جلسه یازدهم

نکته: اگر P یک افراز X باشد، آنگاه

$$\frac{X}{P} = \bigcup_{E\in P} E\times E$$

برهان:

$\forall a,b\in X$

$$(a,b)\in \frac{X}{P} \iff \exists E\in P \ (a\in E \wedge b\in E)$$
$$\iff \exists E\in P \ (a,b)\in E\times E$$
$$\iff (a,b)\in \bigcup_{E\in P}(E\times E)$$

قضیه: اگر P افراز X باشد، آنگاه $P = \dfrac{X}{\frac{X}{P}}$.

برهان: اگر $a\in E\in P$ نشان می‌دهیم $\dfrac{a}{\frac{X}{P}} = E$.

زیرا به‌ازای هر $x\in E$ چون $a\in E \wedge x\in E$ پس $(a,x)\in \frac{X}{P}$

بنابراین $x\in \dfrac{a}{\frac{X}{P}}$. از سوی دیگر اگر $y\in \dfrac{a}{\frac{X}{P}}$ آنگاه $(a,y)\in \frac{X}{P}$ پس

$H\in P$ چنان موجود است که $a\in H \wedge y\in H$ بنابراین $a\in E\cap H$ ، $E\cap H\neq \emptyset$.

چون $E,H\in P$ و P افراز X است و $E\cap H\neq\emptyset$ پس $E=H$ بنابراین $y\in H=E$.

بنابراین $E = \dfrac{a}{\frac{X}{P}}$.

به‌ازای هر M داریم:

$$M \in \frac{X}{\frac{X}{P}} \iff \exists w \in X \quad M = \frac{w}{\frac{X}{P}}$$

$$\iff \exists w \in \cup P \quad M = \frac{w}{\frac{X}{P}}$$

P افراز X است پس $\cup P = X$

$$\iff \exists T \in P \quad \exists w \in T \quad M = \frac{w}{\frac{X}{P}} = T$$

$$\iff \exists T \in P \quad \exists w \in T \quad M = T$$

$$\iff \exists T \in P \quad M = T$$

P افراز X است و تمام اعضای P ناتهی‌اند.

$$\iff M \in P$$

و حکم $\frac{X}{\frac{X}{P}} = P$ بدست می‌آید.

قضیه: اگر R یک رابطه هم‌ارزی روی X باشد، آنگاه $R = \frac{X}{\frac{X}{R}}$.

برهان: به‌ازای هر $a, b \in X$ داریم:

$$(a,b) \in \frac{X}{\frac{X}{R}} \iff \exists E \in \frac{X}{R} \quad a \in E \wedge b \in E$$

$$\iff \exists c \in X \quad \left(a \in \frac{c}{R} \wedge b \in \frac{c}{R}\right)$$

$\frac{X}{R} = \{\frac{w}{R} : w \in X\}$

$$\iff \exists c \in X \left(\frac{a}{R} = \frac{c}{R} \wedge \frac{b}{R} = \frac{c}{R} \right)$$

بنابر جلسه قبل

$$\iff \frac{a}{R} = \frac{b}{R}$$

$$\iff (a, b) \in R$$

پس $R = \dfrac{X}{\frac{X}{R}}$.

تابع : سه تایی (f, A, B) را یک تابع نامیم هرگاه:

الف) $f\subseteq A\times B$ (f رابطه‌ای از A در B است)

ب) $Dom(f)=A$ (دامنه f برابر A است)

ج) به ازای هر x,y,z داریم: $(x,y)\in f \wedge (x,z)\in f \Rightarrow y=z$

(f در خاصیت تابعگون صدق می‌کند)

اگر (f,A,B) یک تابع باشد از نمادگذاری $f:A\to B$ تابع است و یا تابع $A\xrightarrow{f}B$ استفاده می‌کنیم.

توجه: اگر $f:A\to B$ تابع باشد و $x\in A$، آنگاه چون $A=Dom(f)$ پس $y\in B$ چنان موجود است که $(x,y)\in f$ اما بنابر خواص تابع (خاصیت (ج) در تعریف بالا) y منحصر به فرد می‌باشد.
y را با $f(x)$ نمایش می‌دهیم پس به جای $(x,y)\in f$ می‌توانیم بنویسیم $y=f(x)$.

$R\subseteq C\times D$

مجموعه آغاز   مجموعه انجام

مثال: $id_A=\{(x,x):x\in A\}$، آنگاه $id_A: A\to A$, $x\mapsto x$ تابع است، موسوم به تابع همانی

\to	$\longrightarrow$
\mapsto	$\longmapsto$

مثال: اگر $B \subseteq A$ ، و $\overset{\text{یوتا}}{\iota_B} = \{(x,x) : x \in B\}$ آنگاه $\iota_B : B \to A$ یک تابع است آن را تابع شمول (B در A) می‌نامیم.

مثال: اگر $B \subseteq A$ و $X_B = (\{1\} \times B) \cup (\{0\} \times (A \setminus B))$ آنگاه $X_B : A \to A$ یک تابع است، آن را تابع مشخصه B در A می‌نامیم.

$$X_B(x) = \begin{cases} 1 & x \in B \\ 0 & x \in A \setminus B \end{cases}$$

مثال: اگر $\lambda \in T$ ، و $C_\lambda = S \times \{\lambda\}$ ، آنگاه $C_\lambda : S \to T$, $x \mapsto \lambda$ تابع ثابت (با مقدار λ) است.

قضیه: اگر $f : A \to B$ تابع باشد و $\underbrace{Im(f)}_{f(A)} \subseteq C$ آنگاه $f : A \to C$ نیز تابع است

$$f(A) = \{z \mid \exists x \in A \ (x,z) \in f\} = \{z \mid \exists x \in A \ \ f(x) = z\} = \{f(x) : x \in A\}$$

برهان: فرض کنید $f : A \to B$ تابع باشد و $Im(f) \subseteq C$ ، به‌ازای هر (x,y) داریم:

$$(x,y) \in f \Longrightarrow x \in Dom(f) \wedge y \in Im(f)$$

$$\Longrightarrow (x,y) \in Dom(f) \times Im(f)$$

$$\Longrightarrow (x,y) \in Im(f)$$

$f : A \to B$ تابع است پس $Dom(f) = A$

$$\Longrightarrow (x,y) \in A\times C$$

$$\mathrm{Im}(f) \subseteq C$$

بنابراین $f \subseteq A\times C$.

چون $f: A \to B$ تابع است پس $\mathrm{Dom}(f) = A$. وچون $f: A\to B$ تابع است پس

$$\forall x,y,z \quad \big((x,y)\in f \wedge (x,z)\in f \Longrightarrow y=z\big)$$

بنابر موارد فوق $f: A \to C$ تابع است.

قضیه: اگر $f: A\to B$, $g: C \to D$ تابع باشند به‌قسمی که $\forall x \in A\cap C \quad f(x) = g(x)$

آنگاه $h := f\cup g : A\cup C \to B\cup D$ تابع است.

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x\in A, \\ g(x) & x\in B. \end{cases}$$

برهان: $f: A\to B$, $g: C\to D$ تابع اند پس $f\subseteq A\times B$, $g \subseteq C\times D$ بنابراین

$$f\cup g \subseteq (A\times B)\cup (C\times D) \subseteq (A\cup C)\times(B\cup D)$$

همچنین به ازای هر z داریم:

$$z\in \mathrm{Dom}(f\cup g) \Longleftrightarrow \exists y \quad (z,y)\in f\cup g$$

$$\Longleftrightarrow \exists y \quad \big((z,y)\in f \vee (z,y)\in g\big)$$

$$\Longleftrightarrow \big(\exists y \quad (z,y)\in f\big) \vee \big(\exists y \quad (z,y)\in g\big)$$

$$\Longleftrightarrow z\in \mathrm{Dom}(f) \vee z\in \mathrm{Dom}(g)$$

$$\Longleftrightarrow z \in \mathrm{Dom}(f) \cup \mathrm{Dom}(g)$$

$\Longleftrightarrow z \in A \cup C$

$f: A \to B$ تابع است پس $Dom(f)=A$ و $g: C \to D$

تابع است پس $Dom(g)=C$

بنابراین $Dom(f \cup g) = A \cup C$

حال فرض کنید $(x,y), (x,z) \in f \cup g$ حالات زیر را داریم:

حالت اول: $(x,y), (x,z) \in f$.

در این حالت چون $f: A \to B$ تابع است پس $y = z$ $(f(x)=)$.

حالت دوم: $(x,y), (x,z) \in g$.

در این حالت مشابه حالت اول چون $g: C \to D$ تابع است پس $y=z$ $(g(x)=)$.

حالت سوم: $(x,y) \in f$ و $(x,z) \in g$.

در این حالت چون $(x,y) \in f$ پس $x \in Dom(f) = A$ و $y = f(x)$. بعلاوه چون $(x,z) \in g$ پس $x \in Dom(g) = C$ و $z = g(x)$. بنابراین $x \in A \cap C$ و بنا بر فرض قضیه $f(x) = g(x)$ پس $y=z$.

حالت چهارم: $(x,y) \in g$ و $(x,z) \in f$.

مشابه حالت سوم در این حالت نیز $y = z$.

بنابر چهار حالت فوق $y = z$.

و برهان تابع بودن $f \cup g : A \cup C \longrightarrow B \cup D$ به سرانجام می رسد.

قضیه: فرض کنید $f: A \longrightarrow B$ و $g: A \longrightarrow D$ تابع باشند. داریم:

$$f = g \Longleftrightarrow (\forall x \in A \quad f(x) = g(x))$$

برهان: "$\Longrightarrow$" فرض کنید $f = g$ و $x \in A$ چون $A = Dom(f) = Dom(g)$ پس

$(x, f(x)) \in f = g$ و چون $(x, f(x)) \in g$ پس $f(x) = g(x)$.

" $\Leftarrow$ " فرض کنید به ازای هر $x \in A$ ؛ $f(x) = g(x)$.

اگر $(x,y) \in f$ ، آنگاه $y = f(x)$ و با توجه به فرض $y = f(x) = g(x)$ پس $(x,y) \in g$ ؛

بنابراین $f \subseteq g$ به طور مشابه $g \subseteq f$. پس $f = g$.