Analyse I - Résumé

Mahel Coquaz

Semestre d'automne 2025

Contents

Introduction

Ce qui suit se veut être un résumé ultra condensé du cours d'Analyse I pour IN (MATH-101e) donné au semestre d'automne 2025 à l'EPFL. Le contenu de ce cours ne m'appartient pas et est quasiment intégralement extrait du cours des Professeurs Anna Lachowska qui l'a enseigné. J'ai cependant pris la liberté de sauter/raccourcir certains passages et d'ajouter des notes lorsqu'il me semblait pertinent de le faire.

Ce résumé/polycopié n'est pas exempt d'erreurs, si vous en trouvez une, vous pouvez me contacter sur mon adresse EPFL `mahel.coquaz@epfl.ch` ou via le repo GitHub `https://github.com/hotwraith/LectureNotes`.

Le repository GitHub est aussi où se trouvent les dernières versions des fichiers PDFs et TEXpour ce cours (et éventuellement d'autres).

Organisation par cours

Cours 1 - 8 septembre 2025: "C'est trivial ça"

Chapter 1

Prérequis

Cours 1 - 8 septembre 2025: "C'est trivial ça"

1.1 Identités algébriques

- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$
- $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 - y^3$
- $(x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3 + y^3$

1.2 Exponentielles & Logarithmes

1.2.1 Exponentielles

Avec $a, b \in \mathbb{R}$

- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(ab)^x = a^x b^x$
- $a^0 = 1$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
- $a^1 = a$

1.2.2 Logarithmes

Avec ln = log le logarithme naturel

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^c) = c \cdot \ln(x)$
- $\ln(1) = 0$
- $\log_a(a) = 1$

1.3 Trigonométrie

Avec $\sin(x), \cos(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ & $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
- $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$
- $\cos(0) = \cos(x - x) = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

1.4 Fonctions élémentaires

1.4.1 Types de fonctions

1. Polynomiales
   - Linéaire: $f(x) = ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$
   - Quadratiques: $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$
2. Fonctions rationnelles: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes, et $Q(x) \neq 0$
3. Fonctions algébriques: Toute fonction qui est une solution d'une équation polynomiale, ex: $f(x) = \sqrt{x}$
4. Fonctions transcendantes: fonctions non algébriques
   (a) Exponentielles et logarithmiques: $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln(x)$
   (b) Fonctions trigos et réciproques: $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$

1.4.2 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition 1.4.1 *$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x)$ est bien définie $\}$ = le* ***domaine de définition*** *de f*
$f(D) = \{y \in R : \exists x \in D(f) : f(x) = y\}$ = ***l'ensemble image*** *de f*

Définition 1.4.2 ***Surjectivité***
$f : E \to F$ est ***surjective*** *si $\forall y \in F, \exists$* ***au <u>moins</u> un*** *$x \in E : f(x) = y$*

Définition 1.4.3 ***Injectivité***
$f : E \to F$ est ***injective*** *si $\forall y \in F, \exists$* ***au <u>plus</u> un*** *$x \in E : f(x) = y$*
Autrement dit: Soit $x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$

Définition 1.4.4 ***Bijectivité*** *Si $f : E \to F$ est injective* ***ET*** *surjective, alors elle est* ***bijective***

1.4.3 Fonctions réciproques

Définition 1.4.5 *N'existent que si $f : E \to F$ est* ***bijective*** *et est définie par $f^{-1} : F \to E$ donc $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$*

1.4.4 Fonctions composées

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ avec $f(D_f) \subset D_g$ on peut alors définir la fonction composée $g \circ f : D_f \to$ par $g \circ f(x) = g(f(x))$ [1]

[1] Il est bon de noter que de manière générale: $g \circ f \neq f \circ g$

Chapter 2

Nombre réels

Cours 2 - 10 septembre 2025: For $\mathbb{R}$?

2.1 Ensembles

Un ensemble est une "Collection des objets définis et distincts" (G. Cantor)

Définition 2.1.1 $\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}$ *Soit* $\forall b \in X \Rightarrow b \in Y$
Sa négation: $\mathbf{X} \not\subset \mathbf{Y}$
$\exists a \in X : a \notin Y$

Définition 2.1.2 $X = Y \Leftrightarrow Y \subset X$ *et* $X \subset Y$

Définition 2.1.3 $\emptyset$ *l'ensemble vide:* $\emptyset = \{\}$
$\forall X : \emptyset \subset X$
$\forall X : X \subset X$

2.1.1 Opération ensemblistes

- Réunion: $X \cup Y = \{a \in \cup : a \in X \text{ ou } a \in Y\}$
- Intersection: $X \cap Y = \{a \in \cap : a \in X \text{ et } a \in Y\}$
- Différence: $X \backslash Y = \{a \in \backslash : a \in X \text{ et } a \notin Y\}$

Propriété $\mathbf{A} \backslash (\mathbf{B} \backslash \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \backslash \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{C})$

2.2 Nombres naturels, rationnels, réels

2.2.1 Borne inférieure et supérieure