جلسه شانزدهم

دیدید:

$$\left.\begin{array}{l} X \sim Y \\ Z \sim W \\ X \cap Z = Y \cap W = \phi \end{array}\right\} \Rightarrow X \cup Z \sim Y \cup W$$

$$\left.\begin{array}{l} X \sim Y \\ Z \sim W \end{array}\right\} \Rightarrow X \times Z \sim Y \times W$$

$A^B := \{ f \mid$ تابع است $f : A \to B \}$

$X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$

$X \sim Y \wedge Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$

$X \sim X$

مثال: هرگاه X, Y مجموعه باشند، $f : X \times Y \to Y \times X$ دوسویی است،

$$(s, t) \longmapsto (t, s)$$

پس $X \times Y \sim Y \times X$.

قضیه: اگر $f : A \to B$ و $g : C \to D$ دوسویی باشند، آنگاه $\varphi : A^C \longrightarrow B^D$ دوسویی است.

$$h \longmapsto f \circ h \circ g^{-1}$$

بخصوص اگر $X \sim Y$ و $Z \sim W$ آنگاه $X^Z \sim Y^W$.

برهان: چون $g:C\to D$ دوسویی است پس $g^{-1}:D\to C$ نیز دوسویی است.

اگر $h\in A^C$، آنگاه $f\circ h\circ g^{-1}:D\to B$ تابع است و $f\circ h\circ g^{-1}\in B^D$ نمودار زیر جابه‌جایی است:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "h"'] & D \arrow[l, "g^{-1}"] \arrow[d, "f\circ h\circ g^{-1}"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

و تابع

$$\varphi: A^C \longrightarrow B^D$$
$$k \longmapsto f\circ k\circ g^{-1}$$

خوش‌تعریف است.

اگر $k_1,k_2\in A^C$ داریم:

$$\varphi(k_1)=\varphi(k_2) \Rightarrow f\circ k_1\circ g^{-1}=f\circ k_2\circ g^{-1}$$
$$\Rightarrow f^{-1}\circ f\circ k_1\circ g^{-1}\circ g=f^{-1}\circ f\circ k_2\circ g^{-1}\circ g$$

$f:A\to B$ دوسویی است پس $f^{-1}:B\to A$ تابع است

$$\Rightarrow (f^{-1}\circ f)\circ k_1\circ(g^{-1}\circ g)=(f^{-1}\circ f)\circ k_2\circ(g^{-1}\circ g)$$
$$\Rightarrow id_A\circ k_1\circ id_C=id_A\circ k_2\circ id_C$$

$f^{-1}\circ f=id_A$, $g^{-1}\circ g=id_C$

$$\Rightarrow k_1=k_2$$

پس $\varphi:A^C\to B^D$ یک به یک است.

اگر $P\in B^D$ یعنی $P:D\to B$ تابع است آنگاه با توجه به دوسویی بودن $f:A\to B$، $f^{-1}:B\to A$ نیز تابع است پس $f^{-1}\circ P\circ g:C\longrightarrow A$ تابع است و $f^{-1}\circ P\circ g\in A^C$؛

اما

$$\varphi(f^{-1}\circ P\circ g)=f\circ(f^{-1}\circ P\circ g)\circ g^{-1}=(f\circ f^{-1})\circ P\circ(g\circ g^{-1})$$
$$=id_B\circ P\circ id_D=P$$

پس $\varphi:A^C\to B^D$ پوشا نیز هست، بنابراین دوسویی است.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "p"] & B \arrow[d, bend right, "f^{-1}"'] \\ C \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f^{-1}\circ p\circ g"'] & A \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

قضیه: اگر A,B,C مجموعه باشند به قسمی که $B\cap C=\emptyset$ آنگاه $A^{B\cup C}\sim A^B\times A^C$.

برهان: در مجموعه های A,B,C ، فرض کنید $B\cap C=\emptyset$.

نشان می دهیم $\varphi: A^{B\cup C}\longrightarrow A^B\times A^C$ دو سویی است.

$$f\longmapsto (f\restriction_B, f\restriction_C)$$

برهان: فرض کنید $f,g\in A^{B\cup C}$ و $\varphi(f)=\varphi(g)$ پس $(f\restriction_B, f\restriction_C)=(g\restriction_B, g\restriction_C)$ بنابراین $f\restriction_B=g\restriction_B$ ، $f\restriction_C=g\restriction_C$.

به ازای هر $x\in B\cup C$ حالات زیر را داریم:

حالت اول: $x\in C$. در این صورت $f(x)=f\restriction_C(x)=g\restriction_C(x)=g(x)$.

حالت دوم: $x\in B$. در این صورت $g(x)=g\restriction_B(x)=f\restriction_B(x)=f(x)$.

بنابراین موارد فوق $g(x)=f(x)$ به ازای هر $x\in B\cup C$ و چون $f,g: B\cup C\longrightarrow A$ تابعند داریم $f=g$ بنابراین $\varphi: A^{B\cup C}\longrightarrow A^B\times A^C$ یک به یک است.

فرض کنید $(p,q)\in A^B\times A^C$ پس $p\in A^B$ و $q\in A^C$ یعنی $p: B\to A$ و $q: C\to A$ تابعند.

اما $B\cap C=\emptyset$ پس $p(x)=q(x)$ $\forall x\in \underbrace{B\cap C}_{\emptyset}$

در نتیجه $p\cup q: B\cup C\to \underbrace{A\cup A}_{A}$ تابع است. یعنی $p\cup q\in A^{B\cup C}$.

$$\varphi(p\cup q)=\big((p\cup q)\restriction_B, (p\cup q)\restriction_C\big)\underset{*}{=}(p,q)$$

★ $P: B \to A$ و $(p \cup q)\restriction_B$ تابعند و $(p \cup q)\restriction_B(x) = P(x)$ $\forall x \in B$ به‌طور مشابه

$(p \cup q)\restriction_C = q$

بنابراین $(p,q) \in Im(\varphi)$ و درنتیجه (چون $(p,q) \in A^B \times A^C$ دلخواه بود)

$\varphi: A^{B \cup C} \to A^B \times A^C$ پوشا نیز هست، درنتیجه دوسویی است.

قضیه: اگر A, B, C مجموعه باشند، آنگاه $(A \times B)^C \sim A^C \times B^C$

برهان: $\pi_A: A \times B \to A$, $(x,y) \mapsto x$ و $\pi_B: A \times B \to B$, $(x,y) \mapsto y$ را درنظر بگیرید:

نشان می‌دهیم: $\varphi: (A \times B)^C \longrightarrow A^C \times B^C$, $f \longmapsto (\pi_A \circ f, \pi_B \circ f)$ دوسویی است.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] & A \times B \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] & A \\ & & B \end{tikzcd}$$

اگر $f, g: C \to A \times B$ چنان باشند که $\varphi(f) = \varphi(g)$ آنگاه داریم:

$$\varphi(f) = \varphi(g) \Rightarrow (\pi_A \circ f, \pi_B \circ f) = (\pi_A \circ g, \pi_B \circ g)$$

$$\Rightarrow \pi_A \circ f = \pi_A \circ g \wedge \pi_B \circ f = \pi_B \circ g$$

$$\Rightarrow \forall x \in C \ (\pi_A(f(x)) = \pi_A(g(x)) \wedge \pi_B(f(x)) = \pi_B(g(x)))$$

$$\Rightarrow \forall x \in C \ (\pi_A(f(x)), \pi_B(f(x))) = (\pi_A(g(x)), \pi_B(g(x)))$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \forall x \in C \ f(x) = g(x)$$

دلیل $(*)$: به ازای هر $(z,w) \in A \times B$ داریم $z = \pi_A(z,w), w = \pi_B(z,w)$

پس $(z,w) = (\pi_A(z,w), \pi_B(z,w))$

یعنی به ازای هر $y \in A \times B$ داریم $y = (\pi_A(y), \pi_B(y))$

پس به ازای هر $x\in C$ داریم:

$$f(x)=\left(\pi_A(f(x)),\ \pi_B(f(x))\right)$$

$$g(x)=\left(\pi_A(g(x)),\ \pi_B(g(x))\right)$$

پس یافته‌ایم، $f(x)=g(x)$ به ازای هر $x\in C$ اما $f,g:C\to A\times B$ تابع بودند بنابراین $f=g$

و $\varphi:(A\times B)^C\to A^C\times B^C$ یک به یک است.

حال فرض کنید $(p,q)\in A^C\times B^C$ پس $p:C\to A$ و $q:C\to B$ تابعند.

تابع $h:C\to A\times B$ را در نظر بگیرید. به ازای هر $x\in C$ داریم:

$$x\longmapsto (p(x),q(x))$$

$$(\pi_A\circ h)(x)=\pi_A(h(x))=\pi_A(p(x),q(x))=p(x)$$

پس $\pi_A\circ h=p$ به طور مشابه $\pi_B\circ h=q$.

بنابراین $\varphi(h)=(\pi_A\circ h,\pi_B\circ h)=(p,q)$ و $(p,q)\in Im(\varphi)$ اما $(p,q)\in A^C\times B^C$

دلخواه بود، بنابراین $\varphi:(A\times B)^C\to A^C\times B^C$ پوشا نیز هست و درنتیجه دوسویی است.

قضیه: هرگاه A,B,C مجموعه باشند، آنگاه $(A^B)^C\sim A^{B\times C}$

برهان: فرض کنید A,B,C مجموعه باشند، اگر $f\in(A^B)^C$ آنگاه $f:C\to A^B$ تابع است

پس به ازای هر $c\in C$، $f(c)\in A^B$ و $f(c):B\to A$ تابع است و بنابراین به ازای هر $b\in B$،

$(f(c))(b)\in A$، $f^*:B\times C\longrightarrow A$ تابع است.

$$(b,c)\longmapsto (f(c))(b)$$

نشان می‌دهیم $\varphi:(A^B)^C\longrightarrow A^{B\times C}$ دوسویی است.

$$g\longmapsto g^*$$

فرض کنید $g,h\in(A^B)^C$ داریم:

$$\varphi(g)=\varphi(h)\Rightarrow g^*=h^*$$

$$\Rightarrow \forall (b,c) \in B\times C \qquad g^*(b,c) = h^*(b,c)$$

$$\Rightarrow \forall c\in C \ \ \forall b\in B \qquad \big(g(c)\big)(b) = \big(h(c)\big)(b)$$

$$\Rightarrow \forall c\in C \qquad g(c) = h(c)$$

تابعند $h(c), g(c) : B \to A$

$$\Rightarrow g = h$$

تابعند $g, h : C \to A^B$

پس $\varphi : (A^B)^C \to A^{B\times C}$ یک به یک است.

هرگاه $k \in A^{B\times C}$ پس $k \in B\times C \to A$ تابع است و به ازای هر $(b,c) \in B\times C$ ، $k(b,c) \in A$. به ازای هر $c\in C$ ، $k_c : B \longrightarrow A$ تابع است و $k_c \in A^B$

$$z \longmapsto k(z,c)$$

تابع $\lambda : C \longrightarrow A^B$ را در نظر بگیرید، پس $\lambda \in (A^B)^C$ اما $\varphi(\lambda) \in A^{B\times C}$ ،

$$x \longmapsto k_x$$

به ازای هر $(b,c) \in B\times C$ داریم:

$$\varphi(\lambda)(b,c) = \big(\lambda(c)\big)(b) = k_c(b) = k(b,c)$$

اما $\varphi(\lambda), k : B\times C \to A$ تابعند پس $\varphi(\lambda) = k \to \mathrm{Im}(\varphi)$ و $\varphi : (A^B)^C \longrightarrow A^{B\times C}$

پوشا نیز می باشد و در نتیجه دوسویی است.

مثال: اگر $f : \phi \to A$ تابع باشد، آنگاه $\mathrm{Dom}(f) = \phi$ پس $f = \phi$. بعلاوه به وضوح $\varphi : \phi \to A$ تابع است، پس $A^\phi = \{\phi\}$.

مثال: بنابر مثال قبل $\phi^\phi = \{\phi\}$. از $C \neq \phi$ و $f : C \to \phi$ تابع باشد، آنگاه $f \subseteq C\times\phi = \phi$

پس $f = \phi$ و در این حالت $C = \mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(\phi) = \phi$ که تناقض است پس

$$\phi^D = \begin{cases} \{\phi\} & D = \phi \\ \phi & D \neq \phi \end{cases}$$