Analyse I - Résumé

Mahel Coquaz

Semestre d'automne 2025

Contents

Cours

Introduction

Ce qui suit se veut être un résumé condensé du cours d'Analyse I pour IN (MATH-101e) donné au semestre d'automne 2025 à l'EPFL. Le contenu de ce cours ne m'appartient pas et est quasiment intégralement extrait du cours de la Professeur Anna Lachowska qui l'a enseigné. J'ai cependant pris la liberté de sauter/raccourcir certains passages et d'ajouter des notes lorsqu'il me semblait pertinent de le faire.

Il faut également noter que la nature de résumé de ce qui suit ne permet pas d'appréhender toutes les notions ou subtilités du cours, rien de ce qui est fait à l'EPFL ne peut être considéré comme "trivial" contrairement à ce que l'ont peut régulièrement entendre, ce document à donc plus vocation à être un aide mémoire plutôt qu'un support complet de cours.

Ce résumé/polycopié n'est pas exempt d'erreurs, si vous en trouvez une, vous pouvez me contacter sur mon adresse EPFL `mahel.coquaz@epfl.ch` ou via le repo GitHub `https://github.com/hotwraith/LectureNotes`.

Le repository GitHub est aussi où se trouvent les dernières versions des fichiers PDFs et TEXpour ce cours (et éventuellement d'autres).

Rendons à César ce qui appartient à César, merci à Joachim Favre et Faust dont les notes et polycopiés dactylographiés m'ont inspiré dans la réalisation de ces résumés.

Organisation par cours

Chapter 1

Prérequis

Cours 1 - 8 septembre 2025: "C'est trivial ça"

1.1 Identités algébriques

- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$
- $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 - y^3$
- $(x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3 + y^3$

1.2 Exponentielles & Logarithmes

1.2.1 Exponentielles

Avec $a, b \in \mathbb{R}$

- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(ab)^x = a^x b^x$
- $a^0 = 1$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
- $a^1 = a$

1.2.2 Logarithmes

Avec $\ln = \log$ le logarithme naturel

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^c) = c \cdot \ln(x)$
- $\ln(1) = 0$
- $\log_a(a) = 1$

1.3 Trigonométrie

Avec $\sin(x), \cos(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ & $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
- $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$
- $\cos(0) = \cos(x - x) = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

1.4 Fonctions élémentaires

1.4.1 Types de fonctions

1. Polynomiales
   - Linéaire: $f(x) = ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$
   - Quadratiques: $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$
2. Fonctions rationnelles: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes, et $Q(x) \neq 0$
3. Fonctions algébriques: Toute fonction qui est une solution d'une équation polynomiale, ex: $f(x) = \sqrt{x}$
4. Fonctions transcendantes: fonctions non algébriques
   (a) Exponentielles et logarithmiques: $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln(x)$
   (b) Fonctions trigos et réciproques: $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$

1.4.2 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition 1.4.1 $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \text{ est bien définie } \}$ = *le* ***domaine de définition*** *de f*
$f(D) = \{y \in R : \exists x \in D(f) : f(x) = y\}$ = ***l'ensemble image*** *de f*

Définition 1.4.2 ***Surjectivité***
$f : E \to F$ *est* ***surjective*** *si* $\forall y \in F, \exists$ ***au <u>moins</u> un*** $x \in E : f(x) = y$

Définition 1.4.3 ***Injectivité***
$f : E \to F$ *est* ***injective*** *si* $\forall y \in F, \exists$ ***au <u>plus</u> un*** $x \in E : f(x) = y$
Autrement dit: Soit $x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$

Définition 1.4.4 ***Bijectivité*** *Si* $f : E \to F$ *est injective* ***ET*** *surjective, alors elle est* ***bijective***

1.4.3 Fonctions réciproques

Définition 1.4.5 *N'existent que si* $f : E \to F$ *est* ***bijective*** *et est définie par* $f^{-1} : F \to E$ *donc* $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

1.4.4 Fonctions composées

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ avec $f(D_f) \subset D_g$ on peut alors définir la fonction composée $g \circ f : D_f \to$ par $g \circ f(x) = g(f(x))$ [1]

[1] Il est bon de noter que de manière générale: $g \circ f \neq f \circ g$

Chapter 2

Nombre réels

Cours 2 - 10 septembre 2025: For $\mathbb{R}$?

2.1 Ensembles

Un ensemble est une "Collection des objets définis et distincts" (G. Cantor)

Définition 2.1.1 $\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}$ *Soit* $\forall b \in X \Rightarrow b \in Y$
Sa négation: $\mathbf{X} \not\subset \mathbf{Y}$
$\exists a \in X : a \notin Y$

Définition 2.1.2 $X = Y \Leftrightarrow Y \subset X$ *et* $X \subset Y$

Définition 2.1.3 $\emptyset$ *l'ensemble vide:* $\emptyset = \{\}$
$\forall X : \emptyset \subset X$
$\forall X : X \subset X$

2.1.1 Opération ensemblistes

- Réunion: $X \cup Y = \{a \in \cup : a \in X \text{ ou } a \in Y\}$
- Intersection: $X \cap Y = \{a \in \cap : a \in X \text{ et } a \in Y\}$
- Différence: $X \backslash Y = \{a \in \backslash : a \in X \text{ et } a \notin Y\}$

Propriété $\mathbf{A} \backslash (\mathbf{B} \backslash \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \backslash \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{C})$

2.2 Nombres naturels, rationnels, réels

2.2.1 Borne inférieure et supérieure

Définition 2.2.1 *Soit* $S \subset \mathbb{R}, S \neq \emptyset$. *Alors* $a \in \mathbb{R} (b \in \mathbb{R})$ *est un minorant/majorant de* S *si* $\forall x \in S$ *on a:* $a \leq x$ *ou* $x \leq b$
Si S *possède un minorant/majorant on dit que* S *est* ***minoré/majoré****.*
Si S *est majoré* ***et*** *minoré, alors* S *est dit* ***borné****.*

Cours 3 - 15 septembre 2025: Élisabeth Born(é)e

2.2.2 Supremum et infimum

Théorème 2.2.1 *Tout sous-ensemble non-vide majoré/minoré $S \subset \mathbb{R}$ admet un supremum/infimum qui est unique.*

Unicité *Si inf/supS existe alors il est le plus grand minorant/majorant de S*

2.2.3 Notations d'intervalles

Soit $a < b,\ a, b \in \mathbb{R}$.
Intervalles bornés

- $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} = [a, b]$ intervalle fermé borné
- $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} =]a, b[$ intervalle ouvert borné
- $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} = [a, b[$ intervalle borné ni ouvert ni fermé
- $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} =]a, b]$ intervalle borné ni ouvert ni fermé

Intervalles non-bornés:

- $\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} = [a, +\infty[$ fermé
- $\{x \in \mathbb{R} : x > a\} =]a, +\infty[$ ouvert
- $\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} =]-\infty, b]$ fermé
- $\{x \in \mathbb{R} : x < b\} =]-\infty, b[$ ouvert

2.3 Nombres complexes

Cours 4 - 17 septembre 2025: ça se complique...

On sait que $x^2 = -1$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$, alors on introduit i tel que $i^2 = -1$ [1]

2.3.1 Propriétés des nombres complexes

Prenons les $\mathbb{C}$[2] de la forme $\{z = a + ib\}$, où $a, b \in \mathbb{R}$

- $(+)$ $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$
  - $\exists =\in C : 0 + 0i = 0$ tel que $(a + ib) + 0 + 0i = a + ib\ \forall a, b \in \mathbb{R}$
  - $\exists$ l'opposé pour $(a + ib)$: $(-a + i(-b)) + (a + ib) = 0 + 0i = 0$
- $(\cdot)(a + ib) \cdot (c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$

[1]Oui, en maths quand un truc marche pas on invente un truc pour que ça marche, si seulement on pouvait faire ça en exam...
[2]$\mathbb{C}$ dénote l'ensemble des complexes

- $\exists 1 \in \mathbb{C}: \; 1+0i=1: \; (a+ib)\cdot(1+0i)=a+ib$
- $z\in\mathbb{C},\; z\neq 0 \Rightarrow \exists z^{-1}\in\mathbb{C}: z\cdot z^{-1}=z^{-1}\cdot z=1$
- Pour $z=a+ib\in\mathbb{C}^* \Rightarrow z^{-1}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}$
- $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$
- $\mathbb{C}$ n'est pas ordonné: $i>0\Rightarrow i^2=-1>0$ et $i<0\Rightarrow(-i)^2=-1>0$, on voit qu'on a $-1>0$ ce qui est absurde.

2.3.2 Les 3 formes de nombres $\mathbb{C}$

Forme cartésienne

$\mathbf{z}=\mathbf{a}+\mathbf{ib}$, $a,b\in\mathbb{R}$
$z=Re(z)+Im(z)i$ (Re et Im respectivement les parties réelles et imaginaires de z)
$|z|=\sqrt{(Re(z)^2+(Im(z))^2}=\sqrt{a^2+b^2}\geq 0$[3]
Trouver φ *et* $arg(z)$:

- $a>0: \; arg(z)=\arctan(\frac{b}{a}) \;\in\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ à $2k\pi$ près, $k\in\mathbb{Z}$
- $a<0: \; arg(z)=\arctan(\frac{b}{a})+\pi \;\in\,]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$ à $2k\pi$ près, $k\in\mathbb{Z}$
- Si $a=0$:
  - $arg(z)=\frac{\pi}{2}$ si $Im(z)=b>0$
  - $arg(z)=\frac{3\pi}{2}$ si $Im(z)=b<0$

Forme polaire trigonométrique

$\mathbf{z}=\rho(\cos(\varphi)+\mathbf{i}\sin(\varphi)\;\rho\leq 0,\;\varphi\in\mathbb{R}$
$|z|=\rho\leq 0\;\rho\neq 0\Rightarrow\sin(\varphi)=\frac{Im(z)}{\rho},\;\cos(\varphi)=\frac{Re(z)}{\rho},\;\tan(\varphi)=\frac{Im(z)}{Re(z)}=\frac{a}{b}$ si $a=Re(z)\neq 0$

Forme polaire exponentielle

$$e^{iy}=\cos(y)+i\sin(y) \qquad \text{(Formule d'Euler)}$$

$$z=\rho(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))=\rho e^{i\varphi}$$

Les trois formes

$$z=Re(z)+Im(z)i=|z|(\cos(arg(z))+i\sin((arg(z))=|z|\cdot e^{i\cdot arg(z)}$$

où

$$|z|=\sqrt{(Re(z))^2+(Im(z))^2} \qquad \text{(module de z)}$$

[3] $|z|=0\Leftrightarrow z=0$

$$\begin{aligned}|z| \neq 0 \Rightarrow arg(z) &= \arctan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right),\ Re(z) > 0 \\ &= \arctan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right) + \pi,\ Re(z) < 0 \\ &= \frac{\pi}{2},\ Re(z) = 0,\ Im(z) > 0 \\ &= \frac{3\pi}{2},\ Re(z) = 0,\ Im(z) < 0\end{aligned} \tag{argument de z}$$

$$e^{i\pi} = -1 \tag{Formule d'Euler}$$

$\forall \rho > 0, \varphi \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}(\rho(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)))^n &= \rho^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) \\ (\rho e^{i\varphi})^n &= \rho^n e^{in\varphi}\end{aligned} \tag{Formule de Moivre}$$

Cours 5 - 22 septembre 2025: C'est du français ou des maths ?

2.3.3 Conjugué

Définition 2.3.1 $z = a + ib\ \in \mathbb{C}$ *alors le conjugué de z est* $\overline{z} = a - ib$
$\mathbf{z\overline{z}} = |\mathbf{z}|^\mathbf{2} \in \mathbb{R}$
En forme polaire le conjugué s'écrit:

$$\begin{aligned}z = \rho(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \Rightarrow \overline{z} &= \rho(\cos(\varphi) - i\sin(\varphi)) \\ &= \rho(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) \\ &= \rho e^{-i\varphi}\end{aligned}$$

Propriétés

$\forall z \in \mathbb{C}$:

1. $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$
2. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$
4. $|\overline{z}| = |z|$
5. $a = Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$
6. $b = Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$
7. $\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$
8. $\sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$

2.3.4 Racines de $\mathbb{C}$

Proposition 2.3.1 $w = s \cdot e^{i\varphi},\ w \in \mathbb{C}^*$ *alors* $\forall n \in \mathbb{N}^*$
$\{z \in \mathbb{C}^* : z^n = w\} = \left\{ \sqrt[n]{s} e^{i \cdot \frac{\varphi + 2k\pi}{n}},\ k = 0, 1, ..., n-1 \right\}$

2.3.5 Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$

Quadratiques

$$az^2 + bz + c = 0,\ a, b, c \in \mathbb{C},\ a \neq 0$$
$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow\ z = -\frac{b}{2a}$$
$$\neq 0 \Rightarrow\ 2\ solutions$$

Théorème fondamental de l'algèbre

Théorème 2.3.1 *Tout polynôme* $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$, $a_n, a_{n-1}, ..., a_0 \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n (z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n) \text{ où } z_1, ..., z_n \in \mathbb{C} \\ &= a_n (z - w_1)^{m_1} (z - w_2)^{m_2} ... (z - w_p)^{m_p} \end{aligned}$$

Polynômes à coefficients réels

Proposition 2.3.2 *Si* $z \in \mathbb{C}$ *est une racine de* $P(z)$ *à coefficients réels, alors* $\overline{z}$ *l'est aussi.*
Donc $P(z) = P(\overline{z}) = 0$ *et* $(x - z)(x - \overline{z})$ *divise le polynôme*

Chapter 3

Suites de nombres réels

Cours 6 - 24 septembre 2025: Classé sans suite

3.1 Définition

Définition 3.1.1 *On définit une suite de nombre réels comme une application* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *définie pour tout nombre naturel* $(\forall n \leq n_0 \in \mathbb{N})$

Définition 3.1.2 *Une suite* (a_n) *est majorée (minorée) s'il existe un nombre* $M(m) \in \mathbb{R}$ *tel que* $a_n \leq M\ \forall n \in \mathbb{N}$ $(a_n \geq m\ \forall n \in \mathbb{N})$.
*On dit que la suite est **bornée** si elle est majorée **et** minorée.*

Définition 3.1.3 *Une suite* (a_n) *est croissante (strictement croissante) si* $\forall n \in \mathbb{N}$ *on a* $a_{n+1} \geq a_n$ $(a_{n+1} > a_n)$.
Une suite (a_n) *est décroissante (strictement décroissante) si* $\forall n \in \mathbb{N}$ *on a* $a_{n+1} \leq a_n$ $(a_{n+1} < a_n)$.
*Une suite est dite (strictement) **monotone** si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.*

3.2 Raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n, telle que:

1. **Initialisation**: $P(n_0)$ est vraie, et...
2. **Hérédité**: $\forall n \geq n_0$, $P(n)$ implique $P(n+1)$, alors $P(n)$ est **vraie** pour tout $n \geq n_0$.

Il est *très* important de bien démontrer les deux étapes de la récurrence, autrement il est facile d'obtenir une preuve qui est fausse.

3.3 Limite des suites

Définition 3.3.1 *On dit que la suite* (x_n) *est **convergente** et admet pour **limite** le nombre réel* $l \in \mathbb{R}$ *si pour tout* $\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ *on a* $|x_n - l| \leq \epsilon$.
*Une suite qui n'est **pas** convergente est dite **divergente**.*

Cours 7 - 29 septembre 2025: C'est limite ça