

جلسه بیست و هفتم

اصل استراحت رامانا هی: اگر (A, \leq) مجموعه ای خوب ترتیب باشد و $P(x)$ گزاره نهایی برای α های عضو A بقسم کر:

$$\forall a \in A \quad ((\forall b < a \quad P(b)) \Rightarrow P(a))$$

در این صورت:

$$\forall a \in A \quad P(a)$$

$$M := \{x \in A : \neg P(x)\}$$

برهان: قرار دهد

کافی است نشان دهیم $M \neq \emptyset$. اگر $M = \emptyset$ مجموعه ناته مجموعه خوب ترتیب (A, \leq) دارای کوچکترین عضو قبل $Z = \min M$ می باشد.

$$\forall x < Z \quad P(x) \quad \text{پس} \quad \forall x < Z \quad x \notin M \quad \text{به خصوص}$$

بنابر فرض قضیر، $P(Z)$ برقرار است که با $Z = \min M \in M$ در تناظر است پس

$$\forall x \in A \quad P(x) \quad \text{و} \quad M = \emptyset$$

با ازای هر اوردینال α ، $(\text{مجموعه } \alpha \text{ اوردینال نامی خودست و هم عضوی متعدی باشد})$ در جلسات قبل جهت دانستن عنوان کردیم هر اوردینال β دقیقاً درکلی از سوابط $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha$ صدق می کند. به راحتی می توانید نشان دهید زیرمجموعه هر مجموعه خوب ترتیب با رابطه ترتیب القای خوب ترتیب است. بدون اثبات می بذیریم

هر عضویک اور دینال، اور دینال است.

$\alpha \leq \beta \iff \alpha \subseteq \beta$ برای دو اور دینال β, α رابه صورت تعریف کنیم هر اور دینال خوب ترتیب خواهد بود.

هر مجموعه خوب ترتیب (\leq, A) باکی و سنا کی اور دینال یکریخت ترتیبی است، آن اور دینال را با $(\leq, \text{ord}(A))$ نشان می دهیم.

اگر (A, \leq_1) و (B, \leq_2) دو مجموعه خوب ترتیب باشند، دیده دید

$$\text{ord}(A, \leq_1) < \text{ord}(B, \leq_2)$$

$$\vee \text{ord}(A, \leq_1) = \text{ord}(B, \leq_2)$$

$$\vee \text{ord}(B, \leq_2) < \text{ord}(A, \leq_1)$$

تجهیز:

$\text{ord}(A, \leq_1) < \text{ord}(B, \leq_2) \iff$ یکریخت ترتیب باشد (B, \leq_2) از (A, \leq_1)

$\text{ord}(A, \leq_1) = \text{ord}(B, \leq_2) \iff$ یکریخت ترتیبی اند (B, \leq_2) ، (A, \leq_1)

$\text{ord}(A, \leq_1) \leq \text{ord}(B, \leq_2) \iff$ یکریخت است (B, \leq_2) از (A, \leq_1)

$$\text{ord}(\emptyset) = 0$$

$$\text{ord}(\{0, \dots, n-1\}) = n$$



با رابطه ترتیب معمولی القاسده از سره

$$\text{ord}(\mathbb{N}) =: \omega$$

کوچکترین اور دنیال نامناہر است $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$

A

B

$$\text{ord}(A, \leq_A) = \alpha$$

$$\text{ord}(B, \leq_B) = \beta$$

$$A \cap B = \emptyset$$

$$\beta = \text{ord}(B, \leq_B) \quad \alpha = \text{ord}(A, \leq_A)$$

$$A \cap B = \emptyset, \quad \leq_* = \leq_A \cup \leq_B \cup (A \times B)$$

نیایس می دهیم $\alpha + \beta$ لیکن $\text{ord}(A \cup B, \leq^*)$

$$\leq_\square = \{((\alpha, b), (\alpha', b')) \in (A \times B)^*: \alpha \leq_A \alpha' \vee (\alpha = \alpha' \wedge b \leq_B b')\} \quad \text{اگر}$$

$\xrightarrow{(A \times B)}$ رابطہ سریب الفبا روی $(A \times B)$

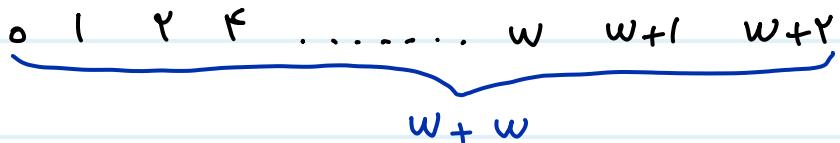
نیایس می دهیم $\beta \alpha$ لیکن $\text{ord}(A \times B, \leq_\square)$

$w \circ 1 2 \dots \dots$

دارای اور دنیال $w+1$ بر w است

$5 1 2 3 4 \dots \dots w$

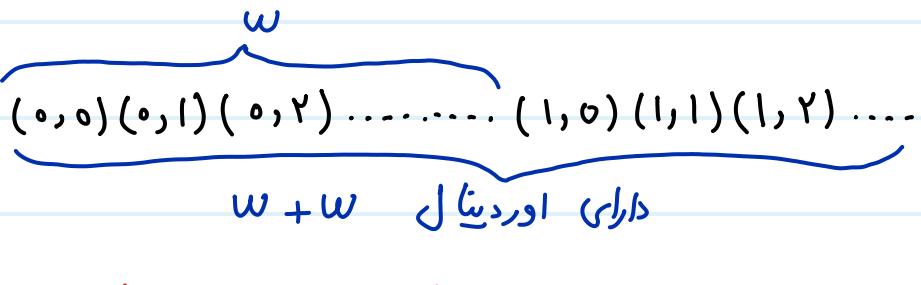
دارای اور دنیال



$$\{\mathbf{0}, 1\} \times \{\mathbf{0}, 1, 2, \dots\}$$

با رابطه ترتیب الفبایی

ω^2 دارای اوردینال



$$\omega^2 = \omega + \omega > \omega$$

$$\{\mathbf{0}, 1\} \times \{\mathbf{0}, 1, 2, \dots, 2, 1, 0\}$$

با رابطه ترتیب الفبایی

ω^2 دارای اوردینال است

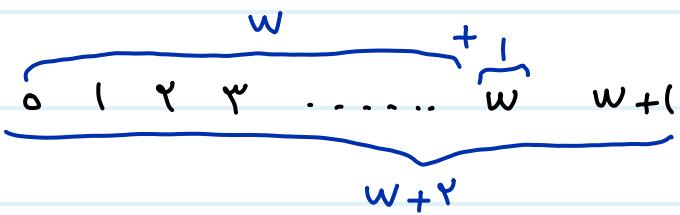
$$(0, 0), (0, 1), (0, 2), \dots, (1, 0), (1, 1), (1, 2), \dots$$

دارای اوردینال w است

$$\omega^2 = \omega$$

هر خانواده ناتسی از اوردینال‌ها (کاردینال‌ها) دارای کوچکترین عضو است.

$$\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\} = \omega$$



$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(1) = 4$$

$$f(n+1) = f(n) = 3$$

α^+ اوردینال باشد (معنی خودش و تمام اعضاش ممکن باشد)، α^+ نیز اوردینال است. α^+ را با $\alpha + 1$ نایاب می‌دهیم.

$$\alpha + 0 := \alpha$$

$$\alpha + 1 := \alpha^+ (= \alpha \cup \{\alpha\})$$

$$\alpha + \beta = \theta^+ \Rightarrow \alpha + \beta = \alpha + \theta^+ := (\alpha + \theta)^+ = (\alpha + \theta) + 1$$

$$\alpha + \beta := \bigcup_{\mu < \beta} (\alpha + \mu)$$

(معنی بازای هر اردینال

$$(\beta \neq 0, \beta \neq \theta^+, \theta$$

و کوچکترین اوردینال نامتناهی

$$\omega = c = \text{card}(\mathbb{R})$$

↓
فرصتی بیوستار

$$\omega = \{ \alpha \in ON \mid \alpha < \omega \}$$

اکنون اوردینال سعرا

قضیه: بازای هر کاردینال $\beta \leq \alpha \leq \beta$ داریم α, β