جلسه هفدهم

مجموعه ای را نامتناهی نامیم اگر با یک زیرمجموعه سره خود در تناظر دوسویی باشد. یعنی A نامتناهی است اگر $B \subsetneq A$ چنان موجود باشد که $A \sim B$ (یعنی تابع دوسویی $g: A \to B$ موجود است)

توجه: A با یک زیرمجموعه سره خود در تناظر دوسویی است $\Longleftrightarrow$ تابع یک به یک و غیرپوشای $f: A \to B$ موجود باشد

برهان. "$\Longleftarrow$" فرض کنید $B \subsetneq A$ به قسمی باشد که $A \sim B$ پس تابع دوسویی $f: A \to B$ موجود است. بنابراین $f: A \to A$ یک به یک است اما پوشا نیست چون $f(A) = B \neq A$.

"$\Longrightarrow$" فرض کنید تابع یک به یک و غیرپوشای $g: A \to A$ موجود باشد، بنابراین $C := g(A) \neq A$ پس $g: A \to g(A) = C$ دوسویی است و $C \sim A$ و C زیرمجموعه سره A و همتوان A می‌باشد.

تعریف: مجموعه A را متناهی نامیم اگر نامتناهی نباشد.

قضیه: اگر $A \subseteq B$ داریم:

A نامتناهی است $\Longleftarrow$ B نامتناهی است

B متناهی است $\Longleftarrow$ A متناهی است

برهان. فرض کنید $A \subseteq B$ و A نامتناهی باشد پس $C \subsetneq A$ چنان موجود است که $C \sim A$ اما

$$B\setminus A \sim B\setminus A \quad \text{و} \quad C \cap (B\setminus A) = A \cap (B\setminus A) = \emptyset$$

$C \subseteq A$

پس

$$C \cap (B\setminus A) \subseteq \underbrace{A \cap (B\setminus A)}_{\emptyset}$$

بنابراین $C \cup (B\setminus A) \sim A \cup (B\setminus A) = \underset{A \subseteq B}{B}$ و $C \cup (B\setminus A)$ یک زیرمجموعهٔ سرهٔ B می‌باشد.

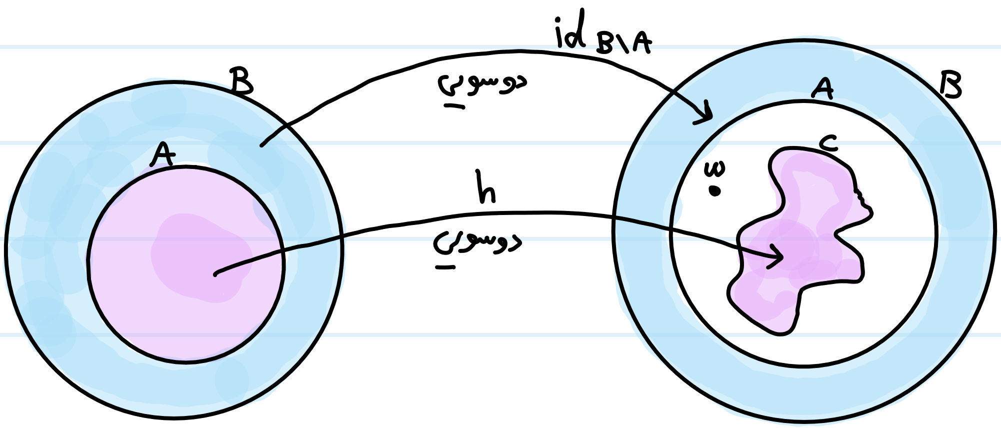
چون $C \subsetneq A \subseteq B$ و $B\setminus A \subseteq B$ پس $C\cup(B\setminus A) \subseteq B\cup B = B$

و $$B\setminus(C\cup(B\setminus A)) = \underbrace{(A\cup(B\setminus A))}_{B \text{ چون } A\subseteq B}\setminus(C\cup(B\setminus A))$$

$$= A\setminus(C\cup(B\setminus A)) = \underbrace{(A\setminus C)}_{\subseteq A}\cap\underbrace{(A\setminus(B\setminus A))}_{A} = A\setminus C \neq \emptyset$$

چون $C \subsetneq A$

و B با یک زیرمجموعه سره خود در تناظر دوسویی است پس B نامتناهی است



قضیه: فرض کنید $A\sim B$ داریم:

A نامتناهی است $\Longleftrightarrow$ B نامتناهی است

A متناهی است $\Longleftrightarrow$ B متناهی است

برهان. فرض کنید $A\sim B$ و A نامتناهی است، نشان می‌دهیم B نیز نامتناهی است. چون $A\sim B$ پس تابع دوسویی $f: A\to B$ موجود است. چون A نامتناهی است پس C زیرمجموعه سره A چنان موجود است که $C\sim A$.

$f: A\to B$ دوسویی و در نتیجه یک به یک است پس $f|_C : C\to B$ یک به یک است بنابراین $f|_C : C\to f(C)$ دوسویی است و $C\sim f(C)$.

چون $C\sim f(C)$ و $A\sim C$ و $B\sim A$ پس $B\sim f(C)$ اما $f(C)\subseteq B$ و

$$B\setminus f(C) = f(A)\setminus f(C) = f(A\setminus C) \neq \emptyset$$

$f:A\to B$ یک به یک است $A\setminus C\neq\emptyset$

در نتیجه $f(C)$ یک زیرمجموعه سره B و همتوان B است، پس B نامتناهی است.

قضیه: هرگاه A و w داده شده باشد:

A نامتناهی است $\Longleftrightarrow$ $A\setminus\{w\}$ نامتناهی است

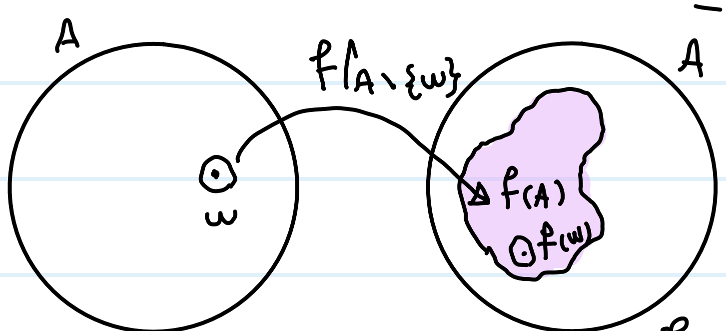
A متناهی است $\Longleftrightarrow$ $A\setminus\{w\}$ متناهی است

برهان. اگر $w\notin A$، آنگاه $A=A\setminus\{w\}$ و حکم واضح است پس فرض کنید $w\in A$.
اگر $A\setminus\{w\}$ نامتناهی باشد چون $A\setminus\{w\}\subseteq A$ پس بنا بر قضیه ای که امروز ثابت کردیم، $A\setminus\{w\}$ نیز نامتناهی است. حال فرض کنید A نامتناهی باشد، نشان می‌دهیم $A\setminus\{w\}$ نامتناهی است.

چون A نامتناهی است پس تابع یک به یک و غیرپوشای $f:A\to A$ موجود است. بنابراین $f:A\to f(A)$ دوسویی است و $f(A)\neq A$، $f\restriction_{A\setminus\{w\}}: A\setminus\{w\}\to f(A)$ یک به یک است و بدلیل یک به یک بودن f،

$$f(A\setminus\{w\}) = f(A)\setminus f\{w\} = f(A)\setminus\{f(w)\}$$

درنتیجه $f\restriction_{A\setminus\{w\}}: A\setminus\{w\}\to f(A)\setminus\{f(w)\}$ دوسویی است.



حالات زیر را داریم:

حالت اول: $w\notin f(A)$. پس

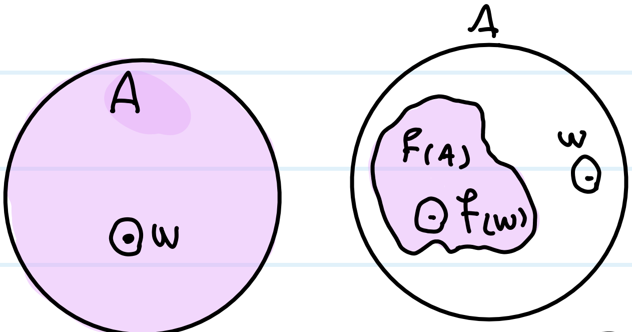
$$f(A)\setminus\{f(w)\} \subsetneq f(A) \subseteq A\setminus\{w\}$$

چون $w\notin f(A)$ چون $f(w)\in f(A)$

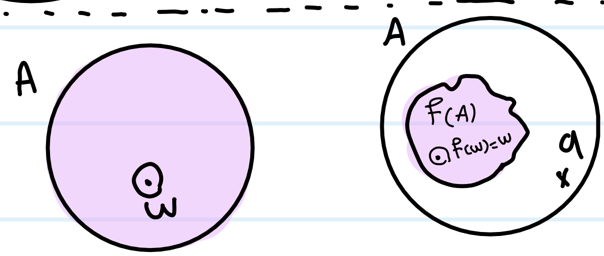
پس $A\setminus\{w\} \subsetneq f(A)\setminus\{f(w)\}$ وهم‌توان $A\setminus\{w\}$ است پس $A\setminus\{w\}$ نامتناهی است.

حالت دوم: $w=f(w)$. در این حالت چون $f:A\to A$ پوشاست پس $q\in A\setminus f(A)$ موجوداست به‌خصوص $q\neq f(w)$ پس $q\neq w$ بنابراین $q\in A\setminus\{w\}$ و چون $q\notin f(A)$ پس $q\notin f(A)\setminus\{f(w)\} = f(A)\setminus\{w\}$

درنتیجه $f(A)\setminus\{w\}$ زیرمجموعه سره $A\setminus\{w\}$ است وهم‌توان $A\setminus\{w\}$ باشد پس $A\setminus\{w\}$ نامتناهی است.



حالت اول!!



شکل حالت دوم:

حالت سوم: $f(w)\neq w\in f(A)$، در این حالت $w\neq x_0\in A$ چنان موجود است که $f(x_0)=w$.

و $f:A\to A$ یک به یک و غیرپوشاست پس یک به یک است $q\in A\setminus f(A)$ موجوداست. بخصوص

$A\setminus\{w,x_0\}\to f(A\setminus\{w,x_0\})$

$f\restriction_{A\setminus\{w,x_0\}}$

$= f(A)\setminus f\{w,x_0\}$ چون f یک به یک است.

$= f(A)\setminus\{f(w),f(x_0)\}$

$= f(A)\setminus\{w,f(w)\}$ $w=f(x_0)$

دوسویی است. پس $f(A)\setminus\{w,f(w)\}\sim A\setminus\{w,x_0\}$ اما $\{f(w)\}\sim\{x_0\}$

و $(A\setminus\{w,x_0\})\cap\{x_0\}=\emptyset=(f(A)\setminus\{w,f(w)\})\cap\{f(w)\}$

پس $f(A)\setminus\{w\}\underset{w\neq f(w)}{=}(f(A)\setminus\{w,f(w)\})\cup\{f(w)\}\sim(A\setminus\{w,x_0\})\cup\{x_0\}=A\setminus\{w\}$

$x_0\neq w$ (چون $f(x_0)=w$ و $w\neq f(w)$ پس $f(w)\neq f(x_0)$ اما f یک‌به‌یک است پس $w\neq x_0$

اما $f(A)\setminus\{w\}\underset{\Downarrow\; f(A)\subseteq A}{\subseteq}A\setminus\{w\}$ و چون $f(A)\subsetneq A$

پس $q\in A\setminus f(A)$ موجود است اما $w\in f(A)$ پس $q\neq w$ بنابراین $q\in(A\setminus\{w\})\setminus(f(A)\setminus\{w\})$

بنابراین $f(A)\setminus\{w\}$ زیرمجموعه سره $A\setminus\{w\}$ و هم‌توان آن است پس در این حالت نیز $A\setminus\{w\}$

نامتناهی است. بنابر سه حالت فوق نامتناهی بودن $A\setminus\{w\}$ ثابت می‌شود.