جلسه هفتم

هرگاه A, B, C زیرمجموعه‌های X باشند، داریم:

الف) $A \cup \phi = A \cap X = A$

ب) $A \cup A = A \cap A = A$ خودتوانی

ج) $A \cup B = B \cup A$ جابه‌جایی

$A \cap B = B \cap A$

د) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ شرکت‌پذیری

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

هـ) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ توزیع‌پذیری

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

همچنین اگر به ازای هر $D \subseteq X$ ، $X \setminus D$ را با D' نمایش می‌دهیم، آنگاه:

و) $\phi' = X \quad , \quad X' = \phi$

ز) $(A')' = A$

ح) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ دمورگان

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

ط) $A \subseteq B \iff B' \subseteq A'$

ی) $A \cap A' = \phi , \quad A \cup A' = X$

ک) $A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

ل) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

م) $A \cap B \subseteq A \ , \ A \subseteq A \cup B$

ن) $A \setminus B = A \cap B'$

برهان :

اصل گسترش

$$(A = B) \equiv \left(\forall x \ (x \in A \leftrightarrow x \in B)\right)$$

$$\equiv \forall x \left((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)\right)$$

$$\overset{\star}{\equiv} \left(\forall x \ (x \in A \rightarrow x \in B)\right) \vee \left(\forall x \ (x \in B \rightarrow x \in A)\right)$$

$$\equiv (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\forall x \ \left(p(x) \wedge q(x)\right) \equiv \left(\forall x \ p(x)\right) \wedge \left(\forall x \ q(x)\right) \quad \star \\ &\exists x \ \left(p(x) \vee q(x)\right) \equiv \left(\exists x \ p(x)\right) \vee \left(\exists x \ q(x)\right) \end{aligned}}$$

ل) $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow \left(\forall x \ (x \in A \rightarrow x \in B)\right) \wedge \left(\forall x \ (x \in B \rightarrow x \in C)\right)$

$$\Rightarrow \forall x \left((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in C)\right)$$

تعدی در جبر گزاره ها

$$\Rightarrow \forall x \ (x \in A \rightarrow x \in C)$$

$$\Rightarrow A \subseteq C$$

م)

تعریف اشتراک $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$

حذف عاطف $\Rightarrow x \in A$

پس $A \cap B \subseteq A$

همچنین به ازای هر x داریم:

$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B$ ادخال فاصل

$\Rightarrow x \in A \cup B$ تعریف اجتماع

پس $A \subseteq A \cup B$ تعریف اجتماع

ب) به ازای هر x داریم:

$x \in A \cup A \equiv x \in A \vee x \in A$ تعریف اجتماع

$\equiv x \in A$ خودتوانی در جبر گزاره ها

پس $A \cup A = A$

مجدداً به ازای هر x داریم:

$x \in A \cap A \equiv x \in A \wedge x \in A$ تعریف اشتراک

$\equiv x \in A$ خودتوانی در جبر گزاره ها

ج) به ازای هر x داریم:

$x \in A \cup B \equiv x \in A \vee x \in B$ تعریف اجتماع

$\equiv x \in B \vee x \in A$ جابه جایی در جبر گزاره ها

$\equiv x \in B \cup A$ تعریف اجتماع

پس بنا بر اصل گسترش $A \cup B = B \cup A$ ، به طور مشابه $A \cap B = B \cap A$

د) به ازای هر x داریم:

$x \in A \cup (B \cup C) \equiv x \in A \vee x \in B \cup C$ تعریف اجتماع

$\equiv x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$ تعریف اجتماع

$\equiv (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C$ شرکت پذیری در جبر گزاره ها

$\equiv x \in A \cup B \vee x \in C$ تعریف اجتماع

$\equiv x \in (A \cup B) \cup C$

بنا بر اصل گسترش $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$، به طور مشابه

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

هـ) به ازای هر x داریم:

$x \in A \cup (B \cap C) \equiv x \in A \vee x \in B \cap C$ تعریف اجتماع

$\equiv x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$ تعریف اشتراک

$\equiv (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$ توزیع پذیری در جبر گزاره‌ها

$\equiv x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C$ تعریف اجتماع

$\equiv x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

بنا بر اصل گسترش $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$، به طور مشابه

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

الف) به ازای هر x داریم:

تعریف اجتماع $\quad x \in A \cup \emptyset \equiv x \in A \vee x \in \emptyset$

(C گزاره همواره نادرست) $\quad \equiv x \in A \vee C$

$\equiv x \in A$

پس $\quad A = A \cup \emptyset$

و به ازای هر x داریم:

تعریف اشتراک $\quad x \in A \cap \emptyset \equiv x \in A \wedge x \in \emptyset$

$\equiv x \in A \cap C$

$\equiv C$

$\equiv x \in \emptyset$

پس $\quad A \cap \emptyset = \emptyset$

فرض کنید $A \subseteq E$ و $B \subseteq F$ داریم:

$$A \subseteq E \wedge B \subseteq F \Rightarrow (\forall x\ (x \in A \rightarrow x \in E)) \wedge (\forall x\ (x \in B \rightarrow x \in F))$$

$$\Rightarrow \forall x\ ((x \in A \rightarrow x \in E) \wedge (x \in B \rightarrow x \in F))$$

بنابر قیاس ذو الوجهین در جبر گزاره ها $\quad \Rightarrow \forall x\ (x \in A \wedge x \in B \rightarrow x \in E \wedge x \in F)$

تعریف اشتراک $\quad \Rightarrow \forall x \quad x \in A \cap B \rightarrow x \in E \cap F$

$\Rightarrow A \cap B \subseteq E \cap F$

یافته ایم: $\quad A \subseteq E \wedge B \subseteq F \Rightarrow A \cap B \subseteq E \cap F$

به طور مشابه: $\quad A \subseteq E \wedge B \subseteq F \Rightarrow A \cup B \subseteq E \cup F$

حال فرض کنید $A \subseteq D$ ، چون $D \subseteq D$ پس $A \cup D \subseteq D \cup D \overset{(ب)}{=} D$ به علاوه دیدید

(م) که $D \subseteq A \cup D$ بنابر (ک) $A \cup D = D$.

مجدداً اگر $A \subseteq D$ چون $A \subseteq A$ پس $A = A \cap A \overset{(ب)}{\subseteq} A \cap D$

و دیدید (م) $A \cap D \subseteq A$ ، بنابر (ک) $A \cap D = A$

یافته‌ایم:

$$A \subseteq D \Rightarrow A \cup D = D$$

$$A \subseteq D \Rightarrow A \cap D = A$$

و چون همواره بنابر (م) $A \cap D \subseteq D$, $A \subseteq A \cup D$ یافته‌ایم:

$$A \subseteq D \Longleftrightarrow A \cup D = D$$

$$A \subseteq D \Longleftrightarrow A \cap D = A$$

به خصوص $A \cup X = X$, $A \cap X = A$

و) به ازای هر x داریم:

$$x \in \emptyset' = X \setminus \emptyset \Longleftrightarrow x \in X \wedge x \notin \emptyset$$

$$\Longleftrightarrow x \in X \wedge t$$

$$\Longleftrightarrow x \in X$$

پس $X \setminus \emptyset = X$

همچنین به ازای هر x داریم:

$$x \in X' = X \setminus X \Longleftrightarrow x \in X \wedge x \notin X$$

$$\Longleftrightarrow c$$

$$\Longleftrightarrow x \in \emptyset$$

پس $X \setminus X = \emptyset$.

یادآوری:

$A - B$

$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$

$C + D = \{x + y : x \in C,\ y \in D\} \qquad C, D \subseteq \mathbb{R}$

توجه کنید:

$$\forall x \quad x \in A' \longleftrightarrow x \in X \wedge x \notin A$$

اما چون $A \subseteq X$، داریم:

$$\forall x \in X \quad x \in A' \longleftrightarrow x \notin A$$

بنابراین:

$$\forall x \in X \quad x \in (A')' \Longleftrightarrow x \notin A' \Longleftrightarrow x \in A$$

پس $(A')' = A$

$$\forall x \in X \quad x \in (A \cup B)' \Longleftrightarrow x \notin A \cup B$$

$$\Longleftrightarrow \neg(x \in A \vee x \in B)$$

$$\Longleftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$$

$$\Longleftrightarrow x \in A' \wedge x \in B'$$

$$\Longleftrightarrow x \in A' \cap B'$$

پس $(A \cup B)' = A' \cap B'$، به طور مشابه $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(b

$$A \subseteq B \iff \forall x \quad x \in A \to x \in B$$

$A, B \subseteq X$

$$\iff \forall x \in X \quad x \in A \to x \in B$$

$$\iff \forall x \in X \quad x \notin B \to x \notin A$$

$A', B' \subseteq X$

$$\iff \forall x \in X \quad x \in B' \to x \in A'$$

$$\iff B' \subseteq A'$$