جلسه نهم

تمرین‌های زیرفصل ۲ از فصل ۲

۱/

$A = \{x \in \mathbb{N} : x < ۵\} = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$

$B = \{x \in \mathbb{Z} : x^{۲} \leqslant ۲۵\} = \{-۵, -۴, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$

$C = \{x \in \mathbb{Q} : ۱۰x^{۲} + ۳x - ۱ = ۰\} = \{\frac{۱}{۵}, -\frac{۱}{۲}\}$

$۱۰x^{۲} + ۳x - ۱ = (۵x - ۱)(۲x + ۱)$

$D = \{x \in \mathbb{R} : x^{۳} + ۱ = ۰\} = \{-۱\}$

$E = \{x \in \mathbb{R}_{+} : ۴x^{۲} - ۴x - ۱ = ۰\} = \{\frac{۱ + \sqrt{۲}}{۲}\}$

$۴x^{۲} - ۴x - ۱ = (۲x - ۱)^{۲} - ۲ = (۲x - (۱ + \sqrt{۲}))(۲x - (۱ - \sqrt{۲}))$

۲/

$A = \{x \in \mathbb{N} : ۵ < x < ۳\} = \varnothing$

$B = \{x \in \mathbb{Z} : ۲۵ \leqslant x^{۲} < ۳۶\} = \{-۵, ۵\}$

$C = \{x \in \mathbb{Q} : x^{۳} - ۶x^{۲} + ۱۱x - ۶ = ۰\} = \{۱, ۲, ۳\}$

$x^{۳} - ۶x^{۲} + ۱۱x - ۶ = (x^{۳} - ۱) - ۶(x^{۲} - ۱) + ۱۱(x - ۱)$

$= (x - ۱)(x^{۲} + x + ۱ - ۶x - ۶ + ۱۱)$

$= (x - ۱)(x^{۲} - ۵x + ۶) = (x - ۱)(x - ۲)(x - ۳)$

۳

$A = \{۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, \dots\} = \{n^{۲} : n \in \mathbb{N}\}$

$B = \{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, \dots\} = \{۲n : n \in \mathbb{N}\}$

$C = \{۰, \frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, \dots\} = \{\frac{n-۱}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

$D = \{۲, ۹, ۲۸, ۶۵, \dots\} = \{(n+۱)(n^{۲}-n+۱) : n \in \mathbb{N}\}$

$E = \{a, e, i, o, u\} = \{x :$ یک حرف با صدا در الفبای انگلیسی است $x\}$

۴

$A = \{۱, ۲, ۳\} = \{n \in \mathbb{N} : ۱ \leqslant n \leqslant ۳\}$

$B = \{-۱, -\frac{۲}{۳}, -\frac{۱}{۳}, ۰\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : (x+۱)(x+\frac{۲}{۳})(x+\frac{۱}{۳})x = ۰\}$

$= \{-\frac{k}{۳} : ۰ \leqslant k \leqslant ۳ \ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$C = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹, \dots\} = \{۲n-۱ : n \in \mathbb{N}\}$

$D = \{۱-\sqrt{۳}, ۱+\sqrt{۳}\} = \{x \in \mathbb{R} : (x-۱)^{۲} = ۳\}$

۵-

$P(\{x, \{y, z\}\}) = \{\phi, \{x\}, \{\{y, z\}\}, \{x, \{y, z\}\}\}$

چهار عضو دارد

۶- $P(\phi) = \{\phi\}$ ناتهی است و یک عضو ϕ را دارد.

۷- $P(P(\phi)) = P(\{\phi\}) = \{\phi, \{\phi\}\}$ دو عضو دارد.

۸

$P(P(P(\phi))) \underset{\downarrow}{=} P(P(\{\phi\}))$

تمرین ۶

$$= P(\{\phi, \{\phi\}\}) = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$$

تمرین ۷

چهار عضو دارد

۹- فرض کنید E, F دو مجموعه باشند نشان می دهیم:

$$\boxed{P(E) \subseteq P(F) \iff E \subseteq F}$$

" $\Leftarrow$ " ابتدا فرض کنید $E \subseteq F$. به ازای هر T داریم:

$$T \in P(E) \Rightarrow T \subseteq E$$

$$\Rightarrow T \subseteq F$$

می دانیم اگر $K \subseteq M$ و $L \subseteq K$ آنگاه $L \subseteq M$ حال توجه کنید که $E \subseteq F$ ،

$T \subseteq E$ پس $T \subseteq F$

$$\Rightarrow T \in P(F)$$

بنابراین $P(E) \subseteq P(F)$.

" $\Rightarrow$ " حال فرض کنید $P(E) \subseteq P(F)$.

چون $E \subseteq E$ پس $E \in P(E)$

چون $P(E) \subseteq P(F)$ پس $E \in P(F)$ یعنی $E \subseteq F$.

اما حل مساله: چون $A \subseteq A \cup B$ ، $B \subseteq A \cup B$. بنابر مطلب بالا

$P(A) \subseteq P(A \cup B)$ و $P(B) \subseteq P(A \cup B)$ بنابراین

$P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$ همواره برقرار است.

از طرف دیگر

اگر $p(A) \cup p(B) = p(A \cup B)$ ، آنگاه

$$A \cup B \in p(A \cup B) = p(A) \cup p(B)$$

پس $A \cup B \in p(A) \cup p(B)$ یعنی $A \cup B \in p(B)$ یا $A \cup B \in p(A)$.

که نشان می دهد $A \cup B \subseteq B$ یا $A \cup B \subseteq A$.

اما اگر $A \cup B \subseteq B$ چون $A \subseteq A \cup B$ پس $A \subseteq B$.

و اگر $A \cup B \subseteq A$ چون $B \subseteq A \cup B$ پس $B \subseteq A$.

یافته‌ایم:

$$p(A) \cup p(B) = p(A \cup B) \Longrightarrow A \subseteq B \ \vee \ B \subseteq A$$

نشان می دهیم:

$$\boxed{p(A) \cup p(B) = p(A \cup B) \Longleftrightarrow A \subseteq B \ \vee \ B \subseteq A}$$

برهان " $\Longrightarrow$ " را دیدید.

" $\Longleftarrow$ " فرض کنید $A \subseteq B$ ، آنگاه بنابر ابتدای حل مسأله $p(A) \subseteq p(B)$.

چون $A \subseteq B$ پس $A \cup B = B$. چون $p(A) \subseteq p(B)$ پس

$p(A) \cup p(B) = p(B)$ بنابراین $p(A) \cup p(B) = p(B) = p(A \cup B)$.

مثال: به ازای $A = \{1\}$ و $B = \{2\}$ داریم:

$$p(A) \cup p(B) = \{\phi, \{1\}, \{2\}\}$$

$$p(A\cup B)=p(\{1,2\})=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$

و این دو مجموعه در این حالت برابر نیستند.

۱۰- ابتدا نشان می‌دهیم به‌ازای هر مجموعه A, B, C داریم:

$$C\subseteq A\cap B \iff C\subseteq A \wedge C\subseteq B$$

زیرا:

$$C\subseteq A\cap B \equiv \forall x\ (x\in C \rightarrow x\in A\cap B)$$

$$\equiv \forall x\ (x\in C \rightarrow x\in A \wedge x\in B)$$

$$\equiv \forall x\ ((x\in C \rightarrow x\in A)\wedge(x\in C \rightarrow x\in B))$$

$$p\rightarrow q\wedge r \equiv (p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)$$

$$\equiv (\forall x\ (x\in C \rightarrow x\in A))\wedge(\forall x\ (x\in C \rightarrow x\in B))$$

$$\forall x\ (p(x)\wedge q(x)) \equiv (\forall x\ p(x))\wedge(\forall x\ q(x))$$

$$\equiv C\subseteq A \wedge C\subseteq B$$

پس داریم: $\forall C$

$$C\in p(A\cap B) \iff C\subseteq A\cap B$$

$$\iff C\subseteq A \wedge C\subseteq B$$

$$\iff C\in p(A) \wedge C\in p(B)$$

$$\iff C\in p(A)\cap p(B)$$

۱۱- به‌ازای $B\subseteq A$ قرار دهید:

$$p(A:B)=\{X\in p(A) : B\subseteq X\}$$

الف) به ازای $A=\{a,b,c,d,e\}$, $B=\{a,b\}$

داریم:

$$p(A:B)=\{\{a,b\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,b,e\},\{a,b,c,d\},\{a,b,c,e\},\{a,b,d,e\},\{a,b,c,d,e\}\}$$

ب)

$$p(A:\phi)=\{X\in p(A):\phi\subseteq X\}$$
$$=\{X\in p(A):t\}=p(A)$$

به ازای هر مجموعه x، داریم $\phi\subseteq X$

به بیان دیگر:

$\forall x$

$$x\in p(A:\phi)\Longleftrightarrow X\in p(A)\wedge \phi\subseteq X$$
$$\Longleftrightarrow X\in p(A)\wedge t$$
$$\Longleftrightarrow X\in p(A)$$

پس $p(A)=p(A:\phi)$

۱۲- هرگاه A مجموعه ای n عضوی و B زیرمجموعه m عضوی A باشد:

$p(A)$ دارای 2^{n} عضو است

$p(A:B)$ دارای 2^{n-m} عضو است

تمرین های زیرفصل ۳ ازفصل ۲

را

راه اول :

$$A \cup B = B \iff (\forall x \quad x \in A \cup B \leftrightarrow x \in B)$$

$$\iff (\forall x \quad ((x \in A \cup B \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A \cup B)))$$

$$\iff (\forall x \quad ((x \in A \cup B \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A \vee x \in B)))$$

بنا بر ادخال فاصل

$$\iff \forall x \quad ((x \in A \cup B \to x \in B) \wedge t)$$

$p \to p \vee q \equiv t$

$$\iff \forall x \quad (x \in A \cup B \to x \in B)$$

$$\iff \forall x \quad (x \in A \vee x \in B \to x \in B)$$

$$\iff \forall x \quad ((x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in B))$$

$$p \vee q \to r \equiv \neg (p \vee q) \vee r \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r$$

$$\equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$$

$$\iff \forall x \quad ((x \in A \to x \in B) \wedge t)$$

$p \to p \equiv t$

$$\iff \forall x \quad (x \in A \to x \in B)$$

$$\iff A \subseteq B$$

راه دوم :

و یا می‌توانستیم چنین بنویسیم :

*) اگر $A \cup B = B$ ، به‌ازای هر x داریم:

$x \in A \Longrightarrow x \in A \vee x \in B$ (ادخال فاصل)

$\Longrightarrow x \in A \cup B$ تعریف اجتماع

$\Longrightarrow x \in B$ فرض $A \cup B = B$

بنابراین در این حالت $A \subseteq B$.

**) حال فرض کنید $A \subseteq B$. ابتدا نشان دهیم به ازای هر مجموعه F و E ، D ، C داریم:

$$\boxed{C \subseteq E \wedge D \subseteq F \Longrightarrow C \cup D \subseteq E \cup F}$$

زیرا:

$$C \subseteq E \wedge D \subseteq F \Longrightarrow (\forall x\ (x \in C \to x \in E)) \wedge (\forall x\ (x \in D \to x \in F))$$

قیاس ذوالوجهین موجب و... $\Longrightarrow \forall x\ ((x \in C \to x \in E) \wedge (x \in D \to x \in F))$

توضیح شفاهی $\Longrightarrow \forall x\ (x \in C \cup D \to x \in E \cup F)$

$$\Longrightarrow C \cup D \subseteq E \cup F$$

حال اگر $A \subseteq B$ ، چون $B \subseteq B$ پس $A \cup B \subseteq B \cup B = B$

از طرف دیگر $B \subseteq A \cup B$ همواره برقرار است. پس $A \cup B = B$

۴)

ادعای اثبات شده در برهان تمرین بالا

$A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Longrightarrow A \cup B \subseteq C \cup C = C$

$A \subseteq B \wedge A \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq B \cap C$

ادعای اثبات شده در برهان تمرین ۱۰ در زیرفصل ۲ از فصل ۲

۷/

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$

$\Longrightarrow C \subseteq (A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$

$E \subseteq F \cup E$ همواره

$\Longrightarrow C \subseteq A \cap (B \cup C) \subseteq A$

$E \cap F \subseteq E$ همواره

$\Longrightarrow C \subseteq A$

$E \subseteq F \wedge F \subseteq G \Longrightarrow E \subseteq G$

حال فرض کنید $C \subseteq A$. در این صورت:

$(A \cap B) \cup C \overset{\text{توزیع پذیری}}{=} (A \cup C) \cap (B \cup C)$

$= A \cap (B \cup C)$

تمرین 1 و اینکه $C \subseteq A$

۸- در تمرین ۹ زیرفصل ۲ از فصل ۲ حل شد.

۹- ابتدا فرض کنید $A = B$، آنگاه

$A \cap B = A \cap A = A = A \cup A = A \cup B$

حال فرض کنید $A \cap B = A \cup B$ ، در این صورت چون $A \subseteq A \cap B = A \cup B \subseteq B$

پس $A \subseteq B$ و به طور مشابه $B \subseteq A$ که نتیجه می دهد $A = B$.

۱۰ - شمارهٔ ۱۱ را در راه حل دوم تمرین 1 ، حل کردیم.

بنابر ۱۱ ، اگر $A \subseteq B$ ، آنگاه چون همواره $C \subseteq C$ ، پس $A \cup C \subseteq B \cup C$

از طرف دیگر نشان می دهیم

$$\boxed{E \subseteq F \land G \subseteq H \Rightarrow E \cap F \subseteq G \cap H}$$

زیرا:

$$E \subseteq F \land G \subseteq H \Rightarrow (\forall x\, (x \in E \rightarrow x \in F)) \land (\forall x\, (x \in G \rightarrow x \in H))$$

$$\Rightarrow \forall x\, ((x \in E \rightarrow x \in F) \land (x \in G \rightarrow x \in H))$$

$$\Rightarrow \forall x\, (x \in E \land x \in G \rightarrow x \in F \land x \in H)$$

قیاس ذوالوجهین و ....

(توضیح شفاهی)

$$\Rightarrow \forall x\, (x \in E \cap G \rightarrow x \in F \cap H)$$

$$\Rightarrow E \cap G \subseteq F \cap H$$

پس اگر $A \subseteq B$ چون همواره $C \subseteq C$ ، خواهیم داشت

$$A \cap C \subseteq B \cap C$$

۱۲- $\{1,2\}\cup\{1\} = \{1,2\}\cup\{2\}$ درحالیکه $\{1\}\neq\{2\}$.

$\{1,2\}\cap\{1,3\} = \{1,2\}\cap\{1,4\}$ درحالیکه $\{1,3\}\neq\{1,4\}$.

۱۳ و ۱۴- حل به کمک استقراء و تعریفات بالا

تمرین های زیرفصل ۴ از فصل ۲

۱)

$\forall x$

$x\in A\setminus(A\cap B) \Longleftrightarrow x\in A \wedge x\notin A\cap B$ تعریف تفاضل

$\Longleftrightarrow x\in A \wedge \neg(x\in A \wedge x\in B)$ تعریف اشتراک

$\Longleftrightarrow x\in A \wedge (x\notin A \vee x\notin B)$ دمورگان

$\Longleftrightarrow (x\in A \wedge x\notin A)\vee(x\in A \wedge x\notin B)$ توزیع پذیری

$\Longleftrightarrow c \vee (x\in A \wedge x\notin B)$

$p\vee\neg p\equiv c$

$\Longleftrightarrow x\in A \wedge x\notin B$

$c\vee p\equiv p$

$\Longleftrightarrow x\in A\setminus B$ تعریف تفاضل

$A\setminus(A\cap B) = A\setminus B$ بنابراصل گسترش

۳- به‌ازای $A,B \subseteq X$ نشان می‌دهیم

$$A\cap B=\emptyset \iff A\subseteq X\setminus B$$

$$\begin{aligned}
A\cap B=\emptyset &\iff \forall x\in X \quad x\notin A\cap B\\
&\iff \forall x\in X \quad \neg(x\in A \wedge x\in B)\\
&\iff \forall x\in X \quad (x\notin A \vee x\notin B)\\
&\iff \forall x\in X \quad (x\in A \to x\notin B)\\
&\iff \forall x\in X \quad (x\in A \to x\in X\setminus B)\\
&\iff A\subseteq X\setminus B
\end{aligned}$$

۴- به‌ازای $A,B\subseteq X$ داریم:

$$\begin{aligned}
A\cap(X\setminus B)=A &\iff A\cap(X\setminus B)\subseteq A \wedge A\subseteq A\cap(X\setminus B)\\
&\iff t\wedge A\subseteq A\cap(X\setminus B)\\
&\iff A\subseteq A\cap(X\setminus B)\\
&\iff \forall x \quad (x\in A\to x\in A\cap(X\setminus B))\\
&\iff \forall x \quad (\underbrace{x\in A}_{p} \to \underbrace{x\in A}_{p}\wedge \underbrace{x\in X\setminus B}_{q})
\end{aligned}$$

$A\cap C\subseteq A$ همواره درست است

(تعریف اشتراک)

$$\iff \forall x \quad (x\in A\to x\in X\setminus B)$$

$$p\to p\wedge q \equiv \neg p\vee(p\wedge q)\equiv(\neg p\vee p)\wedge(\neg p\vee q)$$

$$\equiv t\wedge(\neg p\vee q)\equiv \neg p\vee q\equiv p\to q$$

$$\Longleftrightarrow A \subseteq X \setminus B$$

$$\Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

بنابر تمرین (۳)

بنابراین $A \cap (X \setminus B) = A \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset$

۵- به ازای $A, B \subseteq X$ داریم:

$\forall x \in X$

$$x \in B \setminus A \Longleftrightarrow x \in B \wedge x \notin A$$

$$\Longleftrightarrow x \in B \wedge x \in X \setminus A$$

$$\Longleftrightarrow x \notin X \setminus B \wedge x \in X \setminus A$$

$$\Longleftrightarrow x \in X \setminus A \wedge x \in X \setminus B$$

$$\Longleftrightarrow x \in (X \setminus A) \setminus (X \setminus B)$$

بنابراین $B \setminus A = (X \setminus A) \setminus (X \setminus B)$

۶- به ازای هر دو مجموعه A, B داریم:

$\forall x$

$$x \in (A \setminus B) \cup B \Longleftrightarrow x \in A \setminus B \vee x \in B$$

$$\Longleftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in B$$

$$\Longleftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \in B)$$

$$\Longleftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge t$$

$$\Longleftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

$$\Longleftrightarrow x \in A \cup B$$

بنابراین (اصل گسترش) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$

پس داریم:

$$(A \setminus B) \cup B = A \Longleftrightarrow A \cup B = A$$

$$\Longleftrightarrow B \subseteq A$$

تمرین 1 از زیرفصل ۳ فصل ۲

۸- $\forall x$

تعریف تفاضل $x \in (A \cup B) \setminus C \Longleftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \notin C$

تعریف اجتماع $\Longleftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C$

توزیع پذیری $\Longleftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C)$

تعریف تفاضل $\Longleftrightarrow x \in A \setminus C \vee x \in B \setminus C$

تعریف اجتماع $\Longleftrightarrow x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

بنابراصل گسترش $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

همچنین داریم:

$\forall x$

تعریف اشتراک $x \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C) \equiv x \in A \setminus C \wedge x \in B \setminus C$

تعریف تفاضل $\equiv (x \in A \wedge x \notin C) \wedge (x \in B \wedge x \notin C)$

شرکت‌پذیری و خود توانی $\equiv x \in A \wedge x \notin C \wedge x \in B$

جابه‌جایی و شرکت پذیری $\equiv (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin C$

تعریف اشتراک $\qquad \equiv x\in A\cap B \;\wedge\; x\notin C$

تعریف تفاضل $\qquad \equiv x\in (A\cap B)\setminus C$

بنابر اصل گسترش، $\qquad (A\setminus C)\cap(B\setminus C) = (A\cap B)\setminus C$

۹و۱۰- (۸) و استقرا، را به کار ببرید.

۱۱- دو مجموعه E و F را مجزا نامیم هرگاه $E\cap F=\emptyset$

disjoint

نکته: دو مجموعه A و B را متمایز نامیم هرگاه $A\neq B$

distinct

توجه کنید که:

$\forall x$

$$x\in A\cap(B\setminus A) \iff x\in A \wedge x\in B\setminus A$$ تعریف اشتراک

$$\iff x\in A \wedge x\in B \wedge x\notin A$$ تعریف تفاضل

$$\iff x\in A \wedge x\notin A \wedge x\in B$$ شرکت‌پذیری و جابه‌جایی

C گزاره همواره نادرست

$$\iff C \wedge x\in B$$

$$\iff C$$

$$\iff x\in\emptyset$$

بنابراین $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ و دو مجموعه A و $B \setminus A$ مجزایند.

بعلاوه بنابر برهان ارائه شده در حل تمرین ۶،

$$(A \setminus B) \cup B = A \cup B = (B \setminus A) \cup A$$

بنابراین $A \cup B$ را می‌توان به‌صورت اجتماع دو مجموعهٔ مجزای A و $B \setminus A$ بنویسیم.

۱۳- ابتدا توجه کنید که $\boxed{A - B = \emptyset \Longleftrightarrow A \subseteq B}$

زیرا:

$$A \setminus B = \emptyset \Longleftrightarrow \forall x \quad x \notin A \setminus B$$

تعریف تفاضل $\Longleftrightarrow \forall x \quad \neg (x \in A \wedge x \notin B)$

دمورگان $\Longleftrightarrow \forall x \quad (x \notin A \vee x \in B)$

$$\Longleftrightarrow \forall x \quad (x \in A \longrightarrow x \in B)$$

$$\Longleftrightarrow A \subseteq B$$

حال فرض کنید $A \setminus B = B \setminus A$ نشان می‌دهیم $A = B$

زیرا: $\forall x$

$$A \setminus B = B \setminus A \Longrightarrow (A \setminus B) \cup B = (B \setminus A) \cup B$$

$$\Longrightarrow A \cup B = (B \setminus A) \cup B$$

بنابر حل تمرین ۶، $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$

$$\Longrightarrow A \cup B = B$$

$B \setminus A \subseteq B$

بنابر تمرین 1 از زیرفصل ۳ فصل ۲ هرگاه $C \subseteq D$ آنگاه $C \cup D = D$

$\Longrightarrow A \subseteq B$

بنابر تمرین 1 از زیرفصل ۳ فصل ۲ هرگاه $C \cup D = C$، آنگاه $D \subseteq C$. البته به‌طور مستقیم هم می‌توان نوشت که $D \subseteq C \cup D$ پس اگر $C \cup D = C$، آنگاه $D \subseteq C$

بنابراین $A \subseteq B$. به‌طور مشابه $B \subseteq A$، بنابراین $A = B$.

۱۴- به‌ازای هر x داریم:

$x \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$

$\Longleftrightarrow x \in A \setminus C \wedge x \notin B \setminus C$ تعریف تفاضل

$\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \notin C \wedge \neg(x \in B \wedge x \notin C)$ تعریف تفاضل

$\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \notin C \wedge (x \notin B \vee x \in C)$ دمورگان

$\Longleftrightarrow x \in A \wedge ((x \notin C \wedge x \notin B) \vee (x \notin C \wedge x \in C))$ توزیع‌پذیری

$\Longleftrightarrow x \in A \wedge ((x \notin C \wedge x \notin B) \vee \underset{\text{گزاره همواره نادرست}}{\underline{C}})$

$\Longleftrightarrow x \in A \wedge (x \notin C \wedge x \notin B)$

$\Longleftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C$ جابه‌جایی و شرکت‌پذیری

$\Longleftrightarrow x \in A \setminus B \wedge x \notin C$ تعریف تفاضل

$\Longleftrightarrow x \in (A \setminus B) \setminus C$ تعریف تفاضل

بنابر اصل گسترش

۱۵- به ازای هر x داریم:

$$x\in (A\setminus B)\setminus C \iff x\in A\setminus B \wedge x\notin C$$ تعریف تفاضل

$$\iff x\in A \wedge x\notin B \wedge x\notin C$$ تعریف تفاضل

$$\iff x\in A \wedge \neg(x\in B \vee x\in C)$$ دمورگان

$$\iff x\in A \wedge \neg(x\in B\cup C)$$ تعریف اجتماع

$$\iff x\in A \wedge x\notin B\cup C$$

$$\iff x\in A\setminus(B\cup C)$$

بنابر اصل گسترش $$(A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\cup C)$$

۱۶-

$$A\cap B' = \emptyset = B\cap A' \iff A\setminus B = \emptyset = B\setminus A$$

تمرین ۱۳ $$\iff A=B \wedge A\setminus B = B\setminus A = \emptyset$$

$$\iff A = B$$

۱۷- هرگاه $B=\{2\}$ و $A=\{1\}$ و $X=\{1,2\}$، آنگاه

$$(X\setminus A)\cap(X\setminus B) = \{2\}\cap\{1\} = \emptyset$$

$$\neq$$

$$X\setminus(A\cap B) = X\setminus\emptyset = X = \{1,2\}$$

۱۸- قوانین دمورگان را به همراه استقراء به کار ببرید.

۱۹- حل مسأله ۱۰ در زیرفصل ۲ فصل ۲ را ملاحظه نمائید $p(A\cap B)=p(A)\cap p(B)$

$$p(A\cup B)=p(A)\cup p(B) \iff A\subseteq B \vee B\subseteq A$$

حل مسأله ۹ در زیرفصل ۲ فصل ۲ را ملاحظه کنید

۲۰- فرض کنید $A, B\subseteq C$ و $A\cup B=C$ و $A\cap B=\emptyset$.

بنابر تمرین ۳ در زیرفصل ۴ فصل ۲ داریم $A\subseteq C\setminus B$. همچنین

$$A\cup B=C \Longrightarrow C\setminus(A\cup B)=C\setminus C=\emptyset$$

دمورگان $\Longrightarrow (C\setminus A)\cap(C\setminus B)=\emptyset$

مجدداً بنابر تمرین ۱۳ در زیرفصل ۴ فصل ۲ داریم $C\setminus B\subseteq C\setminus(C\setminus A)=A$

پس $A=C\setminus B$.