10月17日.

1. 设$\{f_n(x)\}\subset\{B(X), d_\infty\}$是Cauchy列

则有$\forall\varepsilon>0$. $\exists N$ st $\forall n>N$, $\forall p\in N$: $d_\infty(f_{n+p}(x), f_n(x))<\varepsilon$.

任意固定x. 即有: $\forall\varepsilon>0$. $\exists N$ st $\forall n>N$. $\forall p\in N$, $|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ ①

故$\{f_n(x)\}$为R上的Cauchy列, 记$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$

令①式中$p\to\infty$, 则$\forall\varepsilon>0$. $\exists N$ st $\forall n>N$, $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ ②

由x的任意性可知: $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$

由连续性定理可知: $f(x)\in C(X)$

由$\{f_n(x)\}$为Cauchy列可知: 对$\varepsilon=1$. $\exists N_1\in N$, st $\forall n>N_1$, $|f_n(x)-f_{N_1+1}(x)|<1$

故$|f_n(x)|\le|f_n(x)-f_{N_1+1}(x)|+|f_{N_1+1}(x)|\le 1+M_0$ ($|f_{N_1+1}(x)|\le M_0$)

而由②: $\exists N_2\in N$, 对$\varepsilon=1$, 有$\forall n>N_2$. $|f(x)-f_n(x)|<1$

取$N=\max\{N_1, N_2\}$, 对$n>N$, $|f(x)|\le|f_n(x)+f(x)|+|f_n(x)|\le 2+M$.

故$f(x)\in B(X)$, 故$(B(X), d_\infty)$完备.

2. ~~取$f_n(x)=n\sin(nx)$~~ $f_n(x)=n\sin x$.

$|f_n(x)|=|n\sin x|\le n$. 故$f(x)\in(B(X), d_\infty)$, 但$x_0=\frac{\pi}{2}$时:

$f_1(x_0)=1$, $f_2(x_0)=2$, $\cdots$, $f_n(x_0)=n$, $\cdots$ 无界, 故$\{f_n(x)\}$非一致有界

3. (1) $\forall\varepsilon>0$. ~~$\exists\delta$ st $\forall$~~ 取$\delta=\varepsilon$. 则$\forall x, y\in X$, $d(x, y)=|x-y|<\delta$, 对$\forall n\in N$.

有: $|\sin\frac{x}{n}-\sin\frac{y}{n}|\le|\frac{x}{n}-\frac{y}{n}|\le|x-y|<\varepsilon$. 故$\{\sin\frac{x}{n}\}$等度连续.

~~(2). $\forall\varepsilon>0$. $\exists N$ st $\forall n>N$, $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$对任意$x\in I$成立.~~

~~由于$\{f_n(x)\}$在I上等度连续, 故存在 ... 在$\{f_n(x)\}$在I上一致连续.~~

~~任取$x, y\in I$. $|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(y)|+|f_n(y)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}\cdot 3=\varepsilon$.~~

(2) $\{f_n(x)\}$在I上等度连续 $\Rightarrow$ 任一$f_n(x)$在I上一致连续

$f_n(x)\to f(x)$: $\forall\varepsilon>0$. $\exists N$ s.t. $\forall n>N$. $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ 对 $\forall x\in I$成立.

$f_n(x)$一致连续: $\exists\delta$ s.t. $\forall |x-y|<\delta$, $|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$ 对 $\forall n\in N$成立.

故. $\forall x,y\in I$ 满足$|x-y|<\delta$,有:

$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(y)|+|f_n(y)-f(y)|<3\varepsilon$. □

(3). $f_n(x)$在$[a,b]$上一致连续:

$\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta>0$ s.t. $\forall|x-y|<\delta$, $|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$. 对$\forall n\in N$成立

[redacted]

由$f_n(x)\to f(x)$知: $\exists N$ s.t. $\forall n>N$, $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$. 对$\forall x\in[a,b]$成立

[redacted] 取$x_1=a$. $x_2=a+\frac{b-a}{\delta}$, $x_3=a+\frac{b-a}{\delta}\cdot 2$, $\cdots$, $x_{\delta+1}=b$

则$\forall y\in B_\delta(x_i)$均有 $|f(y)-f_n(y)|\le|f(y)-f(x)|+|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(y)|<3\varepsilon$

$\exists N_i\in N$ 使得对$\forall n>N_i$, 上式成立.

记$N_0=\max\{N_i\}$. 故$\forall n>N$. $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$. $f_n(x)$在$[a,b]$一致连续.

(4) 不对。若为无穷区间则x_i至多可列个, $\{N_i\}$可能无最大值

4. ① 已知E为紧子集

则E为(B_X, d_∞)中的自列紧集. 任取E中无限函数列$\{f_n(x)\}$, 则$\exists f(x)\in E$ s.t. $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$

故E为一致闭集. 由一致收敛可得: $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1$ s.t. $\forall n>N_1$, $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ 对$\forall x\in X$成立.

不妨取$\varepsilon<1$, 则$\forall x\in X$. $|f_n(x)|\le\max\{|f(x)|+1, f_1(x),\cdots,f_{N_1}(x)\}$, 故$E$为逐点有界集.

[redacted]

[redacted] 对上述N_1, $\forall n>N_1$, 均有: [redacted] $f(x)-\varepsilon\le f_n(x)\le f(x)+\varepsilon$

故对于$n>N_1$, $\forall\delta>0$. $\forall x,y\in X$, $d(x,y)<\delta$, $|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$

[redacted]

又由 $\{f_n(x)\}$ 的任意性可知：对于 $\forall n\in N$，

$\forall \varepsilon>0.\ \exists\delta>0$ st $\forall x,y\in X$, $d(x,y)<\delta$, $|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$. 故E等度连续

③ 已知E逐点有界，等度连续、一致闭集

$E\subset(B(X),d_\infty)\subset(C(X),d_\infty)$；E逐点有界；E等度连续

$\Rightarrow$ 由Arzela-Ascoli定理：E在X上一致有界 ~~故E逐点有界~~ ~~$|f_n(x)-f_n(y)|$~~

~~记 $\{f_n\}\subset E$，$\{f_n(x)\}$ 是E中的任意无穷函数列 则 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta$ st $\forall x,y\in X$ $|x-y|<\delta$ $<\varepsilon$~~

且 $\forall\{f_n\}\subset E$，$\{f_n(x)\}$ 在E上一致收敛，又因E一致闭 $\therefore f_n(x)\rightrightarrows f(x)\in E$.

故E自列紧 $\Rightarrow$ E紧集

5. 构造函数 $t_n(x)=f(x)-f_n(x)$，$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=0$

则 $\forall\varepsilon>0.\ \exists N(\varepsilon,x)$ st $\forall n>N$，$0\le|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$

由于 $f_n(x)$ 与 $f(x)$ ~~在X上~~ 连续，故 $t_n(x)$ 连续，故 $\exists\delta_x>0$，st $\forall t\in(x-\delta_x,\ x+\delta_x)$.

有 $0\le t_n(x)<\varepsilon$，$\bigcup\limits_{x\in X}(x-\delta_x,\ x+\delta_x)$ 构成一个X的开覆盖.

X紧 $\Rightarrow$ 存在有限子覆盖，令 $N=\max(N_1,N_2,\cdots,N_p)$.

则 $\forall\varepsilon>0.\ \forall n>N.\ 0\le t_n(x)<\varepsilon$，故 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛

10月19日

1. 取A中无限点列 $\{x_n(t)\}=\{\sin\frac{\pi}{1}t,\ \sin\frac{\pi}{2}t,\ \sin\frac{\pi}{3}t,\cdots\}$

$\forall\varepsilon>0.\ \exists N=\frac{2\pi}{\varepsilon}$ st $\forall m,n>N$，$|\sin\frac{\pi}{m}t-\sin\frac{\pi}{n}t|\le|\pi t|\frac{|m-n|}{|mn|}\le\pi|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}|\le\pi|\frac{1}{m}|+\pi|\frac{1}{n}|<\varepsilon$

~~故 $\exists\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，对 $\forall m,n>N$~~ 故 $\{x_n(t)\}$ 为Cauchy列，记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)=x(t)$.

又由 $(C[0,1],d_\infty)$ 为完备的度量空间 可知：$x(t)\in C[0,1]$. 故A为列紧集

2. 不成立. 反例：(Q,d_∞) 中，闭集套 $\{I_n\}=$ ~~$\{q\mid\cdots<e^2\}$~~ $=\{q\mid(1+\frac{1}{n})^n\le q\le(1+\frac{1}{n})^{n+1},\ q\in$

X为紧集时 ~~该条件~~ 成立.

3. $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$：$\forall \varepsilon>0$. $\exists N$ st $\forall n>N$. $|f_n(x)-f(x)|\le\varepsilon$ 对 $\forall x\in[a.b]$ 成立.

$P_{nm}(x) \rightrightarrows f_n(x)$：$\forall \varepsilon>0$. $\exists M$ st $\forall m>M$. $|P_{nm}(x)-f_n(x)|\le\varepsilon$ 对 $\forall x\in[a.b]$ $\forall n\in N$ 成立

不妨取 $n=N+1$，则 $\forall m>M$. $|P_{N+1,m}(x)-f(x)| \le |P_{N+1,m}(x)-f_{N+1}(x)| + |f_{N+1}(x)-f(x)|$

$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

故 $\exists\{P_i\}$ st $P_i(x) \rightrightarrows f(x)$. □.

4. 首先证明：~~连续函数可用~~ 可积函数可用连续函数逼近

即：f 是 $[a.b]$ 上 Riemann 可积的函数，则 $\exists$ 连续函数族 $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$

使得 $\int_a^b |f(x)-f_k(x)|dx \to 0, k\to\infty$.

证：因为 f 在 $[a.b]$ 上 Riemann 可积. 故 $\forall\varepsilon>0$. $\exists$ 划分 $a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b$

满足 $f^*(x)=\sup\limits_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)$. $(j=1,2,\cdots N)$ 有 $\int_a^b |f^*(x)-f(x)|dx<\varepsilon$ ①

可取个较小的 δ，构造 $\tilde{f}(x)$，$\tilde{f}(x)$ 在 $[x_i-\delta, x_i+\delta]$ 外与 $f^*(x)$ 相等.

在该区间内是 $(x_i-\delta, f^*(x_i-\delta))$ 与 $(x_i+\delta, f^*(x_i+\delta))$ 的端点的连线

特别地，取 $\tilde{f}(a)=f^*(a)$，$\tilde{f}(b)=f^*(b)$；记 $\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|=B$

则有 $\int_a^b |f^*(x)-\tilde{f}(x)|dx \le (2\delta)(2B)\cdot N$

故可取 $\delta<\frac{\varepsilon}{4BN}$，使得 $\int_a^b |f^*(x)-\tilde{f}(x)|dx<\varepsilon$. ②

综合 ①. ② 可得：$\int_a^b|f(x)-\tilde{f}(x)|<2\varepsilon$

取 $2\varepsilon=\frac{1}{k}$，$k=\frac{1}{2\varepsilon}$，得到 $f_k(x)=\tilde{f_k}(x)$，$\{f_k(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$

再由题目 3 可知：

Riemann 可积函数可用连续函数逼近 ⎫
连续函数可用多项式函数逼近 ⎭ $\Rightarrow$ Riemann 可积函数可用多项式函数逼近

5.先经证 $P_n(x)$ 在 $x\in[-1,1]$ 上满足 $0\le P_n(x)\le 1$

1) 若 $P_n(x)>1$，则 $P_n(x)=P_{n-1}(x)+\frac{x^2-P_{n-1}^2(x)}{2}>1 \Rightarrow (P_{n-1}(x)-1)^2+(1-x^2)<0$. 显然矛盾 故 $P_n(x)\le 1$

2) 若 $P_n(x)<0$，则 $P_n(x)=P_{n-1}(x)+\frac{x^2-P_{n-1}^2(x)}{2}<0 \Rightarrow (P_{n-1}(x)-1)^2>1$，与 $P_n(x)\le 1$ 矛盾，故 $P_n(x)\ge 0$.

$P_n(x)-|x|=P_{n-1}(x)+\frac{x^2-P_{n-1}^2(x)}{2}-|x|=(P_{n-1}(x)-|x|)(1-\frac{P_{n-1}(x)+|x|}{2})$

① $x=0$ 时，$P_n(x)=|x|=0$.

② $x\ne 0$ 时. $0<(P_{n-1}(x)-|x|)(1-\frac{P_{n-1}(x)+|x|}{2})<P_{n-1}(x)-|x|$

记 $a_n(x)=P_n(x)-|x|$，则 $\begin{cases} x=0\text{时}, a_n(x)=0 \\ x\ne 0\text{且}x\in[-1,1]\text{时}, a_n(x)\downarrow\text{且}a_n(x)>0. \end{cases}$

$\Rightarrow \forall x_0\in[-1,0)\cup(0,1]$. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n(x_0)=0$.

故 $\{a_n(x)\}$ 收敛至常函数 0

又由 $a_n(x)=\begin{cases} P_n(x)-x, & x\ge 0 \\ P_n(x)+x, & x<0 \end{cases}$，可知 $\{a_n(x)\}$ 是等度连续的

则由10月17日3-(3)结论可得：$\{a_n(x)\}$ 一致收敛至 0 $\Rightarrow P_n(x)$ 一致收敛至 $|x|$