جلسه بیست و سوم

لم: اگر $B \subseteq A$ و تابع یک به یک $f: A \to B$ وجود داشته باشد، آنگاه $B \sim A$.

برهان: اگر $A = B$ حکم واضح است پس فرض کنید $B \subsetneq A$. قرار دهید

$$f^{0} = id_A$$

$$f^{n+1} = f^{n} \circ f = f \circ f^{n} \qquad n \geqslant 0$$

همچنین $C = \bigcup_{n \geqslant 0} f^{n}(A \setminus B)$.

تابع $h: A \to A$ با ضابطهٔ
$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in C \\ x & x \in A \setminus C \end{cases}$$
را در نظر بگیرید.

(توجه کنید که به ازای هر $n \geqslant 0$، $f^{n}(A) \subseteq A$ پس $f^{n}(A \setminus B) \subseteq f^{n}(A) \subseteq A$ و درنتیجه $C \subseteq A$)

نشان می دهیم $h: A \to B$ دوسویی است. توجه کنید که

$$h(A) = h(C \cup (A \setminus C)) = h(C) \cup h(A \setminus C) = f(C) \cup f(A \setminus C)$$

$$= f\Big(\bigcup_{n \geqslant 0} f^{n}(A \setminus B)\Big) \cup (A \setminus C)$$

$$= \bigcup_{n \geqslant 0} \overbrace{f\big(f^{n}(A \setminus B)\big)}^{f^{n+1}(A \setminus B)} \cup (A \setminus C)$$

$$= \bigcup_{n \geqslant 1} f^{n}(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

$$= \Big(\bigcup_{n\geq 1} f^n(A\setminus B)\Big) \cup \Big(A\setminus\Big((A\setminus B)\cup\Big(\bigcup_{n\geq 1} f^n(A\setminus B)\Big)\Big)\Big)$$

$$= \Big(\bigcup_{n\geq 1} f^n(A\setminus B)\Big) \cup \Big(A\setminus(A\setminus B)\Big) \underset{B\subseteq A}{=} \Big(\bigcup_{n\geq 1} f^n(A\setminus B)\Big)\cup B$$

$$= B$$

$\forall k\geq 0 \quad f^k(A\setminus B)\subseteq A$

پس $\forall k\geq 0 \quad f^{k+1}(A\setminus B)\subseteq f(A)\subseteq B$

بنابراین $\forall n\geq 1 \quad f^n(A\setminus B)\subseteq B$

پس $\bigcup_{n\geq 1} f^n(A\setminus B)\subseteq B$

پس $h(A)=B$ و $h: A\to B$ پوشاست.

فرض کنید $x_1, x_2\in A$ و $h(x_1)=h(x_2)$ ، حالات زیر را داریم:

حالت اول: $x_1, x_2\in C$ ؛ در این حالت $f(x_1)=h(x_1)=h(x_2)=f(x_2)$

و به دلیل یک به یک بودن $f: A\to B$ ، $x_1=x_2$.

حالت دوم: $x_1, x_2\in A\setminus C$ ، در این حالت $x_1=h(x_1)=h(x_2)=x_2$

حالت سوم: $x_1\in C$, $x_2\in A\setminus C$ ، در این حالت $x_1\in C=\bigcup_{n\geq 0} f^n(B\setminus A)$

پس $p\geq 0$ چنان موجود است که $x_1\in f^p(B\setminus A)$ بنابراین

$$A\setminus C\ni x_2=h(x_2)=h(x_1)=f(x_1)\in f(f^p(B\setminus A))=f^{p+1}(B\setminus A)\subseteq \bigcup_{n\geq 0} f^n(B\setminus A)=C$$

که $A\setminus C\ni x_2=f(x_1)\in C$ تناقض است چون $C\cap(A\setminus C)=\emptyset$.

پس این حالت رخ نمی‌دهد.

حالت چهارم: $x_1 \in A \setminus C$ و $x_2 \in C$. مشابه حالت سوم، این حالت نیز رخ نمی‌دهد.

بنابر حالات فوق $x_1 = x_2$ و $h: A \to B$ یک به یک نیز هست.

بنابراین $h: A \to B$ دوسویی است و $A \sim B$.

قضیه شرودر برنشتاین: اگر α, β دو عدد اصلی باشند به قسمی که $\alpha \leqslant \beta$ و $\beta \leqslant \alpha$، آنگاه $\alpha = \beta$.

کاردینال

[به طور معادل اگر تابع یک به یک $f: X \to Y$ و تابع یک به یک $g: Y \to X$ موجود باشد، آنگاه $X \sim Y$]

برهان: فرض کنید $\alpha = card(X) \leqslant \beta = card(Y)$ و $\beta = card(Y) \leqslant \alpha = card(X)$

پس توابع یک به یک $f: X \to Y$ و $g: Y \to X$ موجودند، چون $f: X \to Y$ یک به یک است پس $f: X \to f(X)$ دوسویی است، چون ترکیب دو تابع یک به یک خود نیز یک به یک است پس $f \circ g: Y \to f(X)$ یک به یک است. اما $f(X) \subseteq Y$ و بنابر لم قبل $f(X) \sim Y$ و چون $f: X \to f(X)$ دوسویی است پس $X \sim f(X)$.

چون $X \sim f(X)$, $f(X) \sim Y$ پس $X \sim Y$. درنتیجه $\alpha = card(X) = card(Y) = \beta$.

تعریف: رابطه R روی A را یک رابطه جزئاً مرتب (ترتیب جزئی، ترتیب) نامیم هرگاه

انعکاسی ۱) $\forall x \in A \quad xRx$

پادمتقارن ۲) $\forall x, y \in A \ (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$

متعدی (ترانگذری) ۳) $\forall x, y \in A \ ((xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz)$

در این صورت (A, R) (یا به اختصار A) را یک مجموعه جزئاً مرتب نامیم.

توجه: اگر M خانواده ای از اعداد اصلی باشد، آنگاه $\leqslant$ را یک رابطه ترتیب (جزئی) روی M است.

زیرا به ازای هر $\alpha = card(A)$, $\beta = card(B)$, $\gamma = card(C)$ عضو M

داریم:

۱) $id_A : A \to A$, $x \mapsto x$ دوسوئی و به خصوص یک به یک است، پس $\alpha = card(A) \leqslant card(A) = \alpha$

۲) اگر $\alpha \leqslant \beta$ و $\beta \leqslant \alpha$ بنابر قضیه شرودر برنشتاین، $\alpha = \beta$.

۳) اگر $\alpha \leqslant \beta$ و $\beta \leqslant \gamma$ آنگاه توابع یک به یک $f : A \to B$ و $g : B \to C$ موجودند پس $g \circ f : A \to C$ یک به یک است و $\alpha = card(A) \leqslant card(C) = \gamma$

چند مثال: به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، داریم:

$$\aleph_0 = \aleph_0 + 0 \underset{0 \leqslant n}{\leqslant} \aleph_0 + n \leqslant \aleph_0 + \aleph_0 = 1\aleph_0 + 1\aleph_0$$

$$= 2\aleph_0 \underset{\text{اگر } n \geqslant 2}{\leqslant} n\aleph_0 \underset{n \leqslant \aleph_0}{\leqslant} \aleph_0 \aleph_0 = card(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \aleph_0$$

دیدید $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ شمارای نامتناهی است یعنی $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ یعنی $card(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = card(\mathbb{N}) = \aleph_0$

بنابر قضیه شرودر برنشتاین $\aleph_0 = n + \aleph_0 = n\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \aleph_0$

مثال: هرگاه A مجموعه ای نامتناهی و B مجموعه شمارا باشد، دیدید $A \cup B \sim A$

حال فرض کنید $\alpha = card(A)$ ، $\beta = card(B)$ می‌توانیم فرض کنیم $A \cap B = \phi$.

دیدید، A نامتناهی است یعنی $\alpha \geqslant \aleph_0$ و B شمارا است. یعنی $\beta \leqslant \aleph_0$ ، اما

بنابر یادآوری بالا

$$\underset{A\cap B=\phi}{\alpha+\beta = card(A\cup B)} \underset{A\cup B \sim A}{=} card(A) = \alpha$$

یافته‌ایم:

$$\alpha \geqslant \aleph_0 \wedge \beta \leqslant \aleph_0 \Rightarrow \alpha+\beta = \alpha$$

به خصوص:

$$\alpha \geqslant \aleph_0 \Rightarrow \alpha + \aleph_0 = \alpha$$

قضیه: $2^{\aleph_0} = c$.

برهان: تابع $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow P(\mathbb{Q})$ یک به یک است، زیرا اگر $x, y \in \mathbb{R}$ متمایز

$$x \longmapsto \{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$$

باشند فرض کنید $x<y$ آنگاه حتماً عدد گویای $x<q<y$ موجود است پس

$q \in \varphi(y) \setminus \varphi(x)$ و $\varphi(y) \neq \varphi(x)$.

چون $\varphi : \mathbb{R} \to P(\mathbb{Q})$ یک به یک است پس

$$c = card(\mathbb{R}) \leqslant card(P(\mathbb{Q})) \underset{P(\mathbb{Q}) \sim \{0,1\}^{\mathbb{Q}}}{=} card(\{0,1\}^{\mathbb{Q}})$$

$$= 2^{card(\mathbb{Q})} \underset{\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}}{=} 2^{card(\mathbb{N})} = 2^{\aleph_0}$$

بنابراین $c \leqslant 2^{\aleph_0}$

تابع $\gamma : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$ نیز یک به یک است پس $2^{\aleph_0} = \operatorname{card}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) \leqslant \operatorname{card}(\mathbb{R}) = c$

$f \longmapsto 0/f(1)f(2)\ldots$

چون $c \leqslant 2^{\aleph_0}$ و $2^{\aleph_0} \leqslant c$ بنابر قضیه شرودر برنشتاین $c = 2^{\aleph_0}$