جلسه ششم

بنابر اصل بی‌نهایت دیدیم K مجموعه استقرایی، موجود است

بنابر اصل تصریح و اصل مجموعه توانی

$M = \{A \in P(K) : \text{مجموعه استقرایی است } A\}$

یک مجموعه است و چون $K \in M$ پس $M \neq \phi$ و می‌توان از $\bigcap M = \{x : \forall A \in M \quad x \in A\}$ صحبت کرد. اما $\bigcap M$ مجموعه‌ای استقرایی است زیرا:

۱- هر عضو M استقرایی است پس به ازای هر $A \in M$، $\phi \in A$ بنابراین $\phi \in \bigcap M$

۲- اگر $x \in \bigcap M$ آنگاه به ازای هر $A \in M$، $x \in A$ و چون A استقرایی است پس $x^+ = x \cup \{x\} \in A$ اما $A \in M$ دلخواه بود پس $x \cup \{x\} \in \bigcap M$

بنابر ① و ②، $\bigcap M$ مجموعه‌ای استقرایی است.

اگر L مجموعه‌ای استقرایی باشد آنگاه، $L \cap (\bigcap M)$ نیز استقرایی است زیرا:

۱) استقرایی اند $\bigcap M, L \Rightarrow \phi \in L \wedge \phi \in \bigcap M$

$$\Rightarrow \phi \in L \cap (\bigcap M)$$

۲) $\forall x \quad x \in L \cap (\bigcap M) \Rightarrow x \in L \wedge x \in \bigcap M$

استقرایی اند $\bigcap M$ و L $\Rightarrow x \cup \{x\} \in L \wedge x \cup \{x\} \in \bigcap M$

$$\Rightarrow x \cup \{x\} \in L \cap (\bigcap M)$$

بنابر ۱ و ۲، $L \cap (\cap M)$ استقرایی است

اما اگر $x \in L \cap (\cap M)$، آنگاه $x \in L \wedge x \in \cap M$ بخصوص $x \in \cap M$ و
به ازای هر $A \in M$، $x \in A$ اما $k \in M$ پس $x \in k$؛ بنابراین $L \cap (\cap M) \subseteq k$
پس $L \cap (\cap M) \in M$ اما به ازای هر $A \in M$، $\cap M \subseteq A$ پس $\cap M \subseteq L \cap (\cap M)$
همچنین $L \cap (\cap M) \subseteq \cap M$

به ازای هر دو مجموعه C, D، داریم $C \cap D \subseteq C$ (و $C \cap D \subseteq D$) زیرا به ازای
هر x بنابر حذف عاطف (اختصار) داریم

$x \in C \cap D \Rightarrow x \in C \wedge x \in D$ تعریف اشتراک

$\Rightarrow x \in C$ حذف عاطف

چون $L \cap (\cap M) \subseteq \cap M$ و $\cap M \subseteq L \cap (\cap M)$ پس $\cap M = L \cap (\cap M)$.

به ازای هر دو مجموعه C, D داریم:

$$C \subseteq D \wedge D \subseteq C \iff (\forall x (x \in C \to x \in D)) \wedge (\forall x (x \in D \to x \in C))$$

$$\iff (\forall x ((x \in C \to x \in D) \wedge (x \in D \to x \in C)))$$

$$\iff \forall x (x \in C \leftrightarrow x \in D)$$

$$\iff C = D$$ اصل گسترش

و چون $L \cap (\cap M) \subseteq L$ پس $\cap M \subseteq L$.

و $\cap M$ مجموعه‌ای استقرایی مشمول در هر مجموعه استقرایی است پس $\cap M$ به نوعی کوچکترین

مجموعه استقرایی است. این کوچکترین مجموعه استقرایی را با ω نمایش می دهیم.

$0 := \phi \in \omega$

$1 := \phi^{+} = \phi \cup \{\phi\} \in \omega$

$2 := 1^{+} = 1 \cup \{1\} = \{\phi\} \cup \{\{\phi\}\} = \{\phi, \{\phi\}\} \in \omega$

n^{+} را با $n+1$ نمایش می دهیم.

توجه: به ازای هر مجموعه A، $A \notin A$.

برهان: هرگاه مجموعه A داده شده باشد، بنابر اصل زوج سازی مجموعه $\{A\}$ موجود است.
$\{A\}$ مجموعه ای ناتهی است و بنابر اصل مبنا $x \in \{A\}$ چنان موجود است که $x \cap \{A\} = \phi$.
چون $x \in \{A\}$ پس $x = A$ و چون $x \cap \{A\} = \phi$ پس $A \cap \{A\} = \phi$.
اما $A \in \{A\}$ و $A \notin \phi = A \cap \{A\}$ پس $A \notin A$.

قضیه: مجموعه همه مجموعه ها وجود ندارد.

برهان: اگر V مجموعه همه مجموعه ها وجود داشته باشد، بنا بر اصل تصریح $R = \{x \in V : x \notin x\}$ یک مجموعه است و $R \in V$. حالات زیر را داریم:

حالت اول. $R \in R$. در این حالت بنابر نحوه تعریف R داریم $R \notin R$ که با فرض $R \in R$ در تناقض است.

حالت دوم. $R \notin R$. چون $R \notin R$ و $R \in V$ بنابر نحوه تعریف R داریم $R \in R$ که با فرض $R \notin R$ در تناقض است. بنابر تناقض حاصل از دو حالت فوق، V مجموعه نیست.

■

مثال برای استقراء: به ازای هر $n \geq 1$،

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, a^k\, b^{n-k} \quad (*)$$

به ازای $n \geq 1$ فرض کنید $p(n)$ عبارت $(*)$ باشد.

① $p(1)$ برقرار است زیرا

$$\sum_{k=0}^{1} C(1,k)\, a^k\, b^{1-k} = C(1,0)\, b + C(1,1)\, a = \frac{1!}{0!\,(1-0)!}\, b + \frac{1!}{1!\,(1-1)!}\, a$$
$$= b + a = (a+b)^1$$

② به ازای هر $m \geq 1$ داریم:

$$p(m) \Longrightarrow (a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C(m,k)\, a^k\, b^{m-k}$$

$$\Longrightarrow (a+b)^{m+1} = (a+b)^m (a+b) = a\,(a+b)^m + b(a+b)^m$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C(m,k)\, a^{k+1}\, b^{\overset{(m+1)-(k+1)}{m-k}} + \sum_{k=0}^{m} C(m,k)\, a^k\, b^{m+1-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1} C(m,k-1)\, a^k\, b^{m+1-k} + \sum_{k=0}^{m} C(m,k)\, a^k\, b^{m+1-k}$$

$$= C(m,m)\, a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \big(C(m,k-1) + C(m,k)\big)\, a^k\, b^{m+1-k} + C(m,0)\, b^{m+1}$$

$$= \frac{m!}{m!\,(m-m)!}\, a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C(m+1,k)\, a^k\, b^{m+1-k} + \frac{m!}{0!\,(m-0)!}\, b^{m+1}$$

$$= \frac{(m+1)!}{(m+1)!\,\big((m+1)-(m+1)\big)!}\, a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C(m+1,k)\, a^{k}\, b^{m+1-k}$$

$$+ \frac{(m+1)!}{0!\,\big((m+1)-0\big)!}\, b^{m+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} C(m+1,k)\, a^{k}\, b^{m+1-k}$$

$$\Longrightarrow p(m+1)$$

بنابر ① و ② و اصل استقراء ریاضی به ازای هر $1 \leq n$ ، $p(n)$ برقرار است

نحوه‌های درست و اشتباه نوشتن سورها:

$$\begin{cases} \forall x\in A\ (x>4) \\ \forall x\ (x^2 = x+4) \\ \cancel{\forall x\in A \longrightarrow x>4} \quad \text{اشتباه سمی!} \\ \\ \forall x\ (x\in A \longrightarrow x>4) \\ \forall x\in A\ (x>4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall x\ (p(x)) \\ \forall x\ (x\in A \longrightarrow q(x)) \\ \forall x\in A\ (q(x)) \end{cases}$$

$$\forall x\in A\ \exists y\in B\ (Q(x,y))$$

$$\{c\in Z : p(c)\}$$