第六周作业.

3. $c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}x^2\\0\\0\end{pmatrix}=0$

$\Leftrightarrow c_1+c_2x+c_3x^2=0$. 而该方程在$(a,b)$上最多有2个零点.

$\Leftrightarrow c_1=c_2=c_3=0$. 故三者线性无关

4. 设两方程的基解矩阵为$M(x)$. 则$\det(M(x))\neq 0$, 故$M(x)$可逆

则 $A(x)=\frac{dM(x)}{dx}M^{-1}(x)$; $B(x)=\frac{dM(x)}{dx}M^{-1}(x)\Rightarrow A(x)=B(x)$

5. 由于$\phi(x)$是方程组$y'=A(x)y$的一个基解矩阵.

设方程组$\begin{cases}y'=A(x)y+f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$的解为$y(x)=\phi(x)c(x)$

代入可得: $y'(x)=\phi(x)c'(x)+A(x)\phi(x)c(x)\Rightarrow f(x,y)=\phi(x)c'(x)$

因$\phi(x)$为基解矩阵, 故$\det(\phi(x))\neq 0$, 故 ~~c(x)~~ $c'(x)=\phi^{-1}(x)f(x,y)$

即$c(x)=\int_{x_0}^{x}\phi^{-1}(s)f(s,y(s))ds+c_0$

故$y(x)=\phi(x)c(x)=\phi(x)c_0+\phi(x)\int_{x_0}^{x}\phi^{-1}(s)F(s,y(s))ds$

由初值条件$y(x_0)=y_0$, 故代入$x=x_0$, 得$c_0=\phi^{-1}(x_0)y_0$

故$y(x)=\phi(x)\phi^{-1}(x_0)y_0+\int_{x_0}^{x}\phi(x)\phi^{-1}(s)f(s,y(s))ds$ (1)

又由于 ~~y(x)~~ (1)为该方程唯一解. 故二者的求解等价

6. $a<x<b$时. $\frac{dy}{dx}=A(x)y+f(x)$中的$f(x)$不恒为零, 证明有且至多有$n+1$个线性无关解

设$y_1(x),\cdots,y_n(x)$是$\frac{dy}{dx}=A(x)y$的n个线性无关解, $\varphi(x)$为$\frac{dy}{dx}=A(x)y+f(x)$一特解

则$y_1(x)+\varphi(x),\cdots,y_n(x)+\varphi(x)$为$\frac{dy}{dx}=A(x)y+f(x)$的$n+1$个线性无关解

(代入可证其为解; 若线性相关, 则$\varphi(x)$可用$y_1(x)\cdots y_n(x)$线性表示, 矛盾)

再证：不会有$n+2$个线性无关解

记已得的$n+1$个线性无关解为 $b_1(x), \cdots, b_{n+1}(x)$，又记$a(x)$为 $\frac{dy}{dx}=A(x)y+f(x)$任一解

则 $a(x)-b_1(x), \cdots, a(x)-b_{n+1}(x)$ 为 $\frac{dy}{dx}=A(x)y$ 的$n+1$个解，而其至多有n个线性无关解

故 $a(x)-b_{n+1}(x)$ 可被 $a(x)-b_1(x), \cdots, a(x)-b_n(x)$ 线性表示.

$\Rightarrow$ $a(x)$ 可被 $b_1(x), \cdots, b_{n+1}(x)$ 线性表示. $\Rightarrow$ 不会有$n+2$个线性无关解