جلسه بیستم

دیدید اگر $X_1, X_2, \ldots$ مجموعه‌های شمارا باشند، آنگاه $\bigcup_{n\geq 1} X_n$ نیز شمارا است.

پس اگر $\bigcup_{n\geq 1} Z_n$ ناشمارا باشد، آنگاه $n\geq 1$ چنان موجود است که Z_n ناشمارا است.

دیدید $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{f \mid \underbrace{f: \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}}_{\text{تابع}}\}$، اگر $g: \mathbb{N} \longrightarrow X$, $n \longmapsto x_n$ تابع باشد، آن را یک دنباله

در X می‌نامیم و با $\{x_n\}_{n\geq 1}$ و یا $(x_n)_{n\geq 1}$ و یا $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$، .... نمایش می‌دهیم.

پس $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ خانواده تمام دنباله‌ها با مقادیر در ۰ و ۱ است.

یعنی $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \forall n \quad x_n \in \{0,1\}\}$

مثال: $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ناشمارا است.

برهان: به وضوح $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \neq \emptyset$ اگر $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ شمارا باشد، آنگاه تابع پوشای

$f: \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $k \longmapsto w_k$ موجود است.

فرض کنید $w_k = (x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$

$$w_1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1, \dots)$$
$$w_2 = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, \dots)$$
$$w_3 = (x_1^3, x_2^3, x_3^3, x_4^3, \dots)$$
$$\vdots$$

قرار دهید
$$y_n = \begin{cases} 0 & x_n^n = 1, \\ 1 & x_n^n = 0. \end{cases}$$

بنابراین به ازای هر $n \geq 1$، $y_n \neq x_n^n$ پس
$$y := (y_1, y_2, y_3, \dots) \neq (x_1^n, x_2^n, x_3^n, \dots) = w_n$$
اما $y = (y_1, y_2, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ که با پوشا بودن $f: \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $n \longmapsto w_n$ در تناقض است پس

$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ناشمارا است.

دیدیم اگر A, B داده شده باشند:

$A \cup B$ شمارا است $\Longleftrightarrow$ A, B شمارا است

$A \cup B$ ناشمارا است $\Longleftrightarrow$ A ناشمارا است یا B ناشماراست

اگر $M \subseteq X$، آنگاه $X = (X \setminus M) \cup M$. پس اگر M شمارا باشد داریم:

X شمارا است $\Longleftrightarrow$ $X \setminus M$ شمارا است

X ناشمارا است $\Longleftrightarrow$ $X \setminus M$ ناشمارا است

به طور مشابه دیدید

$A\cup B$ متناهی است $\Longleftrightarrow$ A, B متناهی‌اند

$A\cup B$ نامتناهی است $\Longleftrightarrow$ A نامتناهی است یا B نامتناهی است

اگر $F\subseteq X$ متناهی باشد چون $X=(X\setminus F)\cup F$ پس:

X نامتناهی است $\Longleftrightarrow$ $X\setminus F$ نامتناهی است

قضیه: $(0,1)$ ناشمارا است.

برهان: $f:(0,1)\longrightarrow(0,1)$, $x\longmapsto \frac{x}{2}$ یک به یک است، اما پوشا نیست. پس $(0,1)$ نامتناهی است. اگر $(0,1)$ شمارا باشد، آنگاه شمارای نامتناهی است و $\mathbb{N}\sim(0,1)$ و تابع دوسویی $f:\mathbb{N}\longrightarrow(0,1)$, $n\longmapsto w_n$ موجود است. فرض کنید

$f(n)=w_n=0/x_1^n x_2^n\ldots\ldots$ بسط نامختوم به صفر

w_n برابر $0/x_1^n x_2^n\ldots\ldots$

(مثلاً: $0/316=0/315999\ldots$)

$f(1)=w_1=0/x_1^1 x_2^1 x_3^1\ldots$

$f(2)=w_2=0/x_1^2 x_2^2 x_3^2\ldots$

$f(3)=w_3=0/x_1^3 x_2^3 x_3^3\ldots$

$\vdots$

قرار دهید :
$$y_n=\begin{cases}۵ & x_n^n=۳\\ ۳ & x_n^n\neq ۳\end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\frac{۳}{۱۰}}{1-\frac{1}{۱۰}}=\frac{۳}{۹}=\frac{1}{۳}}$$

در این صورت $\frac{۵}{۹}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{۵}{۱۰^n}\geqslant\sum_{n\geqslant 1}\frac{y_n}{۱۰^n}\geqslant\sum_{n\geqslant 1}\frac{۳}{۱۰^n}=\frac{1}{۳}$

و $\overset{\%y_1y_2y_3\cdots}{\overset{\shortparallel}{y}}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{y_n}{۱۰^n}\in(۰,۱)$ (بنابر آزمون مقایسه $\sum_{n\geqslant 1}\frac{y_n}{۱۰^n}$ همگرا ست)

$$0\leqslant a_n\leqslant b_n\quad\forall n\qquad \sum_{n\geqslant 1}b_n \text{ همگرا}\Longrightarrow\sum_{n\geqslant 1}a_n \text{ همگرا}$$

به ازای هر $n\geqslant 1$، $y_n\neq x_n^n$ پس $\overset{\%y_1y_2\cdots}{\overset{\shortparallel}{y}}\neq\overset{\%x_1^nx_2^nx_3^n\cdots}{\overset{\shortparallel}{w_n}}$ یعنی به ازای هر $n\geqslant 1$،
$y\neq f(n)$ و $f:\mathbb{N}\longrightarrow(۰,۱)$ پوشا نیست و $(۰,۱)$ ناشماراست.

نتیجه : چون $(۰,۱)$ ناشماراست پس هر ابرمجموعه آن از جمله $[۰,۱]$ ، $[۰,۱)$ ، $(۰,۱]$ ، $\mathbb{R}$ ، ناشمارا هستند.

نکته : اگر X نامتناهی باشد و Y شمارا باشد ، نشان می دهیم $X\cup Y\sim X$

برهان : چون Y شماراست ، هر زیرمجموعه آن از جمله $Y\setminus X$ شماراست.
چون X نامتناهی است پس تابع یک به یک $f:\mathbb{N}\to X$ موجود است . بنابراین $f:\mathbb{N}\to f(\mathbb{N})$
دوسویی است و $\mathbb{N}\sim f(\mathbb{N})$. و $f(\mathbb{N})$ شمارای نامتناهی است . چون اجتماع دو مجموعه شمارا ،
شمارا ست پس $f(\mathbb{N})\cup(Y\setminus X)$ شماراست ، چون ابرمجموعه هر مجموعه نامتناهی ، نامتناهی است
و $f(\mathbb{N})$ نامتناهی می باشد پس $f(\mathbb{N})\cup(Y\setminus X)$ نامتناهی است. بنابراین $f(\mathbb{N})\cup(Y\setminus X)$
شمارای نامتناهی است پس $\mathbb{N}\sim f(\mathbb{N})\cup(Y\setminus X)$ $\big(\underbrace{f(\mathbb{N})\sim}_{\text{دانستیم}}\big)$ بنابراین :

$f(\mathbb{N}) \sim f(\mathbb{N}) \cup (Y \setminus X)$

$X \setminus f(\mathbb{N}) \sim X \setminus f(\mathbb{N})$

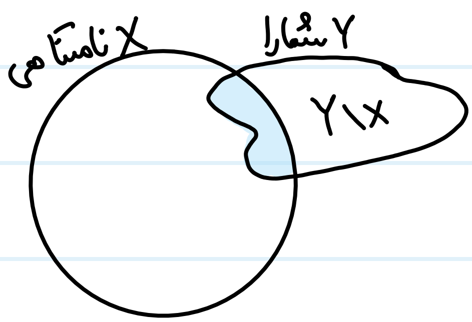
$$(X \setminus f(\mathbb{N})) \cap f(\mathbb{N}) = \phi \underset{\text{چون } f(\mathbb{N}) \subseteq X}{=} (X \setminus f(\mathbb{N})) \cap (f(\mathbb{N}) \cup (Y \setminus X))$$

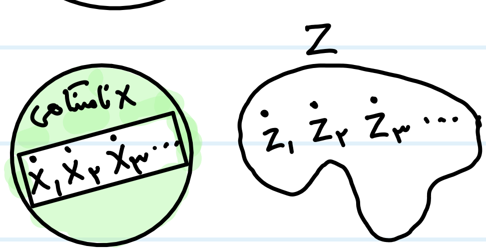
بنابراین

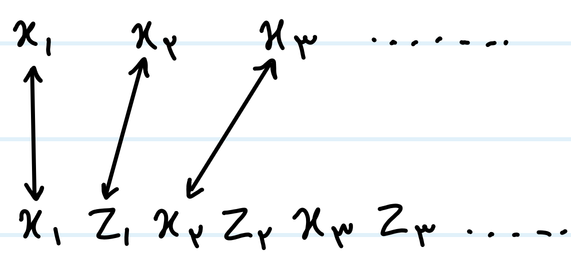
$$\underbrace{(X \setminus f(\mathbb{N})) \cup f(\mathbb{N})}_{X} \sim \underbrace{(X \setminus f(\mathbb{N})) \cup (f(\mathbb{N}) \cup (Y \setminus X))}_{X \cup Y}$$

پس $X \sim X \cup Y$.

به خصوص اگر X نامتناهی و Y متناهی باشد $X \sim X \cup Y$.







$\cancel{x-a}$
$a \to 0$
$b \to 1$
$\lambda x + \theta$
$\lambda a + \theta = 0$
$\lambda b + \theta = 0$
$\lambda = \frac{1}{b-a}$
$\theta = \frac{-a}{b-a}$

به‌خصوص؛ $[0,1] \sim [0,1) \sim (0,1] \sim (0,1)$

اگر $a<b$ آنگاه، $g : [a,b] \longrightarrow [0,1]$ دوسویی است پس

$$x \longmapsto \frac{x-a}{b-a}$$

$[a,b] \sim [0,1]$ و به طور مشابه همگی همتوان $(a,b]$ ، $[a,b)$ ، (a,b) هستند.

$h:(0,1) \longrightarrow (a,+\infty)$ دوسویی است پس $(0,1)\sim(a,+\infty)$ و مجموعه نامتناهی

$t \longmapsto \tan(\frac{\pi}{۲}t)+a$

$(a,+\infty)$ بنابر نکته قبل همتوان $[a,+\infty)$ است.

$h:(0,1) \longrightarrow (-\infty,a)$ دوسویی است پس $(0,1)\sim(-\infty,a)$ با استدلال قبلی همتوان

$t \longmapsto -\tan(\frac{\pi}{۲}t)+a$

$(-\infty,a]$ نیز هست.

$k:(-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ دوسویی است پس $\mathbb{R}\sim(-1,1)\sim(0,1)$

$t \longmapsto \tan(\frac{\pi}{۲}t)$

پس همه زیربازه‌های $\mathbb{R}$ با حداقل ۲ عضو، ازجمله خود $\mathbb{R}$ همتوان $(0,1)$ هستند و ناشمارا می‌باشند.
$\mathbb{R}=(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cup\mathbb{Q}$ ناشمارا است و $\mathbb{Q}$ شمارا ست پس $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ یعنی خانواده اعداد گنگ حقیقی ناشمارا می‌باشد.

اگر $a_0,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{R}$ ، $\{x\in\mathbb{C}: x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0=0\}$ مجموعه‌ای متناهی است. اگر A,B مجموعه‌هایی شمارا باشند، به‌ازای هر $b\in B$ ، $A \longrightarrow A\times\{b\}$ دوسویی است

$x \longmapsto (x,b)$

پس $A\times\{b\}\sim A$ نیز شمارا ست و چون اجتماع شمارای مجموعه‌های شمارا، شمارا است.

پس $A\times B=\bigcup_{b\in B}(A\times\{b\})$ شمارا می‌باشد.

به کمک استقرا، به ازای هر $n\geq 1$ ، اگر $A_1,\dots,A_n$ شمارا باشند، آنگاه $A_1\times\dots\times A_n$ شمارا باشند، آنگاه $A_1\times\dots\times A_n$ نیز شمارا ست. به خصوص $\mathbb{Q}^n$ شمارا است.
و چون اجتماع شمارای مجموعه‌های شمارا، شمارا می‌باشد پس

$$\bigcup_{(a_0,\dots,a_{n-1})\in Q^n} x\in \mathbb{C} : x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$$

شمارا ست. ومجدداً چون اجتماع شمارای مجموعه های شمارا، شمارا است پس

$$\underbrace{A}_{\text{خانواده اعداد جبری}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{(a_0,\dots,a_{n-1})\in Q^n} \{x\in\mathbb{C} : x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0=0\}$$

شمارا ست.

پس $\mathbb{R}\setminus A$ یعنی مجموعه اعداد حقیقی غیر جبری ناشمارا ست.

اگر A, B متناهی باشند، $A\times B$ نیز متناهی است. زیرا اگر $A=\phi$ یا $B=\phi$ آنگاه $A\times B=\phi$ متناهی می باشد. در غیر این صورت $p, q \geqslant 1$ چنان موجود است که $A\sim \mathbb{N}_p$ و $B\sim\mathbb{N}_p$

پس $A\times B\sim\mathbb{N}_p\times\mathbb{N}_q$ اما با فرض $p\leqslant q$، $\varphi:\mathbb{N}_p\times\mathbb{N}_q\to\mathbb{N}_{pq}$ دوسویی است و

$$(i,j)\longmapsto (j-1)p+i$$

$\mathbb{N}_p\times\mathbb{N}_q\sim\mathbb{N}_{pq}$ پس $A\times B\sim\mathbb{N}_{pq}$ و $A\times B$ متناهی است.

به کمک استقراء اگر $X_1,\dots,X_n$ متناهی باشند، آنگاه $X_1\times\dots\times X_n$ نیز متناهی است.