جلسه بیست و هفتم

اصل استقرای ترامتناهی: اگر $(A,\leqslant)$ مجموعه‌ای خوش ترتیب باشد و $P(x)$ گزاره نمایی برای x های عضو A به قسمی که:

$$\forall a\in A \quad \big((\forall b<a \quad P(b)\big) \Rightarrow P(a)$$

در این صورت:

$$\forall a\in A \quad P(a)$$

برهان: قرار دهید $M:=\{x\in A: \neg P(x)\}$

کافی است نشان دهیم $M=\emptyset$. اگر $M\neq\emptyset$ آنگاه به عنوان زیرمجموعه ناتهی مجموعه خوش ترتیب $(A,\leqslant)$ دارای کوچکترین عضو قبل $z=\min_{(A,\leqslant)} M$ می‌باشد.

به خصوص $\forall x<z \quad x\notin M$ پس $\forall x<z \quad P(x)$

بنابر فرض قضیه، $P(z)$ برقرار است که با $z=\min_{\leqslant} M\in M$ در تناقض است پس

$M=\emptyset$ و $\forall x\in A \quad P(x)$.

به ازای هر اوردینال α، (مجموعه α را اوردینال نامیم اگر خودش و هم عضوش متعدی باشد) در جلسات قبل جهت دانستن عنوان کردیم هر اوردینال β دقیقاً در یکی از شرایط $\alpha\in\beta \vee \alpha=\beta \vee \beta\in\alpha$ صدق می‌کند. به راحتی می‌توانید نشان دهید زیرمجموعه هر مجموعه خوش ترتیب با رابطه ترتیب القایی خوش ترتیب است. بدون اثبات می‌پذیریم

هر عضو یک اوردینال، اوردینال است.

اگر رابطهٔ $\leqslant$ برای دو اوردینال α, β را به صورت $\alpha \leqslant \beta \iff \alpha \subseteq \beta$

تعریف کنیم هر اوردینال خوش ترتیب خواهد بود.

هر مجموعه خوش ترتیب $(A, \leqslant)$ با یک و تنها یک اوردینال یکریخت ترتیبی است،

آن اوردینال را با $\operatorname{ord}(A, \leqslant)$ نشان می دهیم.

اگر $(A, \leqslant_1)$ و $(B, \leqslant_2)$ دو مجموعه خوش ترتیب باشند، دیدید

$$\operatorname{ord}(A, \leqslant_1) < \operatorname{ord}(B, \leqslant_2)$$
$$\vee \operatorname{ord}(A, \leqslant_1) = \operatorname{ord}(B, \leqslant_2)$$
$$\vee \operatorname{ord}(B, \leqslant_2) < \operatorname{ord}(A, \leqslant_1)$$

توجه کنید:

$\operatorname{ord}(A, \leqslant_1) < \operatorname{ord}(B, \leqslant_2) \iff$ $(A, \leqslant_1)$ با قطعه سره‌ای از $(B, \leqslant_2)$ یکریخت ترتیبی باشد

$\operatorname{ord}(A, \leqslant_1) = \operatorname{ord}(B, \leqslant_2) \iff$ $(A, \leqslant_1)$ و $(B \leqslant_2)$ یکریخت ترتیبی اند

$\operatorname{ord}(A_1, \leqslant_1) \leqslant \operatorname{ord}(B, \leqslant_2) \iff$ $(A, \leqslant_1)$ با قطعه‌ای از $(B, \leqslant_2)$ یکریخت است

$$\operatorname{ord}(\phi) = 0$$

$$\operatorname{ord}(\{0, \dots, n-1\}) = n$$

با رابطه ترتیب معمولی القا شده از سره

$$\operatorname{ord}(\mathbb{N}) =: \omega$$

$\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ کوچکترین اوردینال نامتناهی است

$\underline{\qquad\qquad A \qquad\qquad}$ $\underline{\qquad\qquad B \qquad\qquad}$

$ord(A, \leqslant_A) = \alpha$ $ord(B, \leqslant_B) = \beta$

$A \cap B = \emptyset$

فرض کنید: $\alpha = ord(A, \leqslant_A)$ ، $\beta = ord(B, \leqslant_B)$

$A \cap B = \emptyset$ ، $\leqslant_* = \leqslant_A \cup \leqslant_B \cup (A \times B)$

$ord(A \cup B, \leqslant^*)$ را با $\alpha + \beta$ نمایش می‌دهیم.

اگر $\leqslant_\square = \{((a,b),(a',b')) \in (A \times B)^2 : a <_A a' \vee (a = a' \wedge b \leqslant_B b')\}$

رابطه ترتیب الفبایی روی $(A \times B)$

$ord(A \times B, \leqslant_\square)$ را با $\beta\alpha$ نمایش می‌دهیم.

$\underbrace{\omega \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad \dots\dots}_{\text{دارای اوردینال } 1+\omega \text{ برابر } \omega \text{ است}}$

$\underbrace{0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \dots\dots}_{\text{دارای اوردینال}} \; \omega$ $\quad \omega < \omega + 1$

$$\underbrace{0 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad \cdots\cdots \quad \omega \quad \omega+1 \quad \omega+2}_{\omega+\omega}$$

$$\{0,1\} \times \{0,1,2,\ldots\}$$

$$\underbrace{\text{با رابطه ترتیب الفبایی}}$$

دارای اوردینال $\omega 2$

$$\underbrace{\overbrace{(0,0)(0,1)(0,2)\cdots\cdots}^{\omega}(1,0)(1,1)(1,2)\cdots}_{}$$

دارای اوردینال $\omega+\omega$

$$\omega 2 = \omega + \omega > \omega$$

$$\{0,1,2,\ldots\} \times \{0,1\}$$

$$\underbrace{\text{با رابطه ترتیب الفبایی}}$$

دارای اوردینال 2ω است

$$\underbrace{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,0),(2,1),\ldots}$$

دارای اوردینال ω است

$$2\omega = \omega$$

هرخانواده ناتهی از اوردینال ها (کاردینالها) دارای کوچکترین عضو است.

$$\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0,1,2,\ldots\} = \omega$$

$$\underbrace{\overbrace{0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \cdots\cdots}^{\omega} + \overbrace{\omega}^{1} \quad \omega+1}_{\omega+2}$$

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$f(1) = 4$$

$$f(n+1) = f(n) = 3$$

اگر α اوردینال باشد (یعنی خودش و تمامی اعضایش متعدی باشند)، $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ نیز اوردینال است. α^+ را با $\alpha+1$ نمایش می دهیم.

$\alpha + 0 := \alpha$

$\alpha + 1 := \alpha^{+} \quad (= \alpha \cup \{\alpha\})$

اوردینال غیرحدی وناصفر $\beta = \theta^{+} \Rightarrow \alpha + \beta = \alpha + \theta^{+} := (\alpha + \theta)^{+} = (\alpha + \theta) + 1$

اوردینال حدی است $\beta \Rightarrow \alpha + \beta := \bigcup_{\mu < \beta} (\alpha + \mu)$

(یعنی به ازای هر اوردینال

$(\beta \neq 0 \,,\, \beta \neq \theta^{+} \,,\, \theta$

ω کوچکترین اوردینال نامتناهی

$\Omega = c = card(\mathbb{R})$ کوچکترین اوردینال ناشمارا

فرضیه پیوستار

$\Omega = \{\alpha \in ON \mid \underbrace{\alpha < \Omega}_{\text{یک اوردینال شمارا }\alpha} \}$

قضیه: به ازای هر کاردینال α, β داریم $\alpha \leqslant \beta$ یا $\beta \leqslant \alpha$.