Analyse B - Résumé

Mahel Coquaz

Semestre de printemps 2025

Contents

Introduction

Ce qui suit se veut être un résumé ultra condensé du cours d'Analyse B pour MàN (PREPA-031b) donné au semestre de printemps 2025 à l'EPFL. Le contenu de ce cours ne m'appartient pas et est quasiment intégralement extrait du cours des Professeurs Sébastien Basterrechea, Anastasia Khukhro et Ghid Maatouk qui l'ont enseigné. J'ai cependant pris la liberté de sauter/raccourcir certains passages et d'ajouter des notes lorsqu'il me semblait pertinent de le faire.

Ce résumé/polycopié n'est pas exempt d'erreurs, si vous en trouvez une, vous pouvez me contacter sur mon adresse EPFL `mahel.coquaz@epfl.ch` ou via le repo GitHub `https://github.com/hotwraith/LectureNotes`.

Le repository GitHub est aussi où se trouvent les dernières versions des fichiers PDFs et TEXpour ce cours (et éventuellement d'autres).

Chapter 1

Suites réelles

1.1 Suites convergentes

1.1.1 Preuve

On veut montrer que a_n une suite quelconque tend vers une limite l.

Théorème 1.1.1 *Avec $\epsilon > 0$ et $n, N \in \mathbb{N}$, on cherche $N : \forall n \geq N : |a_n - l| \leq \epsilon$.*

La limite s'écrit $\lim_{\pm\infty} = l$

1.1.2 Exemple

On veut montrer que la suite $a_n = \frac{2n^2-1}{n^2+1}$ tend vers 2 à $\pm\infty$

$$|a_n - 2| \leq \epsilon$$

Avec $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} |a_n - 2| &= \left| \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1} - 2 \right| \\ &= \left| \frac{2n^2 - 1 - 2n^2 - 2}{n^2 + 1} \right| \\ &= \frac{3}{n^2 + 1} \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{gathered} |a_n - 2| \leq \epsilon \\ \frac{3}{n^2 + 1} \leq \epsilon \\ \frac{3}{\epsilon} - 1 \leq n^2 \\ n \geq \sqrt{\frac{3}{\epsilon} - 1} \end{gathered}$$

1.2 Propriétés des limites

1.2.1 Propriétés simples

1. $a_n \to L, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda a_n \to \lambda L$
2. $a_n \to L_1, b_n \to L_2 \Rightarrow a_n + b_n \to L_1 + L_2$
3. $a_n \to L_1, b_n \to L_2 \Rightarrow a_n b_n \to L_1 L_2$
4. $a_n \to L_1, b_n \to L_2 \neq 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \frac{L_1}{L_2}$
5. $a_n \to L_1, b_n \to L_2 \; et \; a_n \leq b_n \forall n \Rightarrow L_1 \leq L_2$
6. $a_n \to L \Rightarrow |a_n| \to |L|$
7. $a_n \to 0 \Leftrightarrow |a_n| \to 0$
8. Une suite croissante et majorée converge.
9. Une suite décroissante et minorée converge.

1.2.2 Théorème des gendarmes

Théorème 1.2.1 *Soit x_n une suite, s'il existe deux suites a_n, b_n telles que:*

- $a_n \leq x_n \leq b_n \forall n$ *suffisamment grand.*
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$

alors $\lim_{n\to\infty} x_n = L$

Chapter 2

Fonctions réelles

2.1 Parité

- f est **paire** si $f(-x) = f(x) \forall x \in D_f$
- f est **impaire** si $f(-x) = -f(x) \forall x \in D_f$

2.2 Compositions de fonctions

Théorème 2.2.1 [1] *La composée de fonctions deux fonctions f et g, notée $f \circ g$ est définie par:*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

2.3 Surjectivité, injectivité, bijectivité

Définition 2.3.1 *Soit $f : A \to B$ une fonction.*

- *f est **surjective** si $Im(f) = B$*
- *f est **injective** si $\forall y \in B$, il y a **au plus un** $x \in A$ tel que $f(x) = y$.*
- *f est **bijective** si elle est **à la fois** injective et bijective.*

2.3.1 Fonction réciproque

Si on a une fonction bijective $f : A \to B$, on a alors $\forall y \in B$ exactement une préimage. Ceci permet de définir la fonction:

$$\begin{aligned} f^{-1} :& B \to A \\ y \mapsto & \, l'unique\ préimage\ de\ y. \end{aligned}$$

Cette fonction appelée **fonction réciproque** de f, on a:

- $f(f^{-1}(y)) = y \ \forall y \in B$
- $f^{-1}(f(x)) = x \ \forall x \in A$

[1] Sorry not sorry on oubliera toute la partie sur les tracés de graphes.

Chapter 3

Limites de fonctions

3.1 Limites en $x \to \pm\infty$

Cette section et ses preuves sont plus ou moins équivalentes à celles utilisées pour les suites (voir 1.1.1 et 1.2.1), pour des exemples vous pouvez consulter le polycop d'Analyse B.

3.2 Limites en $x \to x_0$

Idem que pour la sous-section précédente.

3.2.1 Remarques

- Pour montrer que $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq L$, il suffit de trouver une suite $x_n \to x_0$ telle que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq L$.
- Pour montrer que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ **n'existe pas** il suffit de trouver une suite $x_n \to x_0$ telle que $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ n'existe pas. On peut aussi trouver deux suites a_n et b_n telles que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x_0$, mais que $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n)$.

3.3 Limites latérales

Théorème 3.3.1 $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$

3.4 Infiniment petits équivalents (IPE)

Définition 3.4.1 *Soient f et g définies sur un voisinage épointé de $x_0 \in \mathbb{R}$, telles que $g(x) \neq 0$ sur un voisinage épointé de à x_0. Les fonctions f et g sont des infiniment petits équivalents (IPE) au voisinage de x_0 si:*

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ *(infiniments petits).*
- $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ *(équivalents).*

On écrit $f \sim g$ *au voisinage de* x_0.

Proposition 3.4.1 *Au voisinage de* $x_0 = 0$,

- $\sin(x) \sim x$
- $\tan(x) \sim x$
- $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$

Chapter 4

Fonction continues

4.1 Introduction

Définition 4.1.1 *Si f est définie en $x_0 \in \mathbb{R}$ et dans son voisinage, et si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

*on dit que f est **continue en $\mathbf{x_0}$**. Sinon, f est dite **discontinue en $\mathbf{x_0}$**.*

La définition de continuité comporte implicitement trois exigences:

- $f(x_0)$ existe, c'est à dire que $x_0 \in D_f$
- $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$
- cette limite $L = f(x_0)$

Proposition 4.1.1 *Soient f et g continues en x_0. Alors les fonctions suivantes sont aussi continues en x_0:*

- λf *pour* $\lambda \in \mathbb{R}$
- $|f|$
- $f \pm g$
- $f \cdot g$
- $\frac{f}{g}$ *(si* $g(x_0) \neq 0$)

Théorème 4.1.1 *Soit f définie sur un voisinage épointé de x_0 telle que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$, et soit g continue au point L. Alors*

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x)) = g(L)$$

Corollaire 4.1.1.1 *Si f est continue en x_0 et g est continue $f(x_0)$, alors la composition $g \circ f$ est continue en x_0.*

Définition 4.1.2 *Continuité à droite/gauche*

- *Si* $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$*, la fonction f est dite **continue à droite**.*
- *Si* $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$*, la fonction f est dite **continue à gauche**.*

4.2 Théorème de la valeur intermédiaire

Définition 4.2.1 *Une fonction* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est dite* ***continue*** *si:*

- f *est continue en tout* $x_0 \in]a, b[$
- f *est continue à droite en* a
- f *est continue à gauche en* b

Théorème 4.2.1 *Théorème de la valeur intermédiaire (TVI).*
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue, telle que* $f(a) < f(b)$*. Alors* $\forall h \in]f(a), f(b)[$*, il existe* $c \in]a, b[$ *tel que* $f(c) = h$*.*

Corollaire 4.2.1.1 *Un polynôme de degré impair possède* ***toujours*** *une racine.*

Théorème 4.2.2 *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue:*

- *Si* f *est strictement (dé)croissante, alors* $Im(f) = [f(a), f(b)]$*, et* $f : [a, b] \to Im(f)$ *est bijective.*

Chapter 5

Dérivabilité

5.1 Définition et propriétés

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ **Rapport de Newton**

Lorsque $h \to 0$, le rapport peut:

- tendre vers une limite finie.
- tendre vers $\pm\infty$.
- rester borné mais ne pas converger.

Définition 5.1.1 *Soit f est définie sur un voisinage de x_0. f est **dérivable en $\mathbf{x_0}$** si la limite $h \to 0$ existe. Dans ce cas, cette limite est appelée la dérivée (ou nombre dérivé) de f en x_0 et on la note $f'(x_0)$.*

$$f'(x_0) = lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

5.2 Approximation linéaire

5.2.1 Équation de la tangente

$$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \tag{5.1}$$

5.2.2 Tangente à deux courbes

Considérons deux fonctions $y = f(x)$ et $y = g(x)$, et considérons une tangente commune à leurs graphes, on nomme les points de tangence x_1 et x_2.
Pour trouver $y = mx + c$ de la tangente commune il faut que

$$m = f'(x_1) = g'(x_2)$$

et que les points $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ soient sur la droite $y = mx + c$.

5.3 Fonction dérivée et règles de dérivation

Théorème 5.3.1 *1.* $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

2. $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x), \lambda \in \mathbb{R}$

3. $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

4. Si $g(x) \neq 0, (\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
Si f est dérivable en x et g et dérivable en $f(x)$, on a aussi:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Théorème 5.3.2 *Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors*

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Théorème 5.3.3 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$
$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$
$$(\tan(x))' = \begin{cases} 1 + \tan^2(x) \\ \frac{1}{\cos^2(x)} \end{cases}$$

Théorème 5.3.4 $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(e^x)' = e^x$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$(ln(x))' = \frac{1}{x}$$

5.4 Théorème de Rolle

Définition 5.4.1 *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ possède*

- *un* ***maximum global*** *en x_0 si $\forall x \in [a,b], on a f(x) \leq f(x_0)$ on dit alors que son* ***maximum est atteint*** *en x_0.*
- *un* ***minimum global*** *en x_0 si $\forall x \in [a,b], on a f(x) \geq f(x_0)$ on dit alors que son* ***minimum est atteint*** *en x_0.*

Théorème 5.4.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors f atteint son maximum et son minimum sur $[a,b]$.*

Définition 5.4.2 *Une fonction f possède*

- *un* ***maximum local*** *en x_0 si il existe un voisinage de x_0 sur lequel $f(x) \leq f(x_0)$.*
- *un* ***minimum local*** *en x_0 si il existe un voisinage de x_0 sur lequel $f(x) \geq f(x_0)$.*

Théorème 5.4.2 *Soit f dérivable sur $]a,b[$. Si f possède un minimum ou maximum local en $x_0 \in]a,b[$, alors $f'(x_0) = 0$.*

Théorème 5.4.3 (Théorème de Rolle) *Soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que $f'(x_0) = 0$.*

5.5 Théorème des accroissements finis

Théorème 5.5.1 (Théorème des accroissements finis (TAF)) *Soit f continue $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

5.6 Bernouilli-l'Hôpital

Théorème 5.6.1 (Règle de BH) *Soient f et g définies sur un voisinage épointé V de $x_0 \in \mathbb{R}$, telles que f et g y sont dérivables et $g(x)$,$g'(x) \neq 0$ sur V. Si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) \in \{0, +\infty, -\infty\}$$

et la limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou est égale à $+\infty$ ou $-\infty$, alors on a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ce théorème reste vrai si on remplace

- $\lim_{x \to x_0}$ par $\lim_{x \to x_0^+}$ ou $\lim_{x \to x_0^-}$
- V par un voisinage de $\pm\infty$ et $\lim_{x \to x_0}$ par $\lim_{x \to \pm\infty}$

Chapter 6

Courbes paramétrées

6.1 Introduction

Définition 6.1.1 *Soit $D \subset \mathbb{R}$. Une* ***courbe paramétrée*** *(ou* ***arc paramétré****) est une fonction*

$$\begin{aligned} M :& D \to \mathbb{R}^2 \\ & t \to M(t) = (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

La position $M(t)$ peut également se décrire à l'aide du ***rayon vecteur****, défini par*

$$\vec{r}(t) = \vec{OM}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

6.2 Vecteur tangent

Définition 6.2.1 *Lorsque $x(t_0)$ et $y(t_0)$ sont dérivables au temps t_0, le vecteur*

$$\dot{\vec{r}}(t_0) := \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}$$

est appelé le vecteur tangent de la courbe paramétrée M au temps t_0.
En particulier,

- *si $\dot{x}(t) \neq 0$ et $\dot{y}(t) = 0$ la courbe possède un point de* ***tangence horizontale*** *en $M(t)$.*
- *si $\dot{x}(t) = 0$ et $\dot{y}(t) \neq 0$ la courbe possède un point de* ***tangence verticale*** *en $M(t)$.*

6.2.1 Points stationnaire

Définition 6.2.2 *$M(t_0)$ est un* ***point stationnaire*** *de Γ si $\dot{\vec{r}}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.*

Pour étudier Γ au voisinage d'un point stationnaire, on pourra procéder avec

- l'étude des signes de $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$ pour $t < t_0$ et $t > t_0$.
- étudier la pente de $\dot{\vec{r}}(t)$, donnée par $\lim_{t \to t_0^\pm} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$.

6.3 Branches infinies

On trois types de branches infinies,

- Si $x(t) \to \pm\infty$ et $y(t) \to L$, alors la droite $y = L$ est une **asymptote horizontale**.
- Si $x(t) \to L$ et $y(t) \to \pm\infty$, alors la droite $x = L$ est une **asymptote verticale**.
- Si $x(t) \to \pm\infty$ et $y(t) \to \pm\infty$, et si

$$m := \lim \frac{y(t)}{x(t)} \in \mathbb{R}$$
$$h := \lim(y(t) - m \cdot x(t)) \in R$$

alors la droite d'équation $y = mx + h$ est une **asymptote oblique**.
Dans le cas où $\lim(y(t) - m \cdot x(t)) = \pm\infty$, il s'agit d'une **branche parabolique** de pente m.