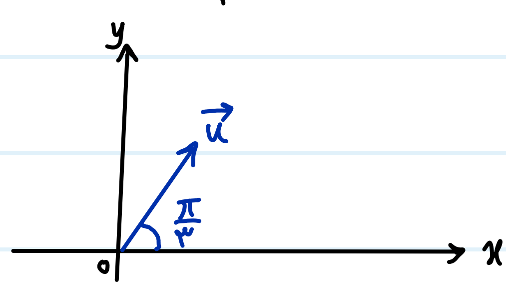
$$\boxed{\nabla f\big|_{P_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}\right)\Big|_{P_0}}$$

که در آن مشتقات جزئی $f$ در نقطه‌ی $P_0$ به عنوان مؤلفه‌های این بردار ظاهر شده است.

*نتیجه: اگر $f(x,y)$ روی دیسکی باز حول نقطه $P_0:(x_0,y_0)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، آنگاه داریم:

$$\boxed{\left(D_{\vec{u}} f\right)(P_0) = \nabla f\big|_{P_0} \cdot \vec{u}}$$

* مثال: تابع $f(x,y)=e^{xy}$ را در نظر بگیرید. مطلوبست محاسبه‌ی مقدار مشتق جهتی $f$ درنقطه‌ی $P:(-2,0)$ و در جهت بردار یکه‌ای به نام $\vec{u}$ که با جهت مثبت محور $x$ها زاویه‌ی $\frac{\pi}{3}$ را می‌سازد.




راه حل: می‌دانیم بردار یکه‌ی $\vec{u}$ عبارتست از بردار

$$\vec{u} = \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\hat{i} + \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\hat{j} = \frac{1}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

از طرفی از آنجا که می‌دانیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y e^{xy} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x e^{xy}$$

لذا، طبق نتیجه‌ی آخر، داریم:

$$\left(D_{\vec{u}} f\right)(P_0) = \nabla f\big|_{P_0} \cdot \vec{u} = \left(0\,\hat{i} - 2\hat{j}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j}\right) = -\sqrt{3}$$

تمرین: فرض کنید برای تابعی دو متغیره مثل $f(x,y)$ و به ازای بردارهای یکه $\vec{u}=\frac{3}{5}\hat{i}-\frac{4}{5}\hat{j}$ و $\vec{v}=\frac{4}{5}\hat{i}+\frac{3}{5}\hat{j}$ داشته باشیم:

$$\begin{cases} (D_{\vec{u}}f)(1,2)=-5 \\ , \\ (D_{\vec{v}}f)(1,2)=10 \end{cases}$$

در این صورت، مطلوبست محاسبه‌ی مقادیر $\underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,2)}}_{=a}$ و $\underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,2)}}_{=b}$.

راه حل: می‌دانیم:

$$\begin{cases} (D_{\vec{u}}f)(1,2)=(a\hat{i}+b\hat{j})\cdot\left(\frac{3}{5}\hat{i}-\frac{4}{5}\hat{j}\right)=\boxed{\frac{3}{5}a-\frac{4}{5}b=-5} \quad (1) \\ , \\ (D_{\vec{v}}f)(1,2)=(a\hat{i}+b\hat{j})\cdot\left(\frac{4}{5}\hat{i}+\frac{3}{5}\hat{j}\right)=\boxed{\frac{4}{5}a+\frac{3}{5}b=10} \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (1)\xrightarrow{\times 3} \\ (2)\xrightarrow{\times 4} \end{array}\begin{cases} \frac{9}{5}a-\frac{12}{5}b=-15 \\ \frac{16}{5}a+\frac{12}{5}b=40 \end{cases} +$$

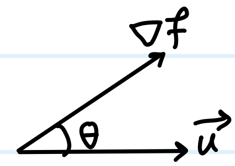
$$5a=25 \Rightarrow a=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,2)}=5$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5}b=10-\frac{4}{5}(5)=6$$

$$\Rightarrow b=\frac{30}{3} \Rightarrow b=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,2)}=10$$

تمرین: برای تابع $f(x,y)=x^2y+e^{xy}\sin y$ و نقطه‌ی داده شده $P_0:(1,0)$ تعیین کنید بیشترین سرعت افزایش و بیشترین سرعت کاهش مقادیر تابع $f$ در نقطه‌ی $P_0$ در کدام جهت‌ها رخ می‌دهد. مقدار مشتق‌های جهتی نظیر را بیابید.

راه حل: طبق نتیجه آخر، می دانیم بیشترین سرعت افزایش مقادیر تابع $f$ در نقطه $P_0$ در جهت بردار $\vec{u} = \dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}\Big|_{P_0}$ و با مقدار مشتق جهتی $D_{\vec{u}} f(P_0) = |\nabla f|\Big|_{P_0}$ حاصل می شود




(زیرا $D_{\vec{u}} f = \nabla f \cdot \vec{u} = |\nabla f| \cos\theta$ )

همچنین (به طور مشابه) بیشترین سرعت کاهش مقادیر تابع $f$ در نقطه $P_0$ نیز در جهت بردار $\vec{v} = -\dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}\Big|_{P_0}$

و با مقدار مشتق جهتی $(D_{\vec{v}} f)(P_0) = -|\nabla f|\Big|_{P_0}$ به دست می آید.

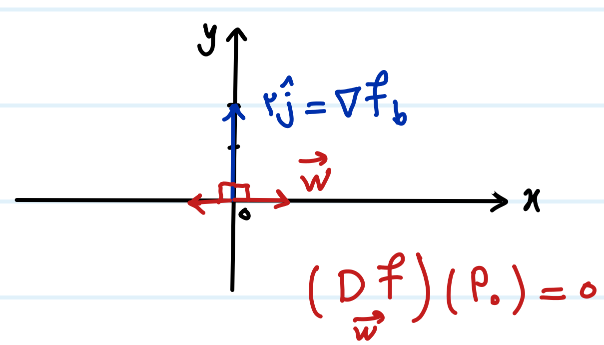
اما داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y e^{xy} \sin y \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + x e^{xy} \sin y + e^{xy} \cos y$$

$$\Rightarrow \nabla f\Big|_{P_0:(1,0)} = (0\hat{i} + 2\hat{j} = 2\hat{j} \Rightarrow \vec{u} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}\Big|_{P_0} = \hat{j}$$

$$\Rightarrow \boxed{(D_{\vec{u}} f)(P_0)} = |\nabla f|\Big|_{P_0} = 2$$

$$\overset{\vec{u}=\hat{j}}{=} \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{P_0}$$




از طرف دیگر داریم:

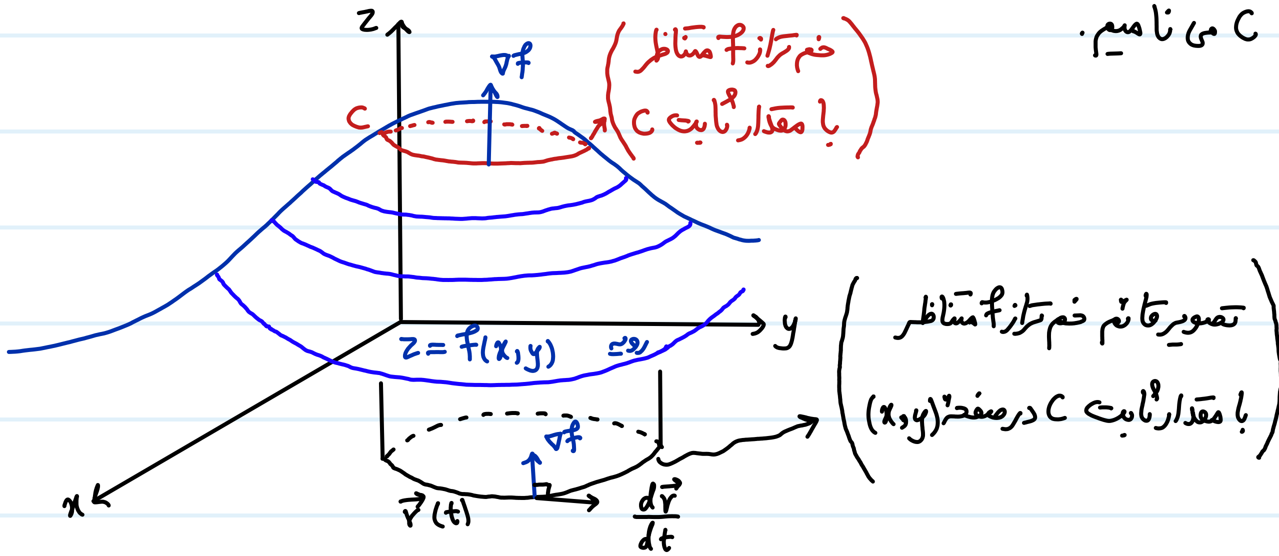
$$\vec{v} = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\Big|_{P_0} = -\hat{j}$$

$$\Rightarrow (D_{\vec{v}} f)(P_0) = -|\nabla f|_{P_0} = -2$$

* تعریف (خم تراز): رویه دلخواه $z = f(x,y)$ را در فضای $\mathbb{R}^3$ درنظر بگیرید. برای هر مقدار ثابت c

level curve

از تابع f، مکان هندسی کلیه نقاطی به شکل $\{(x,y,c) \mid c = f(x,y)\}$ را یک خم تراز برای تابع f متناظر با مقدار ثابت c می نامیم.




*نکته: بردار گرادیان همواره برخم های تراز عمود است.

در واقع، در هرنقطه دلخواه $(x_0, y_0)$ از دامنه تابع مشتق پذیر $f(x,y)$، می توان دید بردار گرادیان تابع f همواره برخم تراز تابع f که ازنقطه $(x_0, y_0, \underbrace{f(x_0,y_0)}_{=c})$ می گذرد، عمود است.

دلیل: اگر تابع مشتق پذیر $f(x,y)$ در امتداد خم هموار مثل $\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$ دارای مقدار ثابتی مثل c باشد، آنگاه $\boxed{f(x(t), y(t)) = c}$ (*) که معرف خم تراز f متناظر با مقدار ثابت c می باشد. دراین صورت با مشتق گیری ازطرفین رابطه (*) برحسب t نتیجه می گیریم:

$$\frac{d}{dt}\Big(f(x(t),y(t))\Big) = \frac{d}{dt}(c)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \overbrace{\nabla f}^{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}\right)} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{=\left(x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}\right)} = 0$$

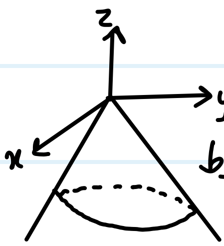
حال از آنجا که بردار $\frac{d\vec{r}}{dt}$ همواره بر خم هموار $\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}$ مماس بوده و $\nabla f \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$،

لذا بردار گرادیان $f$ بر خم تراز $f$ همواره عمود است.

# سؤالات امتحان میانترم

۱. نمایش رویه‌ها در دستگاه مختصات دکارتی و تشخیص نوع رویه‌ها.

الف) $\varphi = \frac{5\pi}{6}$




مخروط

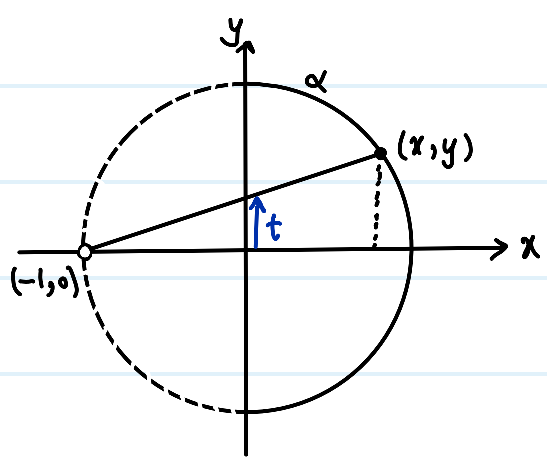
$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta = \frac{\rho}{2}\cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta = \frac{\rho}{2}\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}\rho \end{cases} \Longrightarrow x^2+y^2 = \frac{\rho^2}{4} = \frac{z^2}{3} \quad ; \quad z \leqslant 0$$

ب) $\rho^2 = \frac{-1}{\cos(2\varphi)} \Longrightarrow \rho^2\cos(2\varphi) = -1 \Longrightarrow \rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi = -1$

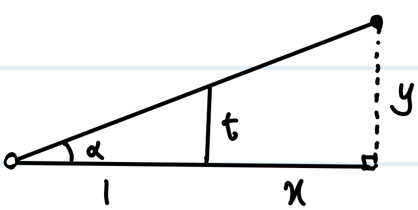
$$\Longrightarrow z^2 - (x^2+y^2) = -1 \Longrightarrow x^2+y^2-z^2 = 1$$

هذلولی‌گون یکپارچه

۲.




الف) پارامتری سازی خم α برحسب t.




$$\tan\alpha = \frac{y}{1+x} = \frac{t}{1} \Longrightarrow \boxed{y = t(1+x)} \quad (1)$$

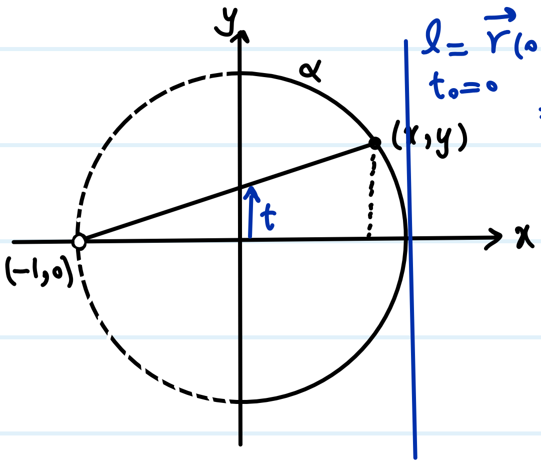
$$x^2+y^2=1 \quad (2)$$

$$\xrightarrow[\text{۱ در ۲}]{\text{جایگذاری}} (1+t^2)x^2+2t^2x+(t^2-1)=0$$

$$x = \frac{-t^2+1}{t^2+1} \xrightarrow{1} y(t)=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$x = \frac{-t^2-1}{t^2+1} = -1$$

ب) معادله پارامتری خط مماس بر خم $\alpha$ در نقطه $(1,0)$




$$l=\vec{r}(0)+s\vec{T}(0) \qquad t_0=0$$

$$=\hat{i}+s(\hat{j})$$

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t_0=0}=\left.\left(\frac{-4t^3}{(1+t^2)^2}\hat{i}+\frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}\hat{j}\right)\right|_{t_0=0}=2\hat{j}$$

$$T(0)=\hat{j}$$