Lecture 3

1. Review

Power series (幂级数) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \rightsquigarrow$ 收敛半径 R

① $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ ② $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

- $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 指数函数. $R=\infty$. $z \in \mathbb{C}$.

$$e^{x+yi} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y).$$

- $\sin(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots$ $R=\infty$. $z \in \mathbb{C}$.
- $\cos(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \cdots$ $R=\infty$. $z \in \mathbb{C}$.

欧拉公式
$$\begin{cases} e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z) & z \in \mathbb{C} \\ e^{-iz} = \cos(z) - i\sin(z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

双曲函数. (余弦)

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Note:
$$\cos(-ix) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

$\cos(z)$ 限制在 $\mathbb{R}$ 轴上 $\to \cos(x)$

在纯虚轴上 $\to \cosh(x)$.

在复数域上类似地定义

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

例子. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $x \in \mathbb{R}$.

对 $f(x)$ 在 $x=0$ 处做幂级数展开 : $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$ $|x|<1$.

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \quad R=1.$$

Note: L.H.S is well-defined for $x = \pm 1$.

R.H.S is divergent at $x = \pm 1$

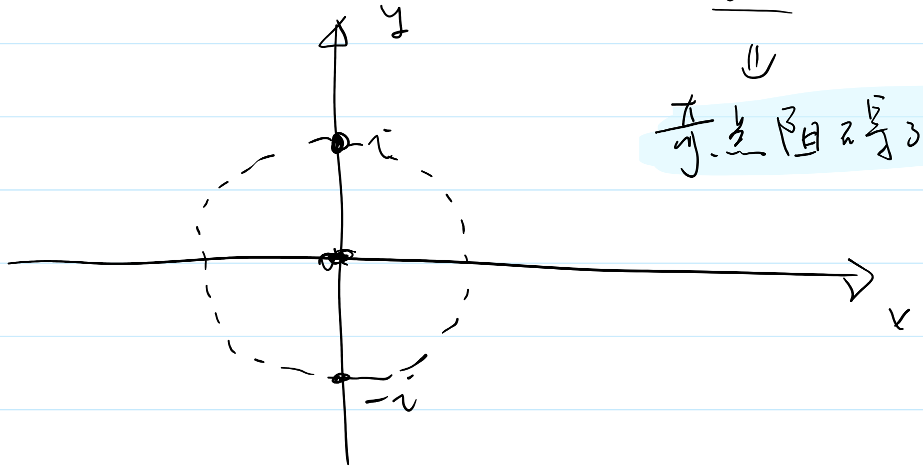
An explanation: 用复数视角.

$g(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ coincides with f on $\mathbb{R}$-axis

$g(z)$ is not defined at $z = \pm i$ ← 奇点.

⇓

奇点阻碍了收敛域



2. power function with fractional power.

$(1$ $\quad {}^{1/2}$ $\quad 3$ $\quad e^{i\cdot 2\pi} = 1$.

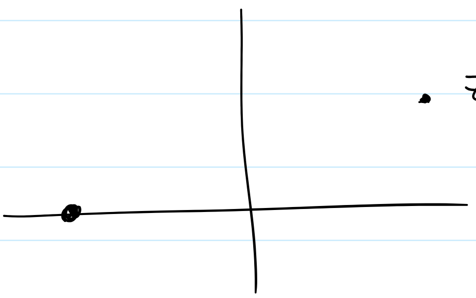
例: $w = z^{1/3} \longleftrightarrow w^3 = z$ $\qquad e^{i\cdot 2\pi} = 1$.

$$z = re^{i\theta} \;\begin{cases} \underline{w_1} = r^{1/3} e^{i\frac{\theta}{3}} & w_1^3 = z. \\ \underline{w_2} = r^{1/3} e^{i(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3})} & w_2^3 = z. \\ \underline{w_3} = r^{\frac{1}{3}} e^{i(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3})} \end{cases}$$

$f(z) = z^{1/3}$ is a multi-value complex function.

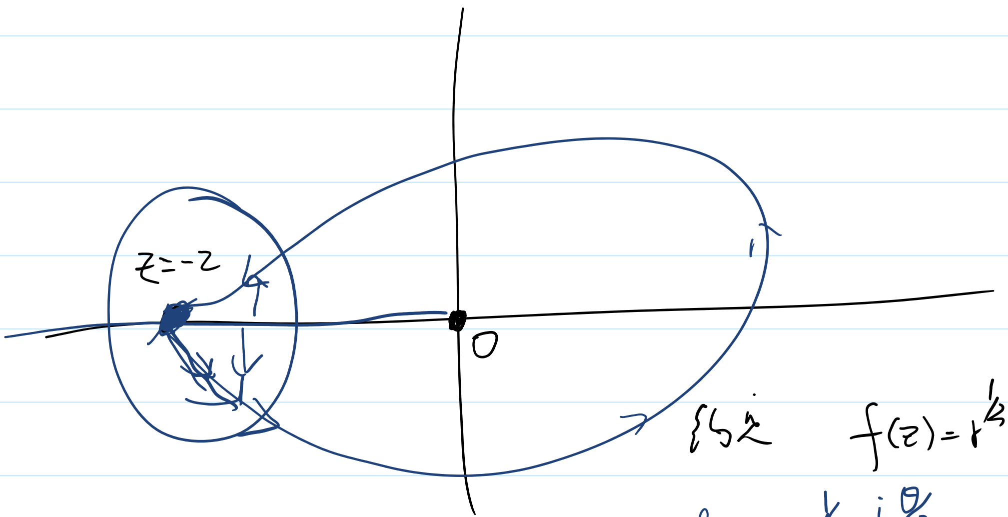
• 找到 $f(z)$ 的一个单值分支. "找到 $\mathbb{C}$ 中的一个尽可能大的使得 $f(z)$ 可以合理定义的子集"

Q: 1. 有唯一的像
2. 保证 f 的连续性.



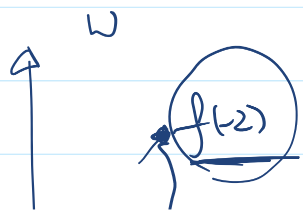
1.的解决: 需要规定 θ 的取值范围
2.的解决: 避开"支点".

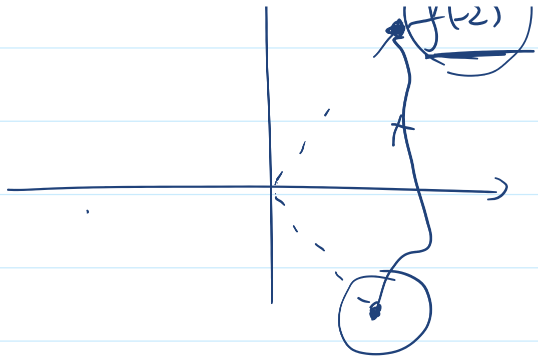
$f(z) = z^{1/3}$ $\qquad z = re^{i\theta}$ and assume $\theta \in (-\pi, \pi]$



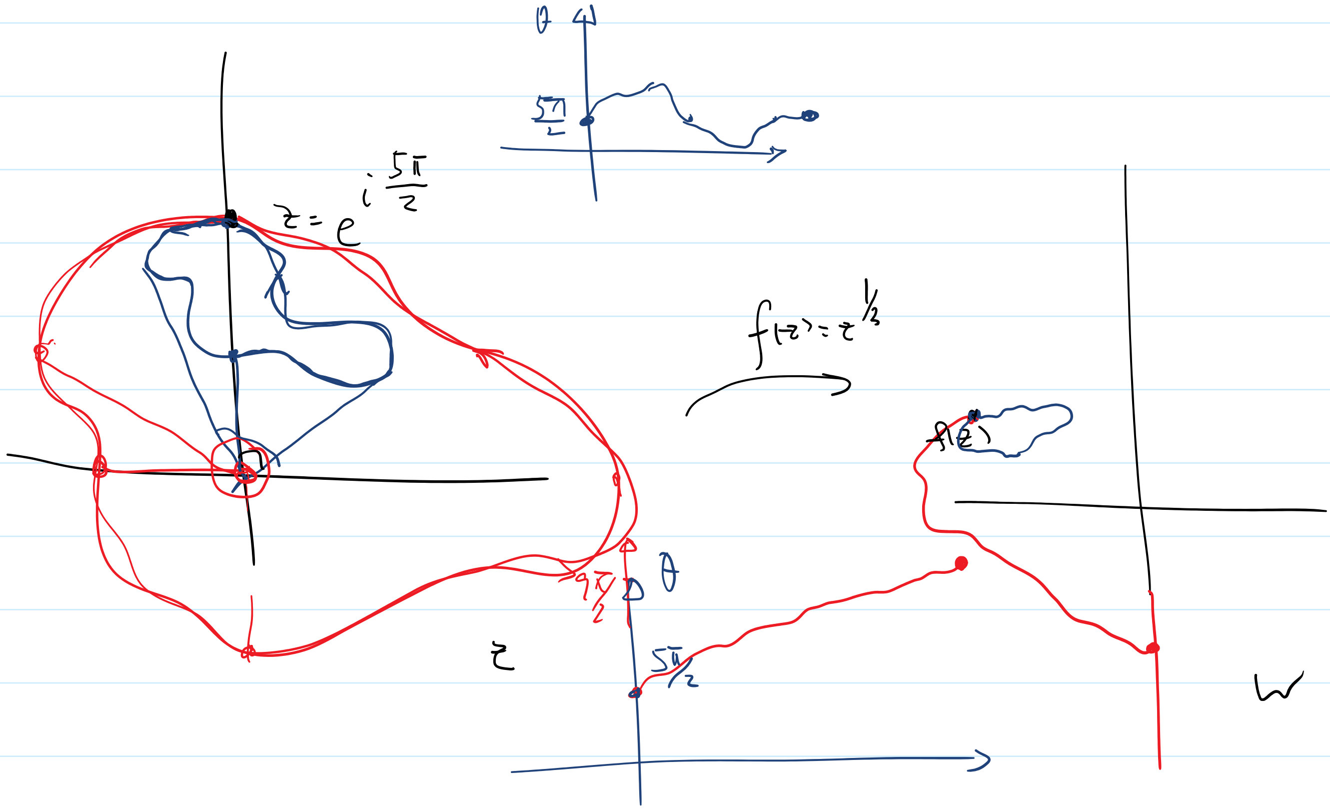
规定 $f(z) = r^{1/3} e^{i\theta/3}$

$f(z) = r^{1/3} e^{i\theta/3}$





→ f is not continuous at $z=-2$.



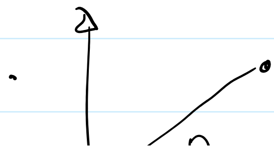
0 is called a 支点 of $f(z)=z^{1/3}$

(branch point)

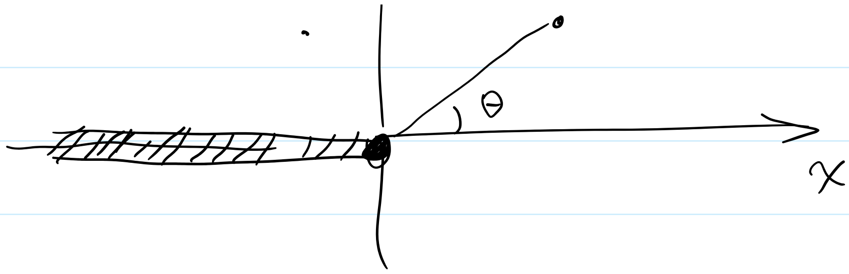
想个办法 使得定义域上 不存在 绕 0 的闭圈.

$$f:\ \mathbb{C}\setminus\{\{0\}\cup\mathbb{R}^-\}\longrightarrow\mathbb{C}$$

$\theta\in(-\pi,\pi)$ $\quad z=re^{i\theta},\quad\longrightarrow\quad w=z^{1/3}=r^{1/3}e^{i\theta/3}.$



定义出了一个单值分支.



定义出了一个单值分支.

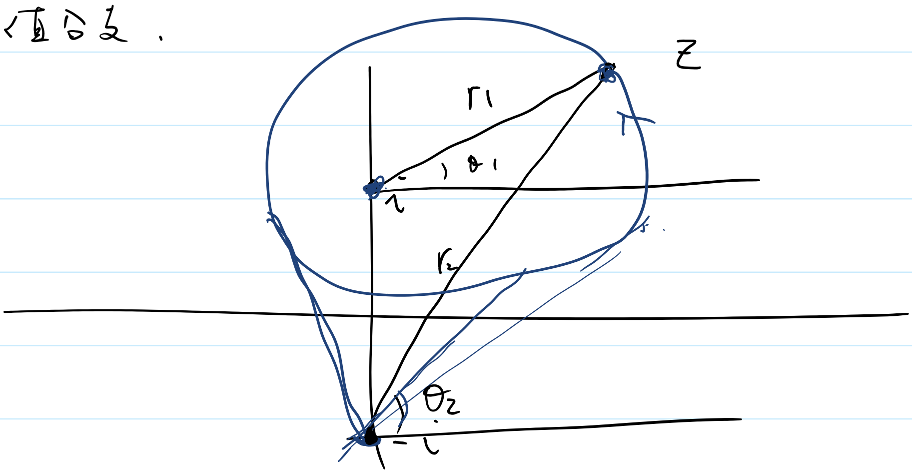
Defn $\forall\ z = re^{i\theta}$. $\theta \in (-\pi,\pi]$ θ被称为 z的辐角的主值.

$\mathrm{Arg}(z) \in (-\pi,\pi]$

例子:

$$f(z) = (1+z^2)^{\frac{1}{2}} = \left[(z+i)(z-i)\right]^{\frac{1}{2}} := (r_1r_2)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$$

找一个 f 的单值分支.

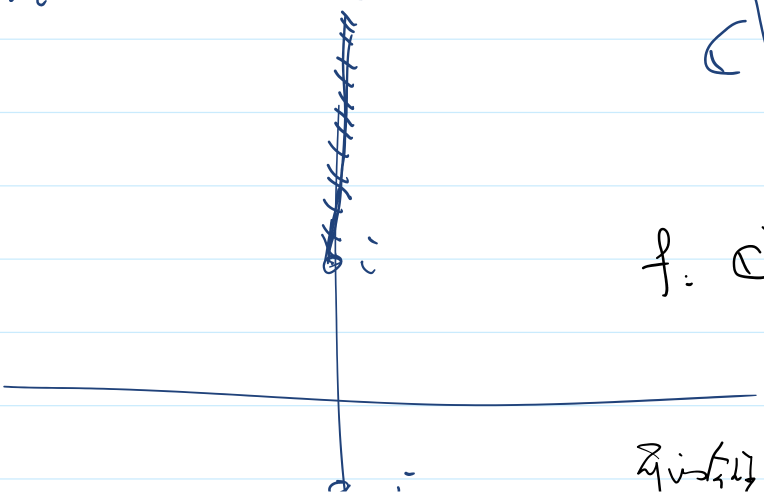


$\theta_1 \to \theta_1 + 2\pi$

$\theta_2 \to \theta_2$ $\Rightarrow$ i 是一个支点

$$(r_1r_2)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \longrightarrow (r_1r_2)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta_1+2\pi+\theta_2}{2}}$$

同理. -i 也是一个支点.

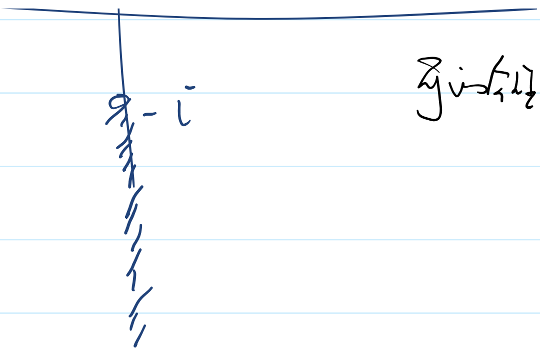


$\mathbb{C} \setminus \{xi \mid x \geq 1 \text{ or } x \leq -1\}$

$f: \mathbb{C}\setminus\{xi \mid x\geq 1 \text{ or } x \leq -1\} \to \mathbb{C}$

$z \longrightarrow ((z+i)(z-i))^{\frac{1}{2}}$

可以很好定义出一个单值分支

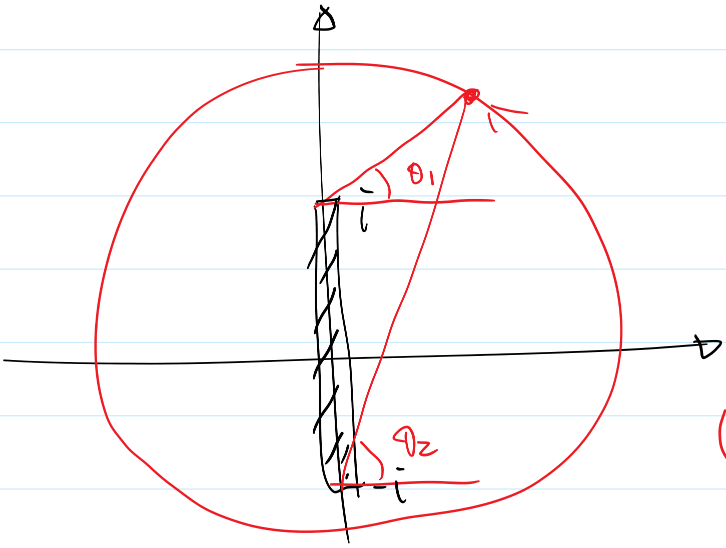


可以继续定义出一个单值分支.

Another way.

$f: \mathbb{C} \setminus \{xi \mid -1 \le x \le 1\} \to \mathbb{C}$

also works



$\theta_1 \to 2\pi + \theta_1$

$\theta_2 \to 2\pi + \theta_2$

$(r_1 r_2)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \longrightarrow (r_1 r_2)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta_1+\theta_2+4\pi}{2}}$

3. 对数函数. log.

$w = \log(z) \iff e^w = z$. suppose $w = x + yi$

$= \log|z| + \underline{\arg(z)}\, i$

$e^x e^{yi} = z$

i.e. $e^x = |z|$, $y = \arg(z)$.

$\arg(z) = \{\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

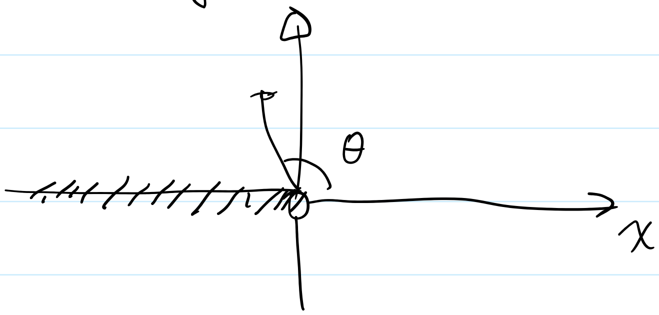
$z=0$ 是 $\log(z)$ 的一个支点，也是一个奇点.

$\operatorname{Log}: \mathbb{C} \setminus \{\{0\} \cup \mathbb{R}^-\} \to \mathbb{C}$

$z \longrightarrow \operatorname{Log}(z) := \log|z| + \operatorname{Arg}(z) \cdot i$.

定义出了 $\log(z)$ 的一个单值分支. 称其为主值分支. Log.

这给出了 $\log(z)$ 的一个单值分支. 称其为 主值分支, Log.



为了得到一个单值分支, 往往把支点到无穷远的一条射线从定义域中删除。

4. On Taylor expansion

我们在前曾暗示地说, $h(z) = 1/(1+z^2)$ 在某种意义下是**唯一**在实数直线上与实函数 $H(x) = 1/(1+x^2)$ 相一致的复函数. 然而, 很清楚, 有无限多个复函数能这样地与 $H(x)$ 一致. 例如

$$g(z) = g(x+\mathrm{i}y) = \frac{\cos[x^2 y] + \mathrm{i}\sin[y^2]}{\mathrm{e}^y + x^2\ln(\mathrm{e}+y^4)}$$

就是其中之一. 那么 $h(z)$ 在什么意义下能看作 $H(x)$ 的唯一推广?

我们已经知道 $h(z)$ 可以写为幂级数 $\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j z^{2j}$, 这个事实给出了一个暂时的答案 [练习]: $h(z)$ 是唯一的复函数, 它 (i) 在实轴上与 $H(x)$ 一致, 且 (ii) 可以表示为 z 的幂级数. 这还没有完全地包含了 $h(z)$ 为唯一的意义, 但这是一个开始.

18. 下面的论证的基本思想来自欧拉. 令 n 为任意实数（可以是无理数），定义

$$B(z,n) \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n}{r} z^r, \quad 其中 \quad \binom{n}{r} \equiv \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!},$$

而 $\binom{n}{0} \equiv 1$. 由初等代数知道, 若 n 为正整数, 则 $B(z,n) = (1+z)^n$. 为了对有理幂证明二项式定理 (2.14), 必须要证明, 若 p, q 为整数, 则 $B\left(z, \frac{p}{q}\right)$ 是 $(1+z)^{\frac{p}{q}}$ 的主支.

(i) 对固定的 n, 用比值判别法证明 $B(z,n)$ 在单位圆盘 $|z| < 1$ 内收敛.

(ii) 将两个幂级数相乘, 导出

$$B(z,n)B(z,m) = \sum_{r=0}^{\infty} C_r(n,m) z^n, \quad 其中 \quad C_r(n,m) = \sum_{j=0}^{r} \binom{n}{j}\binom{m}{r-j}.$$

(iii) 若 m, n 均为正整数, 证明

$$B(z,n)B(z,m) = B(z,n+m) \tag{2.43}$$

由此得知 $C_r(n,m) = \binom{n+m}{r}$. 但 $C_r(n,m)$ 和 $\binom{n+m}{r}$ 对于 n 和 m 恰为**多项式**, 因此, 它们二者对无穷多个 [正整数值] m 和 n 相等, 意味着它们必对 m, n 的所有实值相等, 所以关键性的 (2.43) 对所有实值 m 与 n 均成立.

(iv) 在 (2.43) 中令 $n = -m$, 并对 n 是负整数值的情况导出二项式定理.

(v) 用 (2.43) 证明, 若 q 为整数, 则 $\left[B\left(z, \frac{1}{q}\right)\right]^q = (1+z)$, 由此导出 $B\left(z, \frac{1}{q}\right)$ 是 $(1+z)^{\frac{1}{q}}$ 的主支.

(vi) 最后证明, 若 p, q 均为整数, 则 $B\left(z, \frac{p}{q}\right)$ 确为 $(1+z)^{\frac{p}{q}}$ 的主支.

32. 下面是对数幂级数的另一个处理方法. 和前面一样, 令 $L(z) = \mathrm{Log}(1+z)$, 因为 $L(0) = 0$, $L(z)$ 的幂级数必有以下形式：$L(z) = az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \cdots$. 把它代入方程

$$1 + z = e^L = 1 + L + \frac{1}{2!}L^2 + \frac{1}{3!}L^3 + \frac{1}{4!}L^4 + \cdots,$$

令 z 的同次幂系数相等即可得出 a, b, c, d. [从历史上看是先有对数幂级数——麦卡托[1]和牛顿都用了上题的方法得出了它——然后牛顿把本题的方法倒过来应用得出 e^x 的级数式. 详见 Stillwell [1989, 第 108 页].

二项式展开:

例

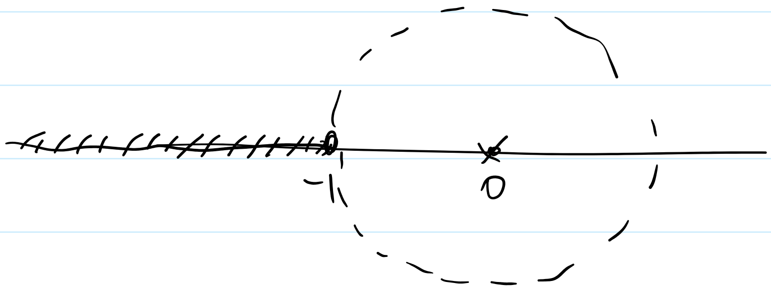
$$(1+z)^{1/3} = 1 + \binom{1/3}{1} z + \binom{1/3}{2} z^2 + \cdots, \quad |z| < 1 = R.$$

其中

$$\binom{1/3}{n} = \frac{1/3 \cdot (1/3 - 1) \cdots (1/3 - (n-1))}{n!}$$

Note. $z = -1$ 是一个支点　　L.H.S 应该理解成 $(1+z)^{1/3}$ 的某个单值分支.

L.H.S is defined on



l.H.S is defined on $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} . x \le -1\}$

支点也构成幂级数收敛圆周的障碍

$$\mathrm{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots \quad , \quad |z| < 1 = R .$$

$z=-1$ 既是支点也是奇点