10月10日作业

（作业所涉及记号遵从课堂记号约定）

1. (欧氏空间中闭区间套定理的推广) 证明：(X,d)是完备度量空间的充分必要条件是：对于度量空间(X,d)中的任意非空闭集序列$\{K_n\}$，如果$K_n \supset K_{n+1}\left(n=1,2,\cdots\right)$，并且当$n\to+\infty$时有
$$diam\, K_n \to 0\left(n\to\infty\right),$$
则在X中存在唯一的点属于$\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n$。

2. 设映射$f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$，则下列命题等价：

(1) f是连续映射；

(2) Y中任一闭集F的原象$f^{-1}(F)$是X中的闭集。

3. 设$f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$是非常值连续映射，请问X中的开集（闭集）的像是否是Y中的开集（闭集）？

4. 设$f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$是连续映射，若X是紧集，则$f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$是一致连续映射。

5. 考虑l^2上的函数：
$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}kr_k,\quad x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\right)\in l^2,$$
其中：$r_k=\max\{|x_k|-1,0\}$。证明：

（1） 函数$f(x)$是 well-defined；

（2） $f(x)$是l^2上的连续函数；

（3） $f(x)$不一定把有界集映为有界集。（考虑$\mathrm{A}=\{z^{(n)},n=1,2,\cdots\}\subset l^2$，$z_k^{(n)}=\begin{cases}2, & k=n\\ 0, & k\neq n\end{cases}$）