جلسه دوم

ادامه قواعد مهم:

۱- $(p \vee q) \wedge \neg p \Longrightarrow q$ (رفع مؤلفه)

اثبات: $(p \vee q) \wedge \neg p \equiv (p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p)$

$$\equiv C \vee (q \wedge \neg p)$$

$$\equiv q \wedge \neg p$$

$$\Longrightarrow q$$ حذف عاطف (اختصار)

$$((p \vee q) \wedge \neg p) \longrightarrow q$$

۲- $(p \to q) \wedge (q \to r) \Longrightarrow (p \to r)$ (تعدی)

اثبات : $(p \to q) \wedge (q \to r)$

$$(p\to q)\wedge(q\to r) \to (p\to r)$$

p	q	r	$p\to q$	$q\to r$	$(p\to q)\wedge(q\to r)$	$p\to r$	
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن	ن	ن	د
د	ن	د	ن	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	د	ن	ن	د
ن	د	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د	د	د
ن	ن	ن	د	د	د	د	د

۳- قیاس ذو الوجهین موجب

$$\big((p\to q)\wedge(r\to s)\big) \Rightarrow \big((p\wedge r)\to(q\wedge s)\big)$$

$$\big((p\to q)\wedge(r\to s)\big) \Rightarrow \big((p\vee r)\to(q\vee s)\big)$$

۴- قیاس ذوالوجهین منفی

$$\big((p\to q)\wedge(r\to s)\big) \Rightarrow (\neg q\vee\neg s \to \neg p\vee\neg r)$$

$$\big((p\to q)\wedge(r\to s)\big) \Rightarrow (\neg q\wedge\neg s \to \neg p\wedge\neg r)$$

۵- قیاس استثنایی

$$(p\to q)\wedge p \Rightarrow q$$

اثبات: $(p\to q)\wedge p \equiv (\neg p \vee q)\wedge p$

$\equiv (\neg p\wedge p)\vee(q\wedge p)$ توزیع پذیری

$\equiv c \vee (q\wedge p)$

$\equiv q\wedge p$

$\Rightarrow p$ حذف عاطف

۶- قیاس رفع (عکس نقیض قیاس استثنایی)

$$(p\to q)\wedge\neg q \Rightarrow \neg p$$

اثبات: $(p\to q)\wedge \neg q \underbrace{\equiv}_{\text{عکس نقیض}} (\neg q\to\neg p)\wedge\neg q \underbrace{\Rightarrow}_{\text{قیاس استثنایی}} \neg p$

۷- برهان خلف

$$(p\wedge\neg q\to c)\Longleftrightarrow(p\to q)$$

اثبات: $(p\wedge\neg q)\to c \equiv \neg(p\wedge\neg q)\vee c$

$\equiv \neg(p\wedge\neg q)$

$\equiv \neg p\vee\neg(\neg q)$ دمورگان

$\equiv \neg p\vee q$ نفی مضاعف

$\equiv p\to q$

۸- قانون جذب $p\vee(p\wedge q)\equiv p$

$p\wedge(p\vee q)\equiv p$

$p \vee q \to r \wedge s$ فرض ۱

$\neg r$ فرض ۲

$\therefore \quad \neg q$

$$((p \vee q \to r \wedge s) \wedge \neg r) \Longrightarrow \neg q$$

$p \vee q \to r \wedge s$	۱ فرض ۱
$\neg r$	۲ فرض ۲
$\neg r \vee \neg s$	۳ فرض ۲ و ادخال فاصل
$\neg (r \wedge s)$	۴ بند ۳ و دمورگان
$\neg (p \vee q)$	۵ بند ۴ و ۱ و قیاس رفع
$\neg p \wedge \neg q$	۶ بند ۵ و دمورگان
$\neg q$	۷ بند ۶ و حذف عاطف

$A \vee (B \wedge C)$	۱ فرض ۱
$B \to D$	۲ فرض ۲
$C \to E$	۳ فرض ۳
$D \wedge E \to F$	۴ فرض ۴
$\neg A$	۵ فرض ۵

۶ فرض ۱ و فرض ۵ و رفع مولفه	$B \wedge C$
۷ ردیف ۶ و حذف عاطف	B
۸ فرض ۲ و ردیف ۷ و قیاس استثنایی	D
۹ ردیف ۶ و حذف عاطف	C
۱۰ ردیف ۳ و ردیف ۹ و قیاس استثنایی	E
۱۱ ردیف ۸ و ردیف ۱۰	$D \wedge E$
۱۲ فرض ۴ ، ردیف ۱۱ و قیاس استثنایی	F

سور عمومی $\quad \forall x \quad \underbrace{p(x)}_{\text{گزاره نمای برحسب } x \text{ است}}$

قاعده نقیض سور: $\neg(\forall x \;\; p(x))$ را با $\exists x\,(\neg p(x))$ هم‌ارز در نظر می‌گیریم

$$\neg(\forall x \;\; p(x)) \equiv \exists x\,(\neg p(x))$$

قرارداد:

$$\forall x\,(x \in A \to p(x)) \equiv: \forall x \in A \quad p(x)$$

$$\exists x\,(x \in A \wedge p(x)) \equiv: \exists x \in A \quad p(x)$$

$$\neg(\forall x \in A \quad p(x)) \equiv \neg(\forall x\,(x\in A \to p(x)))$$

قاعده نقیض سور $\equiv \exists x \quad \neg(x\in A \to p(x))$

$x\notin A$ را با $\neg(x\in A)$ نمایش می‌دهیم $\equiv \exists x \quad \neg(x\notin A \vee p(x))$

دمورگان $\equiv \exists x \quad (\neg x\notin A \wedge \neg p(x))$

نفی مضاعف $\equiv \exists x \quad (x\in A \wedge \neg p(x))$

قرارداد $\equiv \exists x\in A \quad (\neg p(x))$

قضیه (اصل استقراء ریاضی)

فرض کنید $\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$ مجموعه اعداد طبیعی باشد و $p(n)$ گزاره نمایی برحسب $n\in\mathbb{N}$ به قسمی که:

الف) $p(1)$ برقرار است

ب) $\forall n\in\mathbb{N} \quad p(n)\Rightarrow p(n+1)$

آنگاه: $\forall n\in\mathbb{N} \quad p(n)$

برهان: فرض کنید گزاره نمای $p(n)$ برای هر $n\in\mathbb{N}$ تعریف شده باشد و به قسمی باشد که $p(1)$ برقرار است و $\forall n\in\mathbb{N} \quad p(n)\Rightarrow p(n+1)$

اگر $D=\{n\in\mathbb{N} : \neg p(n)\}$ ناتهی باشد، آنگاه $t=\min(D)$ موجود است. چون $p(1)$ درست است پس $1\notin D$ اما $t\in D$ پس $1<t$ وچون $t=\min(D)$ پس $t-1\notin D$ درحالیکه $t-1\in\mathbb{N}$ بنابراین $p(t-1)$ درست است اما $p(t-1)\Rightarrow p(t)$ پس $p(t)$ نیز درست است که با $t\in D$ درتناقض است

پس $D=\emptyset$ یعنی $\forall n\in\mathbb{N} \quad p(n)$

تمرین: نشان دهید $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{۲}$ به ازای هر $n \in \mathbb{N}$

برهان: به ازای $n \in \mathbb{N}$، فرض کنید $p(n)$ عبارت $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{۲}$ باشد

الف) $p(1)$ عبارت $\underbrace{\sum_{i=1}^{1} i}_{1} = \underbrace{\frac{1(1+1)}{۲}}_{1}$ است که درست است

ب) به ازای $k \geq 1$ فرض کنید $p(k)$ برقرار باشد

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) \underset{p(k)\text{بنابر}}{=} \frac{k(k+1)}{۲} + (k+1) = (k+1)\left(\frac{k}{۲}+1\right)$$

$$= \frac{(k+1)\left((k+1)+1\right)}{۲}$$

پس $p(k+1)$ نیز برقرار است

بنابر الف و ب واصل استقراء ریاضی:

حکم: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{۲}$

بدست می‌آید.

تمرین: نشان دهید $\forall n \in \mathbb{N} \quad n < ۲^{n}$

راهنمایی: $p(n) := (n < ۲^{n}) \qquad 1 < ۲^{1}$

$$k < ۲^{k} \Longrightarrow k+1 \leq k+k < ۲^{k} + ۲^{k} = ۲ \times ۲^{k} = ۲^{k+1}$$