جلسه بیست و یکم

جهت دانستن:

مجموعه A را متعدی نامیم هرگاه $\forall \alpha \in A \quad \alpha \subseteq A$

مجموعه A را اوردینال نامیم هرگاه A و تمامی اعضای A متعدی باشند.

اگر A اوردینال باشد، آنگاه هر $\beta \in A$ نیز اوردینال است.

$\beta \in A \Rightarrow \beta \subseteq A$

$x \in \beta \Rightarrow x \in A$

اگر A اوردینال باشد، آنگاه $A^+ = A \cup \{A\}$ نیز اوردینال است.

اگر A و B دو اوردینال باشند، آنگاه یک و تنها یک حالت زیر اتفاق می افتد:

$A \in B \vee A = B \vee B \in A$

اگر A و B دو اوردینال باشند، گوئیم $A \leqslant B$ هرگاه $A \subseteq B$ و گوئیم $A < B$ اگر $\underbrace{A \subsetneq B}_{A \in B}$.

خانواده تمام اوردینال ها را با ON نمایش می دهیم.

اوردینال A را یک کاردینال نامیم اگر با هیچ اوردینال کوچکتر از خودش هم‌توان نباشد. به ازای هر مجموعه X کاردینال منحصر به فرد A چنان موجود است که $A \sim X$، A را با $card(X)$ نمایش می‌دهیم.

خانواده تمام کاردینال ها را با CN نمایش می‌دهیم.

خانواده تمام کاردینال های نامتناهی را با ICN نمایش می دهیم.

پایان جهت دانستن

بر اساس نحوه ارائه کتاب:

اگر Y و X دو مجموعه باشند، گوییم $card(Y)=card(X)$ اگر $X \sim Y$

$card(\mathbb{N})$ را با $\aleph_0$ نمایش می دهیم.

$card(\mathbb{R})$ را با c نمایش می دهیم

$card(\mathbb{N}_k)$ را با k نمایش می دهیم

$card(\phi)$ برابر 0 است.

$\aleph : ON \longrightarrow ICN$

* اگر $\alpha = card(X)$ و $\beta = card(Y)$ گوییم $\alpha \leqslant \beta$ اگر تابع یک به یک $f: X \to Y$ موجود باشد. به بیان دیگر $Z \subseteq Y$ چنان موجود باشد که $X \sim Z$. توجه کنید اگر $X \sim X'$ و $Y \sim Y'$ و $f: X \to Y$ یک به یک باشد، آنگاه توابع دوسویی $g: X' \to X$ و $h: Y \to Y'$ موجوند، پس $h \circ f \circ g: X' \to Y'$ یک به یک است و $(*)$ خوش تعریف است.

نتیجه:

X شمارا است $\overset{\text{دیدید}}{\Longleftrightarrow}$ $f: X \to \mathbb{N}$ تابع یک به یک موجود است

$\underset{\text{تعریف}}{\Longleftrightarrow}$ $card(X) \leqslant \aleph_0$

X شمارای نامتناهی است $\Longleftrightarrow$ $X \sim \mathbb{N}$

$\Longleftrightarrow$ $card(X) = \aleph_0$

X نامتناهی است $\Longleftrightarrow$ $g: \mathbb{N} \to X$ تابع یک به یک موجود باشد

$\Longleftrightarrow$ $\aleph_0 \leqslant card(X)$

X متناهی است $\Longleftrightarrow (\exists k\in \mathbb{N} \quad X\sim \mathbb{N}_k) \vee X=\emptyset$

$\Longleftrightarrow (\exists k\in \mathbb{N} \quad card(X)=k) \vee card(X)=0$

$\Longleftrightarrow \exists k\in \mathbb{N}\cup\{0\} \quad \vee \quad card(X)=k$

اگر $\alpha = card(X)$, $\beta = card(Y)$ گوییم $\alpha<\beta$ هرگاه $\alpha\leq\beta$ و $\alpha\neq\beta$.

اگر $\alpha = card(X)$ و $\beta = card(Y)$, $X\cap Y=\emptyset$ قرار دهید.

$\alpha+\beta := card(X\cup Y)$

جمع بالا خوش تعریف است، چون به ازای $X\sim X'$ و $Y\sim Y'$ که $X\cap Y = X'\cap Y'=\emptyset$ دیدید $X\cup Y\sim X'\cup Y'$. بعلاوه به ازای هر دو مجموعه C, D داریم $C'=C\times\{0\}\sim C$ و $D'=D\times\{1\}\sim D$ (چون توابع $C\to C'$, $D\to D'$ دوسویی اند)

$x\longmapsto (x,0)$ $\quad$ $x\longmapsto (x,1)$

بعلاوه $C'\cap D'=\emptyset$.

کاردینال ها را اعداد اصلی نیز می نامیم.

اگر $\alpha = card(E)$ و $\beta = card(F)$ آنگاه قرار دهید:

$\alpha\beta := card(E\times F)$

$\alpha^\beta := card(E^F) \rightsquigarrow$ خانواده تمام توابع $g:E\to F$ را با E^F نمایش می دهیم.

ضرب و توان کاردینال ها خوش تعریف است زیرا اگر $E\sim F'$ و $F\sim F'$.

دیدید $E\times F\sim E'\times F'$ و $E^F\sim E'^{F'}$

قضیه. اگر α, β, γ اعداد اصلی باشند، داریم:

الف) جابجایی $\alpha+\beta=\beta+\alpha \ , \ \alpha\beta=\beta\alpha$

ب) شرکت پذیری $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma \ , \ \alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$

ج) توزیع پذیری $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$

د) $\alpha+0=\alpha=\alpha 1$

ه) $\alpha^1=\alpha \ , \ 1^\alpha=1$

و) $0^\alpha=\begin{cases}1 & \alpha=0\\ 0 & \alpha\neq 0\end{cases} \ , \ \alpha^0=1$

ز) $\alpha 0=0$

ح) $\alpha^\beta\alpha^\gamma=\alpha^{(\beta+\gamma)} \ , \ (\alpha^\beta)^\gamma=\alpha^{\beta\gamma}$

$\alpha^\beta\gamma^\beta=(\alpha\gamma)^\beta$

ط) $\alpha\preccurlyeq\beta \Rightarrow \alpha+\gamma\preccurlyeq\beta+\gamma$

ی) $\alpha\preccurlyeq\beta \Rightarrow \alpha\gamma\preccurlyeq\beta\gamma$

ک) $\alpha\preccurlyeq\beta \Rightarrow \alpha^\gamma\preccurlyeq\beta^\gamma$

ل) $\alpha\preccurlyeq\beta \wedge \alpha\neq 0 \Rightarrow \gamma^\alpha\preccurlyeq\gamma^\beta$

برهان. A, B, C را چنان انتخاب کنید که: $\alpha=\mathrm{card}(A), \beta=\mathrm{card}(B), \gamma=\mathrm{card}(C)$

و $A\cap B=A\cap C=B\cap C=\phi$

اگر $\mathrm{card}(X)=\alpha$ ، $\mathrm{card}(Y)=\beta$ ، $\mathrm{card}(Z)=\gamma$ و

$X'=X\times\{0\}, Y'=Y\times\{0\}, Z'=Z\times\{0\}$ آنگاه $X'\sim X$ ، $Y'\sim Y$ ، $Z'\sim Z$

پس $\operatorname{card}(X')=\alpha$ ، $\operatorname{card}(Y')=\beta$ و $\operatorname{card}(Z')=\gamma$

و $X'\cap Y'=X'\cap Z'=Y'\cap Z'=\emptyset$

$$\alpha+\beta=\operatorname{card}(A)+\operatorname{card}(B)\overset{A\cap B=\emptyset}{=}\operatorname{card}(A\cup B)=\operatorname{card}(B\cup A)\overset{B\cap A=\emptyset}{=}\operatorname{card}(B)+\operatorname{card}(A)$$
$$=\beta+\alpha$$

ب)

$f: A\times B\to B\times A$ دوسویی است پس $A\times B\sim B\times A$ بنابراین

$(x,y)\longmapsto(y,x)$

$$\alpha\beta=\operatorname{card}(A\times B)\overset{A\times B\sim B\times A}{=}\operatorname{card}(B\times A)=\beta\alpha$$

$$\alpha+(\beta+\gamma)=\operatorname{card}(A)+(\operatorname{card}(B)+\operatorname{card}(C))\overset{B\cap C=\emptyset}{=}\operatorname{card}(A)+\operatorname{card}(B\cup C)$$
$$=\operatorname{card}(A\cup(B\cup C))=\operatorname{card}((A\cup B)\cup C)=\operatorname{card}(A\cup B)+\operatorname{card}(C)$$

$A\cap(B\cup C)$
$=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
$=\emptyset\cup\emptyset=\emptyset$

$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(A\cap B)$
$=\emptyset\cup\emptyset=\emptyset$

$$=(\operatorname{card}(A)+\operatorname{card}(B))+\operatorname{card}(C))=(\alpha+\beta)+\gamma$$

$A\cap B=\emptyset$

تابع $f: A\times(B\times C)\longrightarrow(A\times B)\times C$ دوسویی است. پس $A\times(B\times C)\sim(A\times B)\times C$

$(x,(y,z))\longmapsto((x,y),z)$

بنابراین:

$$\alpha(\beta\gamma)=\operatorname{card}(A\times(B\times C))=\operatorname{card}((A\times B)\times C)=(\alpha\beta)\gamma$$

ج)

$$\alpha(\beta+\gamma)=\operatorname{card}(A)(\operatorname{card}(B)+\operatorname{card}(C))$$
$$=\operatorname{card}(A)\operatorname{card}(B\cup C)$$

$B\cap C=\emptyset$

$(A\times B)\cap(A\times C)=A\times(B\cap C)=A\times\emptyset=\emptyset$

$$=\operatorname{card}(A\times(B\cup C))=\operatorname{card}((A\times B)\cup(A\times C))=\operatorname{card}(A\times B)+\operatorname{card}(A\times C)=\alpha\beta+\alpha\gamma$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$\alpha + 0 = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(\emptyset) = \mathrm{card}(A \cup \emptyset) = \mathrm{card}(A) = \alpha$$ ۵)

$f: A \to A \times \{1\}$ دوسویی است پس $A \sim A \times \{1\}$ بنابراین

$x \longmapsto (x, 1)$

$$\alpha = \mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(A \times \{1\}) = \mathrm{card}(A)\,\mathrm{card}(\underbrace{\{1\}}_{\mathbb{N}_1}) = \alpha 1$$