جلسه بیست و پنجم

لم زرن: اگر $(A, \leqslant)$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب باشد که هر زنجیر در آن دارای کران بالا است.
آنگاه $(A, \leqslant)$ دارای عضو ماکسیمال است

اصل ماکسیمالیتی هاوسدورف: هر مجموعه جزئاً مرتب دارای زنجیر ماکسیمال است.

قضیه: لم زرن $\Leftarrow$ اصل ماکسیمالیتی هاوسدورف

برهان: فرض کنید $(A, \leqslant)$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب باشد و

$\Gamma = \{M \subseteq A \mid$ یک زنجیر در $(A, \leqslant)$ است $M\}$

$\phi \in \Gamma$ پس $\Gamma \neq \phi$

به وضوح $(\Gamma, \subseteq)$ جزئاً مرتب است.

فرض کنید $\{M_\alpha\}_{\alpha \in T}$ یک زنجیر در $(\Gamma, \subseteq)$ باشد.

به ازای هر $\alpha \in T$، $M_\alpha \subseteq A$ پس $\bigcup_{\alpha \in T} M_\alpha \subseteq A$

اگر $x, y \in \bigcup_{\alpha \in T} M_\alpha$، آنگاه $\alpha_1, \alpha_2 \in T$ چنان موجود است که $x \in M_{\alpha_1}$ و $y \in M_{\alpha_2}$.

چون $\{M_\alpha\}_{\alpha \in T}$ یک زنجیر در $(\Gamma, \subseteq)$ است پس $M_{\alpha_1} \subseteq M_{\alpha_2}$ یا $M_{\alpha_2} \subseteq M_{\alpha_1}$.

فرض کنید $M_{\alpha_2} \subseteq M_{\alpha_1}$ پس $x, y \in M_{\alpha_1}$ اما $M_{\alpha_1} \in \Gamma$ و M_{α_1} یک زنجیر

در $(A,\leqslant)$ است پس $x\leqslant y$ یا $y\leqslant x$ ؛ بنابراین $\bigcup_{\alpha\in T} M_\alpha$ یک زنجیر در

$(A,\leqslant)$ است اما به ازای هر $\beta\in T$ ، $M_\beta\subseteq\bigcup_{\alpha\in T} M_\alpha\,(\in\Gamma)$ پس $\bigcup_{\alpha\in T} M_\alpha$

یک کران بالای زنجیر $\{M_\alpha\}_{\alpha\in T}$ در $(\Gamma,\subseteq)$ است.

بنابر لم زرن $(\Gamma,\subseteq)$ دارای عضو ماکسیمال مانند D است.

چون $D\in\Gamma$ پس D یک زنجیر در $(A,\leqslant)$ است اگر D' نیز زنجیری در $(A,\leqslant)$ باشد
که $D\subseteq D'$ چون $D'\in\Gamma$ و D عضو ماکسیمال $(\Gamma,\subseteq)$ بود پس $D'=D$ و D
یک زنجیر ماکسیمال $(A,\leqslant)$ است.

قضیه: اصل ماکسیمالیتی هاوسدورف $\Longleftarrow$ لم زرن

برهان: فرض کنید $(A,\leqslant)$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب باشد که هر زنجیر در آن دارای کران بالا ست.
بنابر اصل ماکسیمالیتی هاوسدورف $(A,\leqslant)$ دارای زنجیر ماکسیمال مانند D است.
با توجه به شرط روی $(A,\leqslant)$ ؛ D دارای کران بالا مانند x در $(A,\leqslant)$ است. قرار دهید
$D'=D\cup\{x\}$. به ازای هر $a,b\in D$ چون $a\leqslant x$ و به دلیل زنجیر بودن D ، $b\leqslant a$ یا
$a\leqslant b$ ؛ پس D' یک زنجیر در $(A,\leqslant)$ است اما $D\subseteq D'$ و D زنجیر ماکسیمال در
$(A,\leqslant)$ است پس $D=D'$. بنابراین $x\in D\cup\{x\}=D'=D$.
اما اگر $y\in A$ به قسمی باشد که $x\leqslant y$ ، آنگاه به ازای هر $w\in D$ ، $w\leqslant x\leqslant y$ و
y نیز کران بالای D است و مشابه استدلال قبل $y\in D$. چون $y\in D$ و x کران بالای D
است پس $y\leqslant x$. چون $x\leqslant y$ و $y\leqslant x$ پس $x=y$.

پس x عضو ماکسیمال $(A,\leqslant)$ است و $(A,\leqslant)$ دارای عضو ماکسیمال است.

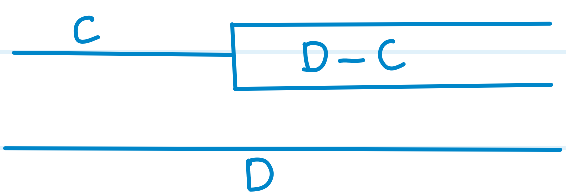
قضیه: لم زرن $\Longleftarrow$ اصل خوش‌ترتیبی

برهان: فرض کنید A مجموعه‌ای دلخواه باشد. اگر $C, D\subseteq A$ و $(C,\leqslant_1), (D,\leqslant_2)$ مجموعه‌های خوش‌ترتیب باشند، قرار دهید $(C,\leqslant_1)\leqslant^*(D,\leqslant_2)$

اگر

① $C\subseteq D$ و $\leqslant_1\subseteq\leqslant_2$

② به ازای هر $x\in C$ و $y\in D$ داریم $x\leqslant_2 y$



قرار دهید:

$$\Gamma=\{(T,\leqslant) : T\subseteq A \text{ و } (T,\leqslant) \text{ خوش‌ترتیب است}\}$$

الف) $(\emptyset,\emptyset)\in\Gamma$ پس $\Gamma\neq\emptyset$

ب) نشان می‌دهیم $(\Gamma,\leqslant^*)$ «جزئاً» مرتب است.

ج) هر زنجیر در $(\Gamma,\leqslant^*)$ دارای کران بالاست.

بنابر (الف)، (ب) و (ج) و لم زرن، $(\Gamma,\leqslant^*)$ دارای عضو ماکسیمال مانند $(D,\leqslant)$ است.

اگر $D=A$ حکم بدست آمد. اگر $D\neq A$، پس $x\in A\setminus D$ موجود است. قرار دهید $\leqslant_0=\leqslant\cup\big((D\cup\{x\})\times\{x\}\big)$ در این صورت می‌توان دید $(D\cup\{x\},\leqslant_0)$ خوش‌ترتیب است و عضو Γ می‌باشد و $(D,\leqslant)\leqslant^*(D\cup\{x\},\leqslant_0)$ اما $(D,\leqslant)$

عضو ماکسیمال $(\Gamma, \leq^*)$ است پس $(D,\leq) = (D\cup\{x\}, \leq_0)$

بنابراین $D = D\cup\{x\}$ و $x\in D$ که با نحوه انتخاب x در تناقض است.

پس تنها حالت ممکن عبارت است از $D=A$ و $(D,\leq)=(A,\leq)$ خوش ترتیب است پس

A خوش ترتیب شدنی است.

قضیه: اصل خوش ترتیبی $\Longleftarrow$ اصل انتخاب

برهان: فرض کنید $\mathcal{A}$ مجموعه‌ای در مجموعه‌های ناتهی باشد قرار دهید $X=\cup\mathcal{A}$ بنابر

اصل خوش ترتیبی رابطهٔ $\leq$ روی X چنان موجود است که $(X,\leq)$ خوش ترتیب است.

$f: \mathcal{A}\to\cup\mathcal{A}=X$ (اگر $T\in\mathcal{A}$ آنگاه $\emptyset\neq T\subseteq X$ و $(X,\leq)$ خوش ترتیب است.

$T\mapsto \min_{\leq}(T)$

پس $\min_{\leq} T$ موجود است بعلاوه $\min_{\leq} T\in T$

اما هر $T\in\mathcal{A}$ یک زیر مجموعه ناتهی مجموعه خوش ترتیب $(X,\leq)$ است پس دارای کوچکترین

عضو است (خوش تعریفی f) و $f(T)=\min_{\leq} T\in T$ در نتیجه $f:\mathcal{A}\to\cup\mathcal{A}=X$

یک تابع انتخاب است.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{اصل انتخاب} \arrow[dl, Rightarrow, dotted, bend right] \\
\text{لم زرن} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{اصل خوش ترتیبی} \arrow[u, Rightarrow] \\
\text{اصل ماکسیمالیتی هاوسدورف} &
\end{tikzcd}$$

قضیه: اصل انتخاب $\Longleftarrow$ لم زرن

برهان: در صورت تمایل در کتاب به عهده دانشجو

نتیجه: لم زرن، اصل ماکسیمالیتی هاوسدورف، اصل خوش‌ترتیبی، اصل انتخاب هم ارزند.

مثال: اگر α, β دو عدد اصلی باشند، آنگاه $\alpha \leqslant \beta$ یا $\beta \leqslant \alpha$.

برهان: فرض کنید $\alpha = card\, A$ و $\beta = card\, B$ باید نشان دهید تابع یک به یک $f: A \to B$ موجود است یا تابع یک به یک $g: B \to A$ موجود است.

☆ سؤال امتیازی: هرگاه $\alpha = card\,(A)$ عدد اصلی ترامتناهی باشد و $\alpha ! = card\,\{f \mid f: A \to A \text{ دوسویی است}\}$ نشان دهید $\alpha ! = 2^{\alpha}$

توجه: هرگاه θ عدد اصلی ترامتناهی و λ عدد اصلی ناصفر باشد:

$$\theta + \lambda = \theta \lambda = max(\theta, \lambda)$$

مهلت تحویل درایتا: ۲۷ خرداد