جلسه سیزدهم

الف) $f: A \to B$ ، 1-1 است

ب) $|f^{-1}(y)| \leqslant 1 \quad \forall y \in B$

ج) $f(C \cap D) \supseteq f(C) \cap f(D) \quad \forall C, D \subseteq A$

د) $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D) \quad \forall C, D \subseteq A$

هـ) $f(C \setminus D) = f(C) \setminus f(D) \quad \forall C, D \subseteq A$

و) $f(X \setminus C) = f(X) \setminus f(C) \quad \forall C \subseteq A$

ز) $g: B \to E$ چنان موجود است که $g \circ f: A \to E$ یک به یک است

ح) اگر $A \neq \emptyset$ ، $g: B \to A$ چنان موجود است که $g \circ f = id_A$

ط) به ازای هر $k, g: D \to A$ اگر $f \circ k = f \circ g$ آنگاه $k = g$

ل) $f^{-1}(f(C)) \subseteq C \quad \forall C \subseteq A$

م) $f^{-1}(f(C)) = C \quad \forall C \subseteq A$

نکته: به ازای هر $C \subseteq A$ ، $C \subseteq f^{-1}(f(C))$ زیرا به ازای هر $x \in C$ داریم $f(x) \in f(C)$ پس $x \in f^{-1}(f(C))$

ل) $\Longleftrightarrow$ (م) بنابر "نکته" بالا

$$\left(f^{-1}(f(C)) = C\right) \equiv f^{-1}(f(C)) \subseteq C \wedge C \subseteq f^{-1}(f(C))$$
$$\equiv f^{-1}(f(C)) \subseteq C \wedge t$$
$$\equiv f^{-1}(f(C)) \subseteq C$$

(م) $\Longleftarrow$ (الف) : فرض کنید $x_1, x_2 \in A$ ، $f(x_2) = f(x_1)$ و (م) برقرار باشد

بنابر (م) ،

$$\{x_1\} \overset{(م)}{=} f^{-1}(f(\{x_1\})) = f^{-1}(\{f(x_1)\}) = f^{-1}(\{f(x_2)\})$$

$$= f^{-1}(f(\{x_2\})) \underset{(م)}{=} \{x_2\}$$

پس $x_1 = x_2$ و $f: A \to B$ یک به یک است .

(الف) $\Longleftarrow$ (ل) : فرض کنید $f: A \to B$ یک به یک باشد و $C \subseteq A$ داریم :

$\forall x$

$$x \in f^{-1}(f(C)) \Rightarrow f(x) \in f(C) \Rightarrow \exists z \in C \quad f(x) = f(z)$$

$$\Rightarrow \exists z \in C \quad x = z \Rightarrow x \in C$$

چون f ، یک به یک است

پس $f^{-1}(f(C)) \subseteq C$.

(الف) $\Longleftarrow$ (ز) : $id_B: B \to B$ را درنظر بگیرید و فرض کنید $f: A \to B$ یک به یک باشد .

به ازای هر $x \in A$ ، $(id_B \circ f)(x) = id_B(f(x)) = f(x)$

پس $id_B \circ f = f: A \to B$

(ز) $\Longleftarrow$ (الف) : فرض کنید $g: B \to E$ چنان باشد که $g \circ f: A \to E$ یک به یک است. به ازای هر $x_1, x_2 \in A$ داریم :

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

$g \circ f: A \to E$ یک به یک است

بنابراین $f: A \to B$ یک به یک است

(الف) $\Leftarrow$ (ب) : فرض کنید $f: A \to B$ یک به یک باشد و $k, g: D \to A$ چنان باشند که $f \circ g = f \circ k$. داریم:

$$f \circ k = f \circ g \Rightarrow \forall x \in D \quad (f \circ g)(x) = (f \circ k)(x)$$

$$\Rightarrow \forall x \in D \quad f(g(x)) = f(k(x))$$

$$\Rightarrow \forall x \in D \quad g(x) = k(x)$$

$f: A \to B$ یک به یک است

$$\Rightarrow g = k$$

$k, g: D \to A$ تابعند

(ب) $\Leftarrow$ (الف): فرض کنید (ب) برقرار باشد و $x_1, x_2 \in A$ چنان باشند که $f(x_1) = f(x_2)$.

$E \neq \emptyset$ را دلخواه در نظر بگیرید.

تابعهای ثابت:

$$C_1: E \to A \qquad x \mapsto x_1 \qquad \text{و} \qquad C_2: E \to A \qquad x \mapsto x_2$$

را در نظر بگیرید، به ازای هر $x \in E$،

$$(f \circ C_1)(x) = f(C_1(x)) = f(x_1) \underset{\text{بنابر فرض}}{=} f(x_2) = f(C_2(x)) = (f \circ C_2)(x)$$

پس $f \circ C_1 = f \circ C_2$ و بنابر فرض (ب) $C_1 = C_2$. $a \in E$ را در نظر بگیرید. (چون $E \neq \emptyset$، a حتماً موجود است) پس $x_1 = C_1(a) \underset{C_1 = C_2}{=} C_2(a) = x_2$ و یک به یک بودن f تکمیل می‌گردد.

(ج) $\Leftarrow$ (الف) : فرض کنید $g: B \to A$ چنان باشد که $g \circ f = id_A$ و $x_1, x_2 \in A$ چنان باشند

که $f(x_2)=f(x_1)$ پس:

$$x_1 = id_A(x_1) = (g\circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g\circ f)(x_2) = id_A(x_2) = x_2$$

و یک به یک بودن $f: A\to B$ بدست می آید.

(الف) $\Longleftarrow$ (ج) : اگر $f: A\to B$ یک به یک باشد، آنگاه چون $f: A\to B$ تابع است

پس $f: A\to f(A)$ نیز تابع است (بنابر یکی از قضایای قبل) اما $f: A\to f(A)$ دوسویی است

بنابر نکته پایین، $f^{-1}: f(A)\to A$ تابع است. فرض کنید $C = B\setminus f(A)$ و $A\neq\phi$ پس

$q\in A$ را دلخواه انتخاب کنید تابع ثابت $h: \underbrace{B\setminus f(A)}_{C} \longrightarrow A$ را در نظر بگیرید.

$$x \longmapsto q$$

پس $f(A)\cap f(B\setminus f(A)) = \phi$

$$\forall x\in f(A)\cap f(B\setminus f(A)) \qquad h(x) = f^{-1}(x)$$

پس

$$h\cup f^{-1}: (B\setminus f(A))\cup f(A) \longrightarrow A\cup A$$

تابع است اما $f(A)\subseteq B$ پس $(B\setminus f(A))\cup f(A) = B$ بنابراین $g:=h\cup f^{-1}: B\to A$

تابع است.

به ازای هر $x\in A$، $(x, f(x))\in f$ ، $(f(x), x)\in f^{-1}\subseteq g$ پس $(x,x)\in g\circ f$

بنابراین $(g\circ f)(x) = x = id_A(x)$ اما $g\circ f, id_A: A\to A$ تابعند پس $g\circ f = id_A$.

نکته: اگر $f: A\to B$ دو سویی باشد، آنگاه $f^{-1}: B\to A$ تابعی دو سویی است.

برهان: فرض کنید $f: A\to B$ دو سویی باشد پس به دلیل پوشا بودن $f: A\to B$ داریم:

$$B = f(A) = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Dom}(f^{-1})$$

بعلاوه $f\subseteq A\times B$ پس $f^{-1}\subseteq B\times A$. همچنین به ازای هر x, y, z داریم:

$$(x,y)\in f^{-1} \wedge (x,z)\in f^{-1} \Rightarrow (y,x)\in f \wedge (z,x)\in f$$

$$\Rightarrow x=f(y) \wedge x=f(z) \Rightarrow f(y)=f(z) \Rightarrow y=z$$

$f:A\to B$ یک به یک است

بنابر موارد فوق $f^{-1}:B\to A$ تابع است.

همچنین $Im(f^{-1})=Dom(f)=A$ پس $f^{-1}:B\to A$ پوشا است. اگر $(x,y),(z,y)\in f^{-1}$ آنگاه $(y,x),(y,z)\in f$ وچون $f:A\to B$ تابع است پس $x=z$ بنابراین $f^{-1}:A\to B$ یک به یک نیز می باشد.

سؤال: هرگاه تابع یک به یک $f:A\to B$ داده شده باشد و $A\neq\emptyset$، نشان دهید تعداد متناهی $g:B\to A$ با شرط $g\circ f=id_A$ موجود است اگر و تنها اگر یکی از حالات زیر رخ دهد:

① $f:A\to B$ پوشا ست

② $B\setminus f(A)$ و A متناهی اند

③ A تک عضوی است