جلسه هجدهم

لم: اگر X نامتناهی باشد، آنگاه تابع یک به یک $\begin{array}{l} f: \mathbb{N} \longrightarrow X \\ n \longmapsto x_n \end{array}$ موجود است (و یا به طور معادل دنباله یک به یک $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ در X موجود است)

برهان: فرض کنید X نامتناهی باشد، پس بخصوص $X \neq \emptyset$ ($\emptyset$ فاقد زیرمجموعه سره است) بنابراین $x_1 \in X$ موجود است و به خصوص بنابر قضیه جلسه قبل $X \setminus \{x_1\}$ نامتناهی است.

فرض کنید $k \geqslant 1$ و $x_1, \dots, x_k \in X$ دو به دو متمایز انتخاب شده باشند. بعلاوه شرط نامتناهی بودن $X \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$ نیز برآورده شده باشد. چون $X \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$ نامتناهی است پس $\emptyset \neq X \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$ و $x_{k+1} \in X \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$ موجود است. بخصوص $x_{k+1} \notin \{x_1, \dots, x_k\}$ پس به ازای هر $i \in \{1, \dots, k\}$، $x_{k+1} \neq x_i$؛ همچنین به دلیل نامتناهی بودن $X \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$ بنابر قضیه جلسه قبل

$$\left(X \setminus \{x_1, \dots, x_k\}\right) \setminus \{x_{k+1}\} = X \setminus \{x_1, \dots, x_{k+1}\}$$

نیز نامتناهی است.

دنباله $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ که به روش استقرایی بالا ساخته شده، یک به یک یعنی تابع $\begin{array}{l} f: \mathbb{N} \longrightarrow X \\ n \longmapsto x_n \end{array}$ یک به یک است؛ زیرا به ازای $p, q \in \mathbb{N}$ با شرط $p \neq q$ می‌توانیم فرض کنیم $p < q$ و دیدید به ازای هر $1 \leqslant i \leqslant q-1$ بنابر نحوه ساختن x_n ها، داریم $x_i \neq x_q$ بخصوص $x_p \neq x_q$.

قضیه: عبارات زیر معادلند:

الف) X نامتناهی است (یعنی با یک زیرمجموعه سره خود در تناظر دوسویی است)

ب) تابع یک به یک $f: \mathbb{N} \to X$ موجود است

برهان: (الف) $\Leftarrow$ (ب) بنابر لم قبل

(ب) $\Leftarrow$ (الف) اگر $f: \mathbb{N} \to X$ یک به یک باشد، آنگاه $f: \mathbb{N} \to f(\mathbb{N})$ دوسویی است و $\mathbb{N} \sim f(\mathbb{N})$

اما $\mathbb{N}$ نامتناهی است زیرا تابع یک به یک و غیرپوشای $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto 2x$ موجود است.

چون $\mathbb{N} \sim f(\mathbb{N})$ و $\mathbb{N}$ نامتناهی است پس $f(\mathbb{N})$ نیز نامتناهی است پس هر ابرمجموعه آن

ازجمله X نامتناهی است (توجه: $f(\mathbb{N}) \subseteq X$).

قضیه: عبارات زیر معادلند.

الف) X متناهی است

ب) $X \sim \phi$ یا $k \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که $X \sim \mathbb{N}_k$.

که در آن: $\mathbb{N}_k = \{1, \dots, k\}$

برهان: (ب) $\Leftarrow$ (الف). باید نشان دهیم ϕ و $\mathbb{N}_k$ ها متناهی اند.

ϕ فاقد زیرمجموعه سره است پس با هیچ زیرمجموعه سره خود در تناظر دوسویی نیست. بنابراین متناهی

است.

$\mathbb{N}_1 \setminus \{1\} = \phi$ متناهی است پس $\mathbb{N}_1$ متناهی است. اگر $m \geq 1$ چنان باشد که $\mathbb{N}_m$ متناهی باشد، آنگاه

$\mathbb{N}_{m+1} \setminus \{m+1\} = \mathbb{N}_m$ متناهی است پس $\mathbb{N}_{m+1}$ متناهی است.

به کمک استقراء حکم به دست می آید.

(الف) $\Longleftarrow$ (ب) فرض کنید X نه با تهی و نه با هیچ کدام از $\mathbb{N}_k$ ها همتوان نباشد، نشان می دهیم X نامتناهی است. چون X با تهی همتوان نیست پس $X \neq \emptyset$ و $x_1 \in X$ موجود است.

فرض کنید $m \geqslant 1$ و $x_1, \dots, x_m \in X$ دو به دو متمایز انتخاب شده باشند، $h: \mathbb{N}_m \longrightarrow \{x_1, \dots, x_m\}$
$i \longmapsto x_i$

دوسویی است، پس $\mathbb{N}_m \sim \{x_1, \dots, x_m\}$ اما $\mathbb{N}_m \not\sim X$ پس $X \neq \{x_1, \dots, x_m\} (\subseteq X)$

و $X \setminus \{x_1, \dots, x_m\} \neq \emptyset$ و $x_{m+1} \in X \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$ موجود است. بخصوص $x_{m+1} \neq x_1, \dots, x_m$.

دنباله $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ که به روش استقرایی بالا تعریف شده، یک به یک است پس بنا بر قضیه قبل X نامتناهی است.

$\mathbb{N}$ نامتناهی (دیدید)، پس هر ابرمجموعه آن مانند $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}_+$ نامتناهی اند.

تعریف: X را شمارای نامتناهی نامیم هرگاه $X \sim \mathbb{N}$.

X را شمارا نامیم اگر متناهی باشد و یا شمارای نامتناهی باشد.

لم: هر زیرمجموعه نامتناهی $\mathbb{N}$، همتوان با $\mathbb{N}$ است.

برهان: فرض کنید $A \subseteq \mathbb{N}$ و A نامتناهی باشد. چون A نامتناهی است پس $A \neq \emptyset$ و $x_1 = \min(A)$ موجود است. به ازای $k > 1$ فرض کنید $x_1, \dots, x_k \in A$ متمایز انتخاب شده باشند، به قسمی که $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ و $\{x_1, \dots, x_k\} = A \cap \{1, \dots, x_k\}$،

$\mathbb{N}_k \longrightarrow \{x_1, \dots, x_k\}$
$i \longmapsto x_i$
دوسویی است پس $\mathbb{N}_k \sim \{x_1, \dots, x_k\}$.

A نامتناهی است پس $A \not\sim \mathbb{N}_k$ بنابراین $A \neq \{x_1, \dots, x_k\} (\subseteq A)$ و $A \setminus \{x_1, \dots, x_k\} \neq \emptyset$ قرار دهید

$$x_{k+1} = \min\left(A \setminus \{x_1, \dots, x_k\}\right)$$

چون $x_{k+1} \in A \setminus \{x_1, \dots, x_k\} = A \setminus \{1, \dots, x_k\}$ پس $x_{k+1} = 1, \dots, x_k$

بخصوص $x_{k+1} > x_k$. همچنین اگر $x_k < i < x_{k+1}$ چون $j \notin \{x_1, \dots, x_k\}$ و

$j < x_{k+1} = \min(A \setminus \{x_1, \dots, x_k\})$ پس $j \notin A$ ، $A \cap \{1, \dots, x_{k+1}\} = A \cap \{x_1, \dots, x_{k+1}\}$.

هرگاه $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ به روش استقرایی بالا ساخته شده باشد، آنگاه $x_1 < x_2 < \dots$ ..

پس $f: \mathbb{N} \longrightarrow A$ ، $m \longmapsto x_m$ یک به یک است و به ازای هر $m \geqslant 1$ ، $m \leqslant x_m$ زیرا:

۱- $x_1 \in A \subseteq \mathbb{N}$. پس $x_1 \geqslant 1$

۲- اگر $t \in \mathbb{N}$ و $x_t \geqslant t$ آنگاه $x_{t+1} > x_t \geqslant t$ پس $x_{t+1} > t$ بنابراین $x_{t+1} > t+1$

بنابر ① و ② و اصل استقراء ریاضی، به ازای هر $n \geqslant 1$ ، $x_n \geqslant n$.

اگر $s \in A$ ، آنگاه، بنابر استدلال بالا ، $x_s \geqslant s$ پس

$s \notin A \setminus \{1, \dots, x_s\} = A \setminus \{x_1, \dots, x_s\}$

بنابر نحوه انتخاب x_i ها

اما $s \in A$ پس $1 \leqslant i \leqslant s$ چنان موجود است که $s = x_i = f(i)$ و پوشا بودن $f: \mathbb{N} \to A$

نیز به دست می‌آید پس $A \sim \mathbb{N}$ و A شمارای نامتناهی است.

نتیجه: هر زیر مجموعه $\mathbb{N}$ یا متناهی است و یا شمارای نامتناهی است

نتیجه: X شمارای نامتناهی است $\Longleftrightarrow$ X شمارا باشد و X نامتناهی باشد.

برهان: تعریف شمارای نامتناهی را به کار ببرید و این که $\mathbb{N}$ و هر مجموعه همتوان با آن نامتناهی است.

نتیجه: X شماراست اگر و تنها اگر با یکی از زیر مجموعه های $\mathbb{N}$ همتوان باشد، به بیان دیگر تابع یک به یک $f: X \longrightarrow \mathbb{N}$ موجود باشد.

برهان: اگر X شمارا باشد دیدید بنابر تعریف X با یکی مجموعه های $D = \phi, \mathbb{N}, \mathbb{N}_2, \dots, \mathbb{N}$ همتوان است

اما $D \subseteq \mathbb{N}$ و تابع دوسویی $f: X \to D$ موجود است پس $f: X \to \mathbb{N}$ یک به یک است.

برعکس: فرض کنید $h: X \to \mathbb{N}$ یک به یک باشد پس $h: X \to h(X)$ دوسویی است و X همتوان یکی از زیر مجموعه های $\mathbb{N}$ یعنی $C = h(X)$ است.

اگر C متناهی باشد، هر مجموعه همتوان با آن نیز متناهی است پس X (که با C همتوان است) نیز متناهی خواهد بود.

اگر C نامتناهی باشد بنابر مطالب اثبات شده در بالا، C به عنوان یک زیر مجموعه نامتناهی $\mathbb{N}$ با $\mathbb{N}$ همتوان است. چون $X \sim C$ و $C \sim \mathbb{N}$ پس $X \sim \mathbb{N}$ و X شمارای نامتناهی است.

قضیه: اگر $X \sim Y$ آنگاه:

$$X \text{ شماراست} \iff Y \text{ شماراست}$$

برهان: چون $X \sim Y$ پس تابع دوسویی $f: Y \to X$ موجود است. اگر X شمارا باشد تابع یک به یک $g: X \to \mathbb{N}$ موجود است پس $g \circ f: Y \to \mathbb{N}$ یک به یک است و Y شمارا ست.

تعریف: مجموعه‌ای که شمارا نباشد را ناشمارا نامیم.

قضیه: اگر $A \subseteq B$، آنگاه:

$$B \text{ شماراست} \Longrightarrow A \text{ شمارا ست}$$

و

$$A \text{ نا شمارا ست} \Longrightarrow B \text{ ناشمارا ست}$$

برهان: فرض کنید B شمارا باشد پس تابع یک به یک $f: B \to \mathbb{N}$ موجوداست بنابراین $f|_A : A \to \mathbb{N}$ نیز یک به یک است درنتیجه A شمارا ست.