

## 9月14日作业

(作业所涉及记号遵从课堂记号约定)

1. 证明剩余类环  $\mathbb{Z}_p$  ( $p$  是素数) 是一个域.
2. 证明有理数域  $\mathbb{Q}$  满足 Archimedes 公理。
3. 证明  $\alpha = 0^* \cup \{p \mid p \geq 0: p^2 < 2\}$  是一个 Dedekind 无理分割。
4. 设  $R$  是 Dedekind 分割的全体, 并定义序关系:  $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$ 。证明若  $E$  是  $R$  的一个上有界子集, 则  $\beta = \bigcup_{\alpha \in E} \alpha$  是一个 Dedekind 分割。
5. 思考: 设复数域  $\mathbb{C}$  中元素  $z = a + bi, w = c + di$ , 若  $a < c$ , 或者  $a = c$  但  $b < d$ , 就规定  $z < w$ 。证明复数域  $\mathbb{C}$  在这种顺序关系下成为有序集。进一步思考这种顺序关系有没有最小上界性 (有上界的子集具有上确界)?
6. 思考: 用无尽小数出发引进实数系之后, 建立的第一个实数基本定理是什么? 该定理是如何证明的?