

Analyse I - Résumé

Mahel Coquaz

Semestre d'automne 2025

Contents

1	Prérequis	5
1.1	Identités algébriques	5
1.2	Exponentielles & Logarithmes	5
1.2.1	Exponentielles	5
1.2.2	Logarithmes	5
1.3	Trigonométrie	6
1.4	Fonctions élémentaires	6
1.4.1	Types de fonctions	6
1.4.2	Injectivité, surjectivité, bijectivité	6
1.4.3	Fonctions réciproques	7
1.4.4	Fonctions composées	7
2	Nombre réels	9
2.1	Ensembles	9

Introduction

Ce qui suit se veut être un résumé ultra condensé du cours d'Analyse I pour IN (MATH-101e) donné au semestre d'automne 2025 à l'EPFL. Le contenu de ce cours ne m'appartient pas et est quasiment intégralement extrait du cours des Professeurs Anna Lachowska qui l'a enseigné. J'ai cependant pris la liberté de sauter/raccourcir certains passages et d'ajouter des notes lorsqu'il me semblait pertinent de le faire.

Ce résumé/polycopié n'est pas exempt d'erreurs, si vous en trouvez une, vous pouvez me contacter sur mon adresse EPFL mahe1.coquaz@epfl.ch ou via le repo GitHub <https://github.com/hotwraith/LectureNotes>.

Le repository GitHub est aussi où se trouvent les dernières versions des fichiers PDFs et \TeX pour ce cours (et éventuellement d'autres).

Chapter 1

Prérequis

1.1 Identités algébriques

- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$
- $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$
- $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$

1.2 Exponentielles & Logarithmes

1.2.1 Exponentielles

Avec $a, b \in \mathbb{R}$

- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(ab)^x = a^x b^x$
- $a^0 = 1$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
- $a^1 = a$

1.2.2 Logarithmes

Avec $\ln = \log$ le logarithme naturel

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

- $\ln(x^c) = c \cdot \ln(x)$
- $\ln(1) = 0$
- $\log_a(a) = 1$

1.3 Trigonométrie

Avec $\sin(x), \cos(x) \forall x \in \mathbb{R}$

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ & $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$
- $\cos(0) = \cos(x - x) = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin(x) \cos(x) + \cos(x) \sin(x) = 2 \sin(x) \cos(x)$
- $\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

1.4 Fonctions élémentaires

1.4.1 Types de fonctions

1. Polynomiales

- Linéaire: $f(x) = ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$
- Quadratiques: $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

2. Fonctions rationnelles: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes, et $Q(x) \neq 0$

3. Fonctions algébriques: Toute fonction qui est une solution d'une équation polynomiale, ex: $f(x) = \sqrt{x}$

4. Fonctions transcendantes: fonctions non algébriques

- (a) Exponentielles et logarithmiques: $f(x) = e^x, g(x) = \ln(x)$
- (b) Fonctions trigos et réciproques: $f(x) = \sin(x), g(x) = \cos(x)$

1.4.2 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition 1.4.1 $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \text{ est bien définie}\} = \text{le domaine de définition de } f$

$f(D) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D(f) : f(x) = y\} = \text{l'ensemble image de } f$

Définition 1.4.2 Surjectivité

$f : E \rightarrow F$ est **surjective** si $\forall y \in F, \exists$ au moins un $x \in E : f(x) = y$

Définition 1.4.3 Injectivité

$f : E \rightarrow F$ est **injective** si $\forall y \in F, \exists$ au plus un $x \in E : f(x) = y$

Autrement dit: Soit $x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$

Définition 1.4.4 Bijectivité Si $f : E \rightarrow F$ est injective **ET** surjective, alors elle est **bijective**

1.4.3 Fonctions réciproques

Définition 1.4.5 *N'existent que si $f : E \rightarrow F$ est **bijjective** et est définie par $f^{-1} : F \rightarrow E$ donc $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$*

1.4.4 Fonctions composées

Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(D_f) \subset D_g$ on peut alors définir la fonction composée $g \circ f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ par $g \circ f(x) = g(f(x))$ ¹

¹Il est bon de noter que de manière générale: $g \circ f \neq f \circ g$

Chapter 2

Nombre réels

2.1 Ensembles

Un ensemble est une “Collection des objets définis et distincts” (G. Cantor)

Définition 2.1.1 $\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}$ Soit $\forall b \in X \Rightarrow b \in Y$

Sa négation: $\mathbf{X} \not\subset \mathbf{Y}$

$\exists a \in X : a \notin Y$