Analyse I - Résumé

Mahel Coquaz

Semestre d'automne 2025

Contents

Cours

Introduction

Ce qui suit se veut être un résumé ultra condensé du cours d'Analyse I pour IN (MATH-101e) donné au semestre d'automne 2025 à l'EPFL. Le contenu de ce cours ne m'appartient pas et est quasiment intégralement extrait du cours des Professeurs Anna Lachowska qui l'a enseigné. J'ai cependant pris la liberté de sauter/raccourcir certains passages et d'ajouter des notes lorsqu'il me semblait pertinent de le faire.

Ce résumé/polycopié n'est pas exempt d'erreurs, si vous en trouvez une, vous pouvez me contacter sur mon adresse EPFL `mahel.coquaz@epfl.ch` ou via le repo GitHub `https://github.com/hotwraith/LectureNotes`.

Le repository GitHub est aussi où se trouvent les dernières versions des fichiers PDFs et TEXpour ce cours (et éventuellement d'autres).

Organisation par cours

Chapter 1

Prérequis

Cours 1 - 8 septembre 2025: "C'est trivial ça"

1.1 Identités algébriques

- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$
- $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 - y^3$
- $(x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3 + y^3$

1.2 Exponentielles & Logarithmes

1.2.1 Exponentielles

Avec $a, b \in \mathbb{R}$

- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(ab)^x = a^x b^x$
- $a^0 = 1$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
- $a^1 = a$

1.2.2 Logarithmes

Avec $\ln = \log$ le logarithme naturel

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^c) = c \cdot \ln(x)$
- $\ln(1) = 0$
- $\log_a(a) = 1$

1.3 Trigonométrie

Avec $\sin(x), \cos(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ & $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
- $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$
- $\cos(0) = \cos(x - x) = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

1.4 Fonctions élémentaires

1.4.1 Types de fonctions

1. Polynomiales
   - Linéaire: $f(x) = ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$
   - Quadratiques: $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$
2. Fonctions rationnelles: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes, et $Q(x) \neq 0$
3. Fonctions algébriques: Toute fonction qui est une solution d'une équation polynomiale, ex: $f(x) = \sqrt{x}$
4. Fonctions transcendantes: fonctions non algébriques
   (a) Exponentielles et logarithmiques: $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln(x)$
   (b) Fonctions trigos et réciproques: $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$

1.4.2 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition 1.4.1 $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \text{ est bien définie } \}$ = *le* ***domaine de définition*** *de* f
$f(D) = \{y \in R : \exists x \in D(f) : f(x) = y\}$ = ***l'ensemble image*** *de* f

Définition 1.4.2 ***Surjectivité***
$f : E \to F$ *est* ***surjective*** *si* $\forall y \in F, \exists$ ***au*** ***<u>moins</u>*** ***un*** $x \in E : f(x) = y$

Définition 1.4.3 ***Injectivité***
$f : E \to F$ *est* ***injective*** *si* $\forall y \in F, \exists$ ***au*** ***<u>plus</u>*** ***un*** $x \in E : f(x) = y$
Autrement dit: Soit $x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$

Définition 1.4.4 ***Bijectivité*** *Si* $f : E \to F$ *est injective* ***ET*** *surjective, alors elle est* ***bijective***

1.4.3 Fonctions réciproques

Définition 1.4.5 *N'existent que si* $f : E \to F$ *est* ***bijective*** *et est définie par* $f^{-1} : F \to E$ *donc* $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

1.4.4 Fonctions composées

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ avec $f(D_f) \subset D_g$ on peut alors définir la fonction composée $g \circ f : D_f \to$ par $g \circ f(x) = g(f(x))$ [1]

[1] Il est bon de noter que de manière générale: $g \circ f \neq f \circ g$

Chapter 2

Nombre réels

Cours 2 - 10 septembre 2025: For $\mathbb{R}$?

2.1 Ensembles

Un ensemble est une "Collection des objets définis et distincts" (G. Cantor)

Définition 2.1.1 $\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}$ *Soit* $\forall b \in X \Rightarrow b \in Y$
Sa négation: $\mathbf{X} \not\subset \mathbf{Y}$
$\exists a \in X : a \notin Y$

Définition 2.1.2 $X = Y \Leftrightarrow Y \subset X$ *et* $X \subset Y$

Définition 2.1.3 $\emptyset$ *l'ensemble vide:* $\emptyset = \{\}$
$\forall X : \emptyset \subset X$
$\forall X : X \subset X$

2.1.1 Opération ensemblistes

- Réunion: $X \cup Y = \{a \in \cup : a \in X \text{ ou } a \in Y\}$
- Intersection: $X \cap Y = \{a \in \cap : a \in X \text{ et } a \in Y\}$
- Différence: $X \backslash Y = \{a \in \backslash : a \in X \text{ et } a \notin Y\}$

Propriété $\mathbf{A} \backslash (\mathbf{B} \backslash \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \backslash \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{C})$

2.2 Nombres naturels, rationnels, réels

2.2.1 Borne inférieure et supérieure

Définition 2.2.1 *Soit* $S \subset \mathbb{R}, S \neq \emptyset$. *Alors* $a \in \mathbb{R}(b \in \mathbb{R})$ *est un minorant/majorant de* S *si* $\forall x \in S$ *on a:* $a \leq x$ *ou* $x \leq b$
Si S *possède un minorant/majorant on dit que* S *est* ***minoré/majoré***.
Si S *est majoré* ***et*** *minoré, alors* S *est dit* ***borné***.

Cours 3 - 15 septembre 2025: Élisabeth Born(é)e

2.2.2 Supremum et infimum

Théorème 2.2.1 *Tout sous-ensemble non-vide majoré/minoré $S \subset \mathbb{R}$ admet un supremum/infimum qui est unique.*

Unicité *Si inf/supS existe alors il est le plus grand minorant/majorant de S*

2.2.3 Notations d'intervalles

Soit $a < b,\ a, b \in \mathbb{R}$.
Intervalles bornés

- $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} = [a, b]$ intervalle fermé borné
- $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} =]a, b[$ intervalle ouvert borné
- $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} = [a, b[$ intervalle borné ni ouvert ni fermé
- $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} =]a, b]$ intervalle borné ni ouvert ni fermé

Intervalles non-bornés:

- $\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} = [a, +\infty[$ fermé
- $\{x \in \mathbb{R} : x > a\} =]a, +\infty[$ ouvert
- $\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} =]-\infty, b]$ fermé
- $\{x \in \mathbb{R} : x < b\} =]-\infty, b[$ ouvert

2.3 Nombres complexes

Cours 4 - 17 septembre 2025: ça se complique...

On sait que $x^2 = -1$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$, alors on introduit i tel que $i^2 = -1$ [1]

2.3.1 Propriétés des nombres complexes

Prenons les $\mathbb{C}$[2] de la forme $\{z = a + ib\}$, où $a, b \in \mathbb{R}$

- $(+)$ $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$
  - $\exists =\in C : 0 + 0i = 0$ tel que $(a + ib) + 0 + 0i = a + ib\ \forall a, b \in \mathbb{R}$
  - $\exists$ l'opposé pour $(a + ib)$: $(-a + i(-b)) + (a + ib) = 0 + 0i = 0$
- $(\cdot)(a + ib) \cdot (c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$

[1]Oui, en maths quand un truc marche pas on invente un truc pour que ça marche, si seulement on pouvait faire ça en exam...
[2]$\mathbb{C}$ dénote l'ensemble des complexes

- $\exists 1 \in \mathbb{C}: \ 1+0i = 1: \ (a+ib)\cdot(1+0i) = a+ib$
- $z \in \mathbb{C}, \ z \neq 0 \Rightarrow \exists z^{-1} \in \mathbb{C} : z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$
- Pour $z = a+ib \in \mathbb{C}^* \Rightarrow z^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$
- $z_1(z_2+z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$
- $\mathbb{C}$ n'est pas ordonné: $i > 0 \Rightarrow i^2 = -1 > 0$ et $i < 0 \Rightarrow (-i)^2 = -1 > 0$, on voit qu'on a $-1 > 0$ ce qui est absurde.

2.3.2 Les 3 formes de nombres $\mathbb{C}$

Forme cartésienne

$\mathbf{z} = \mathbf{a} + \mathbf{ib}$, $a, b \in \mathbb{R}$
$z = Re(z) + Im(z)i$ (Re et Im respectivement les parties réelles et imaginaires de z)
$|z| = \sqrt{(Re(z)^2 + (Im(z))^2} = \sqrt{a^2+b^2} \geq 0$[3]
Trouver φ *et* $arg(z)$:

- $a > 0 : arg(z) = \arctan(\frac{b}{a}) \ \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$
- $a < 0 : arg(z) = \arctan(\frac{b}{a}) + \pi \ \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$
- Si $a = 0$:
  - $arg(z) = \frac{\pi}{2}$ si $Im(z) = b > 0$
  - $arg(z) = \frac{3\pi}{2}$ si $Im(z) = b < 0$

Forme polaire trigonométrique

$\mathbf{z} = \rho(\cos(\varphi) + \mathbf{i}\sin(\varphi) \ \rho \leq 0, \ \varphi \in \mathbb{R}$
$|z| = \rho \leq 0 \ \rho \neq 0 \Rightarrow \sin(\varphi) = \frac{Im(z)}{\rho}, \ \cos(\varphi) = \frac{Re(z)}{\rho}, \ \tan(\varphi) = \frac{Im(z)}{Re(z)} = \frac{a}{b}$ si $a = Re(z) \neq 0$

[3] $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$