Algèbre linéaire - Résumé

Mahel Coquaz

Semestre de printemps 2025

Contents

Introduction

Ce qui suit se veut être un résumé ultra condensé du cours d'Analyse B pour MàN (PREPA-031b) donné au semestre de printemps 2025 à l'EPFL. Le contenu de ce cours ne m'appartient pas et est quasiment intégralement extrait du cours des Professeurs Sébastien Basterrechea, Anastasia Khukhro et Ghid Maatouk qui l'ont enseigné. J'ai cependant pris la liberté de sauter/raccourcir certain passages et d'ajouter des notes lorsqu'il me semblait pertinent de le faire.

Ce résumé/polycopié n'est pas exempt d'erreurs, si vous en trouvez une, vous pouvez me contacter sur mon adresse EPFL `mahel.coquaz@epfl.ch` ou via le repo GitHub `https://github.com/hotwraith/LectureNotes`.

Le repository GitHub est aussi où se trouvent les dernières versions des fichiers PDFs et TEXpour ce cours (et éventuellement d'autres).

Chapter 1

Suites réelles

1.1 Suites convergentes

1.1.1 Preuve

On veut montrer que a_n une suite quelconque tend vers une limite l.

Théorème 1.1.1 *Avec $\epsilon > 0$ et $n, N \in \mathbb{N}$, on cherche $N : \forall n \geq N : |a_n - l| \leq \epsilon$.*

La limite s'écrit $\lim_{\pm\infty} = l$

1.1.2 Exemple

On veut montrer que la suite $a_n = \frac{2n^2-1}{n^2+1}$ tend vers 2 à $\pm\infty$

$$|a_n - 2| \leq \epsilon$$

Avec $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
|a_n - 2| &= \left|\frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1} - 2\right| \\
&= \left|\frac{2n^2 - 1 - 2n^2 - 2}{n^2 + 1}\right| \\
&= \frac{3}{n^2 + 1}
\end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned}
|a_n - 2| &\leq \epsilon \\
\frac{3}{n^2 + 1} &\leq \epsilon \\
\frac{3}{\epsilon} - 1 &\leq n^2 \\
n &\geq \sqrt{\frac{3}{\epsilon} - 1}
\end{aligned}$$

1.2 Propriétés des limites

1.2.1 Propriétés simples

1. $a_n \to L, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda a_n \to \lambda L$
2. $a_n \to L_1, b_n \to L_2 \Rightarrow a_n + b_n \to L_1 + L_2$
3. $a_n \to L_1, b_n \to L_2 \Rightarrow a_n b_n \to L_1 L_2$
4. $a_n \to L_1, b_n \to L_2 \neq 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \frac{L_1}{L_2}$
5. $a_n \to L_1, b_n \to L_2$ *et* $a_n \leq b_n \forall n \Rightarrow L_1 \leq L_2$
6. $a_n \to L \Rightarrow |a_n| \to |L|$
7. $a_n \to 0 \Leftrightarrow |a_n| \to 0$
8. Une suite croissante et majorée converge.
9. Une suite décroissante et minorée converge.

1.2.2 Théorème des gendarmes

Théorème 1.2.1 *Soit x_n une suite, s'il existe deux suites a_n, b_n telles que:*

- $a_n \leq x_n \leq b_n \forall n$ *suffisamment grand.*
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$

alors $\lim_{n\to\infty} x_n = L$

Chapter 2

Fonctions réelles

2.1 Parité

- f est **paire** si $f(-x) = f(x) \forall x \in D_f$
- f est **impaire** si $f(-x) = -f(x) \forall x \in D_f$

2.2 Compositions de fonctions

Théorème 2.2.1 [1] *La composée de fonctions deux fonctions f et g, notée $f \circ g$ est définie par:*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

2.3 Surjectivité, injectivité, bijectivité

Définition 2.3.1 *Soit $f : A \to B$ une fonction.*

- *f est **surjective** si $Im(f) = B$*
- *f est **injective** si $\forall y \in B$, il y a **au plus un** $x \in A$ tel que $f(x) = y$.*
- *f est **bijective** si elle est **à la fois** injective et bijective.*

2.3.1 Fonction réciproque

Si on a une fonction bijective $f : A \to B$, on a alors $\forall y \in B$ exactement une préimage. Ceci permet de définir la fonction:

$$\begin{aligned} f^{-1} :& B \to A \\ y \mapsto & l'unique\ préimage\ de\ y. \end{aligned}$$

Cette fonction appelée **fonction réciproque** de f, on a:

- $f(f^{-1}(y)) = y \ \forall y \in B$
- $f^{-1}(f(x)) = x \ \forall x \in A$

[1] Sorry not sorry on oubliera toute la partie sur les tracés de graphes.

Chapter 3

Limites de fonctions

3.1 Limites en $x \to \pm\infty$

Cette section et ses preuves sont plus ou moins équivalentes à celles utilisées pour les suites (voir 1.1.1 et 1.2.1), pour des exemples vous pouvez consulter le polycop d'Analyse B.

3.2 Limites en $x \to x_0$

Idem que pour la sous-section précédente.

3.2.1 Remarques

- Pour montrer que $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq L$, il suffit de trouver une suite $x_n \to x_0$ telle que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) \neq L$.
- Pour montrer que $\lim_{x \to x_0} f(x)$ **n'existe pas** il suffit de trouver une suite $x_n \to x_0$ telle que $\lim_{n \to \infty} f(x_n)$ n'existe pas. On peut aussi trouver deux suites a_n et b_n telles que $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = x_0$, mais que $\lim_{n \to \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \to \infty} f(b_n)$.

3.3 Limites latérales

Théorème 3.3.1 $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$

3.4 Infiniment petits équivalents (IPE)

Définition 3.4.1 *Soient f et g définies sur un voisinage épointé de $x_0 \in \mathbb{R}$, telles que $g(x) \neq 0$ sur un voisinage épointé de à x_0. Les fonctions f et g sont des infiniment petits équivalents (IPE) au voisinage de x_0 si:*

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ *(infiniments petits).*
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ *(équivalents).*

On écrit $f \sim g$ *au voisinage de* x_0.

Proposition 3.4.1 *Au voisinage de* $x_0 = 0$,

- $\sin(x) \sim x$
- $\tan(x) \sim x$
- $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$

Chapter 4

Fonction continues

Définition 4.0.1 *Si f est définie en $x_0 \in \mathbb{R}$ et dans son voisinage, et si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

*on dit que f est **continue en $\mathbf{x_0}$**. Sinon, f est dite **discontinue en $\mathbf{x_0}$**.*

La définition de continuité comporte implicitement trois exigences:

- $f(x_0)$ existe, c'est à dire que $x_0 \in D_f$
- $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$
- cette limite $L = f(x_0)$

Proposition 4.0.1 *Soient f et g continues en x_0. Alors les fonctions suivantes sont aussi continues en x_0:*

- λf *pour* $\lambda \in \mathbb{R}$
- $|f|$
- $f \pm g$
- $f \cdot g$
- $\frac{f}{g}$ *(si* $g(x_0) \neq 0$)

Théorème 4.0.1 *Soit f définie sur un voisinage épointé de x_0 telle que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$, et soit g continue au point L. Alors*

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x)) = g(L)$$

Corollaire 4.0.1.1 *Si f est continue en x_0 et g est continue $f(x_0)$, alors la composition $g \circ f$ est continue en x_0.*

Définition 4.0.2 *Continuité à droite/gauche*

- *Si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, la fonction f est dite **continue à droite**.*
- *Si $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, la fonction f est dite **continue à gauche**.*

4.1 Théorème de la valeur intermédiaire

Définition 4.1.1 *Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite **continue** si:*

- f *est continue en tout* $x_0 \in]a, b[$
- f *est continue à droite en* a
- f *est continue à gauche en* b

Théorème 4.1.1 *Théorème de la valeur intermédiaire (TVI).*
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, telle que $f(a) < f(b)$. Alors $\forall h \in]f(a), f(b)[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = h$.

Corollaire 4.1.1.1 *Un polynôme de degré impair possède **toujours** une racine.*

Théorème 4.1.2 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue:*

- *Si f est strictement (dé)croissante, alors $Im(f) = [f(a), f(b)]$, et $f : [a, b] \to Im(f)$ est bijective.*