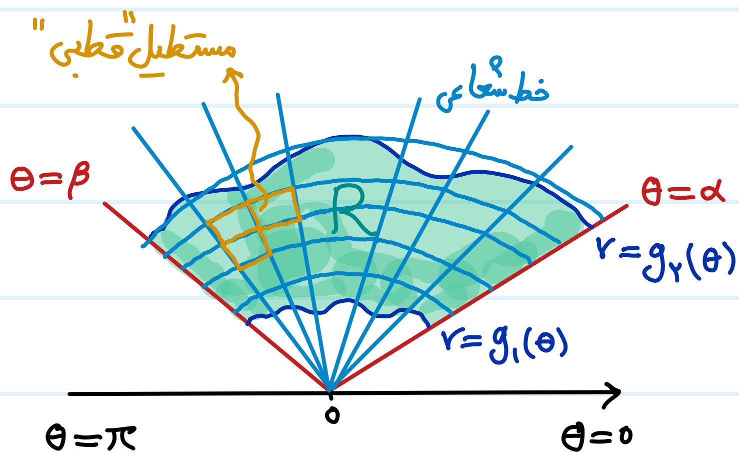
جلسه بیست و چهارم

* انتگرال گیری دوگانه در مختصات قطبی

هدف: می خواهیم ببینیم چطور می توان مقدار انتگرال هایی به شکل $\iint_R f(r,\theta)\,dA$ که در آن تابع $f(r,\theta)$ در مختصات قطبی داده شده است و R ناحیه ای کراندار در صفحه $\mathbb{R}^2$ با مختصات قطبی (r,θ) می باشد را محاسبه نمود.

تابع دومتغیره $f(r,\theta)$ را که روی ناحیه R به صورت زیر معرفی شده است در نظر بگیرید:

$$R=\{(r,\theta)\mid g_1(\theta)\leq r\leq g_2(\theta)\ ,\quad \theta\in[\alpha,\beta]\}$$



نحوه افراز کردن ناحیه R به مستطیل های "قطبی": ناحیه R را می توانیم توسط شبکه ای از کمان های دایره ای و خطوط شعاعی به نواحی کوچکتر افراز کنیم.

کمان های دایره ای شبکه بالا را کمان هایی از دوایری به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع Δr، $2\Delta r$، $3\Delta r$ و ... در نظر گرفته و خطوط شعاعی این شبکه را خطوطی در نظر می گیریم که با جهت مثبت محور x زوایای زیر را می سازند:

$\theta=\alpha$ ، $\theta=\alpha+\Delta\theta$ ، $\theta=\alpha+2\Delta\theta$ ، .... ، $\theta=\beta$

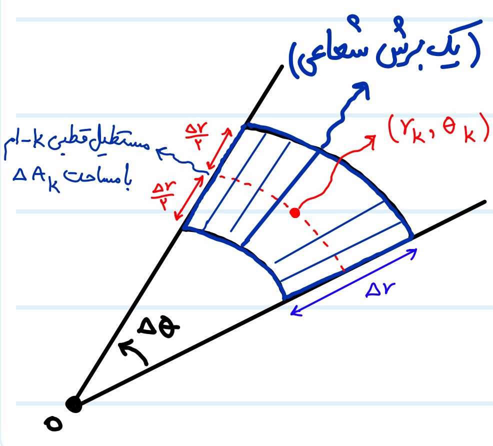
این شبکه از کمان های دایره‌ای و خطوط شعاعی ناحیهٔ R را به نواحی کوچکتری موسوم به «مستطیل های قطبی» افراز می‌کنند. حال اگر مستطیل های قطبی واقع در درون R را اندیس گذاری کرده و مساحت های آن‌ها را با ΔA_1، ΔA_2 و ... نمایش دهیم آنگاه با انتخاب نقاط دلخواه (r_k,θ_k) از مستطیل قطبی k-ام با مساحت ΔA_k، می‌توانیم یک مجموع ریمان برای تابع $f(r,\theta)$ روی ناحیهٔ R متناظر با افراز داده شده را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(r_k,\theta_k)\,\Delta A_k$$

حال اگر، مشابه حالت دکارتی، تابع f تابعی پیوسته روی ناحیه R باشد آنگاه حد مجموع ریمان تابع f روی ناحیه R وقتی نرم / اندازه افراز های موجود روی R به صفر میل کند، وجود دارد؛ این مقدار حدی را انتگرال دوگانهٔ تابع f روی ناحیهٔ R نامیده و به صورت زیر می‌نویسیم:

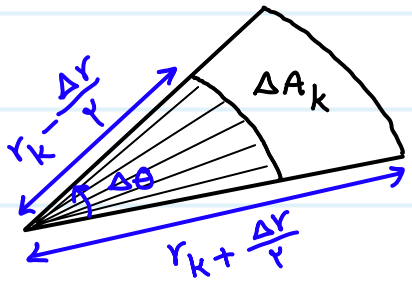
$$\iint_R f(r,\theta)\,dA=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_k f(r_k,\theta_k)\,\Delta A_k$$

* ماهیت هندسی dA در $\iint_R f(r,\theta)\,dA$: مطابق مطالب بالا، مستطیل قطبی k-ام حاصل از افراز ناحیه انتگرال گیری R را (به دلخواه) انتخاب نمایید:



از جلسهٔ قبلی، می دانیم مساحت قطاع دایره‌ای به شعاع r و زاویهٔ قطاعی θ برابر است با: $\frac{1}{2}r^2\theta$.

حال از آنجا که مستطیل قطبی k-ام (مطابق شکل) در درون قطاعی دایره‌ای به شعاع $(r_k+\frac{\Delta r}{2})$ و زاویه قطاعی $\Delta\theta$ و بیرون قطاعی دایره‌ای به شعاع $(r_k-\frac{\Delta r}{2})$ و زاویه قطاعی یکسان $\Delta\theta$ قرار دارد. لذا مساحت این مستطیل قطبی (یعنی ΔA_k) عبارتست از:



$$\Delta A_k = \frac{1}{2}\left(r_k+\frac{\Delta r}{2}\right)^2\Delta\theta - \frac{1}{2}\left(r_k-\frac{\Delta r}{2}\right)^2\Delta\theta$$
$$= \frac{1}{2}\Delta\theta\,(2r_k\Delta r) = r_k\,\Delta r\,\Delta\theta$$

دراین صورت مجموع ریمان S_n متناظر با افراز داده شده P را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(r_k,\theta_k)\, r_k\,\Delta r\,\Delta\theta$$

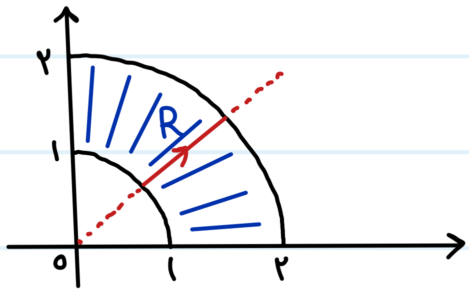
درحد، وقتی $\|P\| \longrightarrow 0$، مقادیر مجموع های ریمان به انتگرال دوگانه تابع $f(r,\theta)$ روی ناحیه R میل می‌کند:

$$\boxed{\iint_R f(r,\theta)\,dA = \iint_R f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta}$$

بنابراین درمحاسبهٔ مقدار یک انتگرال دوگانه در مختصات قطبی داریم: $dA = r\,dr\,d\theta$.

تمرین ۱: مطلوبست مقدار انتگرال دوگانهٔ $\iint_R f(r,\theta)\, dA$ برای تابع $f(r,\theta)=\cos\theta$ روی

ناحیهٔ $R=\{(r,\theta) \mid 1\leqslant r\leqslant 2,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\}$.

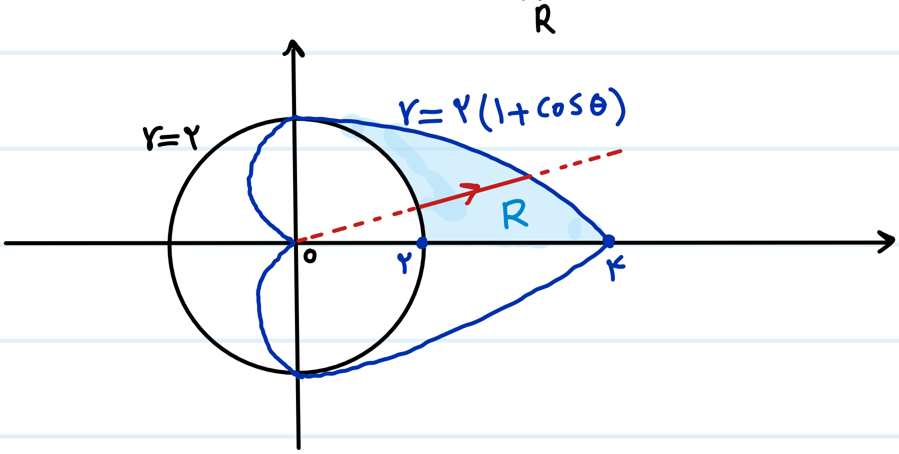


پاسخ: می‌دانیم معادلات $r=1$ و $r=2$، در مختصات قطبی، به ترتیب، بیانگر دوایری به شعاع ۱ و ۲ در صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ می‌باشند. بنابراین ناحیهٔ انتگرال‌گیری R، ناحیه‌ای است بیرون دایرهٔ $r=1$ و درون دایرهٔ $r=2$ که به خطوط شعاعی $\theta=0$ و $\theta=\frac{\pi}{2}$ محدود شده است. درنتیجه داریم:

$$\iint_R f(r,\theta)\, dA=\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{r=1}^{r=2}(\cos\theta)\, r\, dr\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left((\cos\theta)\frac{r^2}{2}\Big|_{r=1}^{r=2}\right)d\theta$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta=\frac{3}{2}(\sin\theta)\Big|_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}$$

تمرین ۲: مطلوبست محاسبهٔ مقدار انتگرال $\iint_R \sin\theta\, dA$ روی ناحیهٔ R (مطابق شکل زیر):



جواب :

$$\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{r=2}^{r=2(1+\cos\theta)} \sin\theta \; r \, dr \right) d\theta = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\sin\theta \, (1+\cos\theta)^2 - 2\sin\theta \right) d\theta$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\theta \, (1+\cos\theta)^2 \, d\theta + \underbrace{(2\cos\theta)\Big|_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}}_{=2(0-1)} = \int_{u=2}^{u=1} -2u^2 \, du - 2 = -2\frac{u^3}{3}\Big|_{u=2}^{1} - 2$$

$$= \frac{14}{3} - 2 = \frac{8}{3}$$

$$; \quad \left(\begin{array}{l} u := 1+\cos\theta \Rightarrow du = -\sin\theta \, d\theta \\ \theta = \frac{\pi}{2} \longrightarrow u = 1 \\ \theta = 0 \longrightarrow u = 2 \end{array} \right)$$

رسم نمودارهای قطبی : Wolfram $\longrightarrow$ Math $\longrightarrow$ plot $\longrightarrow$ polar (قطبی)