

جلسه دوم

لین دلین - نظر مجموعه‌ها، شرکانشاهی - ترجمه عید رسولیان
میانترم - حل ترمین - حضور و غیاب

گزاره جمله ای است خبری که یا درست و یا نادرست و هر دوی اینها همزمان نیست.
عباراتی نظیر $a \in M$ را یک گزاره اتمی می نامیم.
مهم ترین رابط‌های گزاره‌ای عبارتند از:

۸ - ترکیب عطفی

۷ - ترکیب فعلی

→ - ترکیب شرطی

↔ - ترکیب دوشروطی

~ - نقض

به کمک جداول زیر برای گزاره‌های P و q معرفی می شوند.

<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">q, p ↑ $p \wedge q$</div> <div style="text-align: center;">q, p ↑ $p \vee q$</div> <div style="text-align: center;">$p, q, \neg q, \neg p$ ↑ $p \rightarrow q$</div> <div style="text-align: center;">$p, \neg p, q, \neg q$ ↑ $p \leftrightarrow q$</div> </div>					
P	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن	د	د

نکته: ~ نفاذ و ~ یکسان هستند و هر دو برای نقیض بکار می روند

p	$\neg p$
د	ن
ن	د

اگر P و Q دو گزاره باشند که در تمامی حالات منطقی ارزشی درستی یکسان دارند
ازفاد $P \equiv Q$ (بخوانید P هم ارزش Q استفاده می کنیم.)

گزاره همواره درست را با t نمایش می دهیم

گزاره همواره نادرست را با c نمایش می دهیم و آن را تناقض می نامیم

اگر $P \rightarrow Q \equiv t$ را با $P \Rightarrow Q$ نمایش داده و یک استقرا می نامیم

اگر $P \leftrightarrow Q \equiv t$ را با $P \Leftrightarrow Q$ نمایش داده و آن را هم ارزی می نامیم

{ ابتدا \neg سپس تغییر رابط ها عمل می کنند
ابتدا \wedge, \vee و سپس \rightarrow و \leftrightarrow عمل می کنند }

پس $\neg P \rightarrow Q \vee r$ یعنی $(\neg P) \rightarrow (Q \vee r)$

به کمک جدول درستی هم ارزی های زیر را داریم:

خودتوانی

$$p \vee p \equiv p$$

$$p \wedge p \equiv p$$

-۱

جابجایی

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

-۲

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad \text{توزیع پذیری} \quad , \quad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad -3$$

$$\neg(\neg p) \equiv p \quad \text{نفي مضاعف} \quad -4$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q, \quad \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \quad \text{دمورگان} \quad -5$$

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \quad \text{شرکت پذیری}, \quad p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \quad -6$$

p	$p \vee p$	$p \wedge p$
د	د	د
ن	ن	ن

-1

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	-3
د	د	د	د	د	د	د	د	
د	د	ن	ن	د	د	د	د	
د	ن	د	ن	د	د	د	د	
د	ن	ن	ن	د	د	د	د	
ن	د	د	د	د	د	د	د	
ن	د	ن	ن	ن	د	ن	ن	
ن	ن	د	ن	ن	ن	د	ن	
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	

III

کزاره واقعی : $a \in M$

کزاره مرکب: به کمک گزاره‌های واقعی و یا مرکب رابط‌های گزاره‌ای در یک یا چند مرحله از p_1, \dots, p_n گزاره باشند، تعداد حالات درستی محتمل بین آنها 2^n حالت است

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \quad -7$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \quad -8$$

عکس نقیض $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p \quad -9$

$$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q \quad -10$$

تفکیک دومقدم $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r) \quad -11$

حذف عاطف (قانون امتحان) $p \wedge q \Rightarrow p \quad -12$

ادخال فاصل (قانون جمع) $p \Rightarrow p \vee q \quad -13$

$$p \Leftrightarrow p \quad , \quad p \Rightarrow p \quad -14$$

$$c \Rightarrow p \quad , \quad p \Rightarrow t \quad -15$$

$$p \vee \neg p \equiv t \quad , \quad p \wedge \neg p \equiv c \quad -16$$

$$p \wedge t \equiv p \quad , \quad p \vee t \equiv t \quad , \quad p \vee c \equiv p \quad , \quad p \wedge c \equiv c$$

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$
\neg	\neg	\neg	\neg	\neg
\neg	\neg	\neg	\neg	\neg
\neg	\neg	\neg	\neg	\neg
\neg	\neg	\neg	\neg	\neg

 \neg

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$	-۸
د	د				د	
د	و				و	
و	د				و	
و	و				د	

$$\begin{aligned}
 \neg q \rightarrow \neg p &\equiv (\neg(\neg q)) \vee \neg p && \text{(بنابر ۷)} \\
 &\equiv q \vee \neg p && \text{نفي مضاعف} \\
 &\equiv \neg p \vee q && \text{جابجایی} \\
 &\equiv p \rightarrow q && \text{(بنابر ۷)}
 \end{aligned}$$

-۹

$$\begin{aligned}
 \neg p \leftrightarrow \neg q &\equiv (\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \rightarrow \neg p) && \text{بنابر ۸} \\
 &\equiv (q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q) && \text{عکس نقیض} \\
 &\equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) && \text{جابجایی} \\
 &\equiv p \leftrightarrow q
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p \rightarrow (q \rightarrow r) &\equiv \neg p \vee (q \rightarrow r) && \text{بنابر ۷} \\
 &\equiv \neg p \vee (\neg q \vee r) && \text{بنابر ۷} \\
 &\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee r && \text{شرکت پذیری} \\
 &\equiv \neg(p \wedge q) \vee r && \text{دمورگان} \\
 &\equiv (p \wedge q) \rightarrow r
 \end{aligned}$$

-۱۱

$$\begin{aligned}
 (p \wedge q) \rightarrow p &\equiv \neg(p \wedge q) \vee p && \text{بنابر ۷} \\
 &\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee p && \text{دورگانه} \\
 &\equiv (\neg q \vee \neg p) \vee p && \text{جابجایی} \\
 &\equiv \neg q \vee (\neg p \vee p) && \text{شرکت پذیری} \\
 &\equiv \neg q \vee t && \text{بنابر ۱۴} \\
 &\equiv t && \text{بنابر ۱۹}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p \rightarrow (p \vee q) &\equiv \neg p \vee (p \vee q) && \text{بنابر ۷} \\
 &\equiv (\neg p \vee p) \vee q && \text{شرکت پذیری} \\
 &\equiv t \vee q && \text{بنابر ۱۴} \\
 &\equiv t && \text{بنابر ۱۴}
 \end{aligned}$$

توجه: همه رابطهای گزاره دوتایی را توسط \sim و \wedge می توان بدست آورد.

$$\begin{aligned}
 p \vee q &\equiv \neg(\neg(p \vee q)) && \text{نفي مضاعف} \\
 &\equiv \neg(\neg p \wedge \neg q) && \text{دورگانه}
 \end{aligned}$$

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \equiv \neg p \vee \neg(\neg q) \equiv \neg(p \wedge \neg q)$$

\downarrow نفی مضاعف \downarrow دورگانه

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv \neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p)$$

\downarrow بنابر ۱۱

۱- نشان دهید هر رابطه گزاره‌ای دوتایی را می‌توان به کمک \wedge ، \neg تولید کرد
فرض کنید $*$ یک رابطه گزاره‌ای دوتایی با جدول درستی زیر باشد

p	q	$p * q$
د	د	α_1
د	ن	α_2
ن	د	α_3
ن	ن	α_4

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \{د, ن\}$$

قرار دهید: $S_1 \equiv p \wedge q$, $S_2 \equiv p \wedge \neg q$

$$S_3 \equiv \neg p \wedge q, S_4 \equiv \neg p \wedge \neg q$$

S_i در سطر i ام جدول درست و در مابقی سطور نادرست است

$$T_i \equiv \begin{cases} S_i & \alpha_i = د \\ \neg S_i & \alpha_i = ن \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$R_1 \equiv T_1 \wedge \neg S_2 \wedge \neg S_3 \wedge \neg S_4$$

$$R_2 \equiv \neg S_1 \wedge T_2 \wedge \neg S_3 \wedge \neg S_4$$

$$R_3 \equiv \neg S_1 \wedge \neg S_2 \wedge T_3 \wedge \neg S_4$$

$$R_4 \equiv \neg S_1 \wedge \neg S_2 \wedge \neg S_3 \wedge T_4$$

R_i در سطر i ام دارای ارزش α_i است و در مابقی سطرها درست می‌باشد.

$$R \equiv R_1 \wedge R_2 \wedge R_3 \wedge R_4$$

درسط نام، ارزش R برابر α است پس

$$p * q \equiv R_1 \wedge R_2 \wedge R_3 \wedge R_4$$

$$\equiv \dots$$

و توسط ترکیب های توانی، نفی و عطفی و p و q حاصل می شود

★ تعریف: اگر $M(p_1, \dots, p_n)$ گزاره بر حسب p_1, \dots, p_n باشد که به کمک جدول زیر

معرفی می شود $\beta_1, \dots, \beta_n \in \{د, ن\}$

نشان دهید M را می توان به کمک رابطهای $\wedge, \sim, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ بدست آورد

p_1	\dots	p_n	$M(p_1, \dots, p_n)$
$\left. \begin{matrix} د \\ د \\ \vdots \\ د \end{matrix} \right\} 2^{n-1}$		$\left. \begin{matrix} د \\ ن \\ د \\ ن \\ \vdots \\ د \\ ن \end{matrix} \right\} 2^{n-1}$	$\left. \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{2^n} \end{matrix} \right\}$