جلسه پنجم

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow X$$

$$f(1)$$

$$f(k+1) = \varphi(f(1), \ldots, f(k))$$

$$C(n, \ldots) : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$k \longmapsto C(n,k)$$

تابع فاکتوریل به صورت استقرایی

$$0! = 1! = 1$$

$$(k+1)! = k!\,(k+1) \qquad (k \geqslant 1)$$

قرار دهید

$$C(0,k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{cases}$$

به ازای $n \geqslant 1$ قرار دهید:

$$C(n,k) = C(n-1,k) + C(n-1,k-1) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

تفسیر:

$$C(n,k) = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} & k = 0, 1, \ldots, n \quad n \geqslant 0 \\ 0 & k \notin \{0, \ldots, n\} \quad n \geqslant 0 \end{cases}$$

برهان، به ازای $n \geq 0$ قرار دهید $p(n)$ عبارت زیر باشد:

$$C(n,k) = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} & 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

برهان: بنابر نحوه تعریف $C(i,j)$ ها داریم:

$$C(0,k) = \begin{cases} 1 = \dfrac{0!}{0!\,(0-0)!} & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

بنابراین $p(0)$ برقرار است

به ازای $n \geq 0$ فرض کنید $p(n)$ برقرار باشد. نشان می دهیم $p(n+1)$ نیز برقرار است.

به ازای $k \in \mathbb{Z}$ حالات زیر را داریم:

حالت اول: $1 \leqslant k \leqslant n$ در این حالت

$$C(n+1,k) = C(n,k) + C(n,k-1)$$

$$\underset{1 \leqslant k \leqslant n}{=} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,\underbrace{(n-(k-1))!}_{(n-k+1)!}}$$

و

$0 \leqslant k-1 \leqslant n-1 \leqslant n$

و

$p(n)$ برقرار است

$$\underbrace{\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \times \frac{(n-k+1)}{(n-k+1)}}_{(n-k+1)!} = \frac{n!\,(n+k-1)}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} \times \frac{k}{k} = \frac{n!\,(k)}{k!\,(n-k+1)!}$$

$(k-1)! \times k = k!$

فاکتور گیری از عامل $\dfrac{n!}{k!\,(n-k+1)!}$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k+1)!}\left((n-k+1)+k\right) = \frac{n!\,(n+1)}{k!\,((n+1)-k)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!\,((n+1)-k)!}$$

حالت دوم: $k=0$.

$$C(n+1,k) = C(n+1,0) = C(n,0) + C(n,-1)$$

$$\underset{\text{بنابر } p(n)}{=} \frac{n!}{0!\,(n-0)!} + 0 = 1 = \frac{(n+1)!}{0!\,(n+1-0)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,((n+1)-k)!}$$

حالت سوم: $k=n+1$.

$$C(n+1,k) = C(n+1,n+1) = C(n,n+1) + C(n,n)$$

$$\underset{\text{بنابر } p(n)}{=} 0 + \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = 1 = \frac{(n+1)!}{(n+1)!\,((n+1)-(n+1))!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}$$

حالت چهارم: $k<0$.

$$C(n+1,k) = C(n,k) + C(n,k-1) = 0+0=0$$

بنابر $p(n)$ و اینکه $k-1<0$, $k<0$

حالت پنجم: $k>n+1$

$$C(n+1,k) = C(n,k) + C(n,k-1) = 0+0=0$$

$p(n)$ واینکه $k-1>n$, $k>n$

بنابر حالات اول تا پنجم، $p(n+1)$ به دست می‌آید.

بنابر اصل استقراء ریاضی به ازای هر $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ، $p(m)$ برقرار است

اگر A, B دو مجموعه باشند، گوئیم A زیرمجموعه B است و از نماد $A \subseteq B$ استفاده می‌کنیم هرگاه

$$\forall x \ (x \in A \to x \in B)$$

مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد را با ϕ نمایش داده و مجموعه تهی می‌نامیم.

به عنوان مثال به ازای هر مجموعه A, B, C داریم:

۱- $A \subseteq A$

۲- $A \subseteq B \subseteq C \implies A \subseteq C$

۳- $\phi \subseteq A$

برهان: به ازای هر x، گزاره $x \in A \longrightarrow x \in A$ همواره درست است

پس $A \subseteq A$

همچنین چون ϕ فاقد عضو است به ازای هر x، گزاره شرطی $x \in \phi \longrightarrow x \in A$ به دلیل نادرست بودن مقدم، درست است. پس $\phi \subseteq A$

فرض کنید $B \subseteq C$, $A \subseteq B$ به ازای x داریم:

$$(x \in A \to x \in B \wedge x \in B \to x \in C) \Rightarrow x \in A \to x \in C$$

تعدی در گزاره‌ها

یافته‌ایم:

$$\forall x \quad x \in A \longrightarrow x \in C$$

پس $A \subseteq C$.

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\} = \{x \in A : x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \in A : x \notin B\}$$

اصول ZF :

۱- اصل گسترش: اگر A, B دو مجموعه باشند، گوئیم A و B مساوی‌اند و از نماد $A=B$ استفاده می‌کنیم هرگاه

$$\forall x \qquad x \in A \longleftrightarrow x \in B$$

۲- اصل مجموعه تهی: مجموعه‌ای وجود دارد که هیچ عضو ندارد. این مجموعه بنابر اصل گسترش منحصر به فرد است. آن را مجموعه تهی نامیده و با ϕ نمایش می‌دهیم.

۳- اصل تصریح (یا اصل زیرمجموعه) : هرگاه A مجموعه‌ای دلخواه و $p(x)$ گزاره‌نمایی برای xهای عضو A باشد، B زیرمجموعه A شامل دقیقاً $x \in A$ها که $p(x)$ را برآورده می‌سازند موجود است. بنابر اصل گسترش B منحصربه‌فرد است آن را با $\{x \in A : p(x)\}$ نمایش می‌دهیم.

$$x \in B \Longleftrightarrow x \in A \wedge p(x)$$

۴- اصل زوج‌سازی : اگر a, b دو مجموعه باشند، مجموعه‌ای موجود است که اعضای آن دقیقاً a و b هستند. این مجموعه را که بنابر اصل گسترش منحصربه‌فرد است با $\{a, b\}$ نمایش می‌دهیم. مجموعه $\{a, a\}$ را با $\{a\}$ نمایش می‌دهیم.

قرار داد: اگر a, b مجموعه‌هایی دلخواه باشند بنابر اصل زوج‌سازی $\{a, b\}$ و $\{a\}$ مجموعه‌اند. مجدداً بنابر اصل زوج‌سازی $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ مجموعه است. آن را با (a, b) نمایش داده و زوج مرتب (a, b) می‌نامیم. پس از پایان فراگیری اصل ZF نشان دهید

$$(a, b) = (c, d) \Longleftrightarrow a = c \wedge b = d$$

۵- اصل اجتماع : هرگاه A مجموعه داده شده باشد، مجموعه‌ای وجود دارد که اعضای آن دقیقاً عضوهای اعضای A هستند، این مجموعه بنابر اصل گسترش منحصربه‌فرد است و با $\bigcup A$ نمایش داده می‌شود و می‌نویسیم :

$$\bigcup A = \{x : \exists a (a \in A \wedge x \in a)\}$$

small cup   big cup

اگر a و b دو مجموعه باشند $\bigcup\{a,b\}$ را با $a \cup b$ نمایش می‌دهیم.

$A = \{\{4,7\},\{\sqrt{\pi}\},\{*\}\}$ $\bigcup A = \{4,7,\sqrt{\pi},*\}$

۶- اصل مجموعه توانی: اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، مجموعه‌ای شامل دقیقاً تمام زیرمجموعه‌های A موجود است. آن را مجموعه توانی A نامیده و با $p(A)$ نمایش می‌دهیم.

پس $\quad p(A) = \{x : x \subseteq A\}$

قرارداد: اگر a مجموعه‌ای دلخواه باشد به کمک اصول اجتماع و زوج سازی $a \cup \{a\}$ نیز مجموعه است. آن را با a^+ نیز نمایش داده و تالی a می‌نامیم.

تعریف: مجموعه A را استقرایی نامیم اگر $\phi \in A$ و به ازای هر $x \in A$ داشته باشیم

$$x^+ = x \cup \{x\} \in A$$

۷- اصل بی‌نهایت: مجموعه A چنان موجود است که $\phi \in A$ و $\forall x\,(x \in A \Rightarrow x \cup \{x\} \in A)$

یعنی حداقل یک مجموعه استقرایی داریم.

(اضافه)

۸- اصل جایگزینی: اگر $p(x,y)$ گزاره نما و A مجموعه باشد به طوری که برای هر $x\in A$ یک عنصر y وجود داشته باشد که $p(x,y)$ درست باشد، y ها تشکیل مجموعه می‌دهند.

۹- اصل مبنا (یا اصل انتظام): اگر a مجموعه‌ای ناتهی باشد $b\in a$ چنان موجود است که هیچ عضو مشترکی با a ندارد.

اگر A مجموعه‌ای ناتهی باشد، $\alpha\in A$ را دلخواه انتخاب کنید. بنابر اصل تصریح $\{x\in\alpha : \forall\beta\in A \quad x\in\beta\}$ یک زیرمجموعه α است. می‌توان نشان داد این مجموعه وابسته به α انتخاب‌شده نیست، آن را با $\cap A$ نمایش می‌دهیم پس:

$$x\in \cap A \Longleftrightarrow \forall\beta\in A \quad x\in\beta$$

آنچه در جلسه بعد خواهید دید:

$K \ , \quad P(K) \ , \quad \cap\{A\in P(K) : \text{استقرایی است } A\} =: M$

$L\cap M = M \qquad \omega$