جلسه چهاردهم

آزمون

۴شنبه ۱۴۰۴/۱/۳۰

۱ـ نشان دهید مجموعهٔ همه مجموعه‌ها وجود ندارد. (جلسه ۶ـ صفحه ۵۰)

پارادوکس راسل: اگر V مجموعهٔ همه مجموعه‌ها وجود داشته باشد، بنابر اصل تصریح $R=\{x\in V : x\notin x\}$ یک مجموعه است و $R\in V$. حالات زیر را داریم:

حالت اول. $R\in R$. دراین حالت بنابر نحوه تعریف R داریم $R\notin R$ که با فرض $R\in R$ در تناقض است.

حالت دوم. $R\notin R$. چون $R\notin R$ و $R\in V$ بنابر نحوه تعریف R داریم $R\in R$ که با فرض $R\notin R$ در تناقض است.

بنابر تناقض حاصل از دو حالت فوق، V مجموعه نیست. ▨

۲ـ مطلوب است بیان صورت و برهان اصل استقرای ریاضی. (جلسه ۳ـ صفحه ۱۵)

قضیه (اصل استقراء ریاضی)

فرض کنید $\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$ مجموعه اعداد طبیعی باشد و $p(n)$ گزاره نمایی برحسب $n\in\mathbb{N}$ به قسمی که:

الف) $p(1)$ برقرار است

ب) $\forall n\in\mathbb{N} \quad p(n)\Rightarrow p(n+1)$

آنگاه: $\forall n\in\mathbb{N} \quad p(n)$

برهان: فرض کنید گزاره نمای $p(n)$ برای هر $n\in\mathbb{N}$ تعریف شده باشد و به قسمی باشد که $p(1)$ برقرار است و $\forall n\in\mathbb{N} \quad p(n)\Rightarrow p(n+1)$.

اگر $D=\{n\in\mathbb{N} : \neg p(n)\}$ ناتهی باشد، آنگاه $t=\min(D)$ موجود است. چون $p(1)$ درست است پس $1\notin D$ اما $t\in D$ پس $1<t$ و چون $t=\min(D)$ پس $t-1\notin D$ درحالیکه $t-1\in\mathbb{N}$ بنابراین $p(t-1)$ درست است اما $p(t-1)\Rightarrow p(t)$ پس $p(t)$ نیز درست است که با $t\in D$

در تناقض است. پس $D=\emptyset$ یعنی $p(n)$ $\forall n\in \mathbb{N}$.

۳- مطلوب است بیان اصل تصریح، اصل مبنا و اصل زوج‌سازی. (جلسه ۵- صفحه ۴۵ و ۴۷)

اصل تصریح (اصل زیرمجموعه): هرگاه A مجموعه ای دلخواه و $p(x)$ گزاره نمایی برای x های عضو A باشد، B زیرمجموعه A شامل دقیقاً $x\in A$ ها که $p(x)$ را برآورده می‌سازند موجود است. بنابر اصل گسترش B منحصربه‌فرد است. آن را با $\{x\in A : p(x)\}$ نمایش می دهیم.

$x\in B \iff x\in A \ \wedge \ p(x)$

اصل مبنا (اصل انتظام): اگر a مجموعه‌ای ناتهی باشد، $b\in a$ چنان موجود است که هیچ عضو مشترکی با a ندارد.

اصل زوج سازی: اگر a و b دو مجموعه باشند، مجموعه‌ای موجود است که اعضای آن دقیقاً a و b هستند.
این مجموعه را که بنابر اصل گسترش منحصربه‌فرد است با $\{a,b\}$ نمایش می دهیم.

۴- نشان دهید $A\subseteq B$ اگر و تنها اگر $p(A)\subseteq p(B)$. (جلسه ۹- صفحه ۷۱)

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. نشان می دهیم: $A\subseteq B \iff p(A)\subseteq p(B)$

" $\Leftarrow$ " : ابتدا فرض کنید $A\subseteq B$. به ازای هر T داریم:

$$T\in p(A) \Rightarrow T\subseteq A \overset{*}{\Rightarrow} T\subseteq B \Rightarrow T\in p(B)$$

* می دانیم اگر $K\subseteq M$, $L\subseteq K$ آنگاه $L\subseteq M$. حال توجه کنید که $A\subseteq B$, $T\subseteq A$. پس $T\subseteq B$.
بنابراین $p(A)\subseteq p(B)$.

" $\Longrightarrow$ " : حال فرض کنید $p(A)\subseteq p(B)$.

چون $A\subseteq A$ پس $A\in p(A)$.

چون $p(A)\subseteq p(B)$ پس $A\in p(B)$ یعنی $A\subseteq B$.

۵- مطلوب است بیان قوانین قیاس استثنایی، عکس نقیض و حذف عاطف (اختصار).

(جلسه۲ - صفحه ۴ / جلسه۳ - صفحه ۱۲)

قیاس استثنایی $(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$

عکس نقیض $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

حذف عاطف (قانون اختصار) $p \wedge q \Rightarrow p$

۶- عملگر $*$ را چنان به کمک $\wedge$، $\vee$، $\to$، $\leftrightarrow$، $\neg$ معرفی کنید که جدول زیر معتبر باشد.

(شبیه جلسه ۲ - صفحه ۸ و ۹)

	p	q	r	$*(p, q, r)$
۱	د	د	د	د
	د	د	ن	ن
	د	ن	د	ن
۲	د	ن	ن	د
۳	ن	د	د	د
۴	ن	د	ن	د
	ن	ن	د	ن
	ن	ن	ن	ن

فقط سطرهای درست را در نظر می‌گیریم. برای هر سطر درست، یک $\wedge$ از متغیرها می‌سازیم، سپس همه‌ی آن‌ها را با $\vee$ به هم وصل می‌کنیم.

سطر ۱: $(p \wedge q \wedge r)$

سطر ۲: $(p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

سطر ۳: $(\neg p \wedge q \wedge r)$

سطر ۴: $(\neg p \wedge q \wedge \neg r)$

پس داریم:

$$*(p,q,r) = (p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$$

$$\equiv (p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\underbrace{(r\vee\neg r)}_{t})$$

$$\equiv (p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q)$$

۷ـ به کمک قاعده نقیض سور و قرار دادهایی که داشتیم نشان دهید: (جلسه ۳ ـ صفحه ۱۵)

$$\neg(\forall x\in A \quad p(x)) \equiv \exists x\in A \quad (\neg p(x))$$

$$\neg(\forall x\in A \quad p(x)) \equiv \neg(\forall x\ (x\in A\to p(x)))$$

$$\equiv \exists x \quad \neg(x\in A\to p(x))$$ قاعده نقیض سور

$$\equiv \exists x \quad \neg(x\notin A \vee p(x))$$ $\neg(x\in A)$ را با $x\notin A$ نمایش می‌دهیم

$$\equiv \exists x \quad (\neg\, x\notin A \wedge \neg p(x))$$ دمورگان

$$\equiv \exists x \quad (x\in A \wedge \neg p(x))$$ نفی مضاعف

$$\equiv \exists x\in A \quad (\neg p(x))$$ قرار داد