Algèbre linéaire - Résumé

Mahel Coquaz

Semestre de printemps 2025

Contents

Introduction

Ce qui suit se veut être un résumé du cours d'Algèbre pour MàN (PREPA-092) donné au semestre de printemps 2025 à l'EPFL. Le contenu de ce cours ne m'appartient pas et est quasiment intégralement extrait du cours des Professeurs Mathieu Huruguen, Simon Bossoney et Sacha Friedli qui l'ont enseigné. J'ai cependant modifié des formulations et ajouté des notes lorsqu'il me semblait pertinent de le faire.

Ce résumé/polycopié n'est pas exempt d'erreurs, si vous en trouvez une, vous pouvez me contacter sur mon adresse EPFL `mahel.coquaz@epfl.ch` ou via le repo GitHub `https://github.com/hotwraith/LectureNotes`.

Le repository GitHub est aussi où se trouvent les dernières versions des fichiers PDFs et TEXpour ce cours (et éventuellement d'autres).

Chapter 1

Calcul matriciel

1.1 Opérations matricielles

Définition d'une matrice Une matrice est un tableau de taille **n** $\times$ **p**[1] avec n le nombre de **lignes** et p le nombre de **colonnes**.
Exemple avec n = p = 2:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On dénote un élément quelconque position de la matrice par α_{ij} avec **i sa ligne** et **j sa colonne**. Exemple: a est l'élément $\alpha_{\mathbf{11}}$ et b l'élément $\alpha_{\mathbf{12}}$.

1.1.1 Addition de matrices

Soit deux matrices A et B de **même taille** n $\times$ p.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

Formant une nouvelle matrice C composés d'éléments γ_{ij}.

Soit pour tout élément $\gamma_{ij} \in$ C, la nouvelle matrice on a:

$$\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$$

1.1.2 Multiplication scalaire

Soit une matrice A d'éléments α_{ij} et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ et C notre matrice de résultat composés des éléments γ_{ij}.

$$\lambda A = C$$

$$\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

Soit tous les éléments $\in$ C:

$$\gamma_{ij} = \lambda \times \alpha_{ij}$$

[1] On utilise aussi **m** $\times$ **n** dans certaines notations.

1.1.3 Produit matriciel

Soit trois matrices A, B et C respectivement composées des éléments α_{ij}, β_{ij}, γ_{ij}, on a:

$$A \cdot B = C$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

On note qu'il faut que A, de taille m $\times$ n, et B de taille n $\times$ p pour que la multiplication soit possible (avec m et p $\in \mathbb{R}$) Ou de manière générale:

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj}$$

et on obtient une matrice C de taille **m** $\times$ **p**.

1.1.4 Propriétés

- A + B = B + A (commutativité)
- A + (B + C) = (A + B) + C (associativité)
- A $\cdot$ (B + C) = A $\cdot$ B + A $\cdot$ C (distributivité)
- A $\cdot$ (B $\cdot$ C) = (A $\cdot$ B) $\cdot$ C

1.2 Opérations et matrices élémentaires

1.2.1 Opérations élémentaires

Soit A une matrice de taille n $\times$ p, d'éléments α_{ij}, de colonnes C_i et de lignes L_j.

Sur les lignes L_j

- $L_j \leftrightarrow L_k$ $(j \neq k)$
- $L_j \leftarrow \lambda L_j$ $(\lambda \neq 0)$
- $L_j \leftarrow L_j + \lambda L_k$ $(\lambda \in \mathbb{R},\ j \neq k)$

Ces opérations ne changent **pas** l'ensemble de solutions de A$\vec{x} = \vec{b}$. Elles sont dites **inversibles**.

Sur les colonnes C_i

- $C_i \leftrightarrow C_k$ $(j \neq k)$
- $C_i \leftarrow \lambda C_i$ $(\lambda \neq 0)$
- $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_k$ $(\lambda \in \mathbb{R},\ j \neq k)$

Ces **opérations élémentaires** sont la base de la méthode de Gauss pour résoudre des systèmes linéaires: **l'échelonnement**.