جلسه دوازدهم

(f, A, B)

۱) $f \subseteq A \times B$ ۲) $\mathrm{Dom}(f) = A$

۳) $\forall x, y, z \ \big((x,y) \in f \wedge (x,z) \in f \Rightarrow y = z \big)$

$f : A \to B$

نکته: هرگاه $R \subseteq A \times B$ ، $C \subseteq A$ ، آنگاه

$$R\restriction_C := R \cap (C \times B) = \{ (x,y) \in R : x \in C \}$$

تمرین

را تحدید R به C می‌نامیم، به وضوح $R\restriction_C \subseteq C \times B$

نکته: اگر $f : A \to B$ تابع باشد، آنگاه به ازای هر $C \subseteq A$ ، $f\restriction_C : C \to B$ نیز تابع است
$x \longmapsto f(x)$

برهان: چون $f \subseteq A \times B$ پس $f\restriction_C = f \cap (C \times B) \subseteq C \times B$ بنابراین $\mathrm{Dom}(f\restriction_C) \subseteq C$،
اگر $x \in C$ ، چون $C \subseteq A$ پس $x \in A$ و از آنجاییکه $\mathrm{Dom}(f) = A$ پس y چنان موجود است
که $(x,y) \in f$ درنتیجه $(x,y) \in f\restriction_C$. (چون $x \in C$) بخصوص $x \in \mathrm{Dom}(f\restriction_C)$
$C \subseteq \mathrm{Dom}(f\restriction_C)$ بدین ترتیب برهان $\mathrm{Dom}(f\restriction_C) = C$ به انجام می‌رسد.
حال فرض کنید $(a,b), (a,c) \in f\restriction_C$ ، چون $f\restriction_C \subseteq f$ پس $(a,b), (a,c) \in f$
وچون $f : A \to B$ تابع است پس $b = c$
بنابر موارد فوق $f\restriction_C : C \to B$ تابع است.
بعلاوه اگر $x \in C$ و $y = f\restriction_C(x)$ ، آنگاه $(x,y) \in f\restriction_C \subseteq f$ پس $y = f(x)$ بنابراین

$$\forall x \in C \quad f\restriction_C(x) = f(x)$$

تعریف: اگر $R \subseteq A \times C$, $S \subseteq C \times B$ قرار دهید

$$S \circ R = \{(x,z) : \exists y \ \ (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$$

به وضوح $A \times B \supseteq S \circ R$ ⟵ ترکیب دو رابطه

قضیه: اگر $f : A \to C$ و $g : C \to B$ تابع باشند، آنگاه $g \circ f : A \to B$ تابع است و به ازای هر $x \in A$، $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

برهان: $\boxed{A \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} B}$

با توجه به تعریف ترکیب دو رابطه و اینکه $f \subseteq A \times C$ و $g \subseteq C \times B$ پس $g \circ f \subseteq A \times B$.

بنابراین $Dom(g \circ f) \subseteq A$ بعلاوه:

اگر $x \in A$، چون $A = Dom(f)$ پس y چنان موجود است که $(x,y) \in f$ به خصوص $y = f(x)$ و چون $(x,y) \in f \subseteq A \times C$ پس $y \in C$ اما $C = Dom(g)$ بنابراین z چنان موجود است که $(y,z) \in g$. بخصوص $z = g(y)$ پس $z = g(f(x))$ اما دیدید $(x,y) \in f$ و $(y,z) \in g$ پس $(x,z) \in g \circ f$ و $x \in Dom(g \circ f)$

همچنین دیدید $(x,z) = (x, g(f(x))) \in g \circ f$ بنابراین $A \subseteq Dom(g \circ f)$ و برهان $A = Dom(g \circ f)$ به انجام می رسد. اگر a, b, c چنان باشند که $(a,b), (a,c) \in g \circ f$ پس $a \in A$ و دیدید به ازای هر $(x, g(f(x))) \in g \circ f$ پس $(a, g(f(a))) \in g \circ f$.

P چنان موجود است که $(a,P) \in f$ و $(P,b) \in g$ چون $f : A \to C$, $g : C \to B$ تابعند پس $P = f(a)$, $b = g(P)$ پس $b = g(f(a))$ به طور مشابه $c = g(f(a))$

پس $b = c$

بنابر موارد فوق $g \circ f : A \to B$ تابع است و به ازای هر $x \in A$، $(x, g(f(x))) \in g \circ f$

یعنی $g \circ f(x) = g(f(x))$

تعریف: تابع $f:A\to B$ را یک به یک نامیم هرگاه (one-to-one = یک به یک)

انژکسیون

$$\forall x,y,z \quad \big((x,y)\in f \wedge (z,y)\in f \Rightarrow x=z\big)$$

به بیان دیگر

$$\forall x,z\in A \quad \big(f(x)=f(z)\Rightarrow x=z\big)$$

تعریف: $f:A\to B$ را پوشا نامیم هرگاه $f(A)=B$ (onto = پوشا)

سورژکسیون

تعریف: $f:A\to B$ را دوسویی نامیم هرگاه یک به یک و پوشا باشد

بیژکسیون

قضیه: هرگاه $f:A\to B$ داده شده باشد، عبارات زیر معادلند:

الف) $f:A\to B$ یک به یک است

ب) به ازای هر $y\in B$، $f^{-1}(y)$ حداکثر یک عضو دارد ($f^{-1}(\{y\})$ را با $f^{-1}(y)$ نمایش می‌دهیم)

ج) به ازای هر $C,D\subseteq A$، $f(C\cap D)\supseteq f(C)\cap f(D)$

د) به ازای هر $C,D\subseteq A$، $f(C\cap D)=f(C)\cap f(D)$

هـ) به ازای هر $C,D\subseteq A$، $f(C\setminus D)=f(C)\setminus f(D)$

و) به ازای هر $C\subseteq A$، $f(A\setminus C)=f(A)\setminus f(C)$

ز) $g:B\to C$ چنان موجود است که $g\circ f:A\to C$ یک به یک است.

ح) با فرض $A\neq\emptyset$، $g:B\to A$ چنان موجود است که $g\circ f=id_A$

ط) به ازای هر $k,g:D\to A$ اگر $f\circ k=f\circ g$، آنگاه $k=g$

ی) به ازای هر خانواده ناتهی $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\mu}$ از زیرمجموعه‌های A، $\bigcap_{\alpha\in\mu} f(C_\alpha)\subseteq f\big(\bigcap_{\alpha\in\mu} C_\alpha\big)$

ک) به‌ازای هر خانواده تهی $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ از زیرمجموعه‌های A، $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} f(C_\alpha)=f(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha)$.

م) به ازای هر $C\subseteq A$، $f^{-1}(f(C))=C$

ن) به‌ازای هر $C\subseteq A$، $f^{-1}(f(C))\subseteq C$

برهان:

(الف) $\Leftarrow$ (ب): فرض کنید $f:A\to B$ یک به یک و $y\in B$ و $x_1,x_2\in f^{-1}(y)$ پس $f(x_1)=y=f(x_2)$ بنابراین $x_1=x_2$ و $f^{-1}(y)$ حداکثر یک عضو دارد.

(ب) $\Leftarrow$ (الف): فرض کنید (ب) برقرار و $(x,y),(z,y)\in f$ پس $x,z\in f^{-1}(y)$ و چون $f^{-1}(y)$ حداکثر یک عضو دارد پس $x=z$.

نکته: اگر $R\subseteq A\times B$ و $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ خانواده ای ناتهی از زیرمجموعه های A باشد، آنگاه به ازای هر $\beta\in\Gamma$، $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha\subseteq C_\beta$ پس $R(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha)\subseteq R(C_\beta)$ اما $\beta\in\Gamma$ دلخواه بود

پس $R(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha)\subseteq \bigcap_{\alpha\in\Gamma} R(C_\alpha)$

$E\subseteq F \Rightarrow R(E)\subseteq R(F)$

$y\in R(E)\Rightarrow \exists x\in E \quad (x,y)\in R$

$E\subseteq F \Rightarrow \exists x\in F \quad (x,y)\in R$

$\Rightarrow y\in R(F)$

بنابر نکتهٔ فوق (د) $\Leftrightarrow$ (ج) و (ی) $\Leftrightarrow$ (ک). به وضوح (ی) $\Rightarrow$ (ج)

(ح) $\Rightarrow$ (الف): فرض کنید $x, y \in A$ و $f(x)=f(y)$ و (ح) برقرار باشد پس

$$f(\{x\}\cap\{y\}) = f(\{x\})\cap f(\{y\}) = \{f(x)\}\cap\{f(y)\} \underset{f(x)=f(y)}{=} \{f(x)\}$$

بنابراین $f(\{x\}\cap\{y\}) \neq \emptyset$ پس $\{x\}\cap\{y\} \neq \emptyset$ و درنتیجه $x=y$.

$f(\emptyset)=\emptyset$

$f(\{a\})=\{f(a)\}$

(الف) $\Rightarrow$ (ی): فرض کنید (الف) برقرار باشد و $z \in \bigcap_{\alpha\in\Gamma} f(C_\alpha)$ و $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$

خانواده‌ای ناتهی از زیرمجموعه های A باشد. $\beta\in\Gamma$ را ثابت انتخاب کنید. به ازای هر $\alpha\in\Gamma$

$z\in f(C_\alpha)$ پس $x_\alpha \in C_\alpha$ چنان موجود است که $f(x_\alpha)=z$ بخصوص $f(x_\alpha)=f(x_\beta)$ و چون

$f: A\to B$ یک‌به‌یک است، پس $x_\alpha = x_\beta \in C_\alpha$؛ بنابراین به ازای هر $\alpha\in\Gamma$، $x_\beta\in C_\alpha$ پس

$x_\beta \in \bigcap_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha$ بنابراین $z=f(x_\beta)\in f(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha)$ و برهان $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} f(C_\alpha) \subseteq f(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha)$ کامل

می‌شود.

(هـ) $\Rightarrow$ (و): واضح است

(و) $\Rightarrow$ (الف): فرض کنید $x, z\in A$ و $f(x)=f(z)$ و (و) برقرار باشد. پس

$$f(A\setminus\{x\}) = f(A)\setminus f(\{x\}) = f(A)\setminus\{f(x)\} \underset{f(x)=f(z)}{=} f(A)\setminus\{f(z)\}$$

پس $f(z)\in f(A\setminus\{x\})$ بنابراین $z\notin A\setminus\{x\}$ و چون $z\in A$ پس $z\in\{x\}$ و $z=x$.

(الف) $\Leftarrow$ (هـ) : فرض کنید $f: A \to B$ یک به یک و $C, D \subseteq A$:

اگر $y \in f(C) \setminus f(D)$ آنگاه $x \in C$ چنان موجود است که $y = f(x)$ (چون $y \in f(C)$) اما $x \notin D$ (چون $f(x) = y \notin f(D)$) پس $x \in C \setminus D$ بنابراین $y = f(x) \in f(C \setminus D)$ و $f(C) \setminus f(D) \subseteq f(C \setminus D)$.

حال فرض کنید $w \in f(C \setminus D)$ پس $t \in C \setminus D$ چنان موجود است که $w = f(t)$ چون $t \in C \setminus D$ پس $t \in C$ بنابراین $w = f(t) \in f(C)$.

اگر $w \in f(D)$ ، آنگاه $s \in D$ چنان موجود است که $f(s) = w$ پس $f(s) = f(t)$ بنابراین $S = t \in C \setminus D$ $D \ni$ که تناقض است بنابراین $w \notin f(D)$ ؛ پس $w \in f(C) \setminus f(D)$ و برهان $f(C \setminus D) \subseteq f(C) \setminus f(D)$ نیز کامل می‌شود و ما را به $f(C \setminus D) = f(C) \setminus f(D)$ می‌رساند.