جلسه پانزدهم

دیدید اگر $f:X\to Y$ دوسویی باشد، آنگاه $f^{-1}:Y\to X$ نیز تابع دوسویی است.

قضیه: $f:X\to Y$ دوسویی است $\Longleftrightarrow$ $g:Y\to X$ چنان موجود است که

$$f\circ g = id_Y \quad , \quad g\circ f = id_X$$

بعلاوه اگر f و g دو شرط هم ارز بالا را برآورده سازند یعنی $f:X\to Y$ و $g:Y\to X$ چنان باشند که $g\circ f: id_X$ ، $f\circ g: id_Y$ آنگاه $g=f^{-1}$.

برهان:

"$\Longleftarrow$" اگر $f:X\to Y$ دوسویی باشد، قرار دهید $g=f^{-1}$ داریم $Dom(f^{-1})=Im(f)=Y$

چون $f:X\to Y$ پوشا است

وچون $f\subseteq X\times Y$ پس $f^{-1}\subseteq Y\times X$ و به ازای هر x,y,z با شرط $(x,y),(x,z)\in f^{-1}$ داریم $(y,x),(z,x)\in f$ پس $f(y)=x=f(z)$ اما $f:X\to Y$ یک به یک است پس $y=z$. درنتیجه $f^{-1}:Y\to X$ تابع است.

هرگاه $x\in X$، داریم $(x,f(x))\in f$ پس $(f(x),x)\in f^{-1}$ بنابراین

$$(*)\quad (f^{-1}\circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x = id_X(x)$$

اما $f^{-1}\circ f: X\to X$ ، id_X تابع بعند بنابر $(*)$ $f^{-1}\circ f = id_X$. به طور مشابه $f\circ f^{-1}=id_Y$.

"$\Longrightarrow$" فرض کنید $g:Y\to X$ چنان باشد که $f\circ g = id_Y$ و $g\circ f = id_X$.

$\forall a,b\in X$

$$f(a)=f(b)\Rightarrow (g\circ f)(a) = g(f(a)) = g(f(b)) = (g\circ f)(b)$$

$$\Rightarrow id_X(a) = id_X(b) \Rightarrow a=b$$

پس $f: X \to Y$ یک به یک است. اگر $y \in Y$ ، آنگاه

$$y = id_Y(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y)) \in f(X) = Im(f)$$

$g(y) \in X$

پس $f: X \to Y$ پوشا هم هست و در نتیجه دوسویی است.

حال فرض کنید $f: X \to Y$ و $h: Y \to X$ چنان باشند که $f \circ h = id_Y$ و $h \circ f = id_X$ بنابر قسمت ابتدای مسئله ، $f: X \to Y$ دوسویی است و آنگونه که دیدید $f^{-1} \circ f = id_X$ و $f \circ h^{-1} = id_Y$

$$h \circ f = id_X \Rightarrow \forall x \in X \quad x = id_X(x) = (h \circ f)(x) = h(f(x))$$

هرگاه $y \in Y$ آنگاه $f^{-1}(y) \in X$

$$\Rightarrow \forall y \in Y \quad f^{-1}(y) = h(f(f^{-1}(y)))$$

$$\Rightarrow \forall y \in Y \quad f^{-1}(y) = h((f \circ f^{-1})(y)) = h(id_Y(y)) = h(y)$$

$$\Rightarrow f^{-1} = h$$

$h: Y \to X$ و f^{-1} تابعند

تعریف: دو مجموعه Y و X را همتوان نامیم و از نماد $X \sim Y$ استفاده می کنیم اگر تابع دوسویی $f: X \to Y$ موجود باشد.

توجه: رابطه همتوانی روی هر خانواده از مجموعه ها یک رابطه هم ارزی است زیرا به ازای هر مجموعه X, Y, Z داریم:

$$id_X : X \to X, \quad x \mapsto x \Rightarrow X \sim X$$

را دوسویی است

۲) $X \sim Y \Rightarrow$ تابع $f : X \to Y$ دوسویی موجود است، اما چون $f : X \to Y$ دوسویی است پس $f^{-1} : Y \to X$ نیز دوسویی است.

$$\Rightarrow Y \sim X$$

۳) $X \sim Y \wedge Y \sim Z$

$\Rightarrow$ توابع دوسویی $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ موجودند. اما ترکیب دو تابع یک به یک، یک به یک است و ترکیب دو تابع پوشا، پوشاست، پس ترکیب دو تابع دوسویی نیز، دوسویی است.
بنابراین $g \circ f : X \to Z$ دوسویی است

$$\Rightarrow X \sim Z$$

توجه: $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ را در نظر بگیرید.
الف) اگر $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ یک به یک باشند، آنگاه به ازای هر $a, b \in X$ داریم:

$$(g \circ f)(a) = g \circ f(b) \Rightarrow g(f(a)) = g(f(b))$$

$$\Rightarrow f(a) = f(b)$$

چون $g : Y \to Z$ یک به یک است

$$\Rightarrow a = b$$

چون $f : X \to Y$ یک به یک است

پس $g \circ f : X \to Z$ یک به یک است.
ب) اگر $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ پوشا باشند، آنگاه

$$(g \circ f)(X) = g(f(X)) = g(Y) = Z$$

$f : X \to Y$ پوشاست $\qquad$ $g : Y \to Z$ پوشاست

پس $g \circ f : X \to Z$ پوشاست.

ج) بنابر (الف) و (ب) اگر $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$ دوسویی باشند آنگاه $g\circ f: X \to Z$ دوسویی است

قضیه: اگر $f: X \to Y$ و $g: Z \to W$ دوسویی باشند و $X\cap Z = Y \cap W = \phi$ آنگاه $f\cup g: X\cup Z \to Y\cup W$ نیز دوسویی است.

بخصوص اگر $X \sim Y$ و $Z\sim W$ و $X\cap Z = Y\cap W = \phi$، آنگاه $X\cup Z \sim Y\cup W$.

برهان: فرض کنید $f: X\to Y$ و $g: Z\to W$ دوسویی باشند و $X\cap Z = \phi = Y\cap W$ پس

$$\forall t \in \underbrace{X\cap Z}_{\phi} \qquad f(t) = g(t)$$

بنابراین $f\cup g: X\cup Z \to Y\cup W$ تابع است بعلاوه

$$(f\cup g)(X\cup Z) = \operatorname{Im}(f\cup g) = \{c : \exists a \quad (a,c)\in f\cup g\}$$

$$= \{c : \exists a \quad ((a,c)\in f \vee (a,c)\in g)\}$$

$$= \{c \mid (\exists a \quad (a,c)\in f) \vee (\exists a \quad (a,c)\in g)\}$$

$$= \{c : \exists a \quad (a,c)\in f\} \cup \{c \mid \exists a \quad (a,c)\in g\}$$

$$= \operatorname{Im}(f)\cup \operatorname{Im}(g) = Y\cup W$$

$f: X\to Y$, $g: Z\to W$ پوشا هستند

پس $f\cup g : X\cup Z \to Y\cup W$ پوشا ست.

فرض کنید $a,b \in X\cup Z$ و $(f\cup g)(b) = (f\cup g)(a)$، حالت زیر را داریم:

حالت اول $a,b\in X$: در این حالت

$$f(a) \underset{a\in X}{=} (f\cup g)(a) = (f\cup g)(b) \underset{b\in X}{=} f(b)$$

چون $f: X\to Y$ یک به یک است پس $a=b$.

حالت دوم: $a, b \in Z$ در این حالت

$$g(a) \underset{a \in Z}{=} (f \cup g)(a) = (f \cup g)(b) \underset{b \in Z}{=} g(b)$$

چون $g: X \to Y$ یک به یک است پس $a = b$.

حالت سوم: $a \in X$ و $b \in Z$. در این حالت

$$Y \ni f(a) \underset{a \in X}{=} (f \cup g)(a) = (f \cup g)(b) \underset{b \in Z}{=} g(b) \in W$$

پس $f(a) = g(b) \in Y \cap W = \varnothing$ که تناقض است پس این حالت رخ نمی دهد.

حالت چهارم: $a \in Z$ و $b \in X$. این حالت نیز مشابه حالت سوم رخ نمی دهد.

بنابر حالات فوق $a = b$ و $f \cup g: X \cup Z \to Y \cup W$ یک به یک نیز هست پس دوسویی است

$$X \cap Z = Y \cap W = \varnothing ، Z \sim W ، X \sim Y \implies X \cup Z \sim Y \cup W$$

قضیه: اگر $f: X \to Y$ دوسویی و $g: Z \to W$ دوسویی باشند، آنگاه

$$h: X \times Z \longrightarrow Y \times W$$
$$(a, b) \longmapsto (f(a), g(b))$$

نیز دوسویی است.

بخصوص اگر $C \sim D$ و $E \sim F$، آنگاه $C \times E \sim D \times F$.

برهان: به‌ازای $(x_1, z_1), (x_2, z_2) \in X \times Z$ داریم:

$$h(x_1, z_1) = h(x_2, z_2) \implies (f(x_1), g(z_1)) = (f(x_2), g(z_2))$$
$$\implies f(x_1) = f(x_2) \wedge g(z_1) = g(z_2)$$
$$\implies x_1 = x_2 \wedge z_1 = z_2$$

چون $f: X \to Y$ یک به یک است و $g: Z \to W$ یک به یک هستند

$$\implies (x_1, z_1) = (x_2, z_2)$$

پس $h: X\times Z \to Y\times W$ یک به یک است.

بعلاوه به ازای هر $(y,w)\in Y\times W$ داریم:

$$(y,w)\in Y\times W \Rightarrow y\in Y \wedge w\in W$$

$$\Rightarrow (\exists x\in X \ \ f(x)=y) \wedge (\exists z\in Z \ \ g(z)=w)$$

$f: X\to Y$ پوشاست و $g: Z\to W$ پوشاست

$$\Rightarrow \exists (x,z)\in X\times Z \ \ (h(x,z)=(f(x),g(z))=(y,w))$$

$$\Rightarrow (y,w)\in \mathrm{Im}(h)$$

پس $h: X\times Z \to Y\times W$ پوشا نیز هست بنابراین دوسویی است.

تعریف: هرگاه X و Y مجموعه هایی دلخواه باشند قرار دهید:

$$Y^X := \{ f \mid f: X\to Y \text{ تابع است} \}$$

$$(X\times Y)^Z \sim (X^Z)\times(Y^Z)$$

$$(X^Y)^Z \sim X^{Y\times Z}, \quad X^Y\times X^Z \sim X^{Y\cup Z}$$

با شرط $\phi = Y\cap Z$