

جلسه سانتر دهم

دليل:

$$\left. \begin{array}{l} X \sim Y \\ Z \sim W \\ X \cap Z = Y \cap W = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow X \cup Z \sim Y \cup W$$

$$\left. \begin{array}{l} X \sim Y \\ Z \sim W \end{array} \right\} \Rightarrow X \times Z \sim Y \times W$$

$$A^B := \{ f \mid \text{exists } t \text{ s.t. } f: A \rightarrow B \}$$

$$X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$$

$$X \sim Y \wedge Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$$

$$X \sim X$$

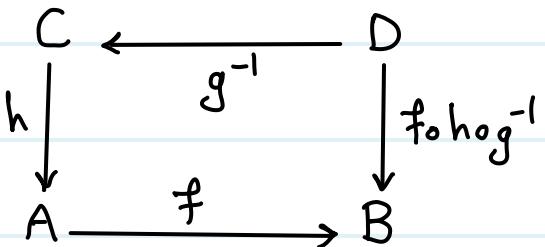
مثال: $f: X \times Y \rightarrow Y \times X$ ، X, Y مجموعه باسند ، f دوسویي است
 $(\Delta \times t) \mapsto (t, \Delta)$

$$X \times Y \sim Y \times X$$

$\varphi: A^C \rightarrow B^D$ ، φ دوسویي است
 $h \mapsto f \circ h \circ g^{-1}$ ، $g: C \rightarrow D$ ، $f: A \rightarrow B$ ، h دوسویي است

$X^Z \sim Y^W$ ، $Z \sim W$ ، $X \sim Y$ ، X^Z بخصوص Z آنچه

برهان: حون دو سوی اسی نیز دو سوی اسی. $g^{-1}: D \rightarrow C$ دو سوی اسی و $g: C \rightarrow D$ دو سوی اسی. اگر $f \circ h \circ g^{-1} \in B^D$ و $\exists k \in A^C$ نمودار زیر جایی اسی:



$\varphi: A^C \rightarrow B^D$ باع، $k \mapsto f \circ k \circ g^{-1}$ خواسته شده اسی.

از داریم: $k_1, k_2 \in A^C$ اگر

$$\varphi(k_1) = \varphi(k_2) \Rightarrow f \circ k_1 \circ g^{-1} = f \circ k_2 \circ g^{-1}$$

$$\Rightarrow f^{-1} \circ f \circ k_1 \circ g^{-1} \circ g = f^{-1} \circ f \circ k_2 \circ g^{-1} \circ g$$

باع تاب $f^{-1}: B \rightarrow A$ دو سوی اسی $f: A \rightarrow B$

$$\Rightarrow (f^{-1} \circ f) \circ k_1 \circ (g^{-1} \circ g) = (f^{-1} \circ f) \circ k_2 \circ (g^{-1} \circ g)$$

$$\Rightarrow id_A \circ k_1 \circ id_C = id_A \circ k_2 \circ id_C$$

$$\downarrow f^{-1} \circ f = id_A, g^{-1} \circ g = id_C$$

$$\Rightarrow k_1 = k_2$$

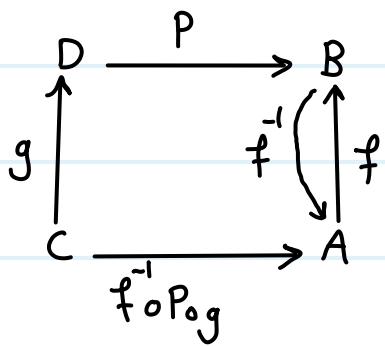
باع $\varphi: A^C \rightarrow B^D$ دو سی

$f^{-1}: B \rightarrow A, f: A \rightarrow B$ با توجه به دو سی بودن $P: D \rightarrow B$ می توان $P \in B^D$ اگر

$f^{-1} \circ P \circ g \in A^C$ باع $f^{-1} \circ P \circ g: C \rightarrow A$ دو سی

$$\begin{aligned} \varphi(f^{-1} \circ P \circ g) &= f \circ (f^{-1} \circ P \circ g) \circ g^{-1} = (f \circ f^{-1}) \circ P \circ (g \circ g^{-1}) \\ &= id_B \circ P \circ id_D = P \end{aligned}$$

باع $\varphi: A^C \rightarrow B^D$ دو سی



. $A^{B \cup C} \sim A^B \times A^C$ گاهی $B \cap C = \emptyset$ مجموعه باشد به قدر A, B, C آن:

. $B \cap C = \emptyset$ در مجموعه های A, B, C فرض کنید

. $\varphi: A^{B \cup C} \rightarrow A^B \times A^C$ دو سوابی است.
 φ نشان می دهد
 $f \longmapsto (f|_B, f|_C)$

برهان: فرض کنید $(f|_B, f|_C) = (g|_B, g|_C)$ بنابراین $\varphi(f) = \varphi(g)$ ، $f, g \in A^{B \cup C}$

. $f|_C = g|_C$ ، $f|_B = g|_B$

به ازای هر $x \in B \cup C$ $x \in B$ یا $x \in C$ زیر را داریم:

. $f(x) = f|_C(x) = g|_C(x) = g(x)$ در این صورت $x \in C$: حالت اول:

. $g(x) = g|_B(x) = f|_B(x) = f(x)$ در این صورت $x \in B$: حالت دوم:

بنابراین موارد فوق $(f(x), g(x))$ به ازای هر $x \in B \cup C$ مطابقت باشد.

. $\varphi: A^{B \cup C} \rightarrow A^B \times A^C$ بنابراین $f = g$ داریم

فرض کنید $p, q: C \rightarrow A$ ، $P: B \rightarrow A$ یعنی $p \in A^B$ و $q \in A^C$ و $(p, q) \in A^B \times A^C$ فرض کنید $p \neq q$.

$\forall x \in B \cap C \quad p(x) = q(x)$ پس $B \cap C = \emptyset$ لاما

. $p \vee q \in A^{B \cup C}$ یعنی $p \vee q: B \cup C \rightarrow A$ دستیابی

$\varphi(p \vee q) = ((p \vee q)|_B, (p \vee q)|_C) = (p, q)$

$\forall x \in B \quad (p \vee q) \upharpoonright_B(x) = P(x)$ و جند و $(p \vee q) \upharpoonright_B$, $P: B \rightarrow A$ *

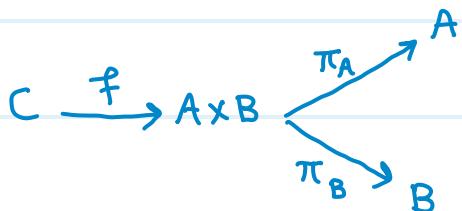
$$(p \vee q) \upharpoonright_C = q$$

بنابراین $(p, q) \in A^B \times A^C$ و درنتیجه $(p, q) \in \text{Im}(\varphi)$ دلخواه بود (جون).
پس $\varphi: A^{B \cup C} \rightarrow A^B \times A^C$ درنتیجه دوسویی است.

قضیه: اگر A, B, C مجموعه باشند، آنکه $(A \times B)^C \sim A^C \times B^C$

برهان: را در نظر بگیرید: $\pi_B: A \times B \rightarrow B$, $\pi_A: A \times B \rightarrow A$
 $(x, y) \mapsto y$ $(x, y) \mapsto x$

نیز $\varphi: (A \times B)^C \rightarrow A^C \times B^C$ دوسویی است. $\varphi(f) = (\pi_A \circ f, \pi_B \circ f)$



: $\varphi(f) = \varphi(g)$ همان باشد که $f, g: C \rightarrow A \times B$ اگر

$$\varphi(f) = \varphi(g) \Rightarrow (\pi_A \circ f, \pi_B \circ f) = (\pi_A \circ g, \pi_B \circ g)$$

$$\Rightarrow \pi_A \circ f = \pi_A \circ g \wedge \pi_B \circ f = \pi_B \circ g$$

$$\Rightarrow \forall x \in C \quad (\pi_A(f(x)) = \pi_A(g(x)) \wedge \pi_B(f(x)) = \pi_B(g(x)))$$

$$\Rightarrow \forall x \in C \quad (\pi_A(f(x)), \pi_B(f(x))) = (\pi_A(g(x)), \pi_B(g(x)))$$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} \forall x \in C \quad f(x) = g(x)$$

دلیل (*): به ازای هر $(z, w) \in A \times B$ داشته باشیم $z = \pi_A(z, w), w = \pi_B(z, w)$

$$(z, w) = (\pi_A(z, w), \pi_B(z, w))$$

$$y = (\pi_A(y), \pi_B(y))$$

به ازای هر $y \in A \times B$ داشته باشیم

$$f(x) = (\pi_A(f(x)), \pi_B(f(x)))$$

$$g(x) = (\pi_A(g(x)), \pi_B(g(x)))$$

پس ب ازای هر $x \in C$ داریم:

$f = g$ تابع بودند بنابراین $f, g : C \rightarrow A \times B$ (ما $x \in C$ ب ازای هر $f(x) = g(x)$ پس با فته ایم، کل برای این $\varphi : (A \times B)^C \rightarrow A^C \times B^C$ ، حال فرض کنید $q : C \rightarrow B$ ، $p : C \rightarrow A$ پس $(p, q) \in A^C \times B^C$ در نظر بگیرید. ب ازای هر $x \in C$ داریم $h : C \rightarrow A \times B$ با $x \mapsto (p(x), q(x))$:

$$(\pi_A \circ h)(x) = \pi_A(h(x)) = \pi_A(p(x), q(x)) = p(x)$$

$$\pi_B \circ h = q \quad \text{به طور مساوی} \quad \pi_A \circ h = p \quad \text{پس}$$

$(p, q) \in A^C \times B^C$ ما $(p, q) \in \text{Im}(\varphi)$ ، $\varphi(h) = (\pi_A \circ h, \pi_B \circ h) = (p, q)$ بنابراین دلخواه بود، بنابراین $\varphi : (A \times B)^C \rightarrow A^C \times B^C$ نزهت و درنتیج دوسویی است.

قضیه: هر A, B, C مجموعه باشد، $(A^B)^C \sim A^{B \times C}$.

برهان: فرض کنید $f : C \rightarrow A^B$. $f \in (A^B)^C$ آنکه A, B, C مجموعه باشند،

پس ب ازای هر $b \in B$ داریم $f(c) : B \rightarrow A$ ، $f(c) \in A^B$ ، $c \in C$ تابع است و بنابراین ب ازای هر $c \in C$ داریم $f^* : B \times C \rightarrow A$ ، $(f(c))(b) \in A$ تابع است.

$\varphi : (A^B)^C \rightarrow A^{B \times C}$ دوسویی است.

فرض کنید داریم $g, h \in (A^B)^C$

$$\varphi(g) = \varphi(h) \Rightarrow g^* = h^*$$

$$\Rightarrow \forall (b,c) \in B \times C \quad g^*(b,c) = h^*(b,c)$$

$$\Rightarrow \forall c \in C \quad \forall b \in B \quad (g(c))(b) = (h(c))(b)$$

$$\Rightarrow \forall c \in C \quad g(c) = h(c)$$

تابع h(c), g(c): B → A

$$\Rightarrow g = h$$

تابع g, h: C → A^B

. میل کریم φ: (A^B)^C → A^{B \times C} پس

• (b,c) ∈ B × C میل کریم φ است و بازی هر k ∈ B × C → A پس k ∈ A^{B \times C} هرگاه

k_c ∈ A^B ، میل کریم k_c: B → A . c ∈ C بازی هر k(b,c) ∈ A

$$z \mapsto k(z,c)$$

تابع φ(λ) ∈ A^{B \times C} میل λ ∈ (A^B)^C پس φ(λ) را در نظر بگیرید، λ: C → A^B

$$x \mapsto k_x$$

بازی هر (b,c) ∈ B × C داریم:

$$\varphi(\lambda)(b,c) = (\lambda(c))(b) = k_c(b) = k(b,c)$$

φ: (A^B)^C → A^{B \times C} و Im(φ) → φ(λ) = k پس φ(λ), k: B × C → A میل

پوشا نیز می باشد و در نتیجه دوسویی است.

مثال: اگر f = φ پس Dom(f) = φ تابع باشد، آنکه f: φ → A بطوره بوضوح

$$A^\emptyset = \{\emptyset\} \text{ پس، میل کریم } f: \emptyset \rightarrow A$$

f ⊆ C × φ = φ . آنکه f: C → φ ، C ≠ φ از φ^\emptyset = \{\emptyset\} میل قبل بنابر مثال

میل: f = φ و در اینجا Dom(f) = Dom(φ) = ∅ و اینجا اسے پس

$$\phi^D = \begin{cases} \{\emptyset\} & D = \emptyset \\ \emptyset & D \neq \emptyset \end{cases}$$