

Analyse I - Résumé

Mahel Coquaz

Semestre d'automne 2025

Contents

1	Prérequis	7
1.1	Identités algébriques	7
1.2	Exponentielles & Logarithmes	7
1.2.1	Exponentielles	7
1.2.2	Logarithmes	8
1.3	Trigonométrie	8
1.4	Fonctions élémentaires	8
1.4.1	Types de fonctions	8
1.4.2	Injectivité, surjectivité, bijectivité	9
1.4.3	Fonctions réciproques	9
1.4.4	Fonctions composées	9
2	Nombre réels	11
2.1	Ensembles	11
2.1.1	Opération ensemblistes	11
2.2	Nombres naturels, rationnels, réels	11
2.2.1	Borne inférieure et supérieure	11
2.2.2	Supremum et infimum	12
2.2.3	Notations d'intervalles	12
2.3	Nombres complexes	12

Cours

Cours 1 - 8 septembre 2025	7
Cours 2 - 10 septembre 2025	11
Cours 3 - 15 septembre 2025	12
Cours 4 - 17 septembre 2025	12

Introduction

Ce qui suit se veut être un résumé ultra condensé du cours d'Analyse I pour IN (MATH-101e) donné au semestre d'automne 2025 à l'EPFL. Le contenu de ce cours ne m'appartient pas et est quasiment intégralement extrait du cours des Professeurs Anna Lachowska qui l'a enseigné. J'ai cependant pris la liberté de sauter/raccourcir certains passages et d'ajouter des notes lorsqu'il me semblait pertinent de le faire.

Ce résumé/polycopié n'est pas exempt d'erreurs, si vous en trouvez une, vous pouvez me contacter sur mon adresse EPFL mahe1.coquaz@epfl.ch ou via le repo GitHub <https://github.com/hotwraith/LectureNotes>.

Le repository GitHub est aussi où se trouvent les dernières versions des fichiers PDFs et \TeX pour ce cours (et éventuellement d'autres).

Organisation par cours

- Cours 1 - 8 septembre 2025: "C'est trivial ça" p.7
- Cours 2 - 10 septembre 2025: For \mathbb{R} ? p.11
- Cours 3 - 15 septembre 2025: Élisabeth Born(é)e p.12
- Cours 4 - 17 septembre 2025: ça se complique.. p.12

COURS

COURS

Chapter 1

Prérequis

Cours 1 - 8 septembre 2025: "C'est trivial ça"

1.1 Identités algébriques

- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$
- $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$
- $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$

1.2 Exponentielles & Logarithmes

1.2.1 Exponentielles

Avec $a, b \in \mathbb{R}$

- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(ab)^x = a^x b^x$
- $a^0 = 1$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
- $a^1 = a$

1.2.2 Logarithmes

Avec $\ln = \log$ le logarithme naturel

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^c) = c \cdot \ln(x)$
- $\ln(1) = 0$
- $\log_a(a) = 1$

1.3 Trigonométrie

Avec $\sin(x), \cos(x) \forall x \in \mathbb{R}$

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ & $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$
- $\cos(0) = \cos(x - x) = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin(x) \cos(x) + \cos(x) \sin(x) = 2 \sin(x) \cos(x)$
- $\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

1.4 Fonctions élémentaires

1.4.1 Types de fonctions

1. Polynomiales

- Linéaire: $f(x) = ax + b; a, b \in \mathbb{R}$
- Quadratiques: $f(x) = ax^2 + bx + c; a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

2. Fonctions rationnelles: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes, et $Q(x) \neq 0$

3. Fonctions algébriques: Toute fonction qui est une solution d'une équation polynomiale, ex: $f(x) = \sqrt{x}$

4. Fonctions transcendantes: fonctions non algébriques

- (a) Exponentielles et logarithmiques: $f(x) = e^x, g(x) = \ln(x)$
- (b) Fonctions trigos et réciproques: $f(x) = \sin(x), g(x) = \cos(x)$

1.4.2 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition 1.4.1 $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \text{ est bien définie} \} = \text{le } \mathbf{domaine de définition} \text{ de } f$

$f(D) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D(f) : f(x) = y\} = \text{l'ensemble image de } f$

Définition 1.4.2 Surjectivité

$f : E \rightarrow F$ est **surjective** si $\forall y \in F, \exists$ au moins un $x \in E : f(x) = y$

Définition 1.4.3 Injectivité

$f : E \rightarrow F$ est **injective** si $\forall y \in F, \exists$ au plus un $x \in E : f(x) = y$

Autrement dit: Soit $x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$

Définition 1.4.4 Bijectivité Si $f : E \rightarrow F$ est **injective ET surjective**, alors elle est **bijective**

1.4.3 Fonctions réciproques

Définition 1.4.5 N'existent que si $f : E \rightarrow F$ est **bijective** et est définie par $f^{-1} : F \rightarrow E$ donc $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

1.4.4 Fonctions composées

Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(D_f) \subset D_g$ on peut alors définir la fonction composée $g \circ f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ par $g \circ f(x) = g(f(x))$ ¹

¹Il est bon de noter que de manière générale: $g \circ f \neq f \circ g$

Chapter 2

Nombre réels

Cours 2 - 10 septembre 2025: For \mathbb{R} ?

2.1 Ensembles

Un ensemble est une “Collection des objets définis et distincts” (G. Cantor)

Définition 2.1.1 $X \subset Y$ Soit $\forall b \in X \Rightarrow b \in Y$

Sa négation: $X \not\subset Y$

$\exists a \in X : a \notin Y$

Définition 2.1.2 $X = Y \Leftrightarrow Y \subset X$ et $X \subset Y$

Définition 2.1.3 \emptyset l'ensemble vide: $\emptyset = \{\}$

$\forall X : \emptyset \subset X$

$\forall X : X \subset X$

2.1.1 Opération ensemblistes

- Réunion: $X \cup Y = \{a \in \cup : a \in X \text{ ou } a \in Y\}$
- Intersection: $X \cap Y = \{a \in \cap : a \in X \text{ et } a \in Y\}$
- Différence: $X \setminus Y = \{a \in \setminus : a \in X \text{ et } a \notin Y\}$

Propriété $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

2.2 Nombres naturels, rationnels, réels

2.2.1 Borne inférieure et supérieure

Définition 2.2.1 Soit $S \subset \mathbb{R}, S \neq \emptyset$. Alors $a \in \mathbb{R} (b \in \mathbb{R})$ est un mino-
rant/majorant de S si $\forall x \in S$ on a: $a \leq x$ ou $x \leq b$

Si S possède un minorant/majorant on dit que S est **minoré/majoré**.

Si S est majoré et minoré, alors S est dit **borné**.

Cours 3 - 15 septembre 2025: Élisabeth Born(é)e

2.2.2 Supremum et infimum

Théorème 2.2.1 *Tout sous-ensemble non-vide majoré/minoré $S \subset \mathbb{R}$ admet un supremum/infimum qui est unique.*

Unicité *Si $\inf/\sup S$ existe alors il est le plus grand minorant/majorant de S*

2.2.3 Notations d'intervalles

Soit $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Intervalles bornés

- $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} = [a, b]$ intervalle fermé borné
- $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} =]a, b[$ intervalle ouvert borné
- $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} = [a, b[$ intervalle borné ni ouvert ni fermé
- $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} =]a, b]$ intervalle borné ni ouvert ni fermé

Intervalles non-bornés:

- $\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} = [a, +\infty[$ fermé
- $\{x \in \mathbb{R} : x > a\} =]a, +\infty[$ ouvert
- $\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} =]-\infty, b]$ fermé
- $\{x \in \mathbb{R} : x < b\} =]-\infty, b[$ ouvert

2.3 Nombres complexes

Cours 4 - 17 septembre 2025: ça se complique...