

HHKB プログラミングコンテスト 2020

D. Squares

考察

補集合を考える。つまり重ならないパターンを考えるのではなく、全ての置き方から、重なるパターンを除く。青い正方形の置き方は $(N - A + 1)^2$ 通り、赤い正方形の置き方は $(N - B + 1)^2$ 通りある。ここから重なるパターンを考える。二次元のまま考えると複雑だが、正方形が重なっていることは、縦と横それぞれの軸に射影したときに、どちらも重なっている状態と考えることができる。よって、一次元の線の重なり方を考えればよい。ここで、一次元の線の重なりを求めるために、さらに補集合を考える。つまり、長さ N の区間内に長さ A と B の二本の線を置くときの、重ならない置き方の数を考える。まず A が常に左側にある場合を考えると、 A をめいっばい左に寄せた場合、それに重ならない B の置き方は $N - A - B + 1$ 通りある。 A を 1 だけ右にずらしたとき、 $N - A - B$ 通りある。よって 1 から $N - A - B + 1$ の総和、 $(N - A - B + 2)(N - A - B + 1) \div 2$ 通りある。 B が左側にある場合も同じだけあるので、結局長さ N の区間内に長さ A と B の線を重なるように配置する方法は、 $(N - A - B + 2)(N - A - B + 1)$ 通りある。縦も横も同じだけあるので、結局 2 つの正方形が重なる場合の数は、 $(N - A - B + 2)^2(N - A - B + 1)^2$ 通りである。よって、答えは全ての置き方からこれを引いて、 $(N - A + 1)^2(N - B + 1)^2 - (N - A - B + 2)^2(N - A - B + 1)^2$ 。複雑だが各クエリには $O(1)$ で答えられるため、全体計算量は $O(T)$ 。MOD の扱いには注意。