

دید:

$$\left. \begin{array}{l} X \sim Y \\ Z \sim W \\ X \cap Z = Y \cap W = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow X \cup Z \sim Y \cup W$$

$$\left. \begin{array}{l} X \sim Y \\ Z \sim W \end{array} \right\} \Rightarrow X \times Z \sim Y \times W$$

$$A^B := \{ f \mid \exists t \text{ s.t. } f: A \rightarrow B \}$$

$$X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$$

$$X \sim Y \wedge Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$$

$$X \sim X$$

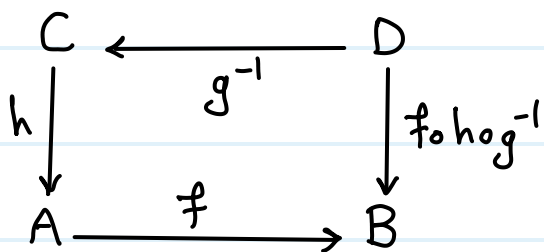
مثال: هرگاه  $X, Y$  مجموعه باشند،  $f: X \times Y \rightarrow Y \times X$  دوسوی است،  
 $(\Delta \times t) \mapsto (t, \Delta)$

$$X \times Y \sim Y \times X \quad \text{پس}$$

قضیه: اگر  $f: A \rightarrow B$ ،  $g: C \rightarrow D$  دوسوی باشند، آنگاه  $\varphi: A^C \rightarrow B^D$  دوسوی است.  
 $h \mapsto f \circ h \circ g^{-1}$

بخصوص اگر  $X \sim Y$ ،  $Z \sim W$ ، آنگاه  $X^Z \sim Y^W$ .

برهان: چون  $g: C \rightarrow D$  دوسوی است پس  $g^{-1}: D \rightarrow C$  نیز دوسوی است.  
 اگر  $h \in A^C$ ، آنگاه  $f \circ h \circ g^{-1}: D \rightarrow B$  تابع است و  $f \circ h \circ g^{-1} \in B^D$  نمودار زیر  
 جابجایی است:



$$\begin{array}{ccc} \varphi: A^C & \longrightarrow & B^D \\ k_1 & \longmapsto & f \circ k_1 \circ g^{-1} \end{array}$$

خوشتعریف است.

اگر  $k_1, k_2 \in A^C$  داریم:

$$\begin{aligned} \varphi(k_1) = \varphi(k_2) &\Rightarrow f \circ k_1 \circ g^{-1} = f \circ k_2 \circ g^{-1} \\ &\Rightarrow f^{-1} \circ f \circ k_1 \circ g^{-1} \circ g = f^{-1} \circ f \circ k_2 \circ g^{-1} \circ g \end{aligned}$$

$f^{-1} \circ f: B \rightarrow A$  دوسوی است پس  $f^{-1} \circ f$  تابع است

$$\Rightarrow (f^{-1} \circ f) \circ k_1 \circ (g^{-1} \circ g) = (f^{-1} \circ f) \circ k_2 \circ (g^{-1} \circ g)$$

$$\Rightarrow id_A \circ k_1 \circ id_C = id_A \circ k_2 \circ id_C$$

$$\downarrow f^{-1} \circ f = id_A, \quad g^{-1} \circ g = id_C$$

$$\Rightarrow k_1 = k_2$$

پس  $\varphi: A^C \rightarrow B^D$  یک به یک است.

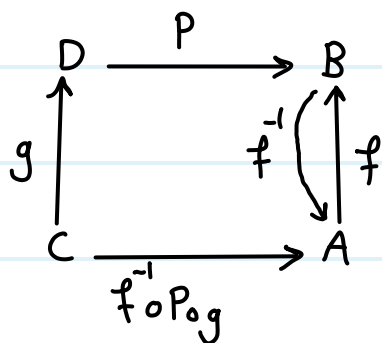
اگر  $P \in B^D$  یعنی  $P: D \rightarrow B$  تابع است آنگاه با توجه به دوسوی بودن  $f: A \rightarrow B$ ،  $f^{-1}: B \rightarrow A$

نیز تابع است پس  $f^{-1} \circ P \circ g: C \rightarrow A$  تابع است و  $f^{-1} \circ P \circ g \in A^C$

$$\varphi(f^{-1} \circ P \circ g) = f \circ (f^{-1} \circ P \circ g) \circ g^{-1} = (f \circ f^{-1}) \circ P \circ (g \circ g^{-1})$$

$$= id_B \circ P \circ id_D = P$$

پس  $\varphi: A^C \rightarrow B^D$  پوشان نیز هست، بنابراین دوسوی است.



قضیه: اگر  $A, B, C$  مجموعه باشند به قسمی که  $B \cap C = \emptyset$  آنگاه  $A^{B \cup C} \sim A^B \times A^C$ .

برهان: در مجموعه های  $A, B, C$  فرض کنید  $B \cap C = \emptyset$ .

نشان می دهیم  $\varphi: A^{B \cup C} \longrightarrow A^B \times A^C$  دو سویی است.  

$$f \longmapsto (f|_B, f|_C)$$

برهان: فرض کنید  $f, g \in A^{B \cup C}$  و  $\varphi(f) = \varphi(g)$  پس  $(f|_B, f|_C) = (g|_B, g|_C)$  بنابراین

$$f|_C = g|_C, f|_B = g|_B$$

به ازای هر  $x \in B \cup C$  حالت زیر را داریم:

حالت اول:  $x \in C$ . در این صورت  $f(x) = f|_C(x) = g|_C(x) = g(x)$ .

حالت دوم:  $x \in B$ . در این صورت  $g(x) = g|_B(x) = f|_B(x) = f(x)$ .

بنابراین موارد فوق  $g(x) = f(x)$  به ازای هر  $x \in B \cup C$  و چون  $f, g: B \cup C \rightarrow A$  تابعند

داریم  $f = g$  بنابراین  $\varphi: A^{B \cup C} \rightarrow A^B \times A^C$  یک به یک است.

فرض کنید  $(p, q) \in A^B \times A^C$  پس  $p \in A^B$  و  $q \in A^C$  یعنی  $P: B \rightarrow A$  و  $q: C \rightarrow A$  تابعند.

اما  $B \cap C = \emptyset$  پس  $\forall x \in \underbrace{B \cap C}_{\emptyset} \quad p(x) = q(x)$

در نتیجه  $p \vee q: B \cup C \rightarrow \underbrace{A \cup A}_A$  تابع است. یعنی  $p \vee q \in A^{B \cup C}$ .

$$\varphi(p \vee q) = ((p \vee q)|_B, (p \vee q)|_C) = \star (p, q)$$

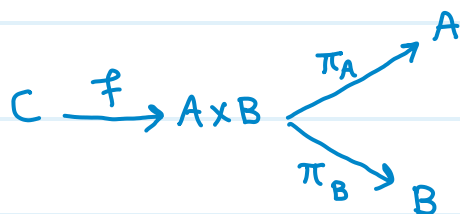
★  $P: B \rightarrow A$  و  $(p \vee q)|_B$  تابعند و  $\forall x \in B \ (p \vee q)|_B(x) = P(x)$  به طور مشابه  
 $(p \vee q)|_C = q$

بنابراین  $(p, q) \in \text{Im}(\varphi)$  و در نتیجه  $(p, q) \in A^B \times A^C$  (چون  $\varphi$  دلفوا بود)  
 $\varphi: A^{B \cup C} \rightarrow A^B \times A^C$  پوشا نیز هست، در نتیجه دوسوی است.

قضیه: اثر  $A, B, C$  مجموعه باشند، آنگاه  $(A \times B)^C \sim A^C \times B^C$

برهان:  $\pi_B: A \times B \rightarrow B, \pi_A: A \times B \rightarrow A$  را در نظر بگیرید:  
 $(x, y) \mapsto y \quad (x, y) \mapsto x$

نشان می دهیم:  $\varphi: (A \times B)^C \longrightarrow A^C \times B^C$  دو سوی است.  
 $f \longmapsto (\pi_A \circ f, \pi_B \circ f)$



اثر  $f, g: C \rightarrow A \times B$  چنان باشند که  $\varphi(f) = \varphi(g)$  آنگاه داریم:

$$\varphi(f) = \varphi(g) \Rightarrow (\pi_A \circ f, \pi_B \circ f) = (\pi_A \circ g, \pi_B \circ g)$$

$$\Rightarrow \pi_A \circ f = \pi_A \circ g \wedge \pi_B \circ f = \pi_B \circ g$$

$$\Rightarrow \forall x \in C \ (\pi_A(f(x)) = \pi_A(g(x)) \wedge \pi_B(f(x)) = \pi_B(g(x)))$$

$$\Rightarrow \forall x \in C \ (\pi_A(f(x)), \pi_B(f(x))) = (\pi_A(g(x)), \pi_B(g(x)))$$

$$(*) \Rightarrow \forall x \in C \ f(x) = g(x)$$

دلیل (\*): به ازای هر  $(z, w) \in A \times B$  داریم  $z = \pi_A(z, w), w = \pi_B(z, w)$

$$(z, w) = (\pi_A(z, w), \pi_B(z, w))$$
 پس

یعنی به ازای هر  $y \in A \times B$  داریم  $y = (\pi_A(y), \pi_B(y))$

پس به ازای هر  $x \in C$  داریم:

$$f(x) = (\pi_A(f(x)), \pi_B(f(x)))$$

$$g(x) = (\pi_A(g(x)), \pi_B(g(x)))$$

پس یافته ایم،  $f(x) = g(x)$  به ازای هر  $x \in C$  اما  $f, g: C \rightarrow A \times B$  تابع بودند بنا براین  $f = g$  و  $\varphi: (A \times B)^C \rightarrow A^C \times B^C$  یک به یک است.

حال فرض کنید  $(p, q) \in A^C \times B^C$  پس  $p: C \rightarrow A$  و  $q: C \rightarrow B$  تابعند. تابع  $h: C \rightarrow A \times B$  را در نظر بگیرید. به ازای هر  $x \in C$  داریم:

$$x \mapsto (p(x), q(x))$$

$$(\pi_A \circ h)(x) = \pi_A(h(x)) = \pi_A(p(x), q(x)) = p(x)$$

پس  $\pi_A \circ h = p$  به طور مشابه  $\pi_B \circ h = q$ .

بنابراین  $\varphi(h) = (\pi_A \circ h, \pi_B \circ h) = (p, q)$  و  $(p, q) \in \text{Im}(\varphi)$  اما  $(p, q) \in A^C \times B^C$  دلخواه بود، بنا براین  $\varphi: (A \times B)^C \rightarrow A^C \times B^C$  پوشا نیز هست و در نتیجه دوسوی است.

قضیه: مرتبه  $A, B, C$  مجموعه باشند، آنگاه  $(A^B)^C \sim A^{B \times C}$

برهان: فرض کنید  $A, B, C$  مجموعه باشند، اثر  $f \in (A^B)^C$  آنگاه  $f: C \rightarrow A^B$  تابع است

پس به ازای هر  $c \in C$ ،  $f(c) \in A^B$  و  $f(c): B \rightarrow A$  تابع است و بنا براین به ازای هر  $b \in B$ ،

$$f^*: B \times C \rightarrow A, \quad (f(c))(b) \in A$$

$$(b, c) \mapsto (f(c))(b)$$

نشان می دهیم  $\varphi: (A^B)^C \rightarrow A^{B \times C}$  دوسوی است.

$$g \mapsto g^*$$

فرض کنید  $g, h \in (A^B)^C$  داریم:

$$\varphi(g) = \varphi(h) \Rightarrow g^* = h^*$$

$$\Rightarrow \forall (b,c) \in B \times C \quad g^*(b,c) = h^*(b,c)$$

$$\Rightarrow \forall c \in C \quad \forall b \in B \quad (g(c))(b) = (h(c))(b)$$

$$\Rightarrow \forall c \in C \quad g(c) = h(c)$$

$$\downarrow$$

تابعند  $h(c), g(c): B \rightarrow A$

$$\Rightarrow g = h$$

$$\downarrow$$

تابعند  $g, h: C \rightarrow A^B$

$$\varphi: (A^B)^C \rightarrow A^{B \times C}$$

پس

$$, (b,c) \in B \times C \quad k \in A^{B \times C} \text{ پس } k \in B \times C \rightarrow A \text{ تابع است و به ازای هر } (b,c) \in B \times C$$

هرگاه

$$k_c \in A^B \text{ و } k_c: B \rightarrow A \text{ تابع است و } c \in C \text{ به ازای هر } k(b,c) \in A$$

$$z \mapsto k(z,c)$$

$$, \varphi(\lambda) \in A^{B \times C} \quad \lambda \in (A^B)^C \text{ اما } \lambda: C \rightarrow A^B \text{ را در نظر بگیرید، پس}$$

$$x \mapsto k_x$$

تابع

به ازای هر  $(b,c) \in B \times C$  داریم:

$$\varphi(\lambda)(b,c) = (\lambda(c))(b) = k_c(b) = k(b,c)$$

$$\varphi: (A^B)^C \rightarrow A^{B \times C} \text{ و } \text{Im}(\varphi) \rightarrow \varphi(\lambda) = k \text{ تابعند پس}$$

پوشا نیز می باشد و در نتیجه دو سوئی است.

مثال: اگر  $f: \emptyset \rightarrow A$  تابع باشد، آنگاه  $\text{Dom}(f) = \emptyset$  پس  $f = \emptyset$ . بجاوه به وضوح

$$. A^\emptyset = \{\emptyset\} \text{ پس } \varphi: \emptyset \rightarrow A$$

مثال: بنا بر مثال قبل  $\emptyset^\emptyset = \{\emptyset\}$ . از  $C \neq \emptyset$  و  $f: C \rightarrow \emptyset$  تابع باشد، آنگاه  $f \subseteq C \times \emptyset = \emptyset$

پس  $f = \emptyset$  و در این حالت  $C = \text{Dom}(f) = \text{Dom}(\emptyset) = \emptyset$  که تناقض است پس

$$\phi^D = \begin{cases} \{\phi\} & D = \phi \\ \phi & D \neq \phi \end{cases}$$