

练习1.4

对任意的变量 x 和 λ -项 M 和 N ，定义如下内容：

$$ST(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{x\}$$

$$ST(MN) \stackrel{\text{def}}{=} \{MN\} \cup ST(M) \cup ST(N)$$

$$ST(\lambda x.M) \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda x.M\} \cup ST(M)$$

练习 1.4. 令 $ST(M)$ 为 λ -项 M 的所有子项的集合，并假设 M 是其自身的一个子项。利用结构归纳的方式定义函数 $ST(\cdot)$ 。例如，

$$ST(\lambda x.xy) = \{\lambda x.xy, xy, x, y\}.$$

练习1.6

- ① $(\lambda x.xy)\{y/x\} = \lambda y.yy$ *rename* 将所有出现的 x 重命名为 y ，无论是自由还是受限
- ② $(\lambda x.xy)[y/x] = \lambda x.xy$ *Substitution* 因为 x 是受限变量， \therefore 不将 x 替换为 y 受限
- ③ $(\lambda y.xy)\{y/x\} = \lambda y.yy$ *rename* 将所有出现的 x 重命名为 y ，无论是自由还是受限
- ④ $(\lambda y.xy)[y/x] = \lambda y'.yy'$, y' is fresh *Substitution* x 是自由变量，因此可将 x 替换为 y ，但需将 $\lambda y.xy$ 中的 y 重命名。

练习 1.6. 比较如下四个表达式的异同，说明重命名和替换操作的不同之处。

- ① $(\lambda x.xy)\{y/x\}$, ② $(\lambda x.xy)[y/x]$, ③ $(\lambda y.xy)\{y/x\}$, ④ $(\lambda y.xy)[y/x]$.

四个表达式所用到的rule分别是：

$$\begin{aligned}
 (\lambda x. m)\{y/x\} &\stackrel{def}{=} \lambda y. (m\{y/x\}) & (\lambda z. m)\{y/x\} &\stackrel{def}{=} \lambda z. (m\{y/x\}) \text{ 若 } x \neq z \\
 \uparrow & & \uparrow & \\
 \textcircled{1} (\lambda x. xy)\{y/x\}, \textcircled{2} (\lambda x. xy)[y/x], \textcircled{3} (\lambda y. xy)\{y/x\}, \textcircled{4} (\lambda y. xy)[y/x] & & & \\
 \downarrow & & \downarrow & \\
 (\lambda x. m)[N/x] & & (\lambda y'. m)[N/x] &\stackrel{def}{=} \lambda y'. (m\{y'/y\}[N/x]) \\
 \text{受限变量} & & \text{若 } x \neq y, y \in FV(N) & \\
 & & \text{且 } y' \text{ 是新鲜的} &
 \end{aligned}$$

由以上可知：重命名和替换操作的不同操作在于：

- 在重命名的时候，我们把所有x的出现替换为y的出现，不管这些出现是自由的还是受限的。即 α 等价允许把受限变量重命名为任何新的变量。
- 而在替换的时候，只能将自由变量替换为其他项，如果对受限变量替换，会破坏 α 等价。
- 在替换时，项N中的自由变量不能被M中的绑定子捕获。应把项M中自由出现的x改写成项N的免捕获，即如果自由变量更名后与原有的受限变量同名，则先重命名受限变量为原来的受限变量依然是受限变量，自由变量依然是自由变量。**

$$(\lambda y. M)[N/x] \stackrel{def}{=} \lambda y'. (M\{y'/y\}[N/x]) \quad \text{若 } x \neq y, y \in FV(N) \text{ 且 } y' \text{ 是新鲜的}$$