一般化されたオームの法則

堀田英之

2020 年 4 月 15 日

§2.1.3 に登場する, 一般化されたオームの法則の導出を示す. かなりの非自明な近似を使っており, 導出は極めて困難. ここでは教科書に沿って, 一価のプラズマについて考える. よって $n_i = n_e$. 電子, 水素イオン (陽子) の運動方程式をそれぞれ書き下すと, それぞれの粒子の電荷量を $-e$, e とする.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(n_e m_e \boldsymbol{v}_e\right) + \nabla\cdot\left(n_e m_e \boldsymbol{v}_e \boldsymbol{v}_e\right) = -\nabla p_e - e n_e\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_e \times \boldsymbol{B}\right) + \boldsymbol{R}_{ei} + \boldsymbol{R}_{en} \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(n_i m_i \boldsymbol{v}_i\right) + \nabla\cdot\left(n_i m_i \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i\right) = -\nabla p_i + e n_i\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{B}\right) + \boldsymbol{R}_{ie} + \boldsymbol{R}_{in} \tag{2}$$

それぞれの粒子に対する連続の式

$$\frac{\partial n_*}{\partial t} = -\nabla\cdot\left(n_* \boldsymbol{v}_*\right) \tag{3}$$

が成り立っているので,

$$n_* m_* \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}_*}{\partial t} + \left(\boldsymbol{v}_*\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}_*\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left(n_* m_* \boldsymbol{v}_*\right) + \nabla\cdot\left(n_* m_* \boldsymbol{v}_* \boldsymbol{v}_*\right) \tag{4}$$

という関係が成り立っていることに注意. ここで、一流体近似で用いられる速度 $\boldsymbol{v}$, 電流密度 $\boldsymbol{j}$ を以下のように定義する

$$\boldsymbol{v} = \frac{n_e m_e \boldsymbol{v}_e + n_i m_i \boldsymbol{v}_i}{n_e m_e + n_i m_i} \sim \frac{m_e \boldsymbol{v}_e + m_i \boldsymbol{v}_i}{m_e + m_i} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{j} = e\left(-n_e \boldsymbol{v}_e + n_i \boldsymbol{v}_i\right) \sim e n_e\left(-\boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_i\right) \tag{6}$$

準中性条件から $n_e \sim n_i$ を用いた. また, $m_e << m_i$ を用いて以下の近似をおこなう.

$$\boldsymbol{v} = \frac{m_i}{m_e + m_i}\left(\frac{m_e}{m_i}\boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_i\right) \sim \boldsymbol{v}_i \tag{7}$$

$$\boldsymbol{v}_e \sim \boldsymbol{v}_i - \frac{\boldsymbol{j}}{e n_e} \sim \boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{j}}{e n_e} \tag{8}$$

となる. 式 (2)$\times m_e/m_i-$ 式 (1) を実行すると

$$\begin{aligned}\frac{m_e}{e}\frac{\partial}{\partial t}\left[e n_e\left(-\boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_i\right)\right] + \frac{m_e}{e}\nabla\cdot\left[e n_e\left(-\boldsymbol{v}_e\boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i\right)\right] \\ = \nabla p_e - \frac{m_e}{m_i}\nabla p_i + e n_e\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_e\times\boldsymbol{B}\right) + \frac{m_e}{m_i} e n_i\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{B}\right) \\ + \boldsymbol{R}_{ei} + \boldsymbol{R}_{en} + \frac{m_e}{m_i}\left(\boldsymbol{R}_{ie} + \boldsymbol{R}_{in}\right)\end{aligned} \tag{9}$$

左辺第二項の $\nabla\cdot$ の中身を式 (7) と (8) を用いて変形する.

$$
\begin{aligned}
en_e\left(-\boldsymbol{v}_e\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i\right)=&en_e\left[-\left(\boldsymbol{v}-\frac{\boldsymbol{j}}{en_e}\right)\left(\boldsymbol{v}-\frac{\boldsymbol{j}}{en_e}\right)+\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\right]\\
=&\boldsymbol{v}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{j}\boldsymbol{v}+\frac{\boldsymbol{j}\boldsymbol{j}}{en_e}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

最後の項は Priest の教科書では無視されているように見える. 無視する妥当性はよくわからない. 右辺第三項は, 式 (8) を代入して,

$$
en_e\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}_e\times\boldsymbol{B}\right)=en_e\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}-\frac{\boldsymbol{j}}{en_e}\times\boldsymbol{B}\right)
\tag{11}
$$

電子と水素イオンの衝突項は, 一般に以下のように表される.

$$
\boldsymbol{R}_{ei}=\frac{n_e m_e\left(\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_e\right)}{\tau_{ei}}
\tag{12}
$$

$$
\boldsymbol{R}_{ie}=\frac{n_i m_i\left(\boldsymbol{v}_e-\boldsymbol{v}_i\right)}{\tau_{ie}}
\tag{13}
$$

作用反作用を考えると $\boldsymbol{R}_{ei}=\boldsymbol{R}_{ie}$ なので, $m_e/m_i\boldsymbol{R}_{ie}$ の項は無視できることがわかる. ここで衝突項は以下のように変形できる.

$$
\boldsymbol{R}_{ei}=\frac{m_e}{e\tau_{ei}}\boldsymbol{j}=\frac{m_e}{eB}\frac{1}{\tau_{ei}}B\boldsymbol{j}=\frac{B\boldsymbol{j}}{\Omega_e\tau_{ei}}
\tag{14}
$$

ここで, $\Omega_e=eB/m_e$ は電子のジャイロ振動数 (磁場 B の下で円運動するときの振動数) である. 電子と中性粒子の衝突項は, $\boldsymbol{v}_n\sim\boldsymbol{v}_i$ が仮定されていると思われる. そうすると電子とイオンの衝突項と同様に

$$
\boldsymbol{R}_{en}=\frac{B\boldsymbol{j}}{\Omega_e\tau_{en}}
\tag{15}
$$

と書くことができる.
ここまでをまとめると,

$$
\frac{m_e}{e}\left[\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\boldsymbol{v}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{j}\boldsymbol{v}+\frac{\boldsymbol{j}\boldsymbol{j}}{en_e}\right)\right]=en_e\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}+\frac{\nabla p_e}{en_e}\right)-\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}+\left(\frac{1}{\Omega_e\tau_{ei}}+\frac{1}{\Omega_e\tau_{en}}\right)B\boldsymbol{j}
\tag{16}
$$

となる.
最後の項はプラズマと中性粒子の相互作用によるもの. ここからは, 非常に一流体近似したときの運動方程式を書き下すと以下のようになる.

$$
\rho\left[\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}\right]=-\nabla p+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{R}_{in}
\tag{17}
$$

ここで一流体となった場合でも, 運動量のほとんどは水素イオンが担うので, 衝突項はイオンと中性粒子のものを考えた. ここでは, 圧力勾配力, ローレンツ力, 衝突項が釣り合っていると考える. 衝突項をどのようにすればいいかよくわからないが, Priest の教科書では以下のように定義しているように見える。これはスタンダードな方法ではないだろう.

$$
\boldsymbol{R}_{in}=-\frac{\left(n_a+n_e\right)^2}{n_a^2 e}\frac{m_e}{\tau_{in}}\left(\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_i\right)
\tag{18}
$$

誘導電場は $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ であるが, 中性粒子によるドリフトを考えると誘導電場は $\boldsymbol{v}_i \sim \boldsymbol{v}$ を考慮すると

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{v}_n \times \boldsymbol{B} + \frac{n_a^2}{(n_a + n_e)^2} \frac{\tau_{in} e}{m_e} \left[\nabla p \times \boldsymbol{B} - (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} \right], \tag{19}$$

となり, 誘導電場に最後の項を足すのが良いことがわかる. 教科書の一般化されたオームの法則が証明可能になる (中性粒子との衝突項はかなり怪しいが). 一般的な教科書では, 違う導き方をしているよう.