جلسه دهم

رابطه - رابطه هم ارزی - افراز

تعریف: هرگاه A و B دو مجموعه و $R \subseteq A \times B$، آنگاه R را یک رابطه از A در B نامیم. اگر $S \subseteq A \times B$ آنگاه S را یک رابطه روی A نامیم.

هرگاه R رابطه‌ای از A در B باشد بجای $(x, y) \in R$ از نماد xRy نیز می‌توانیم استفاده کنیم.

بعلاوه:

$$\mathrm{Dom}(R) = \{a : \exists b \quad (a, b) \in R\}$$

$$= \{a \in A : \exists b \in B \quad (a, b) \in R\} \qquad \text{دامنه } R$$

$$\mathrm{Im}(R) = \{b : \exists a \quad (a, b) \in R\}$$

$$= \{b \in B : \exists a \in A \quad (a, b) \in R \qquad \text{مجموعه تصویر } R$$

$$R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$$

$$\mathrm{Dom}(R^{-1}) = \mathrm{Im}(R)$$

پس $R^{-1} \subseteq B \times A$ و R^{-1} یک رابطه از B در A است، بعلاوه و به سادگی دیده می‌شود که $(R^{-1})^{-1} = R$ زیرا:

$\forall (x, y)$

$$(x, y) \in (R^{-1})^{-1} \Longleftrightarrow (y, x) \in R^{-1}$$

$$\Longleftrightarrow (x, y) \in R$$

$\{\{x\} : x \in A\}$

مثال: $\Delta_A = \{(x,x) : x \in A\}$ کوچکترین رابطه هم‌ارزی روی A است

$\{A\}$

مثال: $A \times A$ بزرگترین رابطه هم‌ارزی روی A است

مثال: ϕ یک رابطه روی A است

تعریف: R رابطه‌ای از A در B باشد و $C \subseteq A$ و $D \subseteq B$ قرار دهید:

$$R(C) = \{y \in B : \exists x \in C \quad (x,y) \in R\}$$

$$= \{y : \exists x \in C \quad (x,y) \in R\}$$ تصویر C تحت R

پس

$$R^{-1}(D) = \{x : \exists y \in D \quad (y,x) \in R^{-1}\}$$

$$= \{x \in A : \exists y \in D \quad (x,y) \in R\}$$ تصویر وارون D تحت R

تعریف: هرگاه R رابطه‌ای روی A باشد به قسمی که:

۱) $\forall x \in A \quad xRx$ (انعکاسی)

۲) $\forall x,y \in A \quad (xRy \Rightarrow yRx)$ (تقارنی)

۳) $\forall x,y,z \in A \quad (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$ (متعدی)

آنگاه R را یک رابطه هم‌ارزی روی A نامیم.

اگر R یک رابطه هم‌ارزی روی A باشد و $x \in A$، آنگاه:

$$\frac{x}{R} := \{y : xRy\}$$ ردهٔ هم‌ارزی x نسبت به R در A

$$\frac{A}{R} := \left\{\frac{z}{R} : z \in A\right\}$$ فضای خارج قسمت (نسبت به رابطه هم‌ارزی) R روی A

تعریف: خانواده $\mathcal{E}$ از زیرمجموعه‌های ناتهی A را یک افراز A نامیم هرگاه:

الف) $\bigcup \mathcal{E} = A$

ب) بین هردو عضو متمایز $\mathcal{E}$ مجزایند $\quad \forall C, D \in \mathcal{E} \quad (C \neq D \Rightarrow C \cap D = \emptyset)$

اگر $\mathcal{E}$ یک افراز A باشد قرار دهید:

$$\frac{A}{\mathcal{E}} := \{(x,y) : \exists D \in \mathcal{E} \quad (x \in D \wedge y \in D)\}$$

اگر $\mathcal{E}$ یک افراز A باشد و R یک رابطه هم‌ارزی روی A باشد:

۱- $\frac{A}{\mathcal{E}}$ یک رابطه هم‌ارزی روی A است

۲- $\frac{A}{R}$ یک افراز A است

۳- $\mathcal{E} = \frac{A}{\frac{A}{\mathcal{E}}} \quad , \quad R = \frac{A}{\frac{A}{R}}$

قضیه: اگر $\mathcal{E}$ یک افراز A باشد، آنگاه $\frac{A}{\mathcal{E}}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی R است.

برهان: چون $\mathcal{E}$ یک افراز A است پس $\bigcup \mathcal{E} = A$ بنابراین به ازای هر $x \in A$ داریم $x \in \bigcup \mathcal{E}$

درنتیجه $C \in \mathcal{E}$ چنان موجود است که $x \in C$، چون $C \in \mathcal{E}$ و $x \in C \wedge x \in C$ پس

$(x,x) \in \frac{A}{\mathcal{E}}$ و $\frac{A}{\mathcal{E}}$ روی A انعکاسی است.

اگر $(x,y) \in \frac{A}{\mathcal{E}}$، آنگاه $C \in \mathcal{E}$ چنان موجود است که $x \in C \wedge y \in C$؛ چون

$C \in \mathcal{E}$, $y \in C \wedge x \in C$ پس $(y,x) \in \frac{A}{\mathcal{E}}$ و $\frac{A}{\mathcal{E}}$ یک رابطهٔ تقارنی است.

اگر $(x,y)\in \frac{A}{\mathcal{E}}$ و $(y,z)\in \frac{A}{\mathcal{E}}$ پس $C, D\in \mathcal{E}$ چنان موجودند که $x\in C \wedge y\in C$ و $y\in D \wedge z\in D$ اما در این صورت $y\in C\cap D$ و $C\cap D\neq \emptyset$ و چون $\mathcal{E}$ افراز A است پس $C=D$ بنابراین $x, z\in C=D$ در نتیجه $(x,z)\in \frac{A}{\mathcal{E}}$

توجه کنید:

$$\frac{A}{\mathcal{E}} = \{(x,y) : \exists C\in \mathcal{E} \quad x, y\in C\}$$
$$\subseteq \bigcup \{C\times C : C\in \mathcal{E}\} \subseteq A\times A$$

چون به‌ازای هر $C\in \mathcal{E}$ داریم $C\subseteq A$

بنابراین $\frac{A}{\mathcal{E}}$ یک رابطه هم‌ارزی روی A است.

تمرین:
$$\frac{A}{\mathcal{E}} = \bigcup_{C\in \mathcal{E}} (C\times C)$$

قضیه: اگر R یک رابطه هم‌ارزی روی $A\neq\emptyset$ باشد، آنگاه $\frac{A}{R}$ یک افراز A است و به‌ازای هر $x, y\in A$ داریم:

الف) $x\in \frac{x}{R}$

ب) عبارات زیر معادلند

i- $\frac{x}{R}\cap \frac{y}{R}\neq\emptyset$

ii- $\frac{x}{R}=\frac{y}{R}$

iii- $y\in \frac{x}{R}$

برهان :

الف) چون R رابطه هم‌ارزی روی A است پس روی A انعکاسی است بنابراین $(x, x) \in R$ پس $x \in \frac{x}{R}$.

ب)

$(ii) \Longrightarrow \frac{x}{R} = \frac{y}{R}$

$\xRightarrow{\text{بنابر الف}} y \in \frac{y}{R} = \frac{x}{R}$

$\Longrightarrow y \in \frac{x}{R}$

$\Longrightarrow (iii)$

$(iii) \Longrightarrow y \in \frac{x}{R}$

$\Longrightarrow y \in \frac{x}{R} \cap \frac{y}{R}$

که بنابر الف $y \in \frac{y}{R}$

$\Longrightarrow \frac{x}{R} \cap \frac{y}{R} \neq \emptyset$

$\Longrightarrow (i)$

$(i) \Longrightarrow \frac{x}{R} \cap \frac{y}{R} \neq \emptyset$

$\Longrightarrow \exists z \quad z \in \frac{x}{R} \cap \frac{y}{R}$

$\Longrightarrow \exists z \quad z \in \frac{x}{R} \wedge z \in \frac{y}{R}$

$\Longrightarrow \exists z \ (x, z) \in R \wedge (y, z) \in R$

$\Longrightarrow \exists z \ (x, z) \in R \wedge (z, y) \in R$

R هم‌ارزی و درنتیجه

تقارنی است

$\Longrightarrow \exists z \quad (x, y) \in R$

R هم‌ارزی و درنتیجه

متعدی است

$\Rightarrow y \in \frac{x}{R}$

$\Rightarrow (iii)$

$(iii) \Longleftarrow (ii)$ فرض کنید $y \in \frac{x}{R}$ پس $(x,y) \in R$. حال اگر $z \in \frac{y}{R}$ آنگاه

$(y,z) \in R$ ، چون $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R$ و R متعدی است

پس $(x,z) \in R$ و $z \in \frac{x}{R}$: در نتیجه $\frac{y}{R} \subseteq \frac{x}{R}$.

چون $(x,y) \in R$ و R متقارن است پس $(y,x) \in R$ و $x \in \frac{y}{R}$ مشابه استدلال بالا

$\frac{x}{R} \subseteq \frac{y}{R}$. بنابراین $\frac{x}{R} = \frac{y}{R}$.

بنابر الف) به ازای هر $a \in A$ داریم $a \in \frac{a}{R} \underbrace{\subseteq}_{\text{بنابر تعریف } \frac{a}{R}} A$

پس $\frac{A}{R} = \left\{ \frac{a}{R} : a \in A \right\}$

خانواده‌ای از زیرمجموعه های ناتهی A است و $\bigcup \frac{A}{R} = A$

بنابر ب) به ازای هر $a,b \in A$ داریم: $\frac{a}{R} \neq \frac{b}{R} \Rightarrow \frac{a}{R} \cap \frac{b}{R} = \emptyset$

بنابر موارد فوق $\frac{A}{R} = \left\{ \frac{w}{R} : w \in A \right\}$ یک افراز A است.