

Analyse I - Résumé

Mahel Coquaz

Semestre d'automne 2025

Contents

0.1	Organisation par cours	7
1	Prérequis	11
1.1	Identités algébriques	11
1.2	Exponentielles & Logarithmes	11
1.2.1	Exponentielles	11
1.2.2	Logarithmes	12
1.3	Trigonométrie	12
1.4	Fonctions élémentaires	12
1.4.1	Types de fonctions	12
1.4.2	Injectivité, surjectivité, bijectivité	13
1.4.3	Fonctions réciproques	13
1.4.4	Fonctions composées	13
2	Nombre réels	15
2.1	Ensembles	15
2.1.1	Opération ensemblistes	15
2.2	Nombres naturels, rationnels, réels	15
2.2.1	Borne inférieure et supérieure	15
2.2.2	Supremum et infimum	16
2.2.3	Notations d'intervalles	16
2.3	Nombres complexes	16
2.3.1	Propriétés des nombres complexes	16
2.3.2	Les 3 formes de nombres \mathbb{C}	17
2.3.3	Conjugué	18
2.3.4	Racines de \mathbb{C}	19
2.3.5	Équations polynomiales dans \mathbb{C}	19
3	Suites de nombres réels	21
3.1	Définition	21
3.2	Raisonnement par récurrence	21
3.3	Limite des suites	21
3.3.1	Quotient de deux suites polynomiales	22
3.3.2	Théorème des deux gendarmes	22
3.3.3	Cas des suites géométriques	23
3.3.4	Remarques sur les limites	23
3.3.5	Critère de D'Alembert	23
3.3.6	Limites infinies	23
3.3.7	Formes indéterminées	24
3.3.8	Convergence de suites monotones	24

3.4	Le nombre e	24
3.5	Suites définies par récurrence	24
3.6	Sous-suites de Cauchy	25
3.6.1	Suites de Cauchy	25
3.7	Limite supérieure et limite inférieure d'une suite bornée	25
4	Séries numériques	27
4.1	Définitions et exemples	27
4.2	Critères de convergence	28
4.2.1	Critère de Leibniz	28
4.2.2	Critère de comparaison	28
4.2.3	Critère d'Alembert	28
4.2.4	Critère de Cauchy	28
4.2.5	Remarques	29
5	Fonctions réelles	31
5.1	Définitions et propriétés	31
5.1.1	Propriétés de base	31
5.2	Limite d'une fonction	32
5.2.1	Caractérisation de la limite d'une fonction à partir des suites	32
5.2.2	Critère de Cauchy pour les fonctions	33
5.2.3	Opérations algébriques sur les limites	33
5.2.4	Théorème des 2 gendarmes pour les fonctions	33
5.2.5	Théorème: Limite de la composée de deux fonctions	33
5.3	Limites lorsque x tend vers $\pm\infty$	33
5.4	Limites infinies	34
5.4.1	Formes indéterminées	34
5.4.2	Propriétés des limites infinies	34
5.5	Limites à droite et à gauche	34
5.6	Fonction exponentielle et logarithmique	35
5.6.1	Propriétés et définitions de l'exponentielle	35
5.6.2	Propriétés et définitions du logarithme	35
5.7	Fonctions continues	36
5.7.1	Quelques fonctions continues remarquables	36
5.7.2	Limites remarquables	36
5.7.3	Opérations sur les fonctions continues	36
5.7.4	Prolongement par continuité d'une fonction en un point	37
5.8	Fonctions continues sur un intervalle	37
5.8.1	Théorème de la valeur intermédiaire	37
6	Calcul différentiel	39
6.1	Fonctions dérivables	39
6.2	Fonction dérivée	39
6.2.1	Interprétation géométrique	40
6.2.2	Propriétés et autres trucs de la fonction dérivée	40
6.3	Dérivée de la fonction réciproque	40
6.4	Dérivée logarithmique	41
6.5	Fonctions hyperboliques	41
6.6	Dérivées d'ordre n	41

6.7	Propriétés des fonctions dérivables	41
6.8	Théorème de Rolle	42
6.9	Théorème des accroissement finis (TAF)	42
6.10	Règle de Bernouilli-l'Hospital	43
6.11	Développements limités	43
6.11.1	Formule de Taylor	43
6.11.2	Étude de fonctions	44
6.11.3	Opérations algébriques sur les développements limités . . .	45
7	Séries entières	47
7.1	Rayon de convergence	47

Cours

Cours 1 - 8 septembre 2025	11
Cours 2 - 10 septembre 2025	15
Cours 3 - 15 septembre 2025	16
Cours 4 - 17 septembre 2025	16
Cours 5 - 24 septembre 2025	18
Cours 6 - 29 septembre 2025	21
Cours 7 - 1 octobre 2025	22
Cours 8 - 6 octobre 2025	23
Cours 9 - 8 octobre 2025	24
Cours 10 - 13 octobre 2025	25
Cours 11 - 15 octobre 2025	27
Cours 12 - 27 octobre 2025	31
Cours 13 - 29 octobre 2025	32
Cours 14 - 3 novembre 2025	33
Cours 15 - 5 novembre 2025	34
Cours 16 - 10 novembre 2025	36
Cours 17 - 12 novembre 2025	36
Cours 18 - 17 novembre 2025	39
Cours 19 - 19 novembre 2025	40
Cours 20 - 24 novembre 2025	42
Cours 21 - 26 novembre 2025	43
Cours 22 - 1er décembre 2025	45

Introduction

Ce qui suit se veut être un résumé condensé du cours d'Analyse I pour IN (MATH-101e) donné au semestre d'automne 2025 à l'EPFL. Le contenu de ce cours ne m'appartient pas et est quasiment intégralement extrait du cours de la Professeur Anna Lachowska qui l'a enseigné. J'ai cependant pris la liberté de sauter/raccourcir certains passages et d'ajouter des notes lorsqu'il me semblait pertinent de le faire.

Il faut également noter que la nature de résumé de ce qui suit ne permet pas d'appréhender toutes les notions ou subtilités du cours, rien de ce qui est fait à l'EPFL ne peut être considéré comme "trivial" contrairement à ce que l'ont peut régulièrement entendre dans la bouche des professeurs, ce document à donc plus vocation à être un aide mémoire ou complément plutôt qu'un support complet de cours.

Ce résumé/polycopié n'est pas exempt d'erreurs, si vous en trouvez une, vous pouvez me contacter sur mon adresse EPFL mahel.coquaz@epfl.ch ou via le repo GitHub <https://github.com/hotwraith/LectureNotes>.

Le repository GitHub est aussi où se trouvent les dernières versions des fichiers PDFs et TeX pour ce cours (et éventuellement d'autres).

Rendons à César ce qui appartient à César, merci à Joachim Favre et Faust dont les notes et polycopiés dactylographiés m'ont inspiré dans la réalisation de ces résumés.

0.1 Organisation par cours

¹

- Cours 1 - 8 septembre 2025: "C'est trivial ça" p.11
 - Présentation et explications du cours et de sa forme
 - Révisions et passage en revue des prérequis
- Cours 2 - 10 septembre 2025: For \mathbb{R} ? p.15
 - Notations ensemblistes
 - Opérations ensemblistes
 - Nombres & théorème des bornes inférieure et supérieure
- Cours 3 - 15 septembre 2025: Élisabeth Born(é)e p.16
 - Supremum et infimum
 - Notations d'intervalles
- Cours 4 - 17 septembre 2025: ça se complique... p.16
 - Arguments et modules de nombres complexes
 - Les 3 formes de nombres complexes
 - Formule de Moivre et puissance de nombres complexes
- Cours 5 - 24 septembre 2025: C'est du français ou des maths ? p.18
 - Conjugué d'un complexe
 - Racines de complexes
 - Équations polynomiales dans \mathbb{C}
- Cours 6 - 29 septembre 2025: Classé sans suite p.21
 - Définition des suites
 - Le raisonnement par récurrence
 - Limites de suites
- Cours 7 - 1 octobre 2025: C'est limite ça p.22
 - Limites finies
 - Quotient de suites polynomiales
 - Théorème des deux gendarmes
- Cours 8 - 6 octobre 2025: Le roi d'Alembert... p.23
 - Suites géométriques
 - Critère d'Alembert
 - Limites infinies & formes indéterminées

¹À cause d'une skill issue il faut cliquer sur le **numéro** de page pour être envoyé sur la section correspondante du pdf.

- Cours 9 - 8 octobre 2025: eeeaaaooo p.24
 - Convergence de suites monotones
 - Le nombre e
 - Suites définies par récurrence
- Cours 10 - 13 octobre 2025: Netflix p.25
 - Sous-suites et suites de Cauchy
 - Limite supérieure et inférieure
 - Définition et exemples de séries numériques
- Cours 11 - 15 octobre 2025: Critères p.27
 - Convergence absolue
 - Critère de Leibniz et de comparaison
 - Critère de Cauchy et d'Alembert
- Cours 12 - 27 octobre 2025: "Cours le plus facile" -Lachowska p.31
 - Définition
 - et propriétés de fonctions réelles
- Cours 13 - 29 octobre 2025: I'm reaching my limit p.32
 - Limite d'une fonction
 - Caractérisation de la limite d'une fonction à partir des suites & critère de Cauchy pour les fonctions
 - Opérations algébriques sur les limites et théorème des deux gendarmes pour les fonctions
- Cours 14 - 3 novembre 2025: Infinite number of mathematicians walk into a bar p.33
 - Limites de fonctions composées
 - Limites à $\pm\infty$
 - Limite infinies et formes indéterminées
- Cours 15 - 5 novembre 2025: NàJ p.34
 - Limites à droite et à gauche
 - Exponentielle et logarithme
 - Fonctions continues
- Cours 16 - 10 novembre 2025: C'est un peu beaucoup trop calme p.36
 - Pas de cours, examen blanc.
- Cours 17 - 12 novembre 2025: • p.36
 - Prolongement par continuité

- Fonctions continues sur un intervalle
- Théorème de la valeur intermédiaire (TVI)
- Cours 18 - 17 novembre 2025: Virtuel et différeeeent p.39
 - Fonctions dérivables
 - Fonction dérivée
 - Dérivées à connaître
- Cours 19 - 19 novembre 2025: Rolle-en-garos p.40
 - Dérivée de la fonction réciproque
 - Fonctions hyperboliques
 - Dérivées d'ordre n
- Cours 20 - 24 novembre 2025: Tout ce TAF va m'envoyer à l'Hospital p.42
 - Théorème des accroissements finis (TAF)
 - Règle de Bernouilli-l'Hospital
- Cours 21 - 26 novembre 2025: J'aime pas trop comment ça se développe... p.43
 - Développements limités
 - Formule de Taylor
 - Étude de fonctions
- Cours 22 - 1er décembre 2025: The most wonderful time of the year! p.45
 - Opérations algébriques sur les DLs
 - Séries entières
 - Rayon et domaine de convergence

Chapter 1

Prérequis

Cours 1 - 8 septembre 2025: "C'est trivial ça"

1.1 Identités algébriques

- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$
- $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$
- $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$

1.2 Exponentielles & Logarithmes

1.2.1 Exponentielles

Avec $a, b \in \mathbb{R}$

- $a^x a^y = a^{x+y}$

- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

- $(ab)^x = a^x b^x$

- $a^0 = 1$

- $(a^x)^y = a^{xy}$

- $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

- $a^1 = a$

1.2.2 Logarithmes

Avec $\ln = \log$ le logarithme naturel

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^c) = c \cdot \ln(x)$
- $\ln(1) = 0$
- $\log_a(a) = 1$

1.3 Trigonométrie

Avec $\sin(x), \cos(x) \forall x \in \mathbb{R}$

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ & $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
- $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$
- $\cos(0) = \cos(x - x) = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

1.4 Fonctions élémentaires

1.4.1 Types de fonctions

1. Polynomiales

- Linéaire: $f(x) = ax + b; a, b \in \mathbb{R}$
- Quadratiques: $f(x) = ax^2 + bx + c; a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

2. Fonctions rationnelles: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes, et $Q(x) \neq 0$

3. Fonctions algébriques: Toute fonction qui est une solution d'une équation polynomiale, ex: $f(x) = \sqrt{x}$

4. Fonctions transcendantes: fonctions non algébriques

- (a) Exponentielles et logarithmiques: $f(x) = e^x, g(x) = \ln(x)$
- (b) Fonctions trigos et réciproques: $f(x) = \sin(x), g(x) = \cos(x)$

1.4.2 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition 1.4.1 $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \text{ est bien définie}\} = \text{le domaine de définition de } f$
 $f(D) = \{y \in R : \exists x \in D(f) : f(x) = y\} = \text{l'ensemble image de } f$

Définition 1.4.2 Surjectivité

$f : E \rightarrow F$ est surjective si $\forall y \in F, \exists \text{ au moins un } x \in E : f(x) = y$

Définition 1.4.3 Injectivité

$f : E \rightarrow F$ est injective si $\forall y \in F, \exists \text{ au plus un } x \in E : f(x) = y$
Autrement dit: Soit $x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$

Définition 1.4.4 Bijectivité Si $f : E \rightarrow F$ est injective ET surjective, alors elle est bijective

1.4.3 Fonctions réciproques

Définition 1.4.5 N'existent que si $f : E \rightarrow F$ est bijective et est définie par $f^{-1} : F \rightarrow E$ donc $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

1.4.4 Fonctions composées

Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(D_f) \subset D_g$ on peut alors définir la fonction composée $g \circ f : D_f \rightarrow$ par $g \circ f(x) = g(f(x))$ ¹

¹Il est bon de noter que de manière générale: $g \circ f \neq f \circ g$

Chapter 2

Nombre réels

Cours 2 - 10 septembre 2025: For \mathbb{R} ?

2.1 Ensembles

Un ensemble est une “Collection des objets définis et distincts” (G. Cantor)

Définition 2.1.1 $\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}$ Soit $\forall b \in X \Rightarrow b \in Y$

Sa négation: $\mathbf{X} \not\subset \mathbf{Y}$

$\exists a \in X : a \notin Y$

Définition 2.1.2 $X = Y \Leftrightarrow Y \subset X$ et $X \subset Y$

Définition 2.1.3 \emptyset l’ensemble vide: $\emptyset = \{\}$

$\forall X : \emptyset \subset X$

$\forall X : X \subset X$

2.1.1 Opération ensemblistes

- Réunion: $X \cup Y = \{a \in \cup : a \in X \text{ ou } a \in Y\}$
- Intersection: $X \cap Y = \{a \in \cap : a \in X \text{ et } a \in Y\}$
- Différence: $X \setminus Y = \{a \in \setminus : a \in X \text{ et } a \notin Y\}$

Propriété $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

2.2 Nombres naturels, rationnels, réels

2.2.1 Borne inférieure et supérieure

Définition 2.2.1 Soit $S \subset \mathbb{R}, S \neq \emptyset$. Alors $a \in \mathbb{R}(b \in \mathbb{R})$ est un minorant/majorant de S si $\forall x \in S$ on a: $a \leq x$ ou $x \leq b$

Si S possède un minorant/majorant on dit que S est minoré/majoré.

Si S est majoré et minoré, alors S est dit borné.

Cours 3 - 15 septembre 2025: Élisabeth Born(é)e

2.2.2 Supremum et infimum

Théorème 2.2.1 *Tout sous-ensemble non-vide majoré/minoré $S \subset \mathbb{R}$ admet un supremum/infimum qui est unique.*

Unicité *Si $\inf/\sup S$ existe alors il est le plus grand minorant/majorant de S*

2.2.3 Notations d'intervalles

Soit $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Intervalles bornés

- $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} = [a, b]$ intervalle fermé borné
- $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} =]a, b[$ intervalle ouvert borné
- $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} = [a, b[$ intervalle borné ni ouvert ni fermé
- $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} =]a, b]$ intervalle borné ni ouvert ni fermé

Intervalles non-bornés:

- $\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} = [a, +\infty[$ fermé
- $\{x \in \mathbb{R} : x > a\} =]a, +\infty[$ ouvert
- $\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} =]-\infty, b]$ fermé
- $\{x \in \mathbb{R} : x < b\} =]-\infty, b[$ ouvert

2.3 Nombres complexes

Cours 4 - 17 septembre 2025: ça se complique...

On sait que $x^2 = -1$ n'a pas de solutions dans \mathbb{R} , alors on introduit i tel que $i^2 = -1$ ¹

2.3.1 Propriétés des nombres complexes

Prenons les \mathbb{C}^2 de la forme $\{z = a + ib\}$, où $a, b \in \mathbb{R}$

- (+) $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$
 - $\exists = \in C : 0 + 0i = 0$ tel que $(a + ib) + 0 + 0i = a + ib \forall a, b \in \mathbb{R}$
 - \exists l'opposé pour $(a + ib)$: $(-a + i(-b)) + (a + ib) = 0 + 0i = 0$
- (·) $(a + ib) \cdot (c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$

¹Oui, en maths quand un truc marche pas on invente un truc pour que ça marche, si seulement on pouvait faire ça en exam...

² \mathbb{C} dénote l'ensemble des complexes

- $\exists 1 \in \mathbb{C} : 1 + 0i = 1 : (a + ib) \cdot (1 + 0i) = a + ib$
- $z \in \mathbb{C}, z \neq 0 \Rightarrow \exists z^{-1} \in \mathbb{C} : z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$
- Pour $z = a + ib \in \mathbb{C}^* \Rightarrow z^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$
- $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$
- \mathbb{C} n'est pas ordonné: $i > 0 \Rightarrow i^2 = -1 > 0$ et $i < 0 \Rightarrow (-i)^2 = -1 > 0$, on voit qu'on a $-1 > 0$ ce qui est absurde.

2.3.2 Les 3 formes de nombres \mathbb{C}

Forme cartésienne

$$\mathbf{z} = \mathbf{a} + \mathbf{i}\mathbf{b}, a, b \in \mathbb{R}$$

$z = Re(z) + Im(z)i$ (Re et Im respectivement les parties réelles et imaginaires de z)

$$|z| = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0^3$$

Trouver φ et $arg(z)$:

- $a > 0 : arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$
- $a < 0 : arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$
- Si $a = 0$:
 - $arg(z) = \frac{\pi}{2}$ si $Im(z) = b > 0$
 - $arg(z) = \frac{3\pi}{2}$ si $Im(z) = b < 0$

Forme polaire trigonométrique

$$\mathbf{z} = \rho(\cos(\varphi) + \mathbf{i}\sin(\varphi)) \quad \rho \leq 0, \varphi \in \mathbb{R}$$

$$|z| = \rho \leq 0 \quad \rho \neq 0 \Rightarrow \sin(\varphi) = \frac{Im(z)}{\rho}, \cos(\varphi) = \frac{Re(z)}{\rho}, \tan(\varphi) = \frac{Im(z)}{Re(z)} = \frac{a}{b} \text{ si } a = Re(z) \neq 0$$

Forme polaire exponentielle

$$e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y) \quad (\text{Formule d'Euler})$$

$$z = \rho(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = \rho e^{i\varphi}$$

Les trois formes

$$z = Re(z) + Im(z)i = |z|(\cos(arg(z)) + i\sin(arg(z))) = |z| \cdot e^{i \cdot arg(z)}$$

où

$$|z| = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2} \quad (\text{module de } z)$$

³ $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

$$\begin{aligned}
|z| \neq 0 \Rightarrow \arg(z) &= \arctan \left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} \right), \operatorname{Re}(z) > 0 \\
&= \arctan \left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} \right) + \pi, \operatorname{Re}(z) < 0 && \text{(argument de } z) \\
&= \frac{\pi}{2}, \operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) > 0 \\
&= \frac{3\pi}{2}, \operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) < 0
\end{aligned}$$

$$e^{i\pi} = -1 \quad (\text{Formule d'Euler})$$

$\forall \rho > 0, \varphi \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
(\rho(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)))^n &= \rho^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) \\
(\rho e^{i\varphi})^n &= \rho^n e^{in\varphi} && \text{(Formule de Moivre)}
\end{aligned}$$

Cours 5 - 24 septembre 2025: C'est du français ou des maths ?

2.3.3 Conjugué

Définition 2.3.1 $z = a + ib \in \mathbb{C}$ alors le conjugué de z est $\bar{z} = a - ib$

$$\mathbf{z}\bar{\mathbf{z}} = |\mathbf{z}|^2 \in \mathbb{R}$$

En forme polaire le conjugué s'écrit:

$$\begin{aligned}
z = \rho(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \Rightarrow \bar{z} &= \rho(\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)) \\
&= \rho(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) \\
&= \rho e^{-i\varphi}
\end{aligned}$$

Propriétés

$\forall z \in \mathbb{C}$:

1. $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$
2. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
3. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$
4. $|\bar{z}| = |z|$
5. $a = \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
6. $b = \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
7. $\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$
8. $\sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$

2.3.4 Racines de \mathbb{C}

Proposition 2.3.1 $w = s \cdot e^{i\varphi}$, $w \in \mathbb{C}^*$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\{z \in \mathbb{C}^* : z^n = w\} = \left\{ \sqrt[n]{s} e^{i \cdot \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

2.3.5 Équations polynomiales dans \mathbb{C}

Quadratiques

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow z = -\frac{b}{2a}$$

$$\neq 0 \Rightarrow 2 \text{ solutions}$$

Théorème fondamental de l'algèbre

Théorème 2.3.1 Tout polynôme $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$.

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n) \text{ où } z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$$

$$= a_n(z - w_1)^{m_1}(z - w_2)^{m_2}\dots(z - w_p)^{m_p}$$

Polynômes à coefficients réels

Proposition 2.3.2 Si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de $P(z)$ à coefficients réels, alors \bar{z} l'est aussi.

Donc $P(z) = P(\bar{z}) = 0$ et $(x - z)(x - \bar{z})$ divise le polynôme

Chapter 3

Suites de nombres réels

Cours 6 - 29 septembre 2025: Classé sans suite

3.1 Définition

Définition 3.1.1 On définit une suite de nombre réels comme une application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout nombre naturel ($\forall n \leq n_0 \in \mathbb{N}$)

Définition 3.1.2 Une suite (a_n) est majorée (minorée) s'il existe un nombre $M(m) \in \mathbb{R}$ tel que $a_n \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ($a_n \geq m \forall n \in \mathbb{N}$).

On dit que la suite est **bornée** si elle est majorée et minorée.

Définition 3.1.3 Une suite (a_n) est croissante (strictement croissante) si $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $a_{n+1} \geq a_n$ ($a_{n+1} > a_n$).

Une suite (a_n) est décroissante (strictement décroissante) si $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $a_{n+1} \leq a_n$ ($a_{n+1} < a_n$).

Une suite est dite (strictement) **monotone** si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

3.2 Raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n , telle que:

1. **Initialisation:** $P(n_0)$ est vraie, et...
2. **Hérédité:** $\forall n \geq n_0$, $P(n)$ implique $P(n + 1)$, alors $P(n)$ est **vraie** pour tout $n \geq n_0$.

Il est très important de bien démontrer les deux étapes de la récurrence, autrement il est facile d'obtenir une preuve qui est fausse.

3.3 Limite des suites

Définition 3.3.1 On dit que la suite (x_n) est **convergente** et admet pour **limite** le nombre réel $l \in \mathbb{R}$ si pour tout $\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ on a $|x_n - l| \leq \epsilon$. Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Cours 7 - 1 octobre 2025: C'est limite ça

Proposition 3.3.1 Si elle existe, la limite l d'une suite (a_n) est **unique**.

Proposition 3.3.2 Toute suite convergente est bornée. **Attention**, la réciproque est fausse, ex: $a_n = (-1)^n$ est bornée mais non convergente.

$$|x + y| \geq |x| + |y| \quad (\text{Inégalité triangulaire})$$

Proposition 3.3.3 Soient (a_n) et (b_n) deux suites convergentes: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}, \forall b \neq 0$$

3.3.1 Quotient de deux suites polynomiales

Prenons:

$$\begin{aligned} x_n &= a_p n^p + \dots + a_1 n + a_0 \\ y_n &= b_q n^q + \dots + b_1 n + b_0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) &= 0, p < q \\ &= \frac{a_p}{b_q}, p = q \\ &= \text{diverge, } p > q \end{aligned}$$

L'idée est la suivante:

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{a_p n^p + \dots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \dots + b_1 n + b_0} = \frac{n^p}{n^q} \cdot \frac{(a_p + a_{p-1} \frac{1}{n} + \dots + a_0 \frac{1}{n^p})}{(b_q + b_{q-1} \frac{1}{n} + \dots + b_0 \frac{1}{n^q})}$$

Le terme de droite tendant vers $\frac{a_p}{b_q}$ et le terme de gauche tendant vers différentes possibilités listées plus haut selon p et q .

3.3.2 Théorème des deux gendarmes

Soient $(a_n), (b_n), (c_n)$, trois suites telles que:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l$$

$$2. \exists k \in \mathbb{N} : \forall n \leq k \Rightarrow a_n \geq b_n \geq c_n$$

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$

Cours 8 - 6 octobre 2025: Le roi d'Alembert...

3.3.3 Cas des suites géométriques

Les suites géométriques ont la forme $a_n = a_0 \cdot r^n$, $a_0 \in \mathbb{R}$ et $a_0 \neq 0$, $r \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_0 r^n &= 0, |r| < 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 r^n &= a_0, r = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 r^n &= \text{divergente}, |r| > 1 \text{ ou } r = -1\end{aligned}$$

Intermède notation

$${n \choose k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ avec } 0 \leq k \leq n$$

3.3.4 Remarques sur les limites

1. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |l|$
2. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$
3. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = l \neq 0$ n'implique pas la convergence de x_n (ex $a_n = (-1)^n$)
4. Si (a_n) est bornée et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$

3.3.5 Critère de D'Alembert

Soit (a_n) une suite telle que $a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \rho \geq 0$, alors:

- Si $\rho < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- Si $\rho > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ diverge

3.3.6 Limites infinies

Définition 3.3.2 On dit que $(a_n)/(b_n)$ tends vers $+\infty$ / $-\infty$ si $\forall A > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, a_n \geq A/b_n \leq -A$

Notation: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$

Attention: les suites (a_n) et (b_n) sont **divergentes**.

Propriétés:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$ et (b_n) est bornée $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \pm\infty$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty / -\infty$ et $a_n \geq / \leq b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty / -\infty^1$
4. (a_n) bornée et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \pm\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, a_n \neq \forall n \Rightarrow$ alors (a_n) diverge².

¹C'est la "règle d'un seul gendarme" ou théorème du chien méchant, ou etc...

²Extension du critère d'Alembert

3.3.7 Formes indéterminées

1. $\infty - \infty$
2. $\frac{\infty}{\infty}$
3. $\frac{0}{0}$
4. $0 \cdot \infty$

Cours 9 - 8 octobre 2025: eeeaaaooo

3.3.8 Convergence de suites monotones

Théorème 3.3.1 *Toute suite croissante/décroissante qui est majorée/minorée converge vers son supremum/infimum.*

Toute suite croissante/décroissante qui n'est pas majorée/minorée tend vers $+\infty/-\infty$.

On utilise $(a_n) \uparrow = (a_n)$ est croissante, $(b_n) \downarrow = (b_n)$ est décroissante.

3.4 Le nombre e

Soit $(x_n) : x_0 = 1, x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \forall n \geq 1$
 $(y_n) : y_0 = 1, y_n = \sum_{k=0}^n \forall n \geq 1, (y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!})$
Alors:

1. $x_n \leq y_n \forall n \in \mathbb{N}$
2. $y_n \leq 3 \forall n \in \mathbb{N}$
3. $(y_n) \uparrow \forall n \in \mathbb{N}$
4. $(x_n) \uparrow \forall n \in \mathbb{N}$

Donc $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l \leq 3 \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l' \leq 3$.

On peut prouver ceci par récurrence, on se rend compte qu'en vrai $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e$.

Définition 3.4.1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{def}{=} e$

3.5 Suites définies par récurrence

Soit $x_0 = a \in \mathbb{R}$ et $x_{n+1} = g(x)$ où $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Proposition 3.5.1 *Récurrence linéaire*

Soit $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_{n+1} = qa_n + b$, où $q, b \in \mathbb{R}$.

Alors

1. si $|q| < 1 \Rightarrow (a_n)$ converge vers $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{b}{1-q}$

2. si $|q| \geq 1 \Rightarrow (a_n)$ diverge sauf si (a_n) est une suite constante.

Proposition 3.5.2 *Si $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = g(x_n)$ et $g : E \rightarrow E \subset \mathbb{R}$ telle que:*

1. $\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq g(x) \leq M \forall x \in E$
2. g est croissante: $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 \leq x_2 \Rightarrow g(x_1) \leq g(x_2)$

Alors la suite (x_n) , $x_{n+1} = g(x_n)$ est bornée et monotone \Rightarrow convergente.
*Remarque: Si (2) est remplacé par $x_1 \leq x_2 \Rightarrow g(x_1) \geq g(x_2)$ (g décroissante)
 \Rightarrow alors (x_n) n'est pas monotone (mais peut être convergente).*

Cours 10 - 13 octobre 2025: Netflix

3.6 Sous-suites de Cauchy

Définition 3.6.1 Une sous suite d'une suite (a_n) est une suite $k \mapsto a_{n_k}$ où $k \mapsto n_k$ est suite strictement croissante de nombres naturels.

Ex:

$$\begin{aligned} a_n = (-1)^n \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{2k} = (-1)^{2k}, (a_{2k}) \subset (a_n) \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = 1 \\ a_{2k+1} = (-1)^{2k+1}, (a_{2k+1}) \subset (a_n) \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = -1 \\ (a_n) \text{ est divergente} \end{aligned}$$

Proposition 3.6.1 Convergence d'une sous-suite

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \Rightarrow$ toute sous-suite (a_{n_k}) converge aussi vers l .

Théorème 3.6.1 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Dans toute suite bornée il existe une sous-suite convergente.

3.6.1 Suites de Cauchy

Définition 3.6.2 La suite (a_n) est une suite de Cauchy si $\forall \epsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$ et $\forall m \geq n_0$, $|a_n - a_m| \leq \epsilon$

Proposition 3.6.2 Une suite (a_n) est une suite de Cauchy $\Leftrightarrow (a_n)$ est convergente.

3.7 Limite supérieure et limite inférieure d'une suite bornée

Définition 3.7.1 Soit (x_n) une suite bornée: $\exists m, M \in \mathbb{R}: m \leq x_n \leq M \forall n \in \mathbb{N}$.

On définit la suite $y_n = \sup \{x_k, k \geq n\}$ $y_n \downarrow y_n \geq x_n \geq m \forall n \in \mathbb{N}$
la suite $z_n = \inf \{x_k, k \geq n\}$ $z_n \uparrow z_n \leq x_n \leq M \forall n \in \mathbb{N}$

Alors:

$\exists \lim y_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n$, $(y_n) \downarrow$, minorée par m
 $\exists \lim z_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n$, $(z_n) \uparrow$, majorée par M
 $z_n \leq x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Remarque: Si $\liminf x_n = \limsup x_n = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = l$.
On a, par les deux gendarmes, $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$

Remarque Si $\liminf x_n = l_1$, $\limsup x_n = l_2 \Rightarrow \exists$ une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ convergente vers l_1 et une sous-suite $\{x_{n_j}\}$ convergente vers l_2

Chapter 4

Séries numériques

4.1 Définitions et exemples

Définition 4.1.1 La série de terme général a_n est un couple:

1. la suite (a_n)
2. La suite des sommes partielles $S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$

Notation:

- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$: Série de terme général a_k
- $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$: *'n*ième somme partielle**

Définition 4.1.2 Série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est convergente \Leftrightarrow la suite (S_n) des sommes partielles est convergente.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= l \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k &= l \\ &= \pm\infty &= \pm\infty \end{aligned}$$

Exemples

- $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$ $|r| < 1$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ $\forall p > 1$

Cours 11 - 15 octobre 2025: Critères

Définition 4.1.3 Une série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ est dite **absolument convergente** si la série $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ est convergente.

Proposition: Une série absolument convergente est convergente.

Proposition: Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Remarque: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ n'implique pas la convergence.

4.2 Critères de convergence

4.2.1 Critère de Leibniz

Proposition 4.2.1 Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série telle que:

1. $\exists p \in \mathbb{N}: \forall n \geq p \Rightarrow |a_{n+1}| \leq |a_n|$
2. $\exists q \in \mathbb{N}: \forall n \geq q \Rightarrow |a_{n+1}| \cdot |a_n| \leq 0$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente.

4.2.2 Critère de comparaison

Proposition 4.2.2 Soit (a_n) et (b_n) deux suites telles que $\exists k \in \mathbb{N}: 0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \geq k$ Alors:

- Si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge.

Remarque Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ne possède que des termes positifs/négatifs, et la suite des sommes partielles est **majorée/minorée**, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente.

4.2.3 Critère d'Alembert

Soit (a_n) une suite: $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho \in \mathbb{R}$ Alors si:

- $\rho < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument.
- $\rho > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.
- $\rho = 1 \Rightarrow$ pas de conclusion.

4.2.4 Critère de Cauchy

¹

Soit (a_n) une suite et $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho \in \mathbb{R}$.

Alors si $p < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument
 $p > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge

¹de la racine

4.2.5 Remarques

1. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| a_n^{\frac{1}{n}} \right| = l$ alors $r = l$
2. Parfois $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existe, mais $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ n'existe pas.
3. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, alors pas de conclusion sur la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Chapter 5

Fonctions réelles

Cours 12 - 27 octobre 2025: "Cours le plus facile" -Lachowska

5.1 Définitions et propriétés

Définition 5.1.1 Une fonction $f : E \rightarrow F$ où $E, F \in \mathbb{R}$ est une application qui $\forall x \in D(f) = E$ done un élément $y = f(x) \in F$.

On note

- $D(f) = E$ le domaine de définition
- $f(D) \in F$ l'ensemble image/d'arrivée

5.1.1 Propriétés de base

1. f est (**strictement**) croissante sur $D(f)$ si $\forall x_1, x_2 \in D(f), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \parallel f(x_1) < f(x_2)$. On note $f(x) \uparrow$ " $f(x)$ croissante".
2. Même logique mais opposée pour (**strictement**) décroissante, notée $f(x) \downarrow$ " $f(x)$ décroissante".
3. Si f est (**strictement**) croissante/décroissante sur $D(f)$, alors elle est (**strictement**) monotone sur $D(f)$.
4. f est **paire** si $D(f)$ est symétrique: $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$ et $f(-x) = f(x) \forall x \in D(f)$.
5. f est **impaire** si $D(f)$ est symétrique: $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$ et $f(-x) = -f(x) \forall x \in D(f)$.
6. $f : E \rightarrow F$ est **périodique** si $\exists P \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall x \in E \Rightarrow x \pm P \in E$ et $f(x \pm P) = f(x) \forall x \in E$.
7. $f : E \rightarrow F$ est **majorée (minorée)** sur $A \in E$ si l'ensemble $f(A) \in \mathbb{R}$ est **majoré (minoré)**.
Si $f(x)$ est majorée et minorée sur A , alors elle est dit bornée sur ce même ensemble.
8. (a) borne supérieure $\sup_{x \in A} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{f(x), x \in A\}$

- (b) borne inférieure $\inf_{x \in A} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{f(x), x \in A\}$
9. Maximum et minimum local d'une fonction:
 $f : E \rightarrow F, x_0 \in E$. Alors f admet un max/min local au point x_0 si
 $\exists \delta > 0 : \forall x \in D(f)$ et tels que $|x - x_0| \leq \delta$.
 On a $f(x) \leq f(x_0)$ (max loc), $f(x) \geq f(x_0)$ (min loc).
10. Maximum et minimum global d'une fonction:
 Même logique, sauf que cela s'applique $\forall x \in E$. **Remarque:** Une fonction bornée (majorée **et** minorée sur E) n'atteint pas forcément son min ou max sur cet intervalle.
11. $f : E \rightarrow F$ est **surjective** si $\forall y \in F$, exists au moins un $x \in E : f(x) = y$
12. $f : E \rightarrow F$ est **injective** si $\forall y \in F$, exists au plus un $x \in E : f(x) = y$
13. Remarque:
 - Si $f : E \rightarrow F$ n'est pas injective \Rightarrow il faut réduire E
 - Si $f : E \rightarrow F$ n'est pas surjective \Rightarrow il faut réduire F
14. Si $f : E \rightarrow F$ est injective **et** surjective, alors elle est **bijective**.
15. Si $f : E \rightarrow F$ est bijective, on peut définir la fonction réciproque par la formule:
 $y = f(x), x \in E \iff x = f^{-1}(y), y \in F$
16. Composition des fonctions: soit $f : E \rightarrow F$ et $g : G \rightarrow H$, $E, F, G, H \in \mathbb{R}$
 Supposons $f(E) \subseteq G \Rightarrow$ On définit la fonction composée:
 $g \circ f(x) = g(f(x)) : E \rightarrow H$
 Supposons $g(G) \subseteq E \Rightarrow$ On définit la fonction composée:
 $f \circ g(x) = f(g(x)) : G \rightarrow F$

Cours 13 - 29 octobre 2025: I'm reaching my limit

5.2 Limite d'une fonction

Définition 5.2.1 Une fonction $f : E \rightarrow F$ est définie **au voisinage** de $x_0 \in \mathbb{R}$ si $\exists \delta > 0 : \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta\} \subseteq E$
Remarque: f n'est pas forcément définie en x_0 même.

Définition 5.2.2 Une fonction $f : E \rightarrow F$ définie au voisinage de x_0 **admet pour limite** $l \in \mathbb{R}$ lorsque $x \rightarrow x_0$ si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| \leq \delta$ on a $|f(x) - l| \leq \epsilon$

5.2.1 Caractérisation de la limite d'une fonction à partir des suites

Soit $f : E \rightarrow F$ tel que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \forall$ suite $(a_n) \in \{x \in E, x \neq x_0\} : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$

Corollaire 5.2.2.1 Soit $f : E \rightarrow F$ définie au voisinage de x_0 .

Supposons que $\forall (a_n) \in E \setminus \{x_0\} : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$, la suite $(f(a_n))$ converge. Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe.

Proposition 5.2.1 Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$, alors $l_1 = l_2$.

5.2.2 Critère de Cauchy pour les fonctions

$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in \{x \in E : 0 < |x - x_0| \leq \delta\}$ on a $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \epsilon$

5.2.3 Opérations algébriques sur les limites

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$, alors:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha l_1 + \beta l_2$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{l_1}{l_2}$, si $l_2 \neq 0$

5.2.4 Théorème des 2 gendarmes pour les fonctions

Soient $f, g, h : E \rightarrow F$ telles que:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$
2. $\exists \alpha > 0 : \forall x \in \{x \in E : 0 < |x - x_0| \leq \alpha\}$, on a $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$
3. Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$

Cours 14 - 3 novembre 2025: Infinite number of mathematicians walk into a bar

5.2.5 Théorème: Limite de la composée de deux fonctions

Théorème 5.2.1 Soit $f : E \rightarrow F$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$; $g : G \rightarrow H$, $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l$.

Supposons que $f(E) \subset G$ et $\exists \alpha > 0 : 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \in G$. Alors: $\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = l$.

5.3 Limites lorsque x tend vers $\pm\infty$

Définition 5.3.1 $f : E \rightarrow F$ est définie au voisinage de $\pm\infty$, si $\exists \alpha \in \mathbb{R} :]\alpha, +\infty[\subset E$ (resp $]-\infty, \alpha[\subset E$)

Définition 5.3.2 Une fonction $f : E \rightarrow F$ définie au voisinage de $\pm\infty$ admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque $x \rightarrow \pm\infty$ si $\forall \epsilon > 0 \exists \alpha > 0 :$

$\forall x \in E : x \geq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$

resp. $\forall x \in E : x \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$

Notation: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$

5.4 Limites infinies

Définition 5.4.1 $f : E \rightarrow F$ définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ tend vers $\pm\infty$ lorsque $x \rightarrow x_0$ si $\forall A > 0$, $\exists \delta > 0$: $0 < |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq A$ ($f(x) \leq -A$)
Notation: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

5.4.1 Formes indéterminées

- $\infty - \infty$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\frac{0}{0}$
- $0 \cdot \infty$
- 0^0
- 1^∞
- ∞^0

Cours 15 - 5 novembre 2025: NàJ

5.4.2 Propriétés des limites infinies

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ($-\infty$) et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ ($-\infty$) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$ ($-\infty$)
2. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ et si $g(x)$ est bornée autour de x_0 . Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \pm\infty$
3. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ et si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \neq 0$. Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$ ($-\infty$) si $l > 0$ ($l < 0$) respectivement.
4. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$
5. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ et $f(x) \neq 0$ au voisinage de x_0 , alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ($-\infty$) si $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) au voisinage de x_0 respectivement.
6. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ($-\infty$) et qu'au voisinage de x_0 on a $g(x) \geq f(x)$ ($g(x) \leq f(x)$) alors, $\forall x$ au voisinage de $x_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ ($-\infty$)
7. Les propriétés (1) à (6) sont également valables pour $x \rightarrow \pm\infty$

5.5 Limites à droite et à gauche

Définition 5.5.1 $f : E \rightarrow F$ est définie à droite (gauche) de x_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que: $]x_0, x_0 + \alpha[\subset E$ ($]x_0 - \alpha, x_0[\subset E$)

On dénote la limite:

- à droite: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$

- à gauche: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$

Remarques:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$
- On peut aussi définir les limites $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$.¹

5.6 Fonction exponentielle et logarithmique

5.6.1 Propriétés et définitions de l'exponentielle

$$e^x \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{Définition de l'exponentielle})$$

Par convention on admet: $0^0 = 1$ et $0! = 1$

Proposition 5.6.1 1. $e^{x+y} = e^x \cdot e^y, \forall x, y \in \mathbb{R}$

2. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \forall x \in \mathbb{R}$

3. $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Propriétés de $f(x) = e^x$

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^y} = 0$

3. $e^x \uparrow$ est strictement croissante $\forall x \in \mathbb{R}$

4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{t(x)} - 1}{t(x)}$ si $\lim_{x \rightarrow a} t(x) = 0$ et $t(x) \neq 0$ au voisinage de $x = a$

5.6.2 Propriétés et définitions du logarithme

Définition 5.6.1 Comme $e^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est bijective, on peut définir la fonction réciproque, $\ln(x) : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$.

Propriétés

1. $e^{\ln(x)} = x, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

2. $\ln(e^x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$

3. $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y), \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$

4. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

5. $\ln(x^r) = r \cdot \ln(x), \forall r \in \mathbb{R}$

6. $\ln(1) = 0, \ln(e) = 1, e^0 = 1, e' = e$

¹Par exemple $f(x) = \frac{1}{x}$ dont les limites en 0^+ et 0^- sont respectivement à $+\infty$ et $-\infty$

5.7 Fonctions continues

Définition 5.7.1 Une fonction $f : E \rightarrow F$ est continue en un point $x_0 \in E$ si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, soit:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ existe
2. $f(x_0)$ existe
3. Les deux valeurs sont égales.

5.7.1 Quelques fonctions continues remarquables

1. $f(x) = x^p, p \in \mathbb{N}$ est continue sur \mathbb{R} : $\lim_{x \rightarrow a} x^p = a^p, \forall a \in \mathbb{R}$
2. Tout polynôme est continu sur \mathbb{R}
3. Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine
4. $f(x) = \sqrt[p]{x}$ est continue sur son domaine $\forall p \in \mathbb{N}$ ($\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[p]{x} = \sqrt[p]{a}, a > 0$)
5. $f(x) = \sin(x)$ et $f(x) = \cos(x)$ sont continues sur \mathbb{R} . $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et $f(x) = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ sont continues sur leurs domaines de définition

5.7.2 Limites remarquables

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{t(x)} - 1}{t(x)} = 1$ si $\lim_{x \rightarrow a} t(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(1+t(x))}{t(x)} = 1$ si $\lim_{x \rightarrow a} t(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} (1+t(x))^{\frac{1}{t(x)}} = e$ si $\lim_{x \rightarrow a} t(x) = 0$

Cours 16 - 10 novembre 2025: C'est un peu beaucoup trop calme

Cours 17 - 12 novembre 2025: •

5.7.3 Opérations sur les fonctions continues

Si les fonctions f et g sont continues en $x = x_0$, alors:

1. $\alpha f + \beta g$ est continue en $x = x_0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
2. $f \cdot g$ est continue en $x = x_0$
3. $\frac{f}{g}$ est continue en $x = x_0$ si $g(x_0) \neq 0$
4. Si $f : E \rightarrow F$ et $g : G \rightarrow H$, $f(E) \subset G$, et f est continue en $x_0 \in E$, g est continue en $f(x_0) \in G$. Alors $(g \circ f)$ est continue en x_0

5.7.4 Prolongement par continuité d'une fonction en un point

Définition 5.7.2 Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction telle que $c \notin E$ (f n'est pas définie en $x = c$) et $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \in \mathbb{R}$ existe. Alors la fonction $\hat{f} : E \cup \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\hat{f}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} f(x), & x \in E \\ \lim_{x \rightarrow c} f(x), & x = c \end{cases}$$

est appelée **le prolongement par continuité** de f au point $x = c$. Un tel prolongement est unique et la fonction \hat{f} est continue en $x = c$

5.8 Fonctions continues sur un intervalle

Définition 5.8.1 Une fonction $f : I \rightarrow F$, où I est un intervalle ouvert non-vide, est continue si f est continue en tout point $x \in I$.

$f : [a, b] \rightarrow F$ est continue sur $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$ et continue à gauche en $x = b$ et à droite $x = a$.

Théorème 5.8.1 Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow F$ une **fonction continue sur l'intervalle fermé et borné $[a, b]$** . Alors f atteint son infimum et son supremum sur $[a, b]$ ($\Leftrightarrow \exists \max_{[a, b]} f(x)$ et $\exists \min_{[a, b]} f(x)$)

5.8.1 Théorème de la valeur intermédiaire

Soit $a < b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f atteint son sup, son inf et **toute valeur comprise entre les deux**.

$$f([a, b]) = \left[\min_{[a, b]} f(x), \max_{[a, b]} f(x) \right]$$

Corollaire 5.8.1.1 Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) \cdot f(b) < 0$ (donc $f(a)$ et $f(b)$ de signes différents).

Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$: $f(c) = 0$

Corollaire 5.8.1.2 Soit I un intervalle ouvert; $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone. Alors $f(I)$ est un intervalle ouvert.

Corollaire 5.8.1.3 Toute fonction injective et continue sur un intervalle est strictement monotone.

Corollaire 5.8.1.4 Toute fonction bijective continue sur un intervalle admet une fonction réciproque qui est continue et strictement monotone.

Chapter 6

Calcul différentiel

Cours 18 - 17 novembre 2025: Virtuel et différeeeent

6.1 Fonctions dérivables

Définition 6.1.1 Une fonction $f : E \rightarrow F$ est dite **dérivable** en $x_0 \in E$ s'il existe la limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{déf}}{=} f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

Cette limite est appelée **la dérivée de f en x_0** , notée $f'(x_0)$.

Définition 6.1.2 Toute fonction dérivable en $x = x_0$ admet un présentation sous la forme suivante:

$$f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0) + r(x)$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$.

Dans ce cas on dit que f est **différentiable** en x_0 .

Note: f différentiable en $x = x_0 \Leftrightarrow f$ est dérivable en $x = x_0$ et $f'(x_0) = a \in \mathbb{R}$

6.2 Fonction dérivée

Définition 6.2.1 Si $f : E \rightarrow F$ est dérivable sur un ensemble $D(f') \subset E$, alors on définit la fonction dérivée: $f' : D(f') \rightarrow \mathbb{R}$.

Dérivées à connaître:

$f(x)$	$f'(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
x^n	$nx^{n-1} (n \in \mathbb{N})$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$ ou $1 + \tan^2(x)$
e^x	$e^x, \forall x \in \mathbb{R}$

6.2.1 Interprétation géométrique

La dérivée de f au point $x = x_0$ est la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x_0, f(x_0))$. L'équation de la tangente s'écrit:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

6.2.2 Propriétés et autres trucs de la fonction dérivée

Proposition 6.2.1 *Une fonction dérivable en $x = x_0$ est continue en $x = x_0$. Note: la réciproque est fausse.*

Définition 6.2.2 *La dérivée à droite et à gauche s'écrivent respectivement:*

$$f'_d(x_0) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'_g(x_0) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\exists f'(x_0) \Leftrightarrow \exists f'_d(x_0), f'_g(x_0) \text{ et } f'_g(x) = f'_d(x_0)$$

Opération algébriques sur les dérivées

Soit $f, g : E \rightarrow F$ deux fonctions dérivables en $x = x_0$, alors

1. $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
2. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$

Dérivée de la fonction composée de deux fonctions dérivables

Proposition 6.2.2 *$f : E \rightarrow F$ dérivable en $x = x_0 \in E$, $g : G \rightarrow H$ dérivable en $f(x_0), f(E) \subset G$. Alors*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Cours 19 - 19 novembre 2025: Rolle-en-garos

6.3 Dérivée de la fonction réciproque

Proposition 6.3.1 *Soit $f : I \rightarrow F$ une fonction bijective continue sur I et dérivable en $x_0 \in I$, telle que $f'(x_0) \neq 0$. Alors la fonction réciproque $f^{-1} : F \rightarrow I$ est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et:*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \text{ où } y_0 = f(x_0); x_0 = f^{-1}(y_0)$$

Corollaire 6.3.0.1 *Si $f : I \rightarrow F$ et $f^{-1} : F \rightarrow I$ sont deux fonctions réciproques continues sur leurs domaines et dérivables à l'intérieur alors $\forall x \in F : f'(f^{-1}(x)) \neq 0$:*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

6.4 Dérivée logarithmique

$$(f_1(x)^{f_2(x)})' = (f_1(x)^{f_2(x)}) \cdot (f_2(x) \cdot \ln(f_1(x)))'$$

6.5 Fonctions hyperboliques

Définition 6.5.1 Expressions des fonctions trigonométriques hyperboliques

- $\sinh(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, impaire $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\cosh(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, paire $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- $(\sinh(x))' = \cosh(x)$ et $(\cosh(x))' = \sinh(x)$
- $\tanh(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\coth(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
- On peut définir les fonctions réciproques $\operatorname{arcsinh}(x)$, $\operatorname{arccosh}(x)$, $\operatorname{arctanh}(x)$, ainsi que leurs dérivées grâce à la définition de la dérivée de réciproque et à l'identité $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

6.6 Dérivées d'ordre n

Définition 6.6.1 La dérivée seconde d'une fonction s'écrit $f''(x) \stackrel{\text{déf}}{=} (f'(x))'$. On peut de manière plus générale définir:

$$f^{(n)}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} (f^{(n-1)}(x))' \quad (\text{Dérivée d'ordre } n)$$

Définition 6.6.2 $f : E \rightarrow F$ est n fois dérivable si elle admet une dérivée d'ordre n .

Définition 6.6.3 $f : E \rightarrow F$ est de classe $C^n(E)$ si elle admet une dérivée d'ordre n qui est continue sur E .¹

6.7 Propriétés des fonctions dérivables

Proposition 6.7.1 Si $f : E \rightarrow F$ dérivable en $x_0 \in E$, telle que f admet un extremum local en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$

Remarque: La réciproque est fausse.

Définition 6.7.1 Si $f : E \rightarrow F$ est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$, on dit que x_0 est un point stationnaire de f .

Les points d'extrema d'une fonction continuent $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont parmi les suivants:

¹On dit aussi "n fois continûment dérivable"

1. les points stationnaires: $f'(x_0) = 0$
2. les points où $f'(x)$ n'existe pas dans $]a, b[$
3. les points limites $x = a, x = b$

6.8 Théorème de Rolle

Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow F$, telle que:

1. $f : [a, b] \rightarrow F$ est continue
2. f est dérivable sur $]a, b[$
3. $f(a) = f(b)$

Alors, il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Cours 20 - 24 novembre 2025: Tout ce TAF va m'envoyer à l'Hospital

6.9 Théorème des accroissement finis (TAF)

Définition 6.9.1 Soit $a < b$; $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que:

1. f est continue sur $[a, b]$
2. f est dérivable sur $]a, b[$

\Rightarrow Il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

On remarque que si $f(a) = f(b)$ on retrouve le Théorème de Rolle

Corollaire 6.9.1.1 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et $f'(x) = 0, \forall x \in]a, b[$. Alors f est constante sur $[a, b]$

Corollaire 6.9.1.2 Si $f(x)$ et $g(x)$ sont continues dérivables sur $]a, b[$ et telles que $f'(x) = g'(x), \forall x \in]a, b[\Rightarrow f(x) = g(x) + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Corollaire 6.9.1.3 • $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), $\forall x \in]a, b[\Leftrightarrow f$ est croissante (décroissante) sur $]a, b[$

- $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), $\forall x \in]a, b[\Leftrightarrow f$ est **strictement** croissante (décroissante) sur $]a, b[$

Remarque: Si $f(x)$ est strictement croissante cela n'implique **pas** $f'(x) > 0$

6.10 Règle de Bernouilli-l'Hospital

Théorème 6.10.1 Soient $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $]a, b[$. Si

1. $g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$ sur $]a, b[$
 2. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) \in \{-\infty, 0, +\infty\}$
 3. $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
- $$\implies \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \mu$$

Note personnelle:

Il est parfaitement possible d'appliquer le théorème de Bernouilli-l'Hospital plusieurs fois à la suite tant que les conditions 1 et 2 sont respectées. Par exemple:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \frac{1 - \cos(x)}{x^2} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \frac{\sin(x)}{2x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f''(x) &= \frac{\cos(x)}{2} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Cours 21 - 26 novembre 2025: J'aime pas trop comment ça se développe...

6.11 Développements limités

6.11.1 Formule de Taylor

Théorème 6.11.1 Soit $f : I \rightarrow F$ une fonction $(n+1)$ fois dérivable sur I avec $a \in I$.

Alors $\forall x \in I$ il existe u entre x et a tel que:

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{P_n(f) \text{ Polynôme de Taylor}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}}_{R_n(f) \text{ le reste}}$$

Remarque: La formule de Taylor s'appelle formule de MacLaurin si $a = 0$.

Définition 6.11.1 Développement limité

$f : E \rightarrow F$ une fonction définie au voisinage de $x = a$. S'il existe des nombres a_0, a_1, \dots, a_n tels que $\forall x \in E, x \neq a$, on a

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

où $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$, on dit que f admet un développement limité d'ordre n autour de $x = a$.

Proposition 6.11.1 Si $f : E \rightarrow F$ admet un développement limité d'ordre n autour de $x = a$, alors celui-ci est unique.

Corollaire 6.11.1.1 Soit $a \in I$; $f : I \rightarrow F$ une fonction $(n+1)$ fois continûment dérivable sur I . Alors la formule de Taylor nous fournit le DL² d'ordre n de la fonction f autour de $x = a$ Remarques:

1. En fait, il suffit d'avoir f n fois dérivable sur I pour avoir $f(x) = P_n(x)$ de Taylor $+ (x-a)^n \varepsilon(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$.
2. $f : E \rightarrow F$ peut avoir un DL sans que la formule de Taylor lui soit applicable.

6.11.2 Étude de fonctions

Rappel: Si $f : I \rightarrow F$ est dérivable sur I , et f admet un extremum local en $x = c$, alors $f'(c) = 0$.³

Proposition 6.11.2 (Condition suffisante pour qu'une fonction ait un extremum local)

Soit $f : I \rightarrow F$ une fonction n fois continûment dérivable sur I , où $n \in \mathbb{N}^*$ est pair et telle que $f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$, mais $f^{(n)}(c) \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Alors si } f^{(n)} > 0 \Rightarrow f \text{ admet un min local en } x = c \\ \text{si } f^{(n)} < 0 \Rightarrow f \text{ admet un max local en } x = c \end{aligned}$$

Définition 6.11.2 Si $f : E \rightarrow F$ une fonction dérivable en $a \in E$.

Soit $l(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ la tangente à la courbe $y = f(x)$ en $(a, f(a))$.

Considérons $\psi(x) \stackrel{\text{déf}}{=} f(x) - l(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$.

Si $\psi(x)$ change de signe en $x = a$, alors $(a, f(a))$ est un **point d'inflexion** de f .

Proposition 6.11.3 (Condition suffisante pour qu'une courbe ait un point d'inflexion)

Soit $f : I \rightarrow F$ une fonction n fois continûment dérivable sur I , où $n \in \mathbb{N}$ est impair, $n > 1$, et on a:

$$f''(a) = f'''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0; f^{(n)}(a) \neq 0$$

Alors le point $(a, f(a))$ est un point d'inflexion de f .

Définition 6.11.3 Concave et convexe

- $f : I \rightarrow F$ est **convexe** sur I si pour tout couple $a < b \in I$, le graphique de $f(x)$ se trouve **en dessous** de la droite passant par $(a, f(a))$ et par $(b, f(b))$.
- $f : I \rightarrow F$ est **concave** sur I si pour tout couple $a < b \in I$, le graphique de $f(x)$ se trouve **au dessus** de la droite passant par $(a, f(a))$ et par $(b, f(b))$.

Proposition 6.11.4 Soit $f : I \rightarrow F$ deux fois dérivable sur I .

Alors f est convexe sur $I \Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ sur $I \Leftrightarrow f'(x)$ est croissante sur I

f est concave sur $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ sur $I \Leftrightarrow f'(x)$ est décroissante sur I

²Développement Limité

³Voir 6.7.1

Cours 22 - 1er décembre 2025: The most wonderful time of the year!

6.11.3 Opérations algébriques sur les développements limités

Proposition 6.11.5 Soient $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions admettant le DL autour de $x = a$

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_n(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon_1(x) = P_f^n(x) + (x - a)^n \varepsilon_1(x) \quad | \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) = 0$$

$$g(x) = b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2 + \dots + b_n(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon_2(x) = P_g^n(x) + (x - a)^n \varepsilon_2(x) \quad | \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_2(x) = 0$$

Alors

1. $\alpha f(x) + \beta g(x)$ admet un DL d'ordre n autour de $x = a$
 $P_{\alpha f + \beta g}^n(x) = \alpha P_f^n(x) + \beta P_g^n(x)$
2. $f(x) \cdot g(x)$ admet un DL d'ordre n autour de $x = a$
 $P_{f \cdot g}^n(x) = P_f^n(x) \cdot P_g^n(x)$ où l'on ne retient que les termes d'ordre $\leq n$
3. Si $b_0 \neq 0$, $g(x) \neq 0$ sur E , $\frac{f(x)}{g(x)}$ admet un développement limité d'ordre n autour de $x = a$
 $P_{\frac{f}{g}}^n(x) = \frac{P_f^n(x)}{P_g^n(x)}$ où l'on ne retient que les termes d'ordre $\leq n$

Proposition 6.11.6 DL d'une fonction composée

Soit $f(x) = a_1(x - a) + \dots + a_n(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon_1(x)$ DL autour de $x = a$
 $g(y) = g(0) + b_1y + \dots + b_ny^n + y^n \varepsilon_2(y)$ DL autour de $y = 0$

Alors $g \circ f$ admet un DL d'ordre n autour de $x = a$,

$$P_{g \circ f}^n = g(0) + b_1(P_f^n(x - a)) + b_2(P_f^n(x - a))^2 + \dots + b_n(P_f^n(x - a))^n$$

où l'on ne conserve que les termes d'ordre $\leq n$

Chapter 7

Séries entières

7.1 Rayon de convergence

Définition 7.1.1 *L'expression*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$$

est dite **une série entière**, $a_k, x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Le domaine de convergence $D \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \text{ converge}\}$, la fonction $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$, $x \in D$ est défini par la série entière.

Théorème 7.1.1 (*Rayon de convergence*)

Soit la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$, alors il existe $r : 0 \leq r \leq +\infty$ tel que

1. la série converge absolument $\forall x : |x - x_0| < r$
2. la série diverge $\forall x : |x - x_0| > r$

Remarque:

1. D est un intervalle qui contient x_0 et centré en x_0 .
2. La convergence de la série entière en $x = x_0 \pm r$ doit être étudié séparément.

Proposition 7.1.1 Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ une série entière de rayon de convergence r . Supposons que $a_k \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}$

1. Si $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = l$ avec $0 \leq l \leq \pm\infty \Rightarrow r = \frac{1}{l}$. Donc on a: $r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$
2. Si $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = l$ avec $0 \leq l \leq +\infty \Rightarrow r = \frac{1}{l}$