جلسه بیست و دوم

ه) $\{1\}^A = \{f \mid f: A \to \{1\}\ \text{تابع است}\} = \{c_1\}$

تنها تابع از A به $\{1\}$ تابع با مقدار ثابت 1 است که آن را با c_1 نمایش می‌دهیم:

$$c_1 : A \to \{1\}, \quad x \mapsto 1$$

بنابراین $1^\alpha = card(\{1\}^A) = card(\{c_1\}) = 1$

$$\{c_1\} \sim \underbrace{\mathbb{N}_1}_{\{1\}}$$

اگر $g: \{1\} \to A$ تابع باشد، آنگاه به ازای $t = g(1)$، $g = c_t : \{1\} \to A$, $x \mapsto t$ نگاشت

$\varphi : A \to A^{\{1\}}$, $t \mapsto c_t$ دوسویی است پس $A \sim A^{\{1\}}$ درنتیجه

$$\alpha = card(A) = card(A^{\{1\}}) = \alpha^1$$

و) فرض کنید $f: A \to \emptyset$ تابع باشد پس $f \subseteq A \times \emptyset = \emptyset$ بنابراین $f = \emptyset$ درنتیجه

$A = Dom(f) = Dom(\emptyset) = \emptyset$ بعلاوه $\varphi : \emptyset \to \emptyset$ تابع است پس:

$$\emptyset^A = \begin{cases} \emptyset & A \neq \emptyset \\ \{\emptyset\} & A = \emptyset \end{cases}$$

درنتیجه:

$$0^{\alpha} = card(\emptyset^{A}) = \begin{cases} card(\emptyset)=0 & A\neq\emptyset \\ card(\{\emptyset\})=1 & A=\emptyset \end{cases}$$

ز) $\alpha 0 = card(\underbrace{A\times\emptyset}_{\emptyset}) = card(\emptyset)=0$

ح) دیدید $A^{B\times C} \sim (A^{B})^{C}$ پس $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = card((A^{B})^{C}) = card(A^{B\times C}) = \alpha^{\beta\gamma}$

دیدید $(A\times C)^{B} \sim A^{B}\times C^{B}$ بنابراین $\alpha^{\beta}\gamma^{\beta} = card(A^{B}\times C^{B}) = card((A\times C)^{B}) = (\alpha\gamma)^{\beta}$

چون $B\cap C=\emptyset$ دیدید $A^{B\cup C} \sim A^{B}\times A^{C}$ پس

$$\alpha^{\beta+\gamma} = card(A^{B\cup C}) = card(A^{B}\times A^{C}) = card(A^{B})\, card(A^{C}) = \alpha^{\beta}\alpha^{\gamma}$$

$\beta+\gamma = card(B\cup C)$ پس $B\cup C=\emptyset$

ط) ب.ک.ا.ل فرض کنید $\alpha\leqslant\beta$ پس تابع یک به یک $f:A\to B$ موجود است و $f:A\to f(A)=:D$ دوسویی می‌باشد، بخصوص $A\sim D$ چون $C\sim C$ و $A\cap C=\emptyset=D\cap C$، بنابراین

توجه کنید $D\cap C\subseteq B\cap C=\emptyset$

$A\cup C\sim D\sim C$ و $A\times C\sim D\times C$ و $A^{C}\sim D^{C}$ و $C^{A}\sim C^{D}$ ؛

بعلاوه توجه کنید اگر $S \subseteq T$ آنگاه $\iota_S : S \longrightarrow T$, $x \longmapsto x$ (نماد یوتا) یک به یک است و $\operatorname{card}(S) \leqslant \operatorname{card}(T)$

بنابراین :

$$\alpha+\gamma = \operatorname{card}(A\cup C) = \operatorname{card}(D\cup C) \leqslant \operatorname{card}(B\cup C) = \beta+\gamma$$

$\operatorname{card}(A) = \alpha$
$\operatorname{card}(C) = \gamma$
$A\cap C = \emptyset$

$A\cup C \sim D\cup C$

$D\cup C \subseteq B\cup C$

$B\cap C = \emptyset$

$\operatorname{card}(C) = \gamma$, $\operatorname{card}(B) = \beta$

$$\alpha\gamma = \operatorname{card}(A\times C) = \operatorname{card}(D\times C) \leqslant \operatorname{card}(B\times C) = \beta\gamma$$

$A\times C \sim D\times C$ $\quad$ $D\times C \leqslant B\times C$

$$\alpha^{\gamma} = \operatorname{card}(A^{C}) = \operatorname{card}(D^{C}) \leqslant \operatorname{card}(B^{C}) = \beta^{\gamma}$$

$A^C \sim D^C$

$D \subseteq B$

$D^C : \{ h \mid h: C \to D \text{ تابع است} \} \subseteq \{ h \mid h: C \to B \text{ تابع است} \} = B^C$

حال فرض کنید شرط دیگر $\alpha \neq 0$ را نیز داریم.

چون $D \sim A$ و $A \neq \emptyset$ پس $D \neq \emptyset$ اما $D \subseteq B$ پس $B \neq \emptyset$ بنابراین $\beta \neq 0$.

حالات زیر را داریم:

حالت اول : $\gamma = 0$. در این حالت چون $\alpha, \beta \neq 0$ پس $0^{\alpha} = 0 = 0^{\beta}$ بنابراین $\gamma^{\alpha} = \gamma^{\beta}$ بخصوص $\gamma^{\alpha} \leqslant \gamma^{\beta}$.

حالت دوم : $\gamma \neq 0$. در این حالت چون $C \neq \phi$ ، $w \in C$ را ثابت انتخاب کنید تابع

$C_w : B\setminus D \longrightarrow C$ را در نظر بگیرید اگر $h : D \to C$ تابع باشد چون $D \cap (B\setminus D) = \phi$
$x \longmapsto w$

پس $h \cup C_w : \underbrace{D \cup (B\setminus D)}_{B} \longrightarrow \underbrace{C \cup C}_{C}$ تابع است.

$\eta : C^D \longrightarrow C^B$ یک به یک است زیرا به ازای هر $h_1, h_2 : D \to C$ داریم:
$h \longmapsto h \cup C_w$

$$\eta(h_1) = \eta(h_2) \Rightarrow h_1 \cup C_w = h_2 \cup C_w$$

$$\Rightarrow \forall x \in B \quad (h_1 \cup C_w)(x) = (h_2 \cup C_w)(x)$$

$$\Rightarrow \forall x \in D \quad h_1(x) = (h_1 \cup C_w)(x) = (h_2 \cup C_w)(x) = h_2(x)$$

$D \subseteq B$

$$\Rightarrow h_1 = h_2$$

تابعند $h_1, h_2 : D \to C$

$$\gamma^{\alpha} = \operatorname{card}(C^A) = \operatorname{card}(C^D) \leq \operatorname{card}(C^B) = \gamma^{\beta}$$

$C^A \sim C^D$

$\eta : C^D \to C^B$ یک به یک است

نکته : به ازای هر مجموعه X ، $P(X) \sim \{0,1\}^X$ بخصوص $\operatorname{card}(P(X)) = 2^{\operatorname{card}(X)}$

برهان : به ازای هر $A \subseteq X$ ، $\chi_A : X \longrightarrow \{0,1\}$ را به صورت

$$\chi_A(t)=\begin{cases}1 & t\in A\\ 0 & t\in X\setminus A\end{cases}$$ در نظر بگیرید.

نشان می‌دهیم $\varphi: P(X)\longrightarrow\{0,1\}^X$ دوسویی است.

$$D\longmapsto \chi_D$$

فرض کنید $C,D\subseteq X$ داریم:

$$\varphi(C)=\varphi(D)\Rightarrow \chi_C=\chi_D$$

$$\Rightarrow \underbrace{\{x\in X:\ \chi_C(x)=1\}}_{C}=\underbrace{\{x\in X:\ \chi_D(x)=1\}}_{D}$$

$$\Rightarrow C = D$$

و $\varphi: P(X)\longrightarrow\{0,1\}^X$ یک به یک است.

اگر $g\in\{0,1\}^X$ داده شده باشد پس $g: X\to\{0,1\}$ تابع است قرار دهید $T=g^{-1}(1)$

پس $T\subseteq X$, $T\in P(X)$ نشان می دهیم $g=\chi_T=\varphi(T)$

به ازای هر $x\in T$، داریم $x\in g^{-1}(1)$ پس $g(x)=1=\chi_T(x)$

$x\in g^{-1}(1)=T$ $\quad$ $x\in T$

حال اگر $y\in X$, $y\notin T$ پس $y\notin g^{-1}(1)$ و $g(y)\neq 1$ اما $g(y)\in\{0,1\}$

پس $g(y)=0$ بعلاوه چون $y\in X\setminus T$ پس $\chi_T(y)=0$.

بنابر دو استدلال بالا:

$$\forall z\in X\quad g(z)=\chi_T(z)$$

درنتیجه (توجه کنید که $g,\chi_T: X\to\{0,1\}$ تابعند) $g=\chi_T=\varphi(T)$ پس

بنابراین $\varphi: P(X)\longrightarrow\{0,1\}^X$ پوشا نیز می‌باشد (چون 1-1 بودنش را نیز بدست آورده بودیم)

دوسویی است، پس $P(X)\sim\{0,1\}^X$.

یادآوری می کنیم که برای دو عدد اصلی α و β هرگاه $\alpha \leq \beta$ و $\alpha \neq \beta$ می نویسیم $\alpha < \beta$.

قضیه: به ازای هر عدد اصلی α، داریم $\alpha < 2^{\alpha}$.

برهان: فرض کنید $card(X) = \alpha$، $\varphi: X \longrightarrow P(X)$، $t \longmapsto \{t\}$ یک به یک است پس

$$\alpha = card(X) \leq card(P(X))$$

نشان می دهیم $card(X) \neq card(P(X))$ زیرا درغیر این صورت تابع دوسویی $\gamma: X \to P(X)$ موجود است بنابر اصل تصریح $M = \{x \in X : x \notin \gamma(x)\}$ یک زیر مجموعه X است و عضو $P(X)$ می باشد. چون $\gamma: X \to P(X)$ دوسویی و درنتیجه پوشاست پس $t \in X$ چنان موجود است که $\gamma(t) = M$

① اگر $t \in M$، آنگاه بنابر نحوه تعریف M، $t \notin \gamma(t) = M$ که تناقض است.

② اگر $t \notin M = \gamma(t)$ بنابر نحوه تعریف M، $t \in M$ که تناقض است.

چون درهردو حالت فوق به تناقض رسیدیم پس تابع دوسویی $\gamma: X \to P(X)$ موجود نیست، بنابراین $card(X) \neq card(P(X))$.

یافته ایم $card(X) \neq card(P(X))$, $card(X) \leq card(P(X))$

پس $\alpha = card(X) < card(P(X)) = card(\{0,1\}^X) = 2^{card(X)} = 2^{\alpha}$

در نکته قبل دیدید $P(X) \sim \{0,1\}^X$