Парные столкновения

Маренков Е.Д.

14 сентября 2015 г.

Задача двух тел

Чтобы определить движение двух тел, взаимодействующих с потенциалом $U(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)$, надо исходить из функции Лагранжа:

$$L = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}_1^{\,2}}{2} + \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}_1^{\,2}}{2} - U(r) \tag{1}$$

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2$ В системе центра масс:

$$L_c = \frac{\mu \boldsymbol{v}^2}{2} - U(r) \tag{2}$$

$\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ – приведенная масса,
$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ — относительная скорость.

Задача двух тел

Вместо решения уравнений движения для двух тел можно решить задачу о движении одного тела с приведенной массой в центральном поле $U(r)$.

Возврат в лабораторную систему:

$$\boldsymbol{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r} \tag{3}$$

Зная $\boldsymbol{r}(t)$, можно определить по этим формулам $\boldsymbol{r}_1(t)$ и $\boldsymbol{r}_2(t)$

Движение в центральном поле

Момент импульса направлен перпендикулярно плоскости движения (ось z) и сохраняется: $M = M_z = m\mathbf{r}^2\dot{\phi} = const$. Полная энергия также сохраняется:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{eff}(r) \tag{4}$$

$U_{eff} = \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)$ — эффективная потенциальная энергия.

Двухмерное движение свелось к одномерному в поле с эффективной потенциальной энергией

Движение в центральном поле

Уравнение (4) интегрируется в общем виде:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} + const \qquad (5)$$

Из-за сохранения момента

$$d\phi = \frac{M}{mr^2} dt$$

Поэтому

$$\phi = \int \frac{(M/r^2)dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - M^2/r^2}} + const \qquad (6)$$