جلسه بیست و چهارم

(فرضیه پیوستار)

جلسه گذشته دیدید $2^{\aleph_0} = c$

همچنین $\aleph_0 = \mathrm{card}(\mathbb{N})$ و به ازای هر مجموعه نامتناهی X تابع یک به یک $f: \mathbb{N} \to X$

موجود است، یعنی $\aleph_0 = \mathrm{card}(\mathbb{N}) \leqslant \mathrm{card}(X)$

بنابراین $\aleph_0$ کوچکترین کاردینال نامتناهی است

ترامتناهی

CH

فرضیه پیوستار: هیچ عدد اصلی α در شرط $\left(\aleph_0 < \alpha < c (= 2^{\aleph_0})\right)$ صدق نمی‌کند.

GCH

تعمیم فرضیه پیوستار: اگر α یک عدد اصلی ترامتناهی، باشد، هیچ عدد اصلی β درشرط $\alpha<\beta<2^{\alpha}$ صدق نمی‌کند.

$$\ldots\ldots < \aleph_0 < \ldots\ldots$$

متناهی شمارای نامتناهی ناشمارا

نامتناهی

نوعی دیگری از تعمیم فرضیه پیوستار که در یکی از کتب قدیمی تر دیدم.
فرض کنید $q\in\mathbb{N}$ ثابت باشد.
دقیقاً q تا عدد اصلی α صادق درشرط $\aleph_0<\alpha<2^{\aleph_0}(=c)$ موجود است.

اصول: ZF ، CH ، GCH

AC اصل انتخاب

$$ZF+AC=ZFC$$

هرگاه A مجموعه ای از مجموعه های ناتهی باشد تابع $f:A\to\bigcup A$ چنان موجود است
که $f(D)\in D \quad \forall D\in A$
تابعی که درشرط بالا صدق کند را یک تابع انتخاب می نامیم.

مثال: $A = \{[0, \frac{1}{n}] : n=1, \dots, 99\} \cup \{\mathbb{N}, \{*\}\}$

با ضابطه $f: \tilde{A} \to \bigcup\tilde{A} = \mathbb{N} \cup [0,1] \cup [*]$

$$f([0,1]) = f([0,\tfrac{1}{2}]) = f([0,\tfrac{1}{3}]) = \tfrac{1}{5}$$

$$f_1([0,\tfrac{1}{4}]) = \tfrac{1}{9}$$

$$f([0,\tfrac{1}{n}]) = 0 \qquad (n \geq 4)$$

$$f(\mathbb{N}) = 1$$

$$f(\{*\}) = *$$

یک انتخاب است.

مثال: $f: A \to B$ پوشاست اگر و تنها اگر $g: B \to A$ با شرط $f\circ g = id_B$ موجود باشد.

برهان. "$\Longrightarrow$" فرض کنید $g: B \to A$ چنان باشد که $f\circ g = id_B$ هرگاه $x \in B$، آنگاه

$Z = g(x) \in A$ و $f(z) = f(g(x)) = f\circ g(x) = id_B(x) = x$ پس

$f: A \to B$ پوشا است.

"$\Longleftarrow$" فرض کنید $f: \tilde{A} \to B$ پوشا باشد، پس به ازای هر $y \in B$، $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ و

$\tilde{A} = \{f^{-1}(y) : y \in B\}$ مجموعه‌ای از مجموعه‌های ناتهی است، پس بنابر اصل انتخاب

$\varphi : \tilde{A} \longrightarrow \bigcup\tilde{A} \subseteq A$ چنان موجود است که به ازای هر $D \in \tilde{A}$، $\varphi(D) \in D$ یعنی

به ازای هر $y \in B$، $\varphi(f^{-1}(y)) \in f^{-1}(y) (\subseteq A)$. تابع $g: B \longrightarrow A$ را در نظر بگیرید،
$y \longmapsto \varphi(f^{-1}(y))$

به ازای هر $y \in B$، $g(y) = \varphi(f^{-1}(y)) \in f^{-1}(y)$ بنابراین $(f\circ g)(y) = f(g(y)) = y = id_B(y)$

درنتیجه دو تابع $f\circ g : B \to B$ و id_B درشرط $\forall y \in B \quad (f\circ g)(y) = id_B(y)$

صدق می‌کنند پس $id_B = f\circ g$

هرگاه $(A, \leqslant)$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب باشد و $B \subseteq A$ و $p \in A$ گوئیم:

$\leqslant$ یک رابطه انعکاسی، پادمتقارن و ترایایی روی A است

الف) $p \in A$ یک کران بالای B است هرگاه $\quad x \leqslant B \quad \forall x \in B$

ب) $p \in A$ کوچکترین کران بالای B است هرگاه

i) p کران بالای B باشد

ii) اگر q نیز کران بالای B باشد، آنگاه $\quad p \leqslant q$

توجه کنید کوچکترین کران بالای B در A، درصورت وجود منحصر به فرد است چون اگر q_1, q_2 هردو کوچکترین کران بالای B باشند، آنگاه چون q_1 کران بالای B است و q_2 کوچکترین کران بالای است پس $q_2 \leqslant q_1$، چون q_2 کران بالای B است و q_1 کوچکترین کران بالای B است پس $q_1 \leqslant q_2$.
چون $q_2 \leqslant q_1$ و $q_1 \leqslant q_2$ و رابطه $\leqslant$ پادمتقارن است پس $q_1 = q_2$.

کوچکترین کران بالای B در A را با $\sup B$ (یا $\underset{(A,\leqslant)}{\sup B}$) نمایش می‌دهیم.

ج) $p \in B$ را عضو ماکسیمم B نامیم اگر به ازای هر $x \in B$، $x \leqslant p$. بخصوص در این حالت $p = \sup B$ و در نتیجه منحصر به فرد است. عضو ماکسیمم B درصورت وجود را با $\max B$ $(\max B)$ نمایش می‌دهیم.

د) $p \in B$ را یک عضو ماکسیمال B نامیم اگر $\quad \forall x \in B \quad (p \leqslant x \Rightarrow x = p)$

الفَ) $p \in A$ را یک کران پایین B نامیم اگر به ازای هر $x \in B$ ، $\quad p \leqslant x$

ب) $p\in A$ را بزرگترین کران پایین B نامیم اگر کران پایین B باشد و به ازای هر کران پایین B مانند q داشته باشیم $q\leqslant p$ ، بزرگترین کران پایین B در A درصورت وجود منحصربه‌فرد است و آن را با $\inf B$ (یا $\inf\limits_{(A,\leqslant)} B$) نمایش می‌دهیم.

ج) $p\in B$ را عضو مینیمم B نامیم اگر به ازای هر $x\in B$، $p\leqslant x$.

عضو مینیمم B درصورت وجود منحصربه‌فرد است و آن را با $\min B$ نمایش می‌دهیم.

د) $p\in B$ را یک عضو مینیمال B نامیم اگر $\forall x\in B\ (x\leqslant p \Longrightarrow x=p)$

مجموعه جزئاً مرتب $(A,\leqslant)$ را کلاً مرتب نامیم اگر $\forall x,y\in A \quad x\leqslant y \ \vee\ y\leqslant x$

در مجموعه جزئاً مرتب $(A,\leqslant)$ اگر $D\subseteq A$ ، $\leqslant_D = \leqslant \cap (D\times D)$ را رابطه ترتیب القائی از A بر D نامیم (بررسی کنید $(D,\leqslant_D)$ نیز جزئاً مرتب است)

$D\subseteq A$ را یک زنجیر در $(A,\leqslant)$ نامیم هرگاه $\forall x,y\in D \quad x\leqslant y \ \vee\ y\leqslant x$

chain

(به بیان دیگر $(D,\leqslant_D)$ کلاً مرتب باشد)

مثال: هرگاه X مجموعه دلخواه باشد $(P(x),\subseteq)$ جزئاً مرتب است.

مثال: $X=\mathbb{R},\ Y=(-\infty,1)\cup(2,+\infty),\ Z=(-\infty,1)$

همگی با رابطه ترتیب معمولی القا شده از $\mathbb{R}$.

$[1,+\infty) =$ خانواده کران های بالای Z در $X=\mathbb{R}$

$(2,+\infty) =$ خانواده کرانهای بالای Z در Y

$\sup_{\mathbb{R}} Z = 1$ اما Z در Y فاقد سوپرمم است.

مثال: $A=\{\emptyset,\{1\},\{2\}\}$ در $(P(\{1,2\}),\subseteq)$

$$\sup_{(P(\{1,2\}),\subseteq)} A=\{1,2\}\quad,\quad \inf_{(P(\{1,2\}),\subseteq)} A=\emptyset$$

$\{1\}$ و $\{2\}$ در $(A,\subseteq)$ ماکسیمال هستند.

مثال: $A=:\{\{1\},\{2\},\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,3,4\},\dots\}$

در $(P(\mathbb{N}),\subseteq)$ دارای دو مینیمال $\{1\}$ و $\{2\}$ است و فاقد ماکسیمال است

$\{\{1\},\{2,4,6,8,\dots\},\{1,2,3,4\},\{1,2,3,4,5,6,8,10,12,14,\dots\},$
$\{1,2,3,4,5,6,7,8,10,12,14,\dots\},\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,14,\dots\}$
$,\dots\}$

در $(P(\mathbb{N}),\subseteq)$ دارای دو مینیمال $\{1\}$ و $\{2,4,6,8,\dots\}$ است و فاقد ماکسیمال است.

$$\{1\}\subseteq\{1,2,3,4\}\subseteq\{1,2,3,4,5,6,8,10,\dots\}\subseteq\dots$$

$$\{2,4,6,8,\dots\}\subseteq$$

مثال: $A = \{\{n\in\mathbb{Z} : n<k\} : k\in\mathbb{Z}\}$

در $P(\mathbb{Z}, \subseteq)$ فاقد عضو مینیمال یا ماکسیمال است.

$$\{n\in\mathbb{Z} : n< k+1\} \underset{\neq}{\subseteq} \{n\in\mathbb{Z} : n\leqslant k\} \underset{\neq}{\subseteq} \{n\in\mathbb{Z} : n\leqslant k-1\}$$

تعریف: مجموعه جزئاً مرتب $(A, \leqslant)$ را خوش ترتیب نامیم اگر به ازای هر مجموعه ناتهی A مانند D، $\min(D)$ موجود باشد (هر زیرمجموعه ناتهی $(A, \leqslant)$ دارای کوچکترین عضو باشد)

توجه: هر مجموعه خوش ترتیب کلاً مرتب است. زیرا اگر $(A, \leqslant)$ خوش ترتیب باشد و $x, y\in A$ آنگاه $\phi\neq\{x, y\}\subseteq A$ پس $\{x, y\}$ دارای عضو مینیمال مانند $P\in\{x,y\}$ بنابراین $P=y$ یا $P=x$. فرض کنید $P=X$ چون $P=\min\{x,y\}$ پس $x=P\leqslant y$.

در فصل آینده خواهیم دید عبارات زیر معادلند:

الف) اصل انتخاب: اگر A خانواده‌ای ناتهی از مجموعه‌های ناتهی باشد آنگاه تابع انتخاب $f: A\longrightarrow A$ چنان موجود است که $\forall D\in A \quad f(D)\in D$

ب) لم زرن: اگر $(A, \leqslant)$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب باشد که هر زنجیر در آن دارای کران بالا است، آنگاه $(A, \leqslant)$ دارای عضو ماکسیمال است

ج) اصل ماکسیمالیتی هاوسدورف: هر مجموعه جزئاً مرتب دارای زنجیر ماکسیمال است
(Hausdorff maximality principle)

(یعنی اگر $(A, \leqslant)$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب باشد دارای زنجیری مثل M است که به ازای هر زنجیر در A مانند L باشرط $M\subseteq L$ داریم $M=L$)

د) اصل خوش ترتیبی: هر مجموعه خوش ترتیب شدنی است یعنی به ازای هر مجموعه A، رابطه‌ی $\leqslant$ روی A چنان موجود است که $(A, \leqslant)$ خوش ترتیب است.