جلسه بیست و ششم

یادآوری: مجموعه جزئاً مرتب $(A, \leqslant)$ را خوش ترتیب نامیم هرگاه هر زیرمجموعه ناتهی آن دارای کوچکترین عضو (عضو مینیمم) باشد. دیدید هر مجموعه خوش ترتیب کلاً مرتب است.

پس به طور معادل مجموعه کلاً مرتب $(A, \leqslant)$ را خوش ترتیب نامیم هرگاه هر زیرمجموعه ناتهی آن دارای کوچکترین عضو باشد.

نکته: اگر $(A, \leqslant_A)$ و $(B, \leqslant_B)$ مجموعه‌هایی خوش ترتیب باشند و $A \cap B = \emptyset$ و $\leqslant^* = \leqslant_A \cup \leqslant_B \cup (A \times B)$، آنگاه $(A \cup B, \leqslant^*)$ مجموعه‌ای خوش ترتیب است.

برهان: اگر $x, y, z \in A \cup B$ داریم:

الف) هرگاه $x \in A$، آنگاه $(x, x) \in \leqslant_A \subseteq \leqslant^*$

و اگر $x \in B$، آنگاه $(x, x) \in \leqslant_B \subseteq \leqslant^*$

بنابر نکات بالا، $x \leqslant^* x$.

ب) اگر $x \leqslant^* y$ و $y \leqslant^* x$ حالات زیر را داریم:

حالت اول: $x, y \in A$؛ در این حالت چون $A \cap B = \emptyset$ و $\leqslant_B \subseteq B \times B$ پس $(x, y), (y, x) \notin \leqslant_B$. چون $A \cap B = \emptyset$ پس $(x, y), (y, x) \notin A \times B$. (توجه کنید که $x \notin B$ و $y \notin B$)

پس $(x, y), (y, x) \in \leqslant^* \setminus (\leqslant_B \cup (A \times B)) \subseteq \leqslant_A$ در نتیجه به دلیل پادمتقارن بودن $\leqslant_A$ داریم $x = y$.

حالت دوم: $x, y \in B$؛ مشابه استدلال حالت اول $x = y$.

حالت سوم: $x\in A$, $y\in B$ ؛ چون $x\in A$ و $A\cap B=\phi$ و $\leqslant_B \subseteq B\times B$ پس

$(y,x)\notin \leqslant_B$. چون $y\in B$ و $A\cap B=\phi$ و $\leqslant_A \subseteq A\times A$ پس $(y,x)\notin \leqslant_A$.

چون $y\in B$ و $A\cap B=\phi$ پس $(y,x)\notin A\times B$ بنابراین $(y,x)\notin \leqslant_A \cup \leqslant_B \cup (A\times B)=\leqslant^*$

که با $y\leqslant^* y$ در تناقض است. پس این حالت رخ نمی‌دهد.

حالت چهارم: $x\in B$ و $y\in A$ ؛ مشابه حالت سوم این حالت نیز رخ نمی‌دهد.

بنابر حالات فوق $x=y$ و $\leqslant^*$ پادمتقارن است.

ج) اگر $x\leqslant^* y$ و $y\leqslant^* z$ حالات زیر را داریم:

حالت اول: $x\in A$ و $z\in B$ ؛ در این حالت $(x,z)\in A\times B\subseteq \leqslant^*$ پس $x\leqslant^* z$.

حالت دوم: $x\in A$, $z\in A$ ؛ چون $x\in A$ و $A\cap B=\phi$ پس $(x,y)\notin \leqslant_B$ پس

$(x,y)\in \leqslant^* \setminus \leqslant_B \subseteq \leqslant_A \cup (A\times B)$. چون $z\in A$ و $\phi=A\cap B$ بنابراین

$(y,z)\notin \underbrace{\leqslant_B}_{\subseteq B\times B} \cup (A\times B)$. بنابراین $(y,z)\in \leqslant_A \subseteq A\times A$ به خصوص $y\in A$ و

$(x,y)\notin A\times B$ پس $(x,y)\in \left(\leqslant_A \cup (A\times B)\right)\setminus (A\times B)\subseteq \leqslant_A$. بنابراین

$y\leqslant_A z$ و $x\leqslant_A y$ و به دلیل متعدی بودن $\leqslant_A$ ، $x\leqslant_A z$ پس

$(x,z)\in \leqslant_A \subseteq \leqslant^*$ و $x\leqslant^* z$.

حالت سوم: $x\in B$ ؛ پس $(x,y)\notin \underbrace{\leqslant_A}_{\subseteq A\times A} \cup (A\times B)$. بنابراین

$(x,y)\in \leqslant^* \setminus \left(\leqslant_A \cup (A\times B)\right)\subseteq \leqslant_B \subseteq B\times B$ به خصوص $y\in B$ پس $(y,z)\notin \underbrace{\leqslant_A}_{\subseteq A\times A} \cup (A\times B)$

بنابراین $(y,z)\in \leqslant^* \setminus \left(\leqslant_A \cup (A\times B)\right)\subseteq \leqslant_B$. چون $x\leqslant_B y$ و $y\leqslant_B z$ و

$\leqslant_B$ متعدی است پس $x \leqslant_B z$. و در نتیجه $(x, z) \in \leqslant_B \subseteq \leqslant^*$ یعنی $x \leqslant^* z$.

بنابر سه حالت بالا $x \leqslant^* z$.

بنابر (الف) ، (ب) و (ج) ، $(A \cup B, \leqslant^*)$ جزئاً مرتب است.

فرض کنید $\emptyset \neq D \subseteq A \cup B$ حالات زیر را داریم:

① $D \cap A \neq \emptyset$. در این حالت چون $(A, \leqslant_A)$ خوش ترتیب است پس $x_0 = \min_{(A, \leqslant_A)} (D \cap A)$ موجود است.

به ازای $z \in D \cap A$ داریم $x_0 \leqslant_A z$ پس $(x_0, z) \in \leqslant_A \subseteq \leqslant^*$. بنابراین $x_0 \leqslant^* z$ و به ازای هر $w \in D \setminus (D \cap A)$ داریم $w \in B$ پس $(x_0, w) \in A \times B \subseteq \leqslant^*$ (توجه کنید که $x_0 = \min_{(A, \leqslant_A)} (D \cap A) \in D \cap A \subseteq A$)

در نتیجه $x_0 \leqslant^* w$. پس به ازای هر $y \in D$ ، $x_0 \leqslant^* y$. بعلاوه $x_0 \in D \cap A \subseteq D$ پس $x_0 = \min_{\leqslant^*} (D)$.

② اگر $D \cap A = \emptyset$ ، آنگاه $D \subseteq B$ و چون $(B, \leqslant_B)$ خوش ترتیب پس $x_1 = \min_{\leqslant_B} D \in D$ موجود است و به ازای هر $w \in D$ داریم $(x_1, w) \in \leqslant_B \subseteq \leqslant^*$

پس $x_1 \leqslant^* w$ و $x_1 = \min_{\leqslant^*} D$.

بنابر ① و ② D در $(A\cup B, \leqslant^*)$ دارای مینیمم است. پس مجموعه جزئاً مرتب $(A\cup B, \leqslant^*)$ خوش ترتیب است.

قضیه: اگر $(A, \leqslant_A)$ و $(B, \leqslant_B)$ خوش ترتیب باشند و

$\forall (c,d), (s,t) \in A\times B$

$$(c,d) \leqslant^* (s,t) \Leftrightarrow c \leqslant s \wedge (c=s \Rightarrow d \leqslant_B t)$$

به بیان دیگر

$$(c,d) \leqslant^* (s,t) \Leftrightarrow \big(c <_A s \vee (c=s \wedge d \leqslant_B t)\big)$$

رابطه ترتیب الفبایی

برهان: هر $x=(x_A, x_B), y=(x_A, y_B), z=(z_A, z_B)$ عضو $A\times B$ باشند، داریم:

الف) $x_A = x_B$ ، $x_B \leqslant_B x_B$ پس $\underbrace{(x_A, x_B)}_{x} \leqslant^* \underbrace{(x_A, x_B)}_{x}$

ب) اگر $x \leqslant^* y$ و $y \leqslant^* z$ آنگاه $x_A \leqslant_A y_A$ و $y_A \leqslant_A z_A$ پس $x=(x_A, x_B) \leqslant^* (z_A, z_B)$.

اگر $x_A = z_A$ آنگاه $x_A \leqslant y_A$ و $y_A \leqslant z_A = x_A$ پس $x_A = y_A$.

بنابراین $x=(x_A, x_B) \leqslant^* y = (x_A, y_B)$ پس $\underline{x_B \leqslant_B y_B}$.

بعلاوه $y=(x_A, y_B) \leqslant^* z = (x_A, z_B)$ پس $\underline{y_B \leqslant_B z_B}$.

بنابراین $x_B \leqslant z_B$ در نتیجه $x=(x_A, x_B) \leqslant^* (x_A, z_B) = z$.

ج) اگر $x \leqslant^* y$ و $y \leqslant^* x$ ؛ بنابراین $x_A \leqslant_A y_A$ و $y_A \leqslant_A x_A$ پس $x_A = y_A$. اما $x = (x_A, x_B) \leqslant^* y = (x_A, y_B)$ و $y = (x_A, y_B) \leqslant^* (x_A, x_B) = x$

پس $x_B \leqslant_B y_B$ و $y_B \leqslant_B x_B$. بنابراین $x_B = y_B$ و از آنجا $x = y$.

بنابر (الف)، (ب) و (ج)، $(A \times B, \leqslant^*)$ جزئاً مرتب است.

فرض کنید $\emptyset \neq D \subseteq A \times B$ پس $D_1 = \{ a \in A \mid \exists b \in B \ (a,b) \in D \}$

زیرمجموعه ناتهی A است و چون $(A, \leqslant_A)$ خوش‌ترتیب است پس $P = \min_{\leqslant_A} D_1 \in D_1$

موجود است. بنابراین $D_2 = \{ b \in B : (P,b) \in D \}$ زیرمجموعه ناتهی B است و چون

$(B, \leqslant_B)$ خوش‌ترتیب است پس $q = \min(D_2) \in D_2$ موجود است. چون $q \in D_2$

پس $(P,q) \in D$.

به ازای هر $(x,y) \in D$ چون $x \in D_1$ و $P = \min_{\leqslant_A} D_1$ پس $P \leqslant_A x$.

اگر $P <_A x$ آنگاه $(P,q) \leqslant^* (x,y)$. و اگر $P = x$ ، آنگاه $(x,y) = (P,y) \in D$

پس $y \in D_2$ و چون $q = \min_{\leqslant_B} D_2$ پس $q \leqslant_B y$ بنابراین

$(P,q) \leqslant^* (P,y) = (x,y)$.

در هر حال $(x,y) \leqslant^* (P,q) \in D$ به ازای هر $(x,y) \in D$ پس $(P,q) = \min_{\leqslant^*} D$ ،

$(A \times B, \leqslant^y)$ خوش‌ترتیب است.

تعریف

اگر $(A, \leqslant_A)$ و $(B, \leqslant_B)$ مجموعه‌های جزئاً مرتب باشند، تابع $f: A \to B$ را حافظ نامیم هرگاه $\forall x, y \in A \quad (x \leqslant_A y \Rightarrow f(x) \leqslant_B f(y))$

در مجموعه کلاً مرتب $(A, \leqslant_A)$، $S \subseteq A$ را یک قطعه نامیم اگر

$$\forall x \in S \quad \forall y \in A \quad (y \leqslant_A x \Rightarrow y \in S)$$

مثال: اگر $(A, \leqslant_A)$ مجموعه‌ای کلاً مرتب باشد و $p \in A$، $S_p = \{x \in A : x <_A p\}$ یک قطعه از $(A, \leqslant_A)$ است.

قضیه: در مجموعه خوش ترتیب و ناتهی $(A, \leqslant)$ فرض کنید $D \subsetneq A$.

D یک قطعه در $(A, \leqslant)$ است اگر و تنها اگر $p \in A$ به قسمی موجود است که $D = S_p = \{x \in A : x < p\}$.

برهان: چون $D \subsetneq A$ پس $A \setminus D$ یک زیرمجموعه ناتهی مجموعه خوش ترتیب $(A, \leqslant)$ است و $p = \min_{\leqslant} A \setminus D$ موجود است. فرض کنید $x \in D$ اگر $x \not< p$، چون $(A, \leqslant)$ خوش ترتیب و در نتیجه کلاً مرتب است پس $p \leqslant x \in D$ و چون D قطعه است پس $p \in D$ که با $p = \min_{\leqslant} (A \setminus D) \in A \setminus D$ در تناقض است. بنابراین $x < p$ و

$D \subseteq S_p$.

اگر $y \in S_p$ پس $y < p$ و چون $p = \min(A \setminus D)$ پس $y \in A \setminus D$ بنابراین $y \in D$. پس $S_p \subseteq D$ که برهان $S_p = D$ را کامل می‌کند.

نتیجه: تمامی قطعات مجموعه خوش ترتیب $(A, \leqslant)$ عبارتند از:

$$\phi, A, S_p = \{x \in A : x < p\} \quad (p \in A)$$

تعریف: اگر $(A, \leqslant_A)$ و $(B, \leqslant_B)$ مجموعه هایی کلاً مرتب باشند.

الف) تابع حافظ ترتیب $f : (A, \leqslant_A) \to (B, \leqslant_B)$ را همریختی ترتیبی نامیم اگر $\varphi(A)$ یک قطعه در B باشد.

ب) تابع حافظ ترتیب و دوسویی $f : (A, \leqslant_A) \to (B, \leqslant_B)$ را یکریختی ترتیبی نامیم و در این حالت $(A, \leqslant_A)$ و $(B, \leqslant_B)$ را یکریخت ترتیبی نامیم.

<u>توجه</u>

تمرین: تابع دوسویی $f : (A, \leqslant_A) \to (B, \leqslant_B)$ یکریختی ترتیبی است اگر و تنها اگر $f : (A, \leqslant_A) \to (B, \leqslant_B)$ و $f^{-1} : (B, \leqslant_B) \to (A, \leqslant_A)$ همریختی ترتیبی باشند.

($(A, \leqslant_A)$ و $(B, \leqslant_B)$ کلاً مرتب)