

# Analyse B - Résumé

Mahel Coquaz

Semestre de printemps 2025



# Contents

<b>1</b>	<b>Suites réelles</b>	<b>5</b>
1.1	Suites convergentes . . . . .	5
1.1.1	Preuve . . . . .	5
1.1.2	Exemple . . . . .	5
1.2	Propriétés des limites . . . . .	6
1.2.1	Propriétés simples . . . . .	6
1.2.2	Théorème des gendarmes . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Fonctions réelles</b>	<b>7</b>
2.1	Parité . . . . .	7
2.2	Compositions de fonctions . . . . .	7
2.3	Surjectivité, injectivité, bijectivité . . . . .	7
2.3.1	Fonction réciproque . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Limites de fonctions</b>	<b>9</b>
3.1	Limites en $x \rightarrow \pm\infty$ . . . . .	9
3.2	Limites en $x \rightarrow x_0$ . . . . .	9
3.2.1	Remarques . . . . .	9
3.3	Limites latérales . . . . .	9
3.4	Infiniment petits équivalents (IPE) . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Fonction continues</b>	<b>11</b>
4.1	Introduction . . . . .	11
4.2	Théorème de la valeur intermédiaire . . . . .	12

## Introduction

Ce qui suit se veut être un résumé ultra condensé du cours d'Analyse B pour MÀN (PREPA-031b) donné au semestre de printemps 2025 à l'EPFL. Le contenu de ce cours ne m'appartient pas et est quasiment intégralement extrait du cours des Professeurs Sébastien Basterrechea, Anastasia Khukhro et Ghid Maatouk qui l'ont enseigné. J'ai cependant pris la liberté de sauter/raccourcir certains passages et d'ajouter des notes lorsqu'il me semblait pertinent de le faire.

Ce résumé/polycopié n'est pas exempt d'erreurs, si vous en trouvez une, vous pouvez me contacter sur mon adresse EPFL [mahel.coquaz@epfl.ch](mailto:mahel.coquaz@epfl.ch) ou via le repo GitHub <https://github.com/hotwraith/LectureNotes>.

Le repository GitHub est aussi où se trouvent les dernières versions des fichiers PDFs et  $\text{\TeX}$  pour ce cours (et éventuellement d'autres).

# Chapter 1

## Suites réelles

### 1.1 Suites convergentes

#### 1.1.1 Preuve

On veut montrer que  $a_n$  une suite quelconque tend vers une limite  $l$ .

**Théorème 1.1.1** Avec  $\epsilon > 0$  et  $n, N \in \mathbb{N}$ , on cherche  $N : \forall n \geq N : |a_n - l| \leq \epsilon$ .

La limite s'écrit  $\lim_{\pm\infty} = l$

#### 1.1.2 Exemple

On veut montrer que la suite  $a_n = \frac{2n^2-1}{n^2+1}$  tend vers 2 à  $\pm\infty$

$$|a_n - 2| \leq \epsilon$$

Avec  $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} |a_n - 2| &= \left| \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1} - 2 \right| \\ &= \left| \frac{2n^2 - 1 - 2n^2 - 2}{n^2 + 1} \right| \\ &= \frac{3}{n^2 + 1} \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned} |a_n - 2| &\leq \epsilon \\ \frac{3}{n^2 + 1} &\leq \epsilon \\ \frac{3}{\epsilon} - 1 &\leq n^2 \\ n &\geq \sqrt{\frac{3}{\epsilon} - 1} \end{aligned}$$

## 1.2 Propriétés des limites

### 1.2.1 Propriétés simples

1.  $a_n \rightarrow L, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda a_n \rightarrow \lambda L$
2.  $a_n \rightarrow L_1, b_n \rightarrow L_2 \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow L_1 + L_2$
3.  $a_n \rightarrow L_1, b_n \rightarrow L_2 \Rightarrow a_n b_n \rightarrow L_1 L_2$
4.  $a_n \rightarrow L_1, b_n \rightarrow L_2 \neq 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{L_1}{L_2}$
5.  $a_n \rightarrow L_1, b_n \rightarrow L_2$  et  $a_n \leq b_n \forall n \Rightarrow L_1 \leq L_2$
6.  $a_n \rightarrow L \Rightarrow |a_n| \rightarrow |L|$
7.  $a_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |a_n| \rightarrow 0$
8. Une suite croissante et majorée converge.
9. Une suite décroissante et minorée converge.

### 1.2.2 Théorème des gendarmes

**Théorème 1.2.1** Soit  $x_n$  une suite, s'il existe deux suites  $a_n, b_n$  telles que:

- $a_n \leq x_n \leq b_n \forall n$  suffisamment grand.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$

alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$

## Chapter 2

# Fonctions réelles

### 2.1 Parité

- $f$  est **paire** si  $f(-x) = f(x) \forall x \in D_f$
- $f$  est **impaire** si  $f(-x) = -f(x) \forall x \in D_f$

### 2.2 Compositions de fonctions

**Théorème 2.2.1** <sup>1</sup> La composée de fonctions deux fonctions  $f$  et  $g$ , notée  $f \circ g$  est définie par:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

### 2.3 Surjectivité, injectivité, bijectivité

**Définition 2.3.1** Soit  $f : A \rightarrow B$  une fonction.

- $f$  est **surjective** si  $Im(f) = B$
- $f$  est **injective** si  $\forall y \in B$ , il y a **au plus un**  $x \in A$  tel que  $f(x) = y$ .
- $f$  est **bijective** si elle est **à la fois** injective et surjective.

#### 2.3.1 Fonction réciproque

Si on a une fonction bijective  $f : A \rightarrow B$ , on a alors  $\forall y \in B$  exactement une préimage. Ceci permet de définir la fonction:

$$f^{-1} : B \rightarrow A$$
$$y \mapsto \text{l'unique préimage de } y.$$

Cette fonction appelée **fonction réciproque** de  $f$ , on a:

- $f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in B$
- $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in A$

---

<sup>1</sup>Sorry not sorry on oubliera toute la partie sur les tracés de graphes.





## Chapter 3

# Limites de fonctions

### 3.1 Limites en $x \rightarrow \pm\infty$

Cette section et ses preuves sont plus ou moins équivalentes à celles utilisées pour les suites (voir 1.1.1 et 1.2.1), pour des exemples vous pouvez consulter le polycop d'Analyse B.

### 3.2 Limites en $x \rightarrow x_0$

Idem que pour la sous-section précédente.

#### 3.2.1 Remarques

- Pour montrer que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq L$ , il suffit de trouver une suite  $x_n \rightarrow x_0$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq L$ .
- Pour montrer que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  **n'existe pas** il suffit de trouver une suite  $x_n \rightarrow x_0$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  n'existe pas. On peut aussi trouver deux suites  $a_n$  et  $b_n$  telles que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0$ , mais que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$ .

### 3.3 Limites latérales

**Théorème 3.3.1**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$

### 3.4 Infiniment petits équivalents (IPE)

**Définition 3.4.1** Soient  $f$  et  $g$  définies sur un voisinage épointé de  $x_0 \in \mathbb{R}$ , telles que  $g(x) \neq 0$  sur un voisinage épointé de  $x_0$ . Les fonctions  $f$  et  $g$  sont des *infiniment petits équivalents (IPE)* au voisinage de  $x_0$  si:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  (*infiniments petits*).
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$  (*équivalents*).

On écrit  $f \sim g$  au voisinage de  $x_0$ .

**Proposition 3.4.1** *Au voisinage de  $x_0 = 0$ ,*

- $\sin(x) \sim x$
- $\tan(x) \sim x$
- $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$

## Chapter 4

# Fonction continues

### 4.1 Introduction

**Définition 4.1.1** Si  $f$  est définie en  $x_0 \in \mathbb{R}$  et dans son voisinage, et si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

on dit que  $f$  est **continue en  $x_0$** . Sinon,  $f$  est dite **discontinue en  $x_0$** .

La définition de continuité comporte implicitement trois exigences:

- $f(x_0)$  existe, c'est à dire que  $x_0 \in D_f$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$
- cette limite  $L = f(x_0)$

**Proposition 4.1.1** Soient  $f$  et  $g$  continues en  $x_0$ . Alors les fonctions suivantes sont aussi continues en  $x_0$ :

- $\lambda f$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}$
- $|f|$
- $f \pm g$
- $f \cdot g$
- $\frac{f}{g}$  (si  $g(x_0) \neq 0$ )

**Théorème 4.1.1** Soit  $f$  définie sur un voisinage épointé de  $x_0$  telle que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ , et soit  $g$  continue au point  $L$ . Alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)) = g(L)$$

**Corollaire 4.1.1.1** Si  $f$  est continue en  $x_0$  et  $g$  est continue  $f(x_0)$ , alors la composition  $g \circ f$  est continue en  $x_0$ .

**Définition 4.1.2** Continuité à droite/gauche

- Si  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ , la fonction  $f$  est dite **continue à droite**.
- Si  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ , la fonction  $f$  est dite **continue à gauche**.

## 4.2 Théorème de la valeur intermédiaire

**Définition 4.2.1** Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est dite **continue** si:

- $f$  est continue en tout  $x_0 \in ]a, b[$
- $f$  est continue à droite en  $a$
- $f$  est continue à gauche en  $b$

**Théorème 4.2.1** *Théorème de la valeur intermédiaire (TVI).*

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue, telle que  $f(a) < f(b)$ . Alors  $\forall h \in ]f(a), f(b)[$ , il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = h$ .

**Corollaire 4.2.1.1** Un polynôme de degré impair possède **toujours** une racine.

**Théorème 4.2.2** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue:

- Si  $f$  est strictement (dé)croissante, alors  $Im(f) = [f(a), f(b)]$ , et  $f : [a, b] \rightarrow Im(f)$  est bijective.