جلسه هشتم

مجموعه‌های $a_1, \dots, a_n$ با شرط $a_1 \in a_2 \in \dots \in a_n \in a_1$

نمی‌توانند وجود داشته باشند، زیرا در غیر این صورت مجموعه $\{a_1, \dots, a_n\}$ در اصل مبنا صدق

نخواهد کرد، که تناقض است.

اگر $(x,y) = \{\{x\}, \{x,y\}\}$ نشان دهید $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

"$\Leftarrow$" واضح است

"$\Rightarrow$" فرض کنید $(a,b) = (c,d)$ حالات زیر را داریم:

حالت اول: $a = b$، در این حالت:

$$\{a\} \in \{\{a\}\} = \{\{a\}, \{a, \underbrace{a}_{b}\}\} = (a,b) = (c,d) = \{\{c\}, \{c,d\}\}$$

پس $\{c,d\} \in \{\{a\}\}$ بنابراین $\{c,d\} = \{a\}$ و از آنجا $c,d \in \{a\}$ که نشان می‌دهد

$c = a$ و $d = a = b$.

حالت دوم: $c = d$. در این حالت مشابه حالت اول $a = c$, $b = d$

حالت سوم: $a \neq b$ و $c \neq d$. در این حالت:

$$\{a\} \in \{\{a\}, \{a,b\}\} = (a,b) = (c,d) = \{\{c\}, \{c,d\}\}$$

پس $\{a\} = \{c\}$ یا $\{a\} = \{c,d\}$

اگر $\{a\} = \{c,d\}$، آنگاه $c,d \in \{a\}$ پس $c = a = d$ که با $c \neq d$ در تناقض است

پس $\{a\} = \{c\}$ و از آنجا $a \in \{c\}$ و $a = c$.

همچنین

$$\{a,b\} \in \{\{a\},\{a,b\}\} = (a,b) = (c,d) = \{\{c\},\{c,d\}\}$$

پس $\{a,b\} = \{c\}$ یا $\{a,b\} = \{c,d\}$.

اما اگر $\{a,b\} = \{c\}$ آنگاه $b \in \{c\}$ پس $b = c = a$ که با $a \neq b$ در تناقض است

بنابراین $\{a,b\} \neq \{c\}$ پس $\{a,b\} = \{c,d\}$. درنتیجه $d \in \{a,b\}$ و از آنجا $d = a = c$

یا $d = b$ اما فرض کرده بودیم $d \neq c$ پس $d = b$.

بنابر سه حالت فوق $a = b$ و $c = d$.

تعریف دیگر زوج مرتب : $\{\{x\},\{x,y\}\}$ $\{x,\{x,y\}\}$

A :

$$\bigcup A = \{x : \underbrace{\exists a \in A \quad x \in a}^{\exists a\ (a \in A \wedge x \in a)}\}$$

$A \neq \emptyset$:

$$\bigcap A = \{x : \forall a \in A \quad x \in a\}$$

نکته : $\emptyset = \bigcup \emptyset$. زیرا اگر $x \in \bigcup \emptyset$ آنگاه a چنان موجود است که $\underbrace{\underbrace{a \in \emptyset}_{c} \wedge x \in a}_{c}$

که تناقض است بنابراین $\bigcup \emptyset = \emptyset$.

$$A = \{ C_n : n \geq 1 \}$$

$$\{ C_\alpha : \alpha \in \Gamma \}$$

$$f : \overset{\Gamma}{\cancel{\mathbb{N}}} \longrightarrow \boxed{\quad}$$

$$\underset{\alpha}{\cancel{n}} \longmapsto \underset{C_\alpha}{\cancel{C_n}}$$

اگر $A = \{ C_\alpha : \alpha \in \Gamma \}$، آنگاه

$$\bigcup A =: \bigcup_{\alpha \in \Gamma} C_\alpha = \{ x : \exists \alpha \in \Gamma \ \ x \in C_\alpha \}$$

$$\parallel$$

$$\{ x : \exists a \in A \ \ x \in a \}$$

و اگر $\Gamma \neq \emptyset$، آنگاه

$$\bigcap A =: \bigcap_{\alpha \in \Gamma} C_\alpha = \{ x : \forall \alpha \in \Gamma \ \ x \in C_\alpha \}$$

$$\parallel$$

$$\{ x : \forall a \in A \ \ x \in a \}$$

اگر A , B دو مجموعه باشند، بنابر اصل زوج سازی $\{A, B\}$ مجموعه است. بنابر اصل اجتماع $\bigcup \{A, B\} = A \cup B$ مجموعه است. بنابر اصل مجموعه توانی $P(A \cup B)$ مجموعه است.

بنابر اصل مجموعه توانی $P(P(A \cup B))$ مجموعه است.

بنابر اصل تصریح:

$$\{ x \in P(P(A \cup B)) : \exists a \in A \ \exists b \in B \ \underbrace{\{\{a\}, \{a, b\}\}}_{(a,b)} = x \}$$

مجموعه است،

که همان $A\times B := \{(a,b) : a\in A\ ,\ b\in B\}$

یعنی حاصل ضرب دکارتی یا کارتزین A در B است.

$R\subseteq A\times B$ را یک رابطه از A در B نامیم. بجای $(a,b)\in R$ از نماد aRb نیز استفاده می‌کنیم.

بعلاوه:

$Dom(R) := \{x\in A : \exists y \quad (x,y)\in R\} \longrightarrow$ دامنه R

$Im(R) := \{y\in B : \exists x \quad (x,y)\in R\} \longrightarrow$ مجموعه تصویر R

اگر A, B, C مجموعه باشند آنگاه:

۱ $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

۲ $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$

۳ $(B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$

۴ $(B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$

۱

$\forall (x,y)$

$(x,y)\in A\times(B\cup C) \Longleftrightarrow x\in A \wedge y\in B\cup C$ تعریف ضرب دکارتی

$\Longleftrightarrow x\in A \wedge (y\in B \vee y\in C)$ تعریف اجتماع

$\Longleftrightarrow (x\in A \wedge y\in B) \vee (x\in A \wedge y\in C)$ توزیع پذیری در جبر گزاره ها

$\Longleftrightarrow (x,y)\ A\times B \quad \vee \quad (x,y)\in A\times C$ تعریف ضرب دکارتی

$\Longleftrightarrow (x,y)\in (A\times B)\cup(A\times C)$ تعریف اجتماع

(۲) و (۳) , (۴) به‌طور مشابه ثابت می‌شود. همچنین داریم:

$$\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha\right)\times B = \bigcup_{\alpha\in\Gamma}(A_\alpha\times B)$$

$$\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha\right)\times B = \bigcap_{\alpha\in\Gamma}(A_\alpha\times B) \qquad \Gamma\neq\emptyset$$

$$\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha\right)\cap B = \bigcup_{\alpha\in\Gamma}(A_\alpha\cap B)$$

$$\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha\right)\cup B = \bigcap_{\alpha\in\Gamma}(A_\alpha\cup B) \qquad \Gamma\neq\emptyset$$

در حوزه‌های ناتهی از موارد زیر می‌توان استفاده کرد:

$$(\forall x\ \ p(x))\wedge q \equiv \forall x\ (p(x)\wedge q) \qquad (\forall x\in\emptyset\ \ p(x))\wedge q\equiv q$$

$$(\forall x\ \ p(x))\vee q \equiv \forall x\ (p(x)\vee q) \qquad (\forall x\in\emptyset\ \ (p(x)\wedge q))\equiv t$$

$$(\exists x\ \ p(x))\wedge q \equiv \exists x\ (p(x)\wedge q)$$

$$(\exists x\ \ p(x))\vee q \equiv \exists x\ (p(x)\vee q)$$

$$(\exists x\ \ p(x))\vee(\exists x\ \ q(x)) \equiv \exists x\ (p(x)\vee q(x))$$

$$(\forall x\ \ p(x))\wedge(\forall x\ \ q(x)) \equiv \forall x\ (p(x)\wedge q(x))$$

$$(\exists x\ \ p(x))\wedge(\exists x\ \ q(x)) \Longleftarrow \exists x\ (p(x)\wedge q(x))$$

$$(\forall x\ \ p(x))\vee(\forall x\ \ q(x)) \Longrightarrow \forall x\ (p(x)\vee q(x))$$

$$(A\times B)\setminus(A\times C) = A\times(B\setminus C)$$

به ازای هر (x,y) داریم:

$(x,y)\in(A\times B)\setminus(A\times C) \iff (x,y)\in A\times B \wedge (x,y)\notin A\times C$ تعریف تفاضل مجموعه ها

$\iff (x\in A \wedge y\in B)\wedge\neg(x\in A\wedge y\in C)$ تعریف حاصل ضرب دکارتی

$\iff y\in B\wedge x\in A\wedge(x\notin A\vee y\notin C)$ دمورگان و جابجایی در جبر گزاره ها

$\iff y\in B\wedge\big(\underbrace{(x\in A\wedge x\notin A)}_{c}\wedge(x\in A\wedge y\notin C)\big)$ توزیع پذیری در جبر گزاره ها

$\iff y\in B\wedge(x\in A\wedge y\notin C)$

$\iff x\in A\wedge y\in B\wedge y\notin C$ جابجایی

$\iff x\in A\wedge y\in B\setminus C$ تعریف تفاضل مجموعه ها

$\iff (x,y)\in A\times(B\setminus C)$

$$X\setminus\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha=\bigcap_{\alpha\in\Gamma}(X\setminus A_\alpha)$$

$$\Big(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\Big)'=\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A'_\alpha$$ با فرض $(\forall\alpha\ A_\alpha\subseteq X)$

$x\in\Big(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\Big)' \iff x\notin\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha$

$\iff \neg(\exists\alpha\in\Gamma\ \ x\in A_\alpha)$

$\iff \forall\alpha\in\Gamma\ \ x\notin A_\alpha$

$\iff \forall\alpha\in\Gamma\ \ x\in A'_\alpha$

$\iff x\in\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A'_\alpha$

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$$

$$(A \times B) \setminus (C \times D) = ((A \setminus C) \times B) \cup (A \times (B \setminus D))$$