

جامعة حلوان

عمل ١ زر فصل ٥

١

$$\begin{aligned}
 p \wedge (p \rightarrow q) &\equiv p \wedge (\neg p \vee q) \\
 &\equiv (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \quad \text{توزيع بذري} \\
 &\equiv c \vee (p \wedge q) \\
 &\equiv p \wedge q \\
 \Rightarrow q & \quad \text{حذف عاطف}
 \end{aligned}$$

٢

$$\begin{aligned}
 \neg q \wedge (p \rightarrow q) &\equiv \neg q \wedge (\neg p \vee q) \\
 &\equiv (\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q) \quad \text{توزيع بذري} \\
 &\equiv (\neg q \wedge \neg p) \vee c \\
 &\equiv \neg q \wedge \neg p \\
 \equiv \neg p & \quad \text{حذف عاطف}
 \end{aligned}$$

٤

$$P \rightarrow q \equiv \neg P \vee q$$

$$\equiv \neg (\neg (\neg P \vee q))$$

نفي مضاف

$$\equiv \neg (\neg (\rightarrow P) \wedge \neg q)$$

دموركان

$$\equiv \neg (P \wedge \neg q)$$

نفي مضاف

$$\equiv \neg (P \wedge \neg q) \vee C$$

$$\equiv P \wedge \neg q \rightarrow C$$

٥

$$(P \vee q \vee r) \wedge \neg r \wedge \neg q \equiv (P \vee q \vee r) \wedge \neg (q \vee r)$$

دموركان

$$\equiv (P \vee (q \vee r)) \wedge \neg (q \vee r)$$

سلسلة بغيري

$$\equiv (P \wedge \neg (q \vee r)) \vee ((q \vee r) \wedge \neg (q \vee r))$$

توزيع بغيري

$$\equiv (P \wedge \neg (q \vee r)) \vee C$$

$$\equiv P \wedge \neg (q \vee r)$$

$$\Rightarrow P$$

حذف عاطف

٦

$$C \rightarrow P \equiv \neg C \vee P$$

$$\equiv t \vee P$$

$$\equiv t$$

٤

$$p \rightarrow p \wedge q \equiv \neg p \vee (p \wedge q)$$

$$\equiv (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q)$$

تَوْزِيع بَعْدَ تَرْكِي

$$\equiv t \wedge (\neg p \vee q)$$

$$\equiv \neg p \vee q$$

$$\equiv p \rightarrow q$$

٥

$$(p \vee q) \rightarrow q \equiv \neg(p \vee q) \vee q$$

$$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee q$$

دَمُورَكَان

$$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)$$

تَوْزِيع بَعْدَ تَرْكِي

$$\equiv (\neg p \vee q) \wedge t$$

$$\equiv \neg p \vee q$$

$$\equiv p \rightarrow q$$

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$	-1
True	True	False	True	True	
True	False	False	True	False	
False	True	True	True	True	
False	False	True	True	False	

↑ ↑
 \equiv

٩

$$\begin{aligned}
 (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) &\equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \\
 &\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r \quad \text{توزيع بعدي} \\
 &\equiv \neg(p \vee q) \vee r \quad \text{دوريان} \\
 &\equiv p \vee q \rightarrow r
 \end{aligned}$$

١٠

$$\begin{aligned}
 (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \\
 &\equiv \neg p \vee (q \wedge r) \quad \text{توزيع بعدي} \\
 &\equiv p \rightarrow q \wedge r
 \end{aligned}$$

١١

$$\begin{aligned}
 (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q) &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \\
 &\equiv \neg p \vee (q \wedge \neg q) \quad \text{توزيع بعدي} \\
 &\equiv \neg p \vee c \\
 &\equiv \neg p
 \end{aligned}$$

١٤

$$\begin{aligned}
 (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r) &\equiv (\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee r) \\
 &\equiv \neg p \vee (q \vee \neg q) \vee r \\
 &\equiv \neg p \vee t \vee r \\
 &\equiv t
 \end{aligned}$$

سریع تر

١٥

$$\begin{aligned}
 (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) &\equiv (\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee r) \\
 &\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee r \quad \text{سریع نہیں، جای بجا یہ خود طاقتی} \\
 &\equiv \neg(p \wedge q) \vee r \quad \text{دموگان} \\
 &\equiv p \wedge q \rightarrow r
 \end{aligned}$$

١٦

$$\begin{aligned}
 (p \rightarrow q) \wedge (p \vee q) &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee q) \\
 &\equiv (\neg p \wedge p) \vee q \quad \text{توزيع نہیں} \\
 &\equiv c \vee q \\
 &\equiv q
 \end{aligned}$$

١٤

$$\begin{aligned}
 p \rightarrow (q \wedge r) &\equiv (p \rightarrow q \wedge r) \wedge t \\
 &\equiv (p \rightarrow q \wedge r) \wedge (q \wedge r \rightarrow r) \quad \text{حذف عاطف} \\
 &\equiv p \rightarrow r \quad \text{تَعْدِي}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p \rightarrow (q \wedge r) &\equiv \neg p \vee (q \wedge r) \quad \text{روضه دوم:} \\
 &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \quad \text{توزيع بذری} \\
 &\equiv \neg p \vee r \quad \text{حذف عاطف} \\
 &\equiv p \rightarrow r
 \end{aligned}$$

١٥

$$\begin{aligned}
 (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \wedge (p \rightarrow q) & \\
 &\equiv p \rightarrow ((q \rightarrow r) \wedge q) \quad \text{نَزَّلَ} \\
 &\equiv (p \rightarrow ((q \rightarrow r) \wedge q)) \wedge t \\
 &\equiv (p \rightarrow ((q \rightarrow r) \wedge q)) \wedge ((q \rightarrow r) \wedge q \rightarrow r) \quad \text{قياس استنباط} \\
 &\Rightarrow (p \rightarrow r) \quad \text{و تَعْدِي}
 \end{aligned}$$

٤٤

$$\begin{aligned}
 (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge p &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge p \\
 &\equiv (\neg p \vee q) \wedge p \wedge (\neg q \vee r) && \text{جابه جایی} \\
 &\equiv ((\neg p \wedge p) \vee (q \wedge p)) \wedge (\neg q \vee r) && \text{توزيع بذیری و سرکل بذیری} \\
 &\equiv (c \vee (q \wedge p)) \wedge (\neg q \vee r) \\
 &\equiv q \wedge p \wedge (\neg q \vee r) \\
 &\equiv p \wedge q \wedge (\neg q \vee r) && \text{جابه جایی} \\
 &\equiv p \wedge ((q \wedge \neg q) \vee (q \wedge r)) && \text{توزيع بذیری و سرکل بذیری} \\
 &\equiv p \wedge (c \vee (q \wedge r)) \\
 &\equiv p \wedge (q \wedge r) \\
 &\equiv (p \wedge q) \wedge r && \text{سرکل بذیری} \\
 &\equiv r && \text{حذف عاطف}
 \end{aligned}$$

٤٥

$$\begin{aligned}
 ((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)) \wedge p &\\
 &\equiv (\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee r) \wedge p \\
 &\equiv (\neg p \vee q \vee r) \wedge p && \text{جابه جایی و خود توانی} \\
 &\equiv (\neg p \wedge p) \vee ((q \vee r) \wedge p) && \text{توزيع بذیری} \\
 &\equiv c \vee ((q \vee r) \wedge p) \\
 &\equiv (q \vee r) \wedge p \\
 \Rightarrow q \vee r && \text{حذف عاطف}
 \end{aligned}$$

١٩

$$\begin{aligned}
 & (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge p \\
 & \equiv (p \rightarrow (q \wedge r)) \wedge p \\
 & \equiv q \wedge r
 \end{aligned}$$

تمرین ۱۰
مثال استنباطی (تمرین)

٢٥

صورت مسئله:

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (\neg q \vee \neg s) \Rightarrow \neg p \vee \neg r$$

این مسئله را ترجیح دادم به کلک برها درست حل کنم.

$$p \rightarrow q$$

۱- فرض

$$r \rightarrow s$$

۲- فرض

$$\neg q \vee \neg s$$

۳- فرض

$$q \rightarrow \neg s$$

۴- بنابر (۳)

$$p \rightarrow \neg s$$

۵- بنابر (۱) و (۴) و تحدی

$$\neg s \rightarrow \neg r$$

۶- عکس نقض

$$p \rightarrow \neg r$$

۷- (۵) و تحدی

$$\neg p \vee \neg r$$

-۸- بنابر (۷)

مسئله صورت مسئله

$p \rightarrow q$ $r \rightarrow s$ $\neg q \vee \neg s$ <hr/> $\therefore \neg p \vee \neg r$

فصل ١ زیرفصل ٧

١)

$$P \vee q \rightarrow r \wedge s$$

١- فرض

$$\neg r$$

٢- فرض

$$\neg r \vee \neg s$$

٣- (٢) و ادخار فاصل

$$\neg(r \wedge s)$$

٤- (٣) و دمورگان

$$\neg(P \vee q)$$

٥- (٤) و تقاض دفع

$$\neg P \wedge \neg q$$

٦- (٥) و دمورگان

$$\neg q$$

٧- (٦) و حذف عاطف

$$P \vee q \rightarrow r \wedge s$$

$$\underline{\neg r}$$

$$\therefore \quad \neg q$$

٨

$$P \wedge q \rightarrow r$$

١- فرض

$$(P \rightarrow r) \rightarrow s$$

٢- فرض

$$\neg q \vee u$$

٣- فرض

$$q \wedge p \rightarrow r$$

٤- (١) و جای جایی

$$q \rightarrow (P \rightarrow r)$$

٥- (٤) و تکلیل دو مقدم

- $q \rightarrow s$ - ٤ و تَعْدِي (٣) و (٥)
- $\neg q \vee s$ - ٧ بنا بر (٤)
- $(\neg q \vee s) \wedge (\neg q \vee u)$ - ٨ بنا بر (٧) و (٣)
- $\neg q \vee (s \wedge u)$ - ٩ و تَعْزِيز بِذِرْيَة (٨)
- $q \rightarrow (s \wedge u)$ - ١٠ بنا بر (٩)

$$p \wedge q \rightarrow r$$

$$(p \rightarrow r) \rightarrow s$$

$$\neg q \vee u$$

$$\therefore q \rightarrow s \wedge u$$

٢)

- ١- فرض $p \wedge (q \vee s)$
- ٢- فرض $p \rightarrow (s \rightarrow u)$
- ٣- فرض $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
- ٤- فرض $\neg r$
- $p \wedge s \rightarrow u$ - ٥ و تَفْلِيك دو مَعْدُوم (٣)
- $p \wedge q \rightarrow r$ - ٦ و تَفْلِيك دو مَعْدُوم (٤)
- $(p \wedge q) \vee (p \wedge s)$ - ٧ و تَعْزِيز بِذِرْيَة (١)

$$(p \wedge q \rightarrow r) \wedge (p \wedge s \rightarrow u)$$

(٤) و (٥) -١

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge s) \rightarrow r \vee u$$

-٩ و قياس ذو الوجهين موجب

$$r \vee u$$

-١٠ و قياس استئنافي

$$u$$

-١١ و رفع مؤلف

$$p \wedge (q \vee s)$$

$$p \rightarrow (s \rightarrow u)$$

$$p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

$$\neg r$$

$$\therefore u$$

طريق تأكيد:

$$(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$$

رفع مؤلف

٤

$$\neg p \wedge s \wedge \neg (\neg p \wedge q)$$

- فرض

$$p \vee q \vee (r \wedge s)$$

- فرض

$$\neg p \wedge s$$

- (١) و حذف عاطف

$$\neg p$$

- (٢) و حذف عاطف

$$p \vee (q \vee (r \wedge s))$$

- (٣) و سلسلة بذرئي

$$q \vee (r \wedge s)$$

- (٤) و (٥) و رفع مولفه

$$(q \vee r) \wedge (q \vee s)$$

- (٦) و توزيع بذرئي

$$q \vee r$$

- (٧) و حذف عاطف

$$\neg p \wedge (q \vee r)$$

- (٨) و (٩)

$$(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$$

- (٩) و توزيع بذرئي

$$(\neg p \wedge s) \wedge \neg (\neg p \wedge q)$$

- (١٠) و سلسلة بذرئي

$$\neg (\neg p \wedge q)$$

- (١١) و حذف عاطف

$$\neg p \wedge r$$

- (١٢) و (١٣) و رفع مولفه

$$\neg p \wedge s \wedge \neg (\neg p \wedge q)$$

$$p \vee q \vee (r \wedge s)$$

::

$$\neg p \wedge r$$

ω_1

$$A \vee (B \wedge C)$$

١ - فرض

$$B \rightarrow D$$

٢ - فرض

$$C \rightarrow E$$

٣ - فرض

$$D \wedge E \rightarrow F$$

٤ - فرض

$$\neg A$$

٥ - فرض

$$B \wedge C$$

٦ - (١) و (٥) و رفع مولفه

$$B$$

٧ - (٤) و حذف عاطف

$$C$$

٨ - (٤) و حذف عاطف

$$D$$

٩ - (٢) و (٧) و قياس استئناف

$$E$$

١٠ - (١) و (٣) و قياس استئناف

$$D \wedge E$$

١١ - (٥) و (٩)

$$F$$

١٢ - (١) و (٤) و قياس استئناف

$$A \vee (B \wedge C)$$

$$B \rightarrow D$$

$$C \rightarrow E$$

$$D \wedge E \rightarrow F$$

$$\neg A$$

 \therefore

F

٩،

$$B \vee (C \rightarrow E)$$

١ - فرض

$$B \rightarrow D$$

٢ - فرض

$$\neg D \rightarrow (E \rightarrow A)$$

٣ - فرض

$$\neg D$$

٤ - فرض

$$\neg B$$

ـ ٥ دفع و $\neg C$ و $\neg B$ و $\neg D$

$$C \rightarrow E$$

ـ ٦ و $\neg C$ و $\neg B$ و $\neg D$ و $\neg E$ و رفع مؤلفه

$$E \rightarrow A$$

ـ ٧ و $\neg C$ و $\neg B$ و $\neg D$ و $\neg E$ و استئناف

$$C \rightarrow A$$

ـ ٨ و $\neg C$ و $\neg B$ و $\neg D$ و $\neg E$ و تبديل

$$B \vee (C \rightarrow E)$$

$$B \rightarrow D$$

$$\neg D \rightarrow (E \rightarrow A)$$

$$\neg D$$

$$\therefore C \rightarrow A$$

\forall

$$(A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow D \wedge E)$$

١ - فرض

$$A \wedge C$$

٢ - فرض

$$A$$

٣ - (٢) و حذف عاطف

$$A \vee B$$

٤ - ك - و ادخال فاصل

$$A \rightarrow D \wedge E$$

٥ - (١) و قياس استدنا

$$D \wedge E$$

٦ - (٣) و قياس استدنا

$$E \vee F$$

٧ - (٤) و حذف عاطف

٨ - (٥) و ادخال فاصل

$$(A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow D \wedge E)$$

$$A \wedge C$$

∴

$$E \vee F$$

$\lambda,$ $A \vee B$

- فرض ۱

 $\neg B \vee C$

- فرض ۲

 $\neg A \rightarrow B$

- بنابر (۱)

 $B \rightarrow C$

- بنابر (۲)

 $\neg A \rightarrow C$

- وَعْدَى (۴) ، (۳)

 $A \vee C$

- بنابر (۵)

 $A \vee B$ $\neg B \vee C$ $\therefore A \vee C$ $\exists,$ $B \vee C \rightarrow B \wedge A$

- فرض ۱

 $\neg B$

- فرض ۲

 $B \wedge A \rightarrow B$ کَنْزَارِه هُمْوَارِه درس

- حذف عاطف ۳

 $B \vee C \rightarrow B$

- وَعْدَى (۱) و (۳) ۴

 $\neg(B \vee C)$

- وَقَاسِي رفع ۵

 $\neg B \wedge \neg C$

- و دُمُرگان ۶

 $\neg C$

- و حذف عاطف ۷

$$B \vee C \rightarrow B \wedge A$$

$$\neg B$$

\therefore

$$\neg C$$

١٥

$$A \wedge B \rightarrow C$$

- فرض ١

$$(A \rightarrow C) \rightarrow D$$

- فرض ٢

$$\neg B \vee E$$

- فرض ٣

$$B \wedge A \rightarrow C$$

- (١) و جابر جابر

$$B \rightarrow (A \rightarrow C)$$

- (٤) د تسلیک دو مقدم

$$B \rightarrow D$$

- (٢) و (٣) وعدی

$$B \rightarrow E$$

- بنابر (٣) - V

$$(B \rightarrow D) \wedge (B \rightarrow E)$$

- بنابر (٤) ، (٥) - I

$$(\neg B \vee D) \wedge (\neg B \vee E)$$

- بنابر (٦)

$$\neg B \vee (D \wedge E)$$

- بنابر (٩) و سلسه بذري

$$B \rightarrow D \wedge E$$

- بنابر (١٠)

$$A \wedge B \rightarrow C$$

$$(A \rightarrow C) \rightarrow D$$

$$\underline{\neg B \vee E}$$

$$\therefore B \rightarrow D \wedge E$$

فصل ۱ زیر فصل ۱

۲ دا

: بمراری روابط زیر باشد $p(n)$ فرض کند $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ از این

$$C(n, k) = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & k = 0, 1, \dots, n \\ 0 & k > n \text{ or } k < 0 \end{cases}$$

در عکس این صورت

۴) به ازای هر $n \geq 1$ فرض کنید $P(n)$ تساوی زیر باشد.

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

در این صورت: (الف) بنابراین $\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$

ب) فرض کنید $m > 1$ در این صورت:

$$P(m) \Rightarrow \sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m+1} k = \sum_{k=1}^m k + (m+1) = \frac{m(m+1)}{2} + (m+1)$$

$$= (m+1) \left(\frac{m}{2} + 1 \right) = (m+1) \left(\frac{m+2}{2} \right) = (m+1) \left(\frac{(m+1)+1}{2} \right)$$

$$= \frac{(m+1)((m+1)+1)}{2}$$

$$\Rightarrow P(m+1)$$

بنابر (الف) و (ب) و اثبات ریاضی، به ازای هر $n \geq 1$ برقرار است.

فرض کنیم $p(n)$ نسبتی زیر باشد $n \geq 1$ برازی و

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

در این صورت:

برقرار است $p(1)$, $\sum_{k=1}^1 k(k+1) = 1 \times 2 = 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}$ (الف)

داریم $m \geq 1$ بازی (ب)

$$p(m) \Rightarrow \sum_{k=1}^m k(k+1) = \frac{m(m+1)(m+2)}{3}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m+1} k(k+1) = \sum_{k=1}^m k(k+1) + (m+1)(m+2)$$

$$= \frac{m(m+1)(m+2)}{3} + (m+1) + (m+2)$$

$$= (m+1)(m+2) \left(\frac{m}{3} + 1 \right) = (m+1)(m+2) \left(\frac{m+3}{3} \right)$$

$$= \frac{(m+1)((m+1)+1)((m+1)+2)}{3}$$

$$\Rightarrow p(m+1)$$

بنابر (الف) و (ب) و استقراء ریاضی، داریم بازی هر $n \geq 1$ برای $p(n)$ معنی:

$$\forall n \geq 1 \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

و بازی از فرض کنند $P(n)$ گزاره زیر باشد: $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

در این صورت: $P(1)$ برقرار است و $\sum_{k=1}^1 k^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$ (الف)

(ب) بازی دریم $m \geq 1$:

$$P(m) \Rightarrow \sum_{k=1}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \sum_{k=1}^m k^2 + (m+1)^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2$$

$$= (m+1) \left(\frac{m(2m+1)}{6} + (m+1) \right) = (m+1) \left(\frac{2m^2 + m + 6m + 6}{6} \right)$$

$$= (m+1) \left(\frac{2m^2 + 7m + 6}{6} \right) = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$$

$$= \frac{(m+1)((m+1)+1)(2(m+1)+1)}{6}$$

$$\Rightarrow P(m+1)$$

$$\sum_{k=1}^n k^r = \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} \quad n > 1 \quad \text{پایبر (الف) و (ب) و استراتژی خن بیازای هر}$$

توجه: تمرین ۶ را به طور مستعiem از (۵) و (۴) هم می‌توان بدست آورد.

$$\sum_{k=1}^n k^r = \frac{n^r (n+1)^r}{4} \quad \begin{array}{l} \text{فرض کند } p(n) \text{ تساوی زیر باشد:} \\ -\text{بازای } 1 > n \end{array}$$

$$\leftarrow \text{برقرار } p(1) \quad \text{و} \quad \sum_{k=1}^1 k^r = 1 = \frac{1^r (1+1)^r}{4} \quad \begin{array}{l} \text{در این صورت:} \\ (\text{الف}) \end{array}$$

(ب) را در نظر بگیرید. داریم:

$$p(m) \Rightarrow \sum_{k=1}^m k^r = \frac{m^r (m+1)^r}{4}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m+1} k^r = \sum_{k=1}^m k^r + (m+1)^r = \frac{m^r (m+1)^r}{4} + (m+1)^r$$

$$= \frac{(m+1)^r}{4} (m^r + 4(m+1)) = \frac{(m+1)^r}{4} (m+r)$$

$$= \frac{(m+1)^r ((m+1)+1)^r}{4}$$

$$\Rightarrow p(m+1)$$

بنابر (الف) و (ب) واصل استقرار، رياضي، به ازاي هر $1 \geq m$ برقرار است و حکم يدسته می آيد.