

# Analyse I - Résumé

Mahel Coquaz

Semestre d'automne 2025

# Contents

0.1	Organisation par cours . . . . .	7
<b>1</b>	<b>Prérequis</b>	<b>11</b>
1.1	Identités algébriques . . . . .	11
1.2	Exponentielles & Logarithmes . . . . .	11
1.2.1	Exponentielles . . . . .	11
1.2.2	Logarithmes . . . . .	12
1.3	Trigonométrie . . . . .	12
1.4	Fonctions élémentaires . . . . .	12
1.4.1	Types de fonctions . . . . .	12
1.4.2	Injectivité, surjectivité, bijectivité . . . . .	13
1.4.3	Fonctions réciproques . . . . .	13
1.4.4	Fonctions composées . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Nombre réels</b>	<b>15</b>
2.1	Ensembles . . . . .	15
2.1.1	Opération ensemblistes . . . . .	15
2.2	Nombres naturels, rationnels, réels . . . . .	15
2.2.1	Borne inférieure et supérieure . . . . .	15
2.2.2	Supremum et infimum . . . . .	16
2.2.3	Notations d'intervalles . . . . .	16
2.3	Nombres complexes . . . . .	16
2.3.1	Propriétés des nombres complexes . . . . .	17
2.3.2	Les 3 formes de nombres $\mathbb{C}$ . . . . .	17
2.3.3	Conjugué . . . . .	18
2.3.4	Racines de $\mathbb{C}$ . . . . .	19
2.3.5	Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$ . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Suites de nombres réels</b>	<b>21</b>
3.1	Définition . . . . .	21
3.2	Raisonnement par récurrence . . . . .	21
3.3	Limite des suites . . . . .	22
3.3.1	Quotient de deux suites polynomiales . . . . .	22
3.3.2	Théorème des deux gendarmes . . . . .	23
3.3.3	Cas des suites géométriques . . . . .	23

3.3.4	Remarques sur les limites . . . . .	23
3.3.5	Critère de D'Alembert . . . . .	23
3.3.6	Limites infinies . . . . .	24
3.3.7	Formes indéterminées . . . . .	24
3.3.8	Convergence de suites monotones . . . . .	24
3.4	Le nombre $e$ . . . . .	24
3.5	Suites définies par récurrence . . . . .	25
3.6	Sous-suites de Cauchy . . . . .	25
3.6.1	Suites de Cauchy . . . . .	26
3.7	Limite supérieure et limite inférieure d'une suite bornée . . .	26
<b>4</b>	<b>Séries numériques</b>	<b>27</b>
4.1	Définitions et exemples . . . . .	27
4.2	Critères de convergence . . . . .	28
4.2.1	Critère de Leibniz . . . . .	28
4.2.2	Critère de comparaison . . . . .	28
4.2.3	Critère d'Alembert . . . . .	28
4.2.4	Critère de Cauchy . . . . .	29
4.2.5	Remarques . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Fonctions réelles</b>	<b>31</b>
5.1	Définitions et propriétés . . . . .	31
5.1.1	Propriétés de base . . . . .	31
5.2	Limite d'une fonction . . . . .	32
5.2.1	Caractérisation de la limite d'une fonction à partir des suites . . . . .	33
5.2.2	Critère de Cauchy pour les fonctions . . . . .	33
5.2.3	Opérations algébriques sur les limites . . . . .	33
5.2.4	Théorème des 2 gendarmes pour les fonctions . . . . .	33
5.2.5	Théorème: Limite de la composée de deux fonctions . . . . .	34
5.3	Limites lorsque $x$ tend vers $\pm\infty$ . . . . .	34
5.4	Limites infinies . . . . .	34
5.4.1	Formes indéterminées . . . . .	34
5.4.2	Propriétés des limites infinies . . . . .	35
5.5	Limites à droite et à gauche . . . . .	35
5.6	Fonction exponentielle et logarithmique . . . . .	36
5.6.1	Propriétés et définitions de l'exponentielle . . . . .	36
5.6.2	Propriétés et définitions du logarithme . . . . .	36
5.7	Fonctions continues . . . . .	37
5.7.1	Quelques fonctions continues remarquables . . . . .	37
5.7.2	Limites remarquables . . . . .	37
5.7.3	Opérations sur les fonctions continues . . . . .	37
5.7.4	Prolongement par continuité d'une fonction en un point . . . . .	38
5.8	Fonctions continues sur un intervalle . . . . .	38

5.8.1	Théorème de la valeur intermédiaire . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Calcul différentiel</b>	<b>41</b>
6.1	Fonctions dérivables . . . . .	41
6.2	Fonction dérivée . . . . .	41
6.2.1	Interprétation géométrique . . . . .	42
6.2.2	Propriétés et autres trucs de la fonction dérivée . . . .	42
6.3	Dérivée de la fonction réciproque . . . . .	42
6.4	Dérivée logarithmique . . . . .	43
6.5	Fonctions hyperboliques . . . . .	43
6.6	Dérivées d'ordre $n$ . . . . .	43
6.7	Propriétés des fonctions dérivables . . . . .	44
6.8	Théorème de Rolle . . . . .	44
6.9	Théorème des accroissement finis (TAF) . . . . .	44
6.10	Règle de Bernoulli-l'Hospital . . . . .	45
6.11	Développements limités . . . . .	45
6.11.1	Formule de Taylor . . . . .	45
6.11.2	Étude de fonctions . . . . .	46
6.11.3	Opérations algébriques sur les développements limités	47
<b>7</b>	<b>Séries entières</b>	<b>49</b>
7.1	Rayon de convergence . . . . .	49
7.2	Série de Taylor . . . . .	50
7.2.1	Séries de Taylor communes . . . . .	50
7.2.2	Exemple de série de Taylor qui ne converge pas vers $f(x)$ . . . . .	51
7.3	Primitive et dérivée d'une fonction définie par une série entière	51
7.3.1	Quelques primitives . . . . .	51
<b>8</b>	<b>Calcul intégral</b>	<b>53</b>
8.1	Intégrale d'une fonction continue . . . . .	53
8.1.1	Définition et sommes de Darboux . . . . .	53
8.1.2	Propriétés . . . . .	54
8.2	Relation entre intégrale et primitive . . . . .	54
8.2.1	Propriétés . . . . .	55
8.3	Techniques d'intégration . . . . .	55
8.3.1	Changement de variables . . . . .	55
8.3.2	Intégration par parties . . . . .	55
8.3.3	Intégration de fonctions rationnelles . . . . .	56
<b>9</b>	<b>Intégrales généralisées</b>	<b>59</b>
9.1	Intégrales généralisées sur un intervalle borné . . . . .	59
9.2	Intégrales généralisées sur un intervalle non borné . . . . .	60

# Cours

Cours 1 - 8 septembre 2025 . . . . .	11
Cours 2 - 10 septembre 2025 . . . . .	15
Cours 3 - 15 septembre 2025 . . . . .	16
Cours 4 - 17 septembre 2025 . . . . .	16
Cours 5 - 24 septembre 2025 . . . . .	18
Cours 6 - 29 septembre 2025 . . . . .	21
Cours 7 - 1 octobre 2025 . . . . .	22
Cours 8 - 6 octobre 2025 . . . . .	23
Cours 9 - 8 octobre 2025 . . . . .	24
Cours 10 - 13 octobre 2025 . . . . .	25
Cours 11 - 15 octobre 2025 . . . . .	28
Cours 12 - 27 octobre 2025 . . . . .	31
Cours 13 - 29 octobre 2025 . . . . .	32
Cours 14 - 3 novembre 2025 . . . . .	34
Cours 15 - 5 novembre 2025 . . . . .	35
Cours 16 - 10 novembre 2025 . . . . .	37
Cours 17 - 12 novembre 2025 . . . . .	37
Cours 18 - 17 novembre 2025 . . . . .	41
Cours 19 - 19 novembre 2025 . . . . .	42
Cours 20 - 24 novembre 2025 . . . . .	44
Cours 21 - 26 novembre 2025 . . . . .	45
Cours 22 - 1er décembre 2025 . . . . .	47
Cours 23 - 3 décembre 2025 . . . . .	50
Cours 24 - 8 décembre 2025 . . . . .	53
Cours 25 - 10 décembre 2025 . . . . .	55
Cours 26 - 15 décembre 2025 . . . . .	59

## Introduction

Ce qui suit se veut être un résumé condensé du cours d'Analyse I pour IN (MATH-101e) donné au semestre d'automne 2025 à l'EPFL. Le contenu de ce cours ne m'appartient pas et est quasiment intégralement extrait du cours de la Professeur Anna Lachowska qui l'a enseigné. J'ai cependant pris la liberté de sauter/raccourcir certains passages et d'ajouter des notes lorsqu'il me semblait pertinent de le faire.

Il faut également noter que la nature de résumé de ce qui suit ne permet pas d'appréhender toutes les notions ou subtilités du cours, rien de ce qui est fait à l'EPFL ne peut être considéré comme "trivial" contrairement à ce que l'ont peut régulièrement entendre dans la bouche des professeurs, ce document a donc plus vocation à être un aide mémoire ou complément plutôt qu'un support complet de cours.

Ce résumé/polycopié n'est pas exempt d'erreurs, si vous en trouvez une, vous pouvez me contacter sur mon adresse EPFL [mahel.coquaz@epfl.ch](mailto:mahel.coquaz@epfl.ch) ou via le repo GitHub <https://github.com/hotwraith/LectureNotes>.

Le repository GitHub est aussi où se trouvent les dernières versions des fichiers PDFs et  $\text{\TeX}$  pour ce cours (et éventuellement d'autres).

Rendons à César ce qui appartient à César, merci à Joachim Favre et Faust dont les notes et polycopiés dactylographiés m'ont inspiré dans la réalisation de ces résumés.

## 0.1 Organisation par cours

1

- Cours 1 - 8 septembre 2025: "C'est trivial ça" p.11
  - Présentation et explications du cours et de sa forme
  - Révisions et passage en revue des prérequis
- Cours 2 - 10 septembre 2025: For  $\mathbb{R}$  ? p.15
  - Notations ensemblistes
  - Opérations ensemblistes
  - Nombres & théorème des bornes inférieure et supérieure
- Cours 3 - 15 septembre 2025: Élisabeth Born(é)e p.16
  - Supremum et infimum
  - Notations d'intervalles
- Cours 4 - 17 septembre 2025: ça se complique... p.16
  - Arguments et modules de nombres complexes
  - Les 3 formes de nombres complexes
  - Formule de Moivre et puissance de nombres complexes
- Cours 5 - 24 septembre 2025: C'est du français ou des maths ? p.18
  - Conjugué d'un complexe
  - Racines de complexes
  - Équations polynomiales dans  $\mathbb{C}$
- Cours 6 - 29 septembre 2025: Classé sans suite p.21
  - Définition des suites
  - Le raisonnement par récurrence
  - Limites de suites
- Cours 7 - 1 octobre 2025: C'est limite ça p.22
  - Limites finies
  - Quotient de suites polynomiales
  - Théorème des deux gendarmes

---

<sup>1</sup>À cause d'une skill issue il faut cliquer sur le **numéro** de page pour être envoyé sur la section correspondante du pdf.

- Cours 8 - 6 octobre 2025: Le roi d'Alembert... p.23
  - Suites géométriques
  - Critère d'Alembert
  - Limites infinies & formes indéterminées
- Cours 9 - 8 octobre 2025: eeeeeaoooo p.24
  - Convergence de suites monotones
  - Le nombre  $e$
  - Suites définies par récurrence
- Cours 10 - 13 octobre 2025: Netflix p.25
  - Sous-suites et suites de Cauchy
  - Limite supérieure et inférieure
  - Définition et exemples de séries numériques
- Cours 11 - 15 octobre 2025: Critères p.28
  - Convergence absolue
  - Critère de Leibniz et de comparaison
  - Critère de Cauchy et d'Alembert
- Cours 12 - 27 octobre 2025: "Cours le plus facile" -Lachowska p.31
  - Définition
  - et propriétés de fonctions réelles
- Cours 13 - 29 octobre 2025: I'm reaching my limit p.32
  - Limite d'une fonction
  - Caractérisation de la limite d'une fonction à partir des suites & critère de Cauchy pour les fonctions
  - Opérations algébriques sur les limites et théorème des deux gendarmes pour les fonctions
- Cours 14 - 3 novembre 2025: Infinite number of mathematicians walk into a bar p.34
  - Limites de fonctions composées
  - Limites à  $\pm\infty$
  - Limite infinies et formes indéterminées
- Cours 15 - 5 novembre 2025: NàJ p.35

- Limites à droite et à gauche
  - Exponentielle et logarithme
  - Fonctions continues
- Cours 16 - 10 novembre 2025: C'est un peu beaucoup trop calme p.37
  - Pas de cours, examen blanc.
- Cours 17 - 12 novembre 2025: • p.37
  - Prolongement par continuité
  - Fonctions continues sur un intervalle
  - Théorème de la valeur intermédiaire (TVI)
- Cours 18 - 17 novembre 2025: Virtuel et différent p.41
  - Fonctions dérivables
  - Fonction dérivée
  - Dérivées à connaître
- Cours 19 - 19 novembre 2025: Rolle-en-garos p.42
  - Dérivée de la fonction réciproque
  - Fonctions hyperboliques
  - Dérivées d'ordre  $n$
- Cours 20 - 24 novembre 2025: Tout ce TAF va m'envoyer à l'Hôpital p.44
  - Théorème des accroissements finis (TAF)
  - Règle de Bernoulli-l'Hôpital
- Cours 21 - 26 novembre 2025: J'aime pas trop comment ça se développe... p.45
  - Développements limités
  - Formule de Taylor
  - Étude de fonctions
- Cours 22 - 1er décembre 2025: The most wonderful time of the year! p.47
  - Opérations algébriques sur les DLs
  - Séries entières

- Rayon et domaine de convergence
- Cours 23 - 3 décembre 2025: My Taylor is rich p.50
  - Série de Taylor
  - Exemple de série de Taylor ne convergeant pas vers  $f(x)$
  - Primitive et dérivée d'une fonction définie par une série entière
- Cours 24 - 8 décembre 2025: Intégralement relou p.53
  - Sommes de Darboux
  - Relation entre intégrale et primitive
  - Techniques d'intégration: changement de variables
- Cours 25 - 10 décembre 2025: Les intégrales c'est un art p.55
  - Techniques d'intégration: intégrations par parties
  - Techniques d'intégration: intégrations de fonctions rationnelles
- Cours 26 - 15 décembre 2025: "Et pas n'importe laquelle, l'intégrale du Général" p.59
  - Intégrales généralisées sur intervalle borné
  - Intégrales généralisées sur intervalle non-borné
  - Convergence et divergence de ces intégrales

# Chapter 1

## Prérequis

Cours 1 - 8 septembre 2025: "C'est trivial ça"

### 1.1 Identités algébriques

- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$
- $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$
- $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$

### 1.2 Exponentielles & Logarithmes

#### 1.2.1 Exponentielles

Avec  $a, b \in \mathbb{R}$

- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(ab)^x = a^x b^x$
- $a^0 = 1$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
- $a^1 = a$

### 1.2.2 Logarithmes

Avec  $\ln = \log$  le logarithme naturel

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^c) = c \cdot \ln(x)$
- $\ln(1) = 0$
- $\log_a(a) = 1$

### 1.3 Trigonométrie

Avec  $\sin(x), \cos(x) \forall x \in \mathbb{R}$

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  &  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$
- $\cos(0) = \cos(x - x) = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin(x) \cos(x) + \cos(x) \sin(x) = 2 \sin(x) \cos(x)$
- $\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

### 1.4 Fonctions élémentaires

#### 1.4.1 Types de fonctions

##### 1. Polynomiales

- Linéaire:  $f(x) = ax + b; a, b \in \mathbb{R}$
- Quadratiques:  $f(x) = ax^2 + bx + c; a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

##### 2. Fonctions rationnelles: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes, et $Q(x) \neq 0$

##### 3. Fonctions algébriques: Toute fonction qui est une solution d'une équation polynomiale, ex: $f(x) = \sqrt{x}$

##### 4. Fonctions transcendantes: fonctions non algébriques

- (a) Exponentielles et logarithmiques:  $f(x) = e^x, g(x) = \ln(x)$
- (b) Fonctions trigos et réciproques:  $f(x) = \sin(x), g(x) = \cos(x)$

### 1.4.2 Injectivité, surjectivité, bijectivité

**Définition 1.4.1**  $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \text{ est bien définie} \} = \text{le } \mathbf{domaine}$   
*de définition de  $f$*

$f(D) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D(f) : f(x) = y\} = \text{l'ensemble image de } f$

**Définition 1.4.2** *Surjectivité*

$f : E \rightarrow F$  est **surjective** si  $\forall y \in F, \exists$  au moins un  $x \in E : f(x) = y$

**Définition 1.4.3** *Injectivité*

$f : E \rightarrow F$  est **injective** si  $\forall y \in F, \exists$  au plus un  $x \in E : f(x) = y$

Autrement dit: Soit  $x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$

**Définition 1.4.4** *Bijectivité* Si  $f : E \rightarrow F$  est injective **ET** surjective, alors elle est **bijective**

### 1.4.3 Fonctions réciproques

**Définition 1.4.5** N'existent que si  $f : E \rightarrow F$  est **bijective** et est définie par  $f^{-1} : F \rightarrow E$  donc  $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

### 1.4.4 Fonctions composées

Soit  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $f(D_f) \subset D_g$  on peut alors définir la fonction composée  $g \circ f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  par  $g \circ f(x) = g(f(x))$ <sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Il est bon de noter que de manière générale:  $g \circ f \neq f \circ g$



## Chapter 2

# Nombre réels

Cours 2 - 10 septembre 2025: For  $\mathbb{R}$  ?

### 2.1 Ensembles

Un ensemble est une “Collection des objets définis et distincts” (G. Cantor)

**Définition 2.1.1**  $X \subset Y$  Soit  $\forall b \in X \Rightarrow b \in Y$

Sa négation:  $X \not\subset Y$

$\exists a \in X : a \notin Y$

**Définition 2.1.2**  $X = Y \Leftrightarrow Y \subset X$  et  $X \subset Y$

**Définition 2.1.3**  $\emptyset$  l'ensemble vide:  $\emptyset = \{\}$

$\forall X : \emptyset \subset X$

$\forall X : X \subset X$

#### 2.1.1 Opération ensemblistes

- Réunion:  $X \cup Y = \{a \in \cup : a \in X \text{ ou } a \in Y\}$
- Intersection:  $X \cap Y = \{a \in \cap : a \in X \text{ et } a \in Y\}$
- Différence:  $X \setminus Y = \{a \in \setminus : a \in X \text{ et } a \notin Y\}$

**Propriété**  $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

### 2.2 Nombres naturels, rationnels, réels

#### 2.2.1 Borne inférieure et supérieure

**Définition 2.2.1** Soit  $S \subset \mathbb{R}, S \neq \emptyset$ . Alors  $a \in \mathbb{R} (b \in \mathbb{R})$  est un *minorant/majorant* de  $S$  si  $\forall x \in S$  on a:  $a \leq x$  ou  $x \leq b$

Si  $S$  possède un *minorant/majorant* on dit que  $S$  est **minoré/majoré**.

Si  $S$  est **majoré et minoré**, alors  $S$  est dit **borné**.

**Cours 3 - 15 septembre 2025: Élisabeth Born(é)e****2.2.2 Supremum et infimum**

**Théorème 2.2.1** *Tout sous-ensemble non-vide majoré/minoré  $S \subset \mathbb{R}$  admet un supremum/infimum qui est unique.*

**Unicité** *Si  $\inf/\sup S$  existe alors il est le plus grand minorant/majorant de  $S$*

**2.2.3 Notations d'intervalles**

Soit  $a < b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Intervalles bornés

- $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} = [a, b]$  intervalle fermé borné
- $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} = ]a, b[$  intervalle ouvert borné
- $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} = [a, b[$  intervalle borné ni ouvert ni fermé
- $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} = ]a, b]$  intervalle borné ni ouvert ni fermé

Intervalles non-bornés:

- $\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} = [a, +\infty[$  fermé
- $\{x \in \mathbb{R} : x > a\} = ]a, +\infty[$  ouvert
- $\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} = ]-\infty, b]$  fermé
- $\{x \in \mathbb{R} : x < b\} = ]-\infty, b[$  ouvert

**2.3 Nombres complexes****Cours 4 - 17 septembre 2025: ça se complique...**

On sait que  $x^2 = -1$  n'a pas de solutions dans  $\mathbb{R}$ , alors on introduit  $i$  tel que  $i^2 = -1$ <sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Oui, en maths quand un truc marche pas on invente un truc pour que ça marche, si seulement on pouvait faire ça en exam...

### 2.3.1 Propriétés des nombres complexes

Prenons les  $\mathbb{C}^2$  de la forme  $\{z = a + ib\}$ , où  $a, b \in \mathbb{R}$

- (+)  $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$ 
  - $\exists \in \mathbb{C} : 0 + 0i = 0$  tel que  $(a + ib) + 0 + 0i = a + ib \forall a, b \in \mathbb{R}$
  - $\exists$  l'opposé pour  $(a + ib)$ :  $(-a + i(-b)) + (a + ib) = 0 + 0i = 0$
- ( $\cdot$ )  $(a + ib) \cdot (c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$ 
  - $\exists 1 \in \mathbb{C} : 1 + 0i = 1 : (a + ib) \cdot (1 + 0i) = a + ib$
  - $z \in \mathbb{C}, z \neq 0 \Rightarrow \exists z^{-1} \in \mathbb{C} : z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$
  - Pour  $z = a + ib \in \mathbb{C}^* \Rightarrow z^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$
  - $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$
  - $\mathbb{C}$  n'est pas ordonné:  $i > 0 \Rightarrow i^2 = -1 > 0$  et  $i < 0 \Rightarrow (-i)^2 = -1 > 0$ , on voit qu'on a  $-1 > 0$  ce qui est absurde.

### 2.3.2 Les 3 formes de nombres $\mathbb{C}$

#### Forme cartésienne

$z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}$

$z = \text{Re}(z) + i\text{Im}(z)$  (Re et Im respectivement les parties réelles et imaginaires de  $z$ )

$$|z| = \sqrt{(\text{Re}(z))^2 + (\text{Im}(z))^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$$

Trouver  $\varphi$  et  $\arg(z)$ :

- $a > 0 : \arg(z) = \arctan(\frac{b}{a}) \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  à  $2k\pi$  près,  $k \in \mathbb{Z}$
- $a < 0 : \arg(z) = \arctan(\frac{b}{a}) + \pi \in ]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$  à  $2k\pi$  près,  $k \in \mathbb{Z}$
- Si  $a = 0$ :
  - $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$  si  $\text{Im}(z) = b > 0$
  - $\arg(z) = \frac{3\pi}{2}$  si  $\text{Im}(z) = b < 0$

#### Forme polaire trigonométrique

$z = \rho(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \rho \geq 0, \varphi \in \mathbb{R}$

$|z| = \rho \rho \neq 0 \Rightarrow \sin(\varphi) = \frac{\text{Im}(z)}{\rho}, \cos(\varphi) = \frac{\text{Re}(z)}{\rho}, \tan(\varphi) = \frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)} = \frac{a}{b}$  si  $a = \text{Re}(z) \neq 0$

<sup>2</sup> $\mathbb{C}$  dénote l'ensemble des complexes

<sup>3</sup> $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

**Forme polaire exponentielle**

$$e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y) \quad (\text{Formule d'Euler})$$

$$z = \rho(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = \rho e^{i\varphi}$$

**Les trois formes**

$$z = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)i = |z|(\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z))) = |z| \cdot e^{i \cdot \arg(z)}$$

où

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} \quad (\text{module de } z)$$

$$\begin{aligned} |z| \neq 0 \Rightarrow \arg(z) &= \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right), \operatorname{Re}(z) > 0 \\ &= \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) + \pi, \operatorname{Re}(z) < 0 \\ &= \frac{\pi}{2}, \operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) > 0 \\ &= \frac{3\pi}{2}, \operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) < 0 \end{aligned} \quad (\text{argument de } z)$$

$$e^{i\pi} = -1 \quad (\text{Formule d'Euler})$$

$$\forall \rho > 0, \varphi \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*:$$

$$\begin{aligned} (\rho(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)))^n &= \rho^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) \\ (\rho e^{i\varphi})^n &= \rho^n e^{in\varphi} \end{aligned} \quad (\text{Formule de Moivre})$$

**Cours 5 - 24 septembre 2025: C'est du français ou des maths ?**

**2.3.3 Conjugué**

**Définition 2.3.1**  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  alors le conjugué de  $z$  est  $\bar{z} = a - ib$

$$z\bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$$

En forme polaire le conjugué s'écrit:

$$\begin{aligned} z = \rho(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \Rightarrow \bar{z} &= \rho(\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)) \\ &= \rho(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) \\ &= \rho e^{-i\varphi} \end{aligned}$$

**Propriétés** $\forall z \in \mathbb{C}$ :

1.  $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$
2.  $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
3.  $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$
4.  $|\bar{z}| = |z|$
5.  $a = \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
6.  $b = \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
7.  $\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$
8.  $\sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$

**2.3.4 Racines de  $\mathbb{C}$** 

**Proposition 2.3.1**  $w = s \cdot e^{i\varphi}$ ,  $w \in \mathbb{C}^*$  alors  $\forall n \in \mathbb{N}^*$   
 $\{z \in \mathbb{C}^* : z^n = w\} = \left\{ \sqrt[n]{s} e^{i \cdot \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$

**2.3.5 Équations polynomiales dans  $\mathbb{C}$** **Quadratiques**

$$az^2 + bz + c = 0, a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow z = -\frac{b}{2a}$$

$$\neq 0 \Rightarrow 2 \text{ solutions}$$

**Théorème fondamental de l'algèbre**

**Théorème 2.3.1** Tout polynôme  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ ,  
 $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$ .

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) \text{ où } z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$$

$$= a_n(z - w_1)^{m_1}(z - w_2)^{m_2} \dots (z - w_p)^{m_p}$$

**Polynômes à coefficients réels**

**Proposition 2.3.2** Si  $z \in \mathbb{C}$  est une racine de  $P(z)$  à coefficients réels,  
alors  $\bar{z}$  l'est aussi.

Donc  $P(z) = P(\bar{z}) = 0$  et  $(x - z)(x - \bar{z})$  divise le polynôme



## Chapter 3

# Suites de nombres réels

Cours 6 - 29 septembre 2025: Classé sans suite

### 3.1 Définition

**Définition 3.1.1** On définit une suite de nombre réels comme une application  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout nombre naturel ( $\forall n \in \mathbb{N}$ )

**Définition 3.1.2** Une suite  $(a_n)$  est majorée (minorée) s'il existe un nombre  $M(m) \in \mathbb{R}$  tel que  $a_n \leq M$  ( $a_n \geq m$ )  $\forall n \in \mathbb{N}$ .  
On dit que la suite est **bornée** si elle est majorée **et** minorée.

**Définition 3.1.3** Une suite  $(a_n)$  est croissante (strictement croissante) si  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a  $a_{n+1} \geq a_n$  ( $a_{n+1} > a_n$ ).  
Une suite  $(a_n)$  est décroissante (strictement décroissante) si  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a  $a_{n+1} \leq a_n$  ( $a_{n+1} < a_n$ ).  
Une suite est dite (strictement) **monotone** si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

### 3.2 Raisonnement par récurrence

Soit  $P(n)$  une proposition dépendant d'un entier naturel  $n$ , telle que:

1. **Initialisation:**  $P(n_0)$  est vraie, et...
2. **Hérédité:**  $\forall n \geq n_0$ ,  $P(n)$  implique  $P(n+1)$ , alors  $P(n)$  est **vraie** pour tout  $n \geq n_0$ .

Il est *très* important de bien démontrer les deux étapes de la récurrence, autrement il est facile d'obtenir une preuve qui est fausse.

### 3.3 Limite des suites

**Définition 3.3.1** On dit que la suite  $(x_n)$  est **convergente** et admet pour **limite** le nombre réel  $l \in \mathbb{R}$  si pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$  on a  $|x_n - l| \leq \epsilon$ .

Une suite qui n'est **pas** convergente est dite **divergente**.

#### Cours 7 - 1 octobre 2025: C'est limite ça

**Proposition 3.3.1** Si elle existe, la limite  $l$  d'une suite  $(a_n)$  est **unique**.

**Proposition 3.3.2** Toute suite convergente est bornée. **Attention**, la réciproque est fausse, ex:  $a_n = (-1)^n$  est bornée mais non convergente.

$$|x + y| \geq |x| + |y| \quad (\text{Inégalité triangulaire})$$

**Proposition 3.3.3** Soient  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites convergentes:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ .

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}, \forall b \neq 0$

#### 3.3.1 Quotient de deux suites polynomiales

Prenons:

$$\begin{aligned} x_n &= a_p n^p + \dots + a_1 n + a_0 \\ y_n &= b_q n^q + \dots + b_1 n + b_0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{y_n} \right) &= 0, \quad p < q \\ &= \frac{a_p}{b_q}, \quad p = q \\ &= \text{diverge}, \quad p > q \end{aligned}$$

L'idée est la suivante:

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{a_p n^p + \dots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \dots + b_1 n + b_0} = \frac{n^p}{n^q} \cdot \frac{(a_p + a_{p-1} \frac{1}{n} + \dots + a_0 \frac{1}{n^p})}{(b_q + b_{q-1} \frac{1}{n} + \dots + b_0 \frac{1}{n^q})}$$

Le terme de droite tendant vers  $\frac{a_p}{b_q}$  et le terme de gauche tendant vers différentes possibilités listées plus haut selon  $p$  et  $q$ .

### 3.3.2 Théorème des deux gendarmes

Soient  $(a_n)$ ,  $(b_n)$ ,  $(c_n)$ , trois suites telles que:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l$
2.  $\exists k \in \mathbb{N} : \forall n \leq k \Rightarrow a_n \geq b_n \geq c_n$

Alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$

## Cours 8 - 6 octobre 2025: Le roi d'Alembert...

### 3.3.3 Cas des suites géométriques

Les suites géométriques ont la forme  $a_n = a_0 \cdot r^n$ ,  $a_0 \in \mathbb{R}$  et  $a_0 \neq 0$ ,  $r \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 r^n &= 0, |r| < 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 r^n &= a_0, r = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 r^n &= \text{divergente}, |r| > 1 \text{ ou } r = -1 \end{aligned}$$

### Intermède notation

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ avec } 0 \leq k \leq n$$

### 3.3.4 Remarques sur les limites

1. Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in \mathbb{R}$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |l|$
2. Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$
3. Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = l \neq 0$  n'implique pas la convergence de  $x_n$  (ex  $a_n = (-1)^n$ )
4. Si  $(a_n)$  est bornée et  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$

### 3.3.5 Critère de D'Alembert

Soit  $(a_n)$  une suite telle que  $a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \geq 0$ , alors:

- Si  $\rho < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- Si  $\rho > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ diverge}$

### 3.3.6 Limites infinies

**Définition 3.3.2** On dit que  $(a_n)/(b_n)$  tends vers  $+\infty/-\infty$  si  $\forall A > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \leq n_0, a_n \geq A/b_n \leq -A$

Notation:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$

Attention: les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont **divergentes**.

Propriétés:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$  et  $(b_n)$  est bornée  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \pm\infty$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty/-\infty$  et  $a_n \geq / \leq b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty/-\infty$ <sup>1</sup>
4.  $(a_n)$  bornée et  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \pm\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$
5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, a_n \neq 0 \forall n \Rightarrow$  alors  $(a_n)$  diverge<sup>2</sup>.

### 3.3.7 Formes indéterminées

1.  $\infty - \infty$
2.  $\frac{\infty}{\infty}$
3.  $\frac{0}{0}$
4.  $0 \cdot \infty$

Cours 9 - 8 octobre 2025: eeeeeaaaooo

### 3.3.8 Convergence de suites monotones

**Théorème 3.3.1** Toute suite croissante/décroissante qui est majorée/minorée converge vers son supremum/infimum.

Toute suite croissante/décroissante qui n'est **pas** majorée/minorée tend vers  $+\infty/-\infty$ .

On utilise  $(a_n) \uparrow = (a_n)$  est croissante,  $(b_n) \downarrow = (b_n)$  est décroissante.

## 3.4 Le nombre $e$

Soit  $(x_n) : x_0 = 1, x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \forall n \geq 1$

$(y_n) : y_0 = 1, y_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \forall n \geq 1, (y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!})$

Alors:

1.  $x_n \leq y_n \forall n \in \mathbb{N}$

<sup>1</sup>C'est la "règle d'un seul gendarme" ou théorème du chien méchant, ou etc...

<sup>2</sup>Extension du critère d'Alembert

$$2. y_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$3. (y_n) \uparrow \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$4. (x_n) \uparrow \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l \leq 3 \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l' \leq 3$ .

On peut prouver ceci par récurrence, on se rend compte qu'en vrai  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e$ .

**Définition 3.4.1**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{\text{def}}{=} e$

### 3.5 Suites définies par récurrence

Soit  $x_0 = a \in \mathbb{R}$  et  $x_{n+1} = g(x)$  où  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

**Proposition 3.5.1** *Récurrence linéaire*

Soit  $a_0 \in \mathbb{R}$ ,  $a_{n+1} = qa_n + b$ , où  $q, b \in \mathbb{R}$ .

Alors

1. si  $|q| < 1 \Rightarrow (a_n)$  converge vers  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{b}{1-q}$
2. si  $|q| \geq 1 \Rightarrow (a_n)$  diverge sauf si  $(a_n)$  est une suite constante.

**Proposition 3.5.2** Si  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x_{n+1} = g(x_n)$  et  $g : E \rightarrow E \subset \mathbb{R}$  telle que:

1.  $\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq g(x) \leq M \quad \forall x \in E$
2.  $g$  est croissante:  $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 \leq x_2 \Rightarrow g(x_1) \leq g(x_2)$

Alors la suite  $(x_n)$ ,  $x_{n+1} = g(x_n)$  est bornée et monotone  $\Rightarrow$  convergente.

Remarque: Si (2) est remplacé par  $x_1 \leq x_2 \Rightarrow g(x_1) \geq g(x_2)$  ( $g$  décroissante)  $\Rightarrow$  alors  $(x_n)$  n'est pas monotone (mais peut être convergente).

Cours 10 - 13 octobre 2025: Netflix

### 3.6 Sous-suites de Cauchy

**Définition 3.6.1** Une sous suite d'une suite  $(a_n)$  est une suite  $k \mapsto a_{n_k}$  où  $k \mapsto n_k$  est suite strictement croissante de nombres naturels.

Ex:

$$\begin{aligned} a_n = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{2k} = (-1)^{2k}, (a_{2k}) \subset (a_n) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = 1 \\ a_{2k+1} = (-1)^{2k+1}, (a_{2k+1}) \subset (a_n) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = -1 \\ (a_n) \text{ est divergente} \end{aligned}$$

**Proposition 3.6.1** *Convergence d'une sous-suite*

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \Rightarrow$  toute sous-suite  $(a_{n_k})$  converge aussi vers  $l$ .

**Théorème 3.6.1** *Théorème de Bolzano-Weierstrass*

Dans toute suite bornée il existe une sous-suite convergente.

**3.6.1 Suites de Cauchy**

**Définition 3.6.2** La suite  $(a_n)$  est une suite de Cauchy si  $\forall \epsilon > 0$  il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq n_0$  et  $\forall m \geq n_0$ ,  $|a_n - a_m| \leq \epsilon$

**Proposition 3.6.2** Une suite  $(a_n)$  est une suite de Cauchy  $\Leftrightarrow (a_n)$  est convergente.

**3.7 Limite supérieure et limite inférieure d'une suite bornée**

**Définition 3.7.1** Soit  $(x_n)$  une suite bornée:  $\exists m, M \in \mathbb{R}: m \leq x_n \leq M \forall n \in \mathbb{N}$ .

On définit la suite  $y_n = \sup \{x_k, k \geq n\}$   $y_n \downarrow$   $y_n \geq x_n \geq m \forall n \in \mathbb{N}$   
la suite  $z_n = \inf \{x_k, k \geq n\}$   $y_n \uparrow$   $z_n \leq x_n \leq M \forall n \in \mathbb{N}$

Alors:

$\exists \lim y_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n, (y_n) \downarrow$ , minorée par  $m$

$\exists \lim z_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n, (z_n) \uparrow$ , majorée par  $M$

$z_n \leq x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}$

**Remarque:** Si  $\liminf x_n = \limsup x_n = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = l$ . On a, par les deux gendarmes,  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$

**Remarque** Si  $\liminf x_n = l_1, \limsup x_n = l_2 \Rightarrow \exists$  une sous-suite  $\{x_{n_k}\}$  convergente vers  $l_1$  et une sous-suite  $\{x_{n_j}\}$  convergente vers  $l_2$

## Chapter 4

# Séries numériques

### 4.1 Définitions et exemples

**Définition 4.1.1** La série de terme général  $a_n$  est un couple:

1. la suite  $(a_n)$
2. La suite des sommes partielles  $S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$

*Notation:*

- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ : Série de terme général  $a_k$
- $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ :  $n$ ième somme partielle

**Définition 4.1.2** Série  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  est convergente  $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$  la suite  $(S_n)$  des sommes partielles est convergente.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = l &\implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k = l \\ &= \pm\infty \qquad \qquad \qquad = \pm\infty \end{aligned}$$

### Exemples

- $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \quad |r| < 1$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  converge
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \quad \forall p > 1$

## Cours 11 - 15 octobre 2025: Critères

**Définition 4.1.3** Une série  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  est dite **absolument convergente** si la série  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  est convergente.

**Proposition:** Une série absolument convergente est convergente.

**Proposition:** Si la série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

**Remarque:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  n'implique pas la convergence.

## 4.2 Critères de convergence

### 4.2.1 Critère de Leibniz

**Proposition 4.2.1** Soit  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  une série telle que:

1.  $\exists p \in \mathbb{N}: \forall n \geq p \Rightarrow |a_{n+1}| \leq |a_n|$
2.  $\exists q \in \mathbb{N}: \forall n \geq q \Rightarrow |a_{n+1}| \cdot |a_n| \leq 0$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Alors  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  est convergente.

### 4.2.2 Critère de comparaison

**Proposition 4.2.2** Soit  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites telles que  $\exists k \in \mathbb{N}: 0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \geq k$  Alors:

- Si  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  converge  $\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge.
- Si  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  diverge  $\implies \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  diverge.

**Remarque** Si  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  ne possède que des termes positifs/négatifs, et la suite des sommes partielles est **majorée/minorée**, alors la série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  est convergente.

### 4.2.3 Critère d'Alembert

Soit  $(a_n)$  une suite:  $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho \in \mathbb{R}$  Alors si:

- $\rho < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge absolument.
- $\rho > 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  diverge.
- $\rho = 1 \implies$  pas de conclusion.

#### 4.2.4 Critère de Cauchy

<sup>1</sup>

Soit  $(a_n)$  une suite et  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \text{Alors si } \rho < 1 &\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge absolument} \\ \rho > 1 &\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverge} \end{aligned}$$

#### 4.2.5 Remarques

1. Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = l$  alors  $r = l$
2. Parfois  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  existe, mais  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  n'existe pas.
3. Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$  ou  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ , alors pas de conclusion sur la convergence de  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ .

---

<sup>1</sup>de la racine



## Chapter 5

# Fonctions réelles

Cours 12 - 27 octobre 2025: "Cours le plus facile" -Lachowska

### 5.1 Définitions et propriétés

**Définition 5.1.1** Une fonction  $f : E \rightarrow F$  où  $E, F \in \mathbb{R}$  est une application qui  $\forall x \in D(f) = E$  donne un élément  $y = f(x) \in F$ .

On note

- $D(f) = E$  le domaine de définition
- $f(D) \in F$  l'ensemble image/d'arrivée

#### 5.1.1 Propriétés de base

1.  $f$  est (**strictement**) croissante sur  $D(f)$  si  $\forall x_1, x_2 \in D(f), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \parallel f(x_1) < f(x_2)$ . On note  $f(x) \uparrow$  "  $f(x)$  croissante".
2. Même logique mais opposée pour (**strictement**) décroissante, notée  $f(x) \downarrow$  "  $f(x)$  décroissante".
3. Si  $f$  est (**strictement**) croissante/décroissante sur  $D(f)$ , alors elle est (**strictement**) monotone sur  $D(f)$ .
4.  $f$  est **paire** si  $D(f)$  est symétrique:  $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$  et  $f(-x) = f(x) \forall x \in D(f)$ .
5.  $f$  est **impaire** si  $D(f)$  est symétrique:  $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$  et  $f(-x) = -f(x) \forall x \in D(f)$ .
6.  $f : E \rightarrow F$  est **périodique** si  $\exists P \in \mathbb{R}^*$  tel que  $\forall x \in E \Rightarrow x \pm P \in E$  et  $f(x \pm P) = f(x) \forall x \in E$ .
7.  $f : E \rightarrow F$  est **majorée (minorée)** sur  $A \in E$  si l'ensemble  $f(A) \in \mathbb{R}$  est **majoré (minoré)**.

Si  $f(x)$  est majorée **et** minorée sur  $A$ , alors elle est dite bornée sur ce même ensemble.

8. (a) borne supérieure  $\sup_{x \in A} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{f(x), x \in A\}$   
 (b) borne inférieure  $\inf_{x \in A} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{f(x), x \in A\}$
9. Maximum et minimum local d'une fonction:  
 $f : E \rightarrow F, x_0 \in E$ . Alors  $f$  admet un max/min local au point  $x_0$  si  $\exists \delta > 0 : \forall x \in D(f)$  et tels que  $|x - x_0| \leq \delta$ .  
 On a  $f(x) \leq f(x_0)$  (max loc),  $f(x) \geq f(x_0)$  (min loc).
10. Maximum et minimum global d'une fonction:  
 Même logique, sauf que cela s'applique  $\forall x \in E$ . **Remarque:** Une fonction bornée (majorée **et** minorée sur  $E$ ) n'atteint pas forcément son min ou max sur cet intervalle.
11.  $f : E \rightarrow F$  est **surjective** si  $\forall y \in F$ , *exists* au moins un  $x \in E : f(x) = y$
12.  $f : E \rightarrow F$  est **injective** si  $\forall y \in F$ , *exists* au plus un  $x \in E : f(x) = y$
13. Remarque:
  - Si  $f : E \rightarrow F$  n'est pas injective  $\Rightarrow$  il faut réduire  $E$
  - Si  $f : E \rightarrow F$  n'est pas surjective  $\Rightarrow$  il faut réduire  $F$
14. Si  $f : E \rightarrow F$  est injective **et** surjective, alors elle est **bijjective**.
15. Si  $f : E \rightarrow F$  est bijective, on peut définir la fonction réciproque par la formule:  
 $y = f(x), x \in E \iff x = f^{-1}(y), y \in F$
16. Composition des fonctions: soit  $f : E \rightarrow F$  et  $g : G \rightarrow H, E, F, G, H \in \mathbb{R}$   
 Supposons  $f(E) \in G \Rightarrow$  On définit la fonction composée:  
 $g \circ f(x) = g(f(x)) : E \longrightarrow H$   
 Supposons  $g(G) \in E \Rightarrow$  On définit la fonction composée:  
 $f \circ g(x) = f(g(x)) : G \longrightarrow F$

Cours 13 - 29 octobre 2025: I'm reaching my limit

## 5.2 Limite d'une fonction

**Définition 5.2.1** Une fonction  $f : E \rightarrow F$  est définie **au voisinage** de  $x_0 \in \mathbb{R}$  si  $\exists \delta > 0 : \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta\} \in E$

**Remarque:**  $f$  n'est pas forcément définie en  $x_0$  même.

**Définition 5.2.2** Une fonction  $f : E \rightarrow F$  définie au voisinage de  $x_0$  **admet pour limite**  $l \in \mathbb{R}$  lorsque  $x \rightarrow x_0$  si  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| \leq \delta$  on a  $|f(x) - l| \leq \epsilon$

### 5.2.1 Caractérisation de la limite d'une fonction à partir des suites

Soit  $f : E \rightarrow F$  tel que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \forall$  suite  $(a_n) \in \{x \in E, x \neq x_0\} : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$

**Corollaire 5.2.2.1** Soit  $f : E \rightarrow F$  définie au voisinage de  $x_0$ . Supposons que  $\forall (a_n) \in E \setminus \{x_0\} : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ , la suite  $(f(a_n))$  converge. Alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe.

**Proposition 5.2.1** Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$ , alors  $l_1 = l_2$ .

### 5.2.2 Critère de Cauchy pour les fonctions

$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in \{x \in E : 0 < |x - x_0| \leq \delta\}$  on a  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \epsilon$

### 5.2.3 Opérations algébriques sur les limites

Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1, \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2, \in \mathbb{R}$ , alors:

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha l_1 + \beta l_2$
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{l_1}{l_2}$ , si  $l_2 \neq 0$

### 5.2.4 Théorème des 2 gendarmes pour les fonctions

Soient  $f, g, h : E \rightarrow F$  telles que:

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$
2.  $\exists \alpha > 0 : \forall x \in \{x \in E : 0 < |x - x_0| \leq \alpha\}$ , on a  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$
3. Alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$

## Cours 14 - 3 novembre 2025: Infinite number of mathematicians walk into a bar

### 5.2.5 Théorème: Limite de la composée de deux fonctions

**Théorème 5.2.1** Soit  $f: E \rightarrow F$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ ;  $g: G \rightarrow H$ ,  $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l$ .

Supposons que  $f(E) \in G$  et  $\exists \alpha > 0 : 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \neq y_0$ .

Alors:  $\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = l$ .

## 5.3 Limites lorsque $x$ tend vers $\pm\infty$

**Définition 5.3.1**  $f: E \rightarrow F$  est définie au voisinage de  $\pm\infty$ , si  $\exists \alpha \in \mathbb{R} : ]\alpha, +\infty[ \in E$  (resp  $]-\infty, \alpha[ \in E$ )

**Définition 5.3.2** Une fonction  $f: E \rightarrow F$  définie au voisinage de  $\pm\infty$  admet pour limite  $l \in \mathbb{R}$  lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$  si  $\forall \epsilon > 0 \exists \alpha > 0 :$

$\forall x \in E : x \geq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$

resp.  $\forall x \in E : x \leq -\alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$

Notation:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$

## 5.4 Limites infinies

**Définition 5.4.1**  $f: E \rightarrow F$  définie au voisinage de  $x_0 \in \mathbb{R}$  tend vers  $\pm\infty$  lorsque  $x \rightarrow x_0$  si  $\forall A > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq A$  ( $f(x) \leq -A$ )

Notation:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

### 5.4.1 Formes indéterminées

- $\infty - \infty$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\frac{0}{0}$
- $0 \cdot \infty$
- $0^0$
- $1^\infty$
- $\infty^0$

## Cours 15 - 5 novembre 2025: NàJ

### 5.4.2 Propriétés des limites infinies

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ( $-\infty$ ) et  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$  ( $-\infty$ )  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$  ( $-\infty$ )
2. Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$  et si  $g(x)$  est bornée autour de  $x_0$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \pm\infty$
3. Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  et si  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \neq 0$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$  ( $-\infty$ ) si  $l > 0$  ( $l < 0$ ) respectivement.
4. Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$
5. Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  et  $f(x) \neq 0$  au voisinage de  $x_0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$  ( $-\infty$ ) si  $f(x) > 0$  ( $f(x) < 0$ ) au voisinage de  $x_0$  respectivement.
6. Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ( $-\infty$ ) et qu'au voisinage de  $x_0$  on a  $g(x) \geq f(x)$  ( $g(x) \leq f(x)$ ) alors,  $\forall x$  au voisinage de  $x_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$  ( $-\infty$ )
7. Les propriétés (1) à (6) sont également valables pour  $x \rightarrow \pm\infty$

## 5.5 Limites à droite et à gauche

**Définition 5.5.1**  $f : E \rightarrow F$  est définie à droite (gauche) de  $x_0$  s'il existe  $\alpha > 0$  tel que:  $]x_0, x_0 + \alpha[ \subset E$  ( $]x_0 - \alpha, x_0[ \subset E$ )

On dénote la limite:

- à droite:  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$
- à gauche:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$

Remarques:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$
- On peut aussi définir les limites  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Par exemple  $f(x) = \frac{1}{x}$  dont les limites en  $0^+$  et  $0^-$  sont respectivement à  $+\infty$  et  $-\infty$

## 5.6 Fonction exponentielle et logarithmique

### 5.6.1 Propriétés et définitions de l'exponentielle

$$e^x \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{Définition de l'exponentielle})$$

Par convention on admet:  $0^0 = 1$  et  $0! = 1$

**Proposition 5.6.1** 1.  $e^{x+y} = e^x \cdot e^y, \forall x, y \in \mathbb{R}$

$$2. e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$3. e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

**Propriétés de  $f(x) = e^x$**

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^y} = 0$$

$$3. e^x \uparrow \text{ est strictement croissante } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{t(x)} - 1}{t(x)} \text{ si } \lim_{x \rightarrow a} t(x) = 0 \text{ et } t(x) \neq 0 \text{ au voisinage de } x = a$$

### 5.6.2 Propriétés et définitions du logarithme

**Définition 5.6.1** Comme  $e^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  est bijective, on peut définir la fonction réciproque,  $\ln(x) : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Propriétés**

$$1. e^{\ln(x)} = x, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

$$2. \ln(e^x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$3. \ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y), \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$$

$$4. \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$5. \ln(x^r) = r \cdot \ln(x), \forall r \in \mathbb{R}$$

$$6. \ln(1) = 0, \ln(e) = 1, e^0 = 1, e' = e$$

## 5.7 Fonctions continues

**Définition 5.7.1** Une fonction  $f : E \rightarrow F$  est continue en un point  $x_0 \in E$  si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , soit:

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$  existe
2.  $f(x_0)$  existe
3. Les deux valeurs sont égales.

### 5.7.1 Quelques fonctions continues remarquables

1.  $f(x) = x^p, p \in \mathbb{N}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ :  $\lim_{x \rightarrow a} x^p = a^p, \forall a \in \mathbb{R}$
2. Tout polynôme est continue sur  $\mathbb{R}$
3. Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine
4.  $f(x) = \sqrt[p]{x}$  est continue sur son domaine  $\forall p \in \mathbb{N}$  ( $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}, a > 0$ )
5.  $f(x) = \sin(x)$  et  $f(x) = \cos(x)$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ .  $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$  et  $f(x) = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$  sont continues sur leurs domaines de définition

### 5.7.2 Limites remarquables

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{t(x)} - 1}{t(x)} = 1$  si  $\lim_{x \rightarrow a} t(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(1+t(x))}{t(x)} = 1$  si  $\lim_{x \rightarrow a} t(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} (1+t(x))^{\frac{1}{t(x)}} = e$  si  $\lim_{x \rightarrow a} t(x) = 0$

**Cours 16 - 10 novembre 2025: C'est un peu beaucoup trop calme**

**Cours 17 - 12 novembre 2025: •**

### 5.7.3 Opérations sur les fonctions continues

Si les fonctions  $f$  et  $g$  sont continues en  $x = x_0$ , alors:

1.  $\alpha f + \beta g$  est continue en  $x = x_0$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
2.  $f \cdot g$  est continue en  $x = x_0$
3.  $\frac{f}{g}$  est continue en  $x = x_0$  si  $g(x_0) \neq 0$
4. Si  $f : E \rightarrow F$  et  $g : G \rightarrow H$ ,  $f(E) \subset G$ , et  $f$  est continue en  $x_0 \in E$ ,  $g$  est continue en  $f(x_0) \in G$ . Alors  $(g \circ f)$  est continue en  $x_0$

### 5.7.4 Prolongement par continuité d'une fonction en un point

**Définition 5.7.2** Soit  $f : E \rightarrow F$  une fonction telle que  $c \notin E$  ( $f$  n'est pas définie en  $x = c$ ) et  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \in \mathbb{R}$  existe. Alors la fonction  $\hat{f} : E \cup \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\hat{f}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} f(x), & x \in E \\ \lim_{x \rightarrow c} f(x), & x = c \end{cases}$$

est appelée **le prolongement par continuité** de  $f$  au point  $x = c$ . Un tel prolongement est unique et la fonction  $\hat{f}$  est continue en  $x = c$

## 5.8 Fonctions continues sur un intervalle

**Définition 5.8.1** Une fonction  $f : I \rightarrow F$ , où  $I$  est un intervalle ouvert non-vide, est continue si  $f$  est continue en tout point  $x \in I$ .  
 $f : [a, b] \rightarrow F$  est continue sur  $[a, b]$  si elle est continue sur  $]a, b[$  et continue à gauche en  $x = b$  et à droite  $x = a$ .

**Théorème 5.8.1** Soit  $a < b \in \mathbb{R}$  et  $f : [a, b] \rightarrow F$  une **fonction continue sur l'intervalle fermé et borné**  $[a, b]$ . Alors  $f$  atteint son infimum et son supremum sur  $[a, b]$  ( $\Leftrightarrow \exists \max_{[a, b]} f(x)$  et  $\exists \min_{[a, b]} f(x)$ )

### 5.8.1 Théorème de la valeur intermédiaire

Soit  $a < b \in \mathbb{R}$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors  $f$  atteint son sup, son inf et toute valeur comprise entre les deux.

$$f([a, b]) = \left[ \min_{[a, b]} f(x), \max_{[a, b]} f(x) \right]$$

**Corollaire 5.8.1.1** Soit  $a < b \in \mathbb{R}$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $f(a) \cdot f(b) < 0$  (donc  $f(a)$  et  $f(b)$  de signes différents).

Alors il existe au moins un point  $c \in ]a, b[$  :  $f(c) = 0$

**Corollaire 5.8.1.2** Soit  $I$  un intervalle ouvert;  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue strictement monotone. Alors  $f(I)$  est un intervalle ouvert.

**Corollaire 5.8.1.3** *Toute fonction **injective** et **continue** sur un intervalle est strictement monotone.*

**Corollaire 5.8.1.4** *Toute fonction bijective continue sur un intervalle admet une fonction réciproque qui est continue et strictement monotone.*



## Chapter 6

# Calcul différentiel

Cours 18 - 17 novembre 2025: Virtuel et différéent

### 6.1 Fonctions dérivables

**Définition 6.1.1** Une fonction  $f : E \rightarrow F$  est dite **dérivable** en  $x_0 \in E$  s'il existe la limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{déf}}{=} f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

Cette limite est appelée **la dérivée** de  $f$  en  $x_0$ , notée  $f'(x_0)$ .

**Définition 6.1.2** Toute fonction dérivable en  $x = x_0$  admet une présentation sous la forme suivante:

$$f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0) + r(x)$$

où  $a \in \mathbb{R}$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$ .

Dans ce cas on dit que  $f$  est **différentiable** en  $x_0$ .

Note:  $f$  différentiable en  $x = x_0 \Leftrightarrow f$  est dérivable en  $x = x_0$  et  $f'(x_0) = a \in \mathbb{R}$

### 6.2 Fonction dérivée

**Définition 6.2.1** Si  $f : E \rightarrow F$  est dérivable sur un ensemble  $D(f') \subset E$ , alors on définit la fonction dérivée:  $f' : D(f') \rightarrow \mathbb{R}$ .

Dérivées à connaître:

$f(x)$	$f'(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$x^n$	$nx^{n-1} (n \in \mathbb{N})$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$ ou $1 + \tan^2(x)$
$e^x$	$e^x, \forall x \in \mathbb{R}$

### 6.2.1 Interprétation géométrique

La dérivée de  $f$  au point  $x = x_0$  est la pente de la tangente à la courbe  $y = f(x)$  au point  $(x_0, f(x_0))$ . L'équation de la tangente s'écrit:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

### 6.2.2 Propriétés et autres trucs de la fonction dérivée

**Proposition 6.2.1** Une fonction dérivable en  $x = x_0$  est continue en  $x = x_0$ .

*Note: la réciproque est fausse.*

**Définition 6.2.2** La dérivée à droite et à gauche s'écrivent respectivement:

$$f'_d(x_0) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'_g(x_0) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\exists f'(x_0) \Leftrightarrow \exists f'_d(x_0), f'_g(x_0) \text{ et } f'_g(x) = f'_d(x_0)$$

### Opération algébriques sur les dérivées

Soit  $f, g : E \rightarrow F$  deux fonctions dérivables en  $x = x_0$ , alors

1.  $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
2.  $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
3.  $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$

### Dérivée de la fonction composée de deux fonctions dérivables

**Proposition 6.2.2**  $f : E \rightarrow F$  dérivable en  $x = x_0 \in E$ ,  $g : G \rightarrow H$  dérivable en  $f(x_0)$ ,  $f(E) \subset G$ . Alors

$$g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Cours 19 - 19 novembre 2025: Rolle-en-garos

### 6.3 Dérivée de la fonction réciproque

**Proposition 6.3.1** Soit  $f : I \rightarrow F$  une fonction bijective continue sur  $I$  et dérivable en  $x_0 \in I$ , telle que  $f'(x_0) \neq 0$ . Alors la fonction réciproque  $f^{-1} : F \rightarrow I$  est dérivable en  $y_0 = f(x_0)$  et:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \text{ où } y_0 = f(x_0); x_0 = f^{-1}(y_0)$$

**Corollaire 6.3.0.1** Si  $f : I \rightarrow F$  et  $f^{-1} : F \rightarrow I$  sont deux fonctions réciproques continues sur leurs domaines et dérivables à l'intérieur alors  $\forall x \in F : f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

## 6.4 Dérivée logarithmique

$$(f_1(x)^{f_2(x)})' = (f_1(x)^{f_2(x)}) \cdot (f_2(x) \cdot \ln(f_1(x)))'$$

## 6.5 Fonctions hyperboliques

**Définition 6.5.1** Expressions des fonctions trigonométriques hyperboliques

- $\sinh(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ , impaire  $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\cosh(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ , paire  $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- $(\sinh(x))' = \cosh(x)$  et  $(\cosh(x))' = \sinh(x)$
- $\tanh(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\coth(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
- On peut définir les fonctions réciproques  $\operatorname{arcsinh}(x)$ ,  $\operatorname{arccosh}(x)$ ,  $\operatorname{arctanh}(x)$ , ainsi que leurs dérivées grâce à la définition de la dérivée de réciproque et à l'identité  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

## 6.6 Dérivées d'ordre n

**Définition 6.6.1** La dérivée seconde d'une fonction s'écrit  $f''(x) \stackrel{\text{déf}}{=} (f'(x))'$ . On peut de manière plus générale définir:

$$f^{(n)}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} (f^{(n-1)}(x))' \quad (\text{Dérivée d'ordre } n)$$

**Définition 6.6.2**  $f : E \rightarrow F$  est  $n$  fois dérivable si elle admet une dérivée d'ordre  $n$ .

**Définition 6.6.3**  $f : E \rightarrow F$  est de classe  $C^n(E)$  si elle admet une dérivée d'ordre  $n$  qui est continue sur  $E$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup>On dit aussi " $n$  fois continûment dérivable"

## 6.7 Propriétés des fonctions dérivables

**Proposition 6.7.1** *Si  $f : E \rightarrow F$  dérivable en  $x_0 \in E$ , telle que  $f$  admet un extremum local en  $x_0$ , alors  $f'(x_0) = 0$*

*Remarque: La réciproque est fausse.*

**Définition 6.7.1** *Si  $f : E \rightarrow F$  est dérivable en  $x_0$  et  $f'(x_0) = 0$ , on dit que  $x_0$  est un point stationnaire de  $f$ .*

Les points d'extrema d'une fonction continuent  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sont parmi les suivants:

1. les points stationnaires:  $f'(x_0) = 0$
2. les points où  $f'(x)$  n'existe pas dans  $]a, b[$
3. les points limites  $x = a, x = b$

## 6.8 Théorème de Rolle

Soit  $a < b \in \mathbb{R}$  et  $f : [a, b] \rightarrow F$ , telle que:

1.  $f : [a, b] \rightarrow F$  est continue
2.  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$
3.  $f(a) = f(b)$

Alors, il existe au moins un point  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Cours 20 - 24 novembre 2025: Tout ce TAF va m'envoyer à l'Hospital**

## 6.9 Théorème des accroissement finis (TAF)

**Définition 6.9.1** *Soit  $a < b$ ;  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que:*

1.  $f$  est continue sur  $[a, b]$
2.  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$

$\Rightarrow$  Il existe au moins un point  $c \in ]a, b[$  tel que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

On remarque que si  $f(a) = f(b)$  on retrouve le Théorème de Rolle

**Corollaire 6.9.1.1** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$  et  $f'(x) = 0, \forall x \in ]a, b[$ . Alors  $f$  est constante sur  $[a, b]$

**Corollaire 6.9.1.2** Si  $f(x)$  et  $g(x)$  sont continues dérivables sur  $]a, b[$  et telles que  $f'(x) = g'(x), \forall x \in ]a, b[ \Rightarrow f(x) = g(x) + \alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$

**Corollaire 6.9.1.3** •  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ),  $\forall x \in ]a, b[ \Leftrightarrow f$  est croissante (décroissante) sur  $]a, b[$

- $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ),  $\forall x \in ]a, b[ \Leftrightarrow f$  est **strictement** croissante (décroissante) sur  $]a, b[$

Remarque: Si  $f(x)$  est strictement croissante cela n'implique **pas**  $f'(x) >$

0

## 6.10 Règle de Bernoulli-l'Hospital

**Théorème 6.10.1** Soient  $f, g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions dérivables sur  $]a, b[$ . Si

1.  $g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$  sur  $]a, b[$
2.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) \in \{-\infty, 0, +\infty\}$
3.  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \mu$$

Note personnelle:

Il est parfaitement possible d'appliquer le théorème de Bernoulli-l'Hospital plusieurs fois à la suite tant que les conditions 1 et 2 sont respectées. Par exemple:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \frac{1 - \cos(x)}{x^2} &&= \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \frac{\sin(x)}{2x} &&= \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 0} f''(x) &= \frac{\cos(x)}{2} &&= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Cours 21 - 26 novembre 2025: J'aime pas trop comment ça se développe...

## 6.11 Développements limités

### 6.11.1 Formule de Taylor

**Théorème 6.11.1** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $(n+1)$  fois dérivable sur  $I$  avec  $a \in I$ .

Alors  $\forall x \in I$  il existe  $u$  entre  $x$  et  $a$  tel que:

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{P_n(f) \text{ Polynôme de Taylor}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{R_n(f) \text{ le reste}}$$

Remarque: La formule de Taylor s'appelle formule de MacLaurin si  $a = 0$ .

### Définition 6.11.1 Développement limité

$f : E \rightarrow F$  une fonction définie au voisinage de  $x = a$ . S'il existe des nombres  $a_0, a_1, \dots, a_n$  tels que  $\forall x \in E, x \neq a$ , on a

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

où  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ , on dit que  $f$  admet un **développement limité** d'ordre  $n$  autour de  $x = a$ .

**Proposition 6.11.1** Si  $f : E \rightarrow F$  admet un développement limité d'ordre  $n$  autour de  $x = a$ , alors celui-ci est unique.

**Corollaire 6.11.1.1** Soit  $a \in I$ ;  $f : I \rightarrow F$  une fonction  $(n+1)$  fois continûment dérivable sur  $I$ . Alors la formule de Taylor nous fournit le DL<sup>2</sup> d'ordre  $n$  de la fonction  $f$  autour de  $x = a$  Remarques:

1. En fait, il suffit d'avoir  $f$   $n$  fois dérivable sur  $I$  pour avoir  $f(x) = P_n(x)$  de Taylor  $+ (x-a)^n \varepsilon(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ .
2.  $f : E \rightarrow F$  peut avoir un DL sans que la formule de Taylor lui soit applicable.

### 6.11.2 Étude de fonctions

**Rappel:** Si  $f : I \rightarrow F$  est dérivable sur  $I$ , et  $f$  admet un extremum local en  $x = c$ , alors  $f'(c) = 0$ .<sup>3</sup>

**Proposition 6.11.2** (Condition suffisante pour qu'une fonction ait un extremum local)

Soit  $f : I \rightarrow F$  une fonction  $n$  fois continûment dérivable sur  $I$ , où  $n \in \mathbb{N}^*$  est pair et telle que  $f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ , mais  $f^{(n)}(c) \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Alors si } f^{(n)} > 0 &\Rightarrow f \text{ admet un min local en } x = c \\ \text{si } f^{(n)} < 0 &\Rightarrow f \text{ admet un max local en } x = c \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Développement Limité

<sup>3</sup>Voir 6.7.1

**Définition 6.11.2** Si  $f : E \rightarrow F$  une fonction dérivable en  $a \in E$ .

Soit  $l(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$  la tangente à la courbe  $y = f(x)$  en  $(a, f(a))$ .

Considérons  $\psi(x) \stackrel{\text{déf}}{=} f(x) - l(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ .

Si  $\psi(x)$  change de signe en  $x = a$ , alors  $(a, f(a))$  est un **point d'inflexion** de  $f$ .

**Proposition 6.11.3** (Condition suffisante pour qu'une courbe ait un point d'inflexion)

Soit  $f : I \rightarrow F$  une fonction  $n$  fois continûment dérivable sur  $I$ , où  $n \in \mathbb{N}$  est impair,  $n > 1$ , et on a :

$$f''(a) = f'''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0; \quad f^{(n)}(a) \neq 0$$

Alors le point  $(a, f(a))$  est un point d'inflexion de  $f$ .

**Définition 6.11.3** Concave et convexe

- $f : I \rightarrow F$  est **convexe** sur  $I$  si pour tout couple  $a < b \in I$ , le graphique de  $f(x)$  se trouve **en dessous** de la droite passant par  $(a, f(a))$  et par  $(b, f(b))$ .
- $f : I \rightarrow F$  est **concave** sur  $I$  si pour tout couple  $a < b \in I$ , le graphique de  $f(x)$  se trouve **au dessus** de la droite passant par  $(a, f(a))$  et par  $(b, f(b))$ .

**Proposition 6.11.4** Soit  $f : I \rightarrow F$  deux fois dérivable sur  $I$ .

Alors  $f$  est convexe sur  $I \Leftrightarrow f''(x) \leq 0$  sur  $I \Leftrightarrow f'(x)$  est croissante sur  $I$

$f$  est concave sur  $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$  sur  $I \Leftrightarrow f'(x)$  est décroissante sur  $I$

**Cours 22 - 1er décembre 2025: The most wonderful time of the year!**

### 6.11.3 Opérations algébriques sur les développements limités

**Proposition 6.11.5** Soient  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions admettant le DL autour de  $x = a$

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_1(x) = P_f^n(x) + (x-a)^n \varepsilon_1(x) \mid \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) = 0$$

$$g(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \dots + b_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_2(x) = P_g^n(x) + (x-a)^n \varepsilon_2(x) \mid \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_2(x) = 0$$

Alors

1.  $\alpha f(x) + \beta g(x)$  admet un DL d'ordre  $n$  autour de  $x = a$   
 $P_{\alpha f + \beta g}^n(x) = \alpha P_f^n(x) + \beta P_g^n(x)$

2.  $f(x) \cdot g(x)$  admet un DL d'ordre  $n$  autour de  $x = a$   
 $P_{f \cdot g}^n(x) = P_f^n(x) \cdot P_g^n(x)$  où l'on ne retient que les termes d'ordre  $\leq n$
3. Si  $b_0 \neq 0$ ,  $g(x) \neq 0$  sur  $E$ ,  $\frac{f(x)}{g(x)}$  admet un développement limité d'ordre  $n$  autour de  $x = a$   
 $P_{\frac{f}{g}}^n(x) = \frac{P_f^n(x)}{P_g^n(x)}$  où l'on ne retient que les termes d'ordre  $\leq n$

**Proposition 6.11.6** DL d'une fonction composée

Soit  $f(x) = a_1(x - a) + \dots + a_n(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon_1(x)$  DL autour de  $x = a$   
 $g(y) = g(0) + b_1 y + \dots + b_n y^n + y^n \varepsilon_2(x)$  DL autour de  $y = 0$

Alors  $g \circ f$  admet un DL d'ordre  $n$  autour de  $x = a$ ,

$$P_{g \circ f}^n = g(0) + b_1(P_f^n(x - a)) + b_2(P_f^n(x - a))^2 + \dots + b_n(P_f^n(x - a))^n$$

où l'on ne conserve que les termes d'ordre  $\leq n$

# Chapter 7

## Séries entières

### 7.1 Rayon de convergence

**Définition 7.1.1** *L'expression*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

est dite **une série entière**,  $a_k, x_0 \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$ .

Le domaine de convergence  $D \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \text{ converge}\}$ , la fonction  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ ,  $x \in D$  est défini par la série entière.

**Théorème 7.1.1** (*Rayon de convergence*)

Soit la série entière  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ , alors il existe  $r : 0 \leq r \leq +\infty$  tel que

1. la série converge absolument  $\forall x : |x - x_0| < r$
2. la série diverge  $\forall x : |x - x_0| > r$

*Remarque:*

1.  $D$  est un intervalle qui contient  $x_0$  et centré en  $x_0$ .
2. La convergence de la série entière en  $x = x_0 \pm r$  doit être étudié séparément.

**Proposition 7.1.1** Soit  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$  une série entière de rayon de convergence  $r$ . Supposons que  $a_k \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}$

1. Si  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = l$  avec  $0 \leq l \leq \pm\infty \Rightarrow r = \frac{1}{l}$ . Donc on a:  $r = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|}$
2. Si  $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = l$  avec  $0 \leq l \leq +\infty \Rightarrow r = \frac{1}{l}$

## Cours 23 - 3 décembre 2025: My Taylor is rich

### 7.2 Série de Taylor

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^\infty(I)$  (indéfiniment dérivable), et  $x_0 \in I$ , alors:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

est la **série (entière) de Taylor** de  $f$  au point  $x_0$ .

Lorsque  $x_0 = 0$  on retrouve la **série de MacLaurin**.

Deux objectifs:

1. Trouver le rayon ( $r$ ) et le domaine de convergence ( $D$ ) de  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$
2. Trouver l'ensemble  $E \subset D$  tel que:  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$  ( $E$  est l'ensemble où la série de Taylor converge vers  $f(x)$ )

#### 7.2.1 Séries de Taylor communes

$\forall x \in \mathbb{R}$

•

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

•

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

•

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

•

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

•

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$$

## 7.2.2 Exemple de série de Taylor qui ne converge pas vers

$f(x)$

Soit  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  indéfiniment dérivable autour de  $x = 0$ .

On trouve  $\forall k \geq 0: f^{(k)}(0) = 0$

Il suit que  $f$  est de classe  $C^\infty(\mathbb{R})$ .

Taylor  $(f)_{x=0} = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ .

Alors  $\text{Taylor}(f)_{x=0} \neq f(x)$  sauf pour  $x = 0$ . Ici on a  $D = \mathbb{R}$ , mais  $E = 0$ .

## 7.3 Primitive et dérivée d'une fonction définie par une série entière

**Définition 7.3.1** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $f$  continue). La fonction  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (continue) est **une primitive** de  $f$  sur  $[a, b]$  si  $F'(x) = f(x) \forall x \in ]a, b[$ .

Si  $F_1(x)$  et  $F_2(x)$  sont deux primitives de  $f(x)$  sur  $[a, b]$ , alors  $F_1(x) = F_2(x) + \alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$

### 7.3.1 Quelques primitives

$f(x)$	$F(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C \ (x > 0)$
$x^k$	$\frac{1}{k+1}x^{k+1} + C \ (x > 0 \ k \neq -1)$
$e^x$	$e^x + C$
$\sinh(x)$	$\cosh(x) + C$
$\cosh(x)$	$\sinh(x) + C$
$a^x, a > 0, a \neq 1$	$\frac{1}{\ln(a)}a^x + C$
$\frac{1}{x}, x \neq 0$	$\ln( x ) + C$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$

**Théorème 7.3.1** 1. Les deux séries entières  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$  et  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}$  ont le même rayon de convergence  $r$ .

2. Si  $r > 0$ , alors  $f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$  est continue sur  $]x_0-r, x_0+r[$

3. Si  $r > 0$ , alors  $F(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}$  est la primitive de  $f(x)$  sur  $]x_0-r, x_0+r[$  telle que  $F(x_0) = 0$

**Corollaire 7.3.1.1** 1. Les deux séries entières  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$  et  $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k(x-x_0)^{k-1}$  ont le même rayon de convergence.

2. Si  $r > 0$ , alors  $f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$  est continuellement dérivable sur  $]x_0 - r, x_0 + r[$  et  $f'(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k(x-x_0)^{k-1}$

## Chapter 8

# Calcul intégral

Cours 24 - 8 décembre 2025: Intégralement relou

### 8.1 Intégrale d'une fonction continue

#### 8.1.1 Définition et sommes de Darboux

**Définition 8.1.1** *Sommes de Darboux*

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (continue). Soit  $\sigma = x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ , telle qu'il n'y ait pas de subdivision possible ( $P(\sigma) = \max x_i - x_{i-1}$ ).

Alors:

$$\bar{S}_\sigma \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1})$$

où  $M_k = \max(f(x))$ ,  $x \in [x_{k-1}; x_k]$ , est la somme de Darboux supérieure de  $f$  relativement à  $\sigma$ .

$$\underline{S}_\sigma \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1})$$

où  $m_k = \min(f(x))$ ,  $x \in [x_{k-1}; x_k]$ , est la somme de Darboux inférieure de  $f$  relativement à  $\sigma$ .

On a également  $m(b-a) \leq \underline{S}_\sigma(f) \leq \bar{S}_\sigma(f) \leq M(b-a)$ , avec  $M = \max(f(x))$  et  $m = \min(f(x))$  sur  $[a, b]$ . **Remarque:** Si  $\sigma_1 \subset \sigma_2$  (en gros si on ajoute des points "intermédiaires").

$$\Rightarrow \underline{S}_{\sigma_1} \leq \underline{S}_{\sigma_2}(f) \leq \bar{S}_{\sigma_2}(f) \leq \bar{S}_{\sigma_1}(f)$$

**Proposition 8.1.1** Soit  $\bar{S}(f) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf\{\bar{S}_\sigma(f), \sigma \text{ subdivisions de } [a, b]\}$

$\underline{S}(f) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup\{\underline{S}_\sigma(f), \sigma \text{ subdivisions de } [a, b]\}$

**Théorème 8.1.1** Alors si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ ,  $\bar{S}(f) = \underline{S}(f)$

**Définition 8.1.2** Soit  $a < b$ , et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bornée, telle que  $\bar{S}(f) = \underline{S}(f)$ . Alors

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{déf}}{=} \bar{S}(f) = \underline{S}(f)$$

est l'intégrale de Riemann de la fonction sur  $[a, b]$ , où  $a$  est la borne inf,  $b$  la borne sup et  $x$  la variable d'intégration (comme dénoté par  $dx$ ).

**Définition 8.1.3** Si  $b < a$ ,  $\int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{déf}}{=} -\int_b^a f(x)dx$ ;  $\int_a^a f(x)dx = 0$ .

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_{\sigma_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_{\sigma_n}(f) \quad (\text{Calcul d'intégrale})$$

Où  $\{\sigma_n\}$  est une suite de subdivisions de  $[a, b]$  telle que  $P(\sigma_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

### 8.1.2 Propriétés

1.  $a < b$ ,  $f(x)$  continue sur  $[a, b]$ .  
Soit  $c \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
2.  $m(b-a) \leq \underline{S}(f) \leq \bar{S}(f) \leq M(b-a)$   
où  $m = \min(f(x))$  et  $M = \max(f(x))$  sur  $[a, b]$ .  
On peut aussi l'écrire  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$
3. Théorème de la moyenne:  $a < b$ ,  $f(x)$  continue sur  $[a, b]$ . Alors il existe un point  $c \in [a, b]$  tel que:  
 $\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$

## 8.2 Relation entre intégrale et primitive

**Proposition 8.2.1** Soit  $a < b$ ,  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ .

Alors la fonction  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  est la primitive de  $f(x)$  sur  $[a, b]$  telle que  $F(a) = 0$ .

**Corollaire 8.2.0.1** Théorème fondamental du calcul intégral

Soit  $a < b$ ,  $f(x)$  continue sur  $[a, b]$ . Si  $G(x)$  est une primitive de  $f(x)$  sur  $[a, b]$  alors

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

Pour les primitives usuelles voir la section "Quelques primitives (7.3.1)".

### 8.2.1 Propriétés

1. Linéarité:  $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$
2. Si  $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$ ,  $c \in ]a, b[$   
 $\Rightarrow 0 \leq \int_a^c f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$  car  $F'(x) = f(x) \geq 0 \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t) dt$  est croissante sur  $[a, b]$
3. Corollaire: Si  $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$
4. Intégrale fonction de ces bornes:  
 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue,  $g, h : I \rightarrow [a, b]$  dérivables sur  $I$ .  
 Alors:

$$\frac{d}{dx} \left( \int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt \right) = f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x)$$

## 8.3 Techniques d'intégration

### 8.3.1 Changement de variables

**Proposition 8.3.1**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue,  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  continûment dérivable sur  $[\alpha, \beta] \subset I$ , alors:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

où  $x = \varphi(t)$  et donc  $\frac{d}{dt} x = \varphi'(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t) dt$

**Cours 25 - 10 décembre 2025: Les intégrales c'est un art**

### 8.3.2 Intégration par parties

$g, f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continûment dérivable;  $[a, b] \subset I$ . Alors

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) dx$$

Notations utiles

- $df(x) = f'(x) dx$
- $f(x)g(x) \Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$

### 8.3.3 Intégration de fonctions rationnelles

$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  s'exprime toujours en termes fonctions des fonctions élémentaires.

J'avais déjà traité cette méthode d'intégration dans mon résumé d'analyse B pour MàN (PREPA-031b). Ce qui suit n'est donc qu'un copié collé de cette section dans le résumé.<sup>1</sup>

**Méthode générale** On décrit maintenant la procédure à suivre dans le cas général. Soit

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

une fonction rationnelle avec  $P(x)$  et  $Q(x)$  des polynômes.

1. Si  $\deg(P) \geq \deg(Q)$ , on fait la division polynomiale pour trouver

$$f(x) = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

où  $S(x)$  et  $R(x)$  sont des polynômes tel que  $\deg(R) < \deg(Q)$ .

2. Factoriser le plus possible le dénominateur  $Q(x)$  (en facteurs irréductibles).
3. Restent les possibilités suivantes,

- Cas 1: Si  $Q(x)$  peut être factorisé en  $k$  facteurs de degré 1,

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \dots (a_kx + b_k)$$

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(a_1x + b_1)} + \frac{A_2}{(a_2x + b_2)} + \dots + \frac{A_k}{(a_kx + b_k)}$$

- Cas 2: Si l'un des facteurs de degré 1 de  $Q(x)$  apparaît "plusieurs fois", à savoir on a  $(ax + b)^r$  on ajoute à la décomposition les termes  $(ax + b)^1$  à  $(ax + b)^r$ .

$$\frac{A_1}{(ax + b)} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \dots + \frac{A_r}{(ax + b)^r}$$

- Cas 3: Si l'un des facteurs de  $Q(x)$  est un polynôme de degré 2 irréductible ( $\Delta < 0$ ) alors on ajoute à la décomposition le terme

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

---

<sup>1</sup>Je recommande également d'aller voir dedans si vous avez des doutes sur certaines choses que l'on a considéré comme "acquises" dans ce cours d'Analyse 1.

- Cas 4: Si un des facteurs de  $Q(x)$  est un facteur irréductible de degré 2 de multiplicité  $r$ ,  $(ax^2 + bx + c)^r$  de  $\Delta < 0$  alors on ajoute à la décomposition les éléments suivants

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_rx + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}$$

Après on résoud pour trouver les coeffs :)



## Chapter 9

# Intégrales généralisées

Cours 26 - 15 décembre 2025: "Et pas n'importe laquelle, l'intégrale du Général"

### 9.1 Intégrales généralisées sur un intervalle borné

**Définition 9.1.1** Soit  $a < b$  et  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors on définit l'intégrale généralisée par la limite

$$\int_a^{b-} f(t)dt \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(t)dt$$

si la limite existe dans  $\mathbb{R}$ .

Si la limite n'existe pas, l'intégrale généralisée  $\int_a^{b-} f(t)dt$  est dite **divergente**.

Soit  $a < b$  et  $f : ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors on définit l'intégrale généralisée par la limite

$$\int_{a+}^b f(t)dt \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{x \rightarrow a+} \int_x^b f(t)dt$$

si la limite existe dans  $\mathbb{R}$ .

Si la limite n'existe pas, l'intégrale généralisée  $\int_{a+}^b f(t)dt$  est dite **divergente**.

**Proposition 9.1.1** Soit  $f, g : [a, b[$  fonctions continues telles qu'il existe  $c \in ]a, b[$ :  $0 \leq f(x) \leq g(x) \forall x \in [c, b[$ .

$$\begin{aligned} \text{Alors si } \int_a^{b-} g(x)dx \text{ converge} &\Rightarrow \int_a^{b-} f(x)dx \text{ converge} \\ \text{si } \int_a^{b-} f(x)dx \text{ diverge} &\Rightarrow \int_a^{b-} g(x)dx \text{ diverge} \end{aligned}$$

Ce critère existe également pour  $f, g : ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continues.

**Corollaire 9.1.1.1** Soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Supposons qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \cdot (b - x)^\alpha \neq 0 = l \in \mathbb{R}$ . Alors l'intégrale généralisée  $\int_a^{b^-} f(t)dt$  converge  $\Leftrightarrow \alpha < 1$  et diverge  $\Leftrightarrow \alpha \geq 1$ .

**Définition 9.1.2** Soit  $a < b$ ,  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue,  $c \in ]a, b[$  arbitraire. Alors l'intégrale généralisée

$$\int_{a^+}^{b^-} f(t)dt \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{a^+}^c f(t)dt + \int_c^{b^-} f(t)dt$$

converge si et seulement si les deux intégrales généralisées convergent. La définition ne dépend pas du choix de  $c \in ]a, b[$ .

## 9.2 Intégrales généralisées sur un intervalle non borné

**Définition 9.2.1** Soit  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors l'intégrale généralisée

$$\int_a^\infty f(t)dt \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$$

si la limite existe.

Sinon, l'intégrale généralisée  $\int_a^\infty f(t)dt$  est dite divergente. Même chose avec la fonction  $f : ]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et l'intégrale  $\int_{-\infty}^b f(t)dt$ .

**Corollaire 9.2.1.1** Soit  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $\beta \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot x^\beta \neq 0 = l \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Alors } \int_a^\infty f(t)dt \text{ converge } \Leftrightarrow \beta > 1$$

$$\text{diverge } \Leftrightarrow \beta \leq 1$$

**Définition 9.2.2** Soit  $a < b$ ,  $f : ]a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue,  $c \in ]a, +\infty[$  arbitraire.

Alors l'intégrale généralisée

$$\int_{a^+}^{+\infty} f(t)dt \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{a^+}^c f(t)dt + \int_c^{+\infty} f(t)dt$$

converge si et seulement si les deux intégrales généralisées convergent. La définition ne dépend pas du choix de  $c \in ]a, b[$ .

**Définition 9.2.3** Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue alors on peut aussi considérer

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)dt \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{-\infty}^c f(t)dt + \int_c^\infty f(t)dt, \quad c \in \mathbb{R}$$

converge si et seulement si les deux intégrales généralisées convergent. La définition ne dépend pas non plus du choix de  $c \in ]a, b[$ .