# جلسه نوزدهم

قضیه: هرگاه $X\neq\emptyset$ ، عبارات زیر معادلند:

الف) $X$ شماراست

ب) تابع یک به یک $f:X\to\mathbb{N}$ موجود است

ج) تابع پوشای $g:\mathbb{N}\to X$ موجود است.

برهان: معادل بودن (الف) و (ب) را جلسه گذشته دیدید.

(ب) $\Longleftarrow$ (ج): فرض کنید $f:X\to\mathbb{N}$ یک به یک باشد، بنابر گزاره های معادلی که هنگام ارائهٔ تابع یک به یک عنوان کردیم، چون $X\neq\emptyset$ پس $g:\mathbb{N}\to X$ چنان موجود است که $g\circ f=id_X$ بنابراین به ازای هر $x\in X$ ، $g(f(x))=(g\circ f)(x)=id_X(x)=x$ و $y=f(x)\in\mathbb{N}$ چنان است که $g(y)=x$ پس $g:X\to X$ پوشاست.

(ج) $\Longleftarrow$ (ب): اگر $g:\mathbb{N}\to X$ پوشا باشد، به ازای هر $x\in X$ ، $g^{-1}(x)$ زیرمجموعه ناتهی $\mathbb{N}$ است و $h(x)=\min(g^{-1}(x))\in\mathbb{N}$ نشان می دهیم

$$h:X\longrightarrow\mathbb{N}, \quad z\longmapsto \min g^{-1}(z)$$

یک به یک است، زیرا به ازای هر $a,b\in X$ اگر $h(a)=h(b)$ چون $h(a)=\min(g^{-1}(a))\in g^{-1}(a)$ و $h(b)=\min(g^{-1}(b))\in g^{-1}(b)$

پس $a \underset{h(a)\in g^{-1}(a)}{=} g(h(a)) \underset{h(a)=h(b)}{=} g(h(b)) \underset{h(b)\in g^{-1}(b)}{=} b$ و $h:X\to\mathbb{N}$ یک به یک است.

مثال: $\mathbb{Z}$ شمارا است.

تابع $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ با ضابطه $f(n)=\begin{cases}2n+1 & n\geqslant 0\\ -2n & n<0\end{cases}$.

دوسویی است پس $\mathbb{Z}\sim\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ شمارای نامتناهی است.

مثال: $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ شمارا است.

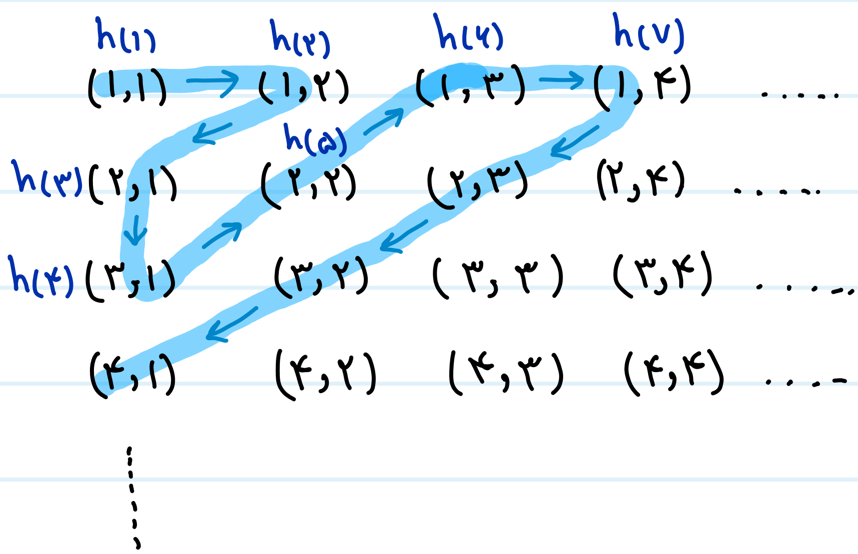
تابع $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ یک به یک است، پس $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ شمارا است.

$(i,j)\longmapsto 2^i3^j$

تابع $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ یک به یک است پس $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ نامتناهی است.

$t\longmapsto(1,t)$

بنابر موارد فوق $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ شمارای نامتناهی است و $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{N}$




$h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ که با نمودار با توضیح داده شده دوسویی است. پس $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{N}$ و $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ شمارای نامتناهی است.

مثال: اگر $A, B$ شمارا باشند، آنگاه $A \cup B$ نیز شمارا است.

چون $A$ شمارا است پس تابع یک به یک $f: A \to \mathbb{N}$ موجود است. چون $B$ شمارا است پس هر زیرمجموعه آن از جمله $B \setminus A$ شمارا است و در نتیجه تابع یک به یک $g: B \setminus A \to \mathbb{N}$ موجود است. با ضابطه

$$h: A \cup B = A \cup (B \setminus A) \to \mathbb{N}$$

$$h(x) = \begin{cases} 2f(x)+1 & x \in A \\ 2g(x) & x \in B \setminus A \end{cases}$$

یک به یک است پس $A \cup B$ شمارا است.

در مثال بالا دیدید، اجتماع دو مجموعه شمارا، شمارا است. جلسه گذشته هم دیده بودید زیرمجموعه هر مجموعه شمارا، شمارا است. پس:

قضیه: $A \cup B$ شمارا است $\Longleftrightarrow$ $A, B$ شمارا هستند.

به کمک قضیه فوق و اصل استقراء ریاضی داریم:

$A_1 \cup \dots \cup A_n$ شمارا است $\Longleftrightarrow$ $A_1, \dots, A_n$ شمارا هستند

بخصوص

$A_1 \cup \dots \cup A_n$ ناشمارا است $\Longleftrightarrow$ $i \in \{1, \dots, n\}$ چنان موجود است که $A_i$ ناشمارا است

نکته: اگر $A, B$ متناهی باشند، آنگاه $A \cup B$ نیز متناهی است.

برهان: اگر $A = \emptyset$ آنگاه $A \cup B = \emptyset \cup B = B$ متناهی است. اگر $B \setminus A = \emptyset$ آنگاه $A \cup B = A \cup (B \setminus A) = A \cup \emptyset = A$ متناهی است پس فرض کنید $A \neq \emptyset$ و $B \setminus A \neq \emptyset$.

چون $A$ یک مجموعه متناهی ناتهی است پس $p \geq 1$ چنان موجود است که $A \sim \mathbb{N}_p$ و تابع دوسویی $f: A \to \mathbb{N}_p$ موجود است. چون $B \setminus A$ زیرمجموعه $B$ است و $B$ متناهی است پس $B \setminus A$ نیز متناهی است. بنابراین $B \setminus A$ یک مجموعه متناهی و ناتهی است پس $q \geq 1$ چنان موجود است که $B \setminus A \sim \mathbb{N}_p$

و تابع دوسویی $g: B\setminus A \to \mathbb{N}_q$ موجود است. تابع $h: A\cup B = A\cup(B\setminus A) \to \mathbb{N}_{p+q}$

با ضابطه
$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x\in A \\ p+g(x) & x\in B\setminus A \end{cases}$$
دوسویی است پس $A\cup B \sim \mathbb{N}_{p+q}$ و $A\cup B$ متناهی است.

دیدید اجتماع دو مجموعه متناهی، متناهی است و دیده بودید زیرمجموعه هر مجموعه متناهی، متناهی است

پس:

$C\cup D$ متناهی است $\Longleftrightarrow$ $C$ و $D$ متناهی هستند

و بنابر اصل استقراء ریاضی (به ازای هر $n\in\mathbb{N}$):

$M_1\cup \dots \cup M_n$ متناهی است $\Longleftrightarrow$ $M_1, \dots, M_n$ متناهی اند

در نتیجه:

$M_1\cup \dots \cup M_n$ نامتناهی است $\Longleftrightarrow$ $i\in\{1,\dots,n\}$ چنان موجود است که $M_i$ نامتناهی است

قضیه: اجتماع هر خانواده شمارا از مجموعه‌های شمارا، شمارا است.

برهان:

راه اول: فرض کنید $\Gamma\neq\phi$ شمارا باشد و $\{X_\alpha : \alpha\in\Gamma\}$ خانواده‌ای (شمارا) از مجموعه‌های شمارای ناتهی باشد. (توجه کنید که $\bigcup_{\alpha\in\phi} X_\alpha = \phi$ شمارا ست و $\bigcup_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha = \bigcup_{\substack{\alpha\in\Gamma \\ X_\alpha\neq\phi}} X_\alpha$ )

به ازای هر $\alpha\in\Gamma$ تابع پوشای $f_\alpha : \mathbb{N}\to X_\alpha$ موجود است. و چون $\Gamma\neq\phi$ شمارا ست پس تابع پوشای $g:\mathbb{N}\to\Gamma$ موجود است. $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ پس تابع پوشای $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ موجود است.

تابع $\varphi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \bigcup_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ پوشا ست، زیرا به ازای هر $x\in\bigcup_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$، وجود دارد.
$$(m,n) \longmapsto f_{g(m)}(n)$$

$\beta\in\Gamma$ به قسمی که $x\in X_\beta$ پس وجود دارد. $n,m\in\mathbb{N}$ به قسمی که $f_\beta(n)=x$ و $g(m)=\beta$

بنابراین $\varphi(m,n)=f_{g(m)}(n)=f_\beta(n)=x$.

ترکیب دو تابع پوشا، پوشاست پس $\varphi\circ h:\mathbb{N}\to\bigcup_{\alpha\in\Gamma}X_\alpha$ پوشاست، بنابراین $\bigcup_{\alpha\in\Gamma}X_\alpha$ شماراست.

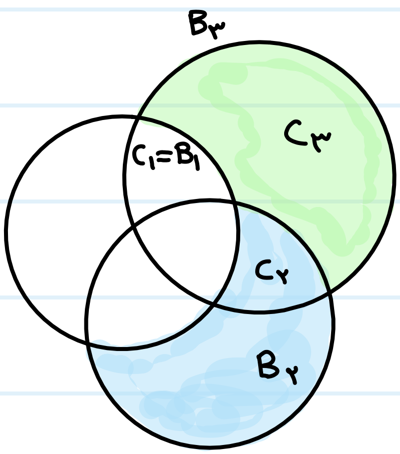
راه دوم: دیدید اگر $A_1,A_2,\dots,A_n$ شمارا باشند، آنگاه $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ شماراست. حال فرض کنید $B_1,B_2,\dots$ شمارا باشند، قرار دهید $(n\in\mathbb{N})$ $C_n=B_n\setminus\bigcup_{i<n}B_i$.

بنابراین $C_n$ به عنوان زیرمجموعه یک مجموعه شمارا (یعنی $B_n$) شماراست و تابع یک به یک $f_n:C_n\to\mathbb{N}$ موجود است.

بعلاوه

$$\bigcup_{n\geq1}B_n=\bigcup_{n\geq1}(B_1\cup\dots\cup B_n)=\bigcup_{n\geq1}(C_1\cup\dots\cup C_n)=\bigcup_{n\geq1}C_n$$

و $C_n$ ها دوبه‌دو مجزا هستند.




پس $g:\bigcup_{n\geq1}C_n\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$(x\in C_n)$ $g(x)=(f_n(x),n)$ یک به یک است. چون $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{N}$ پس تابع

یک به یک $h: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ موجود است بنابراین $hog: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ یک به یک است پس $\bigcup_{n\geqslant 1} B_n = \bigcup_{n\geqslant 1} C_n$ شمارا است.

توجه: دیدید مجموعه شمارا است اگر و تنها اگر همتوان یکی از زیرمجموعه های $\mathbb{N}$ باشد. پس اگر $A\sim B$ داریم:

$A$ شمارا است $\Longleftrightarrow$ $M\subseteq\mathbb{N}$ چنان موجود است که $A\sim M$

$\Longleftrightarrow$ $M\subseteq\mathbb{N}$ چنان موجود است که $B\sim M$   $A\sim B$

$\Longleftrightarrow$ $B$ شمارا است

بنابراین $A$ ناشمارا است $\Longleftrightarrow$ $B$ ناشمارا است

مثال: به ازای هر $n\in\mathbb{N}$، $\begin{aligned}\mathbb{N} &\to \{\tfrac{m}{n} : m\in\mathbb{N}\}\\ p &\mapsto \tfrac{p}{n}\end{aligned}$ دوسویی است پس $\mathbb{N}\sim\{\frac{m}{n} : m\in\mathbb{N}\}$ و $\{\frac{m}{n} : m\in\mathbb{N}\}$ شمارا است. $\begin{aligned}\{\tfrac{m}{n} : m\in\mathbb{N}\} &\to \{-\tfrac{m}{n} : m\in\mathbb{N}\}\\ x &\mapsto -x\end{aligned}$ دوسویی است پس

$\{\frac{m}{n} : m\in\mathbb{N}\}\sim\{-\frac{m}{n} : m\in\mathbb{N}\}$ بنابراین $\{-\frac{m}{n} : m\in\mathbb{N}\}$ نیز شمارا است. $\{0\}$ نیز متناهی و درنتیجه شمارا است. بنابراین $\{\frac{m}{n} : m\in\mathbb{Z}\} = \{\frac{m}{n} : m\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}\cup\{-\frac{m}{n} : m\in\mathbb{N}\}$

و چون اجتماع شمارایی از شماراها، شمارا است پس $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\frac{m}{n} : m\in\mathbb{Z}\}$ شمارا است.

اما $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Q}$ و $\mathbb{N}$ نامتناهی است پس $\mathbb{Q}$ نامتناهی است. بنابراین $\mathbb{Q}$ شمارای نامتناهی است و $\mathbb{Q}\sim\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} \xrightarrow[h]{\text{پوشا}} \mathbb{N}\times\mathbb{N} \xrightarrow[f]{\text{پوشا}} \mathbb{Q}_+ = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{N} \right\}$$

$$(m, n) \longmapsto \frac{m}{n}$$

$$f \circ h : \mathbb{N} \longrightarrow \underset{\text{پوشا}}{\mathbb{Q}_+}$$

شمارا $\mathbb{Q}_+ \sim \mathbb{Q}_- = \left\{ \frac{-p}{q} : p, q \in \mathbb{N} \right\}$

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\}$$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $+1$ | $-1$ | $+2$ | $-2$ | $+3$ | $-3$ | $+4$ | $-4$ | $\cdots$ |
| $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{2}$ | $-\frac{2}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $-\frac{3}{2}$ | $\frac{4}{2}$ | $-\frac{4}{2}$ | $\cdots$ | |
| $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{3}$ | $-\frac{3}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | $-\frac{4}{3}$ | | |
| $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{4}$ | $-\frac{2}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | $-\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{4}$ | $-\frac{4}{4}$ | | |
| $\vdots$ | | | | | | | | | |