9.26

1. 只需证：有限ε-网可以在A中取

反证：假设不可以A中取，则 $\forall x_1, x_2 \in A$, $0 \le d(x_1,x_2) \le 2\varepsilon$.

由ε的任意性：$d(x,y)=0$，~~就~~与(X,d)非负性：$d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ 矛盾.

故有限ε-网可在A中取.

2. 由于K是列紧集，则K为全有界集

可被有限个点组成的ε-网覆盖.

往证：$E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset \cdots$；$E_i$是$(K,d)$中的非空闭集，则 $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \neq \phi$.

反证：假设 $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = \phi$. 取 $E_1 \setminus E_2 = G_2$，$E_1 \setminus E_3 = G_3 \cdots E_1 \setminus E_i = G_i$ $(i=2,3,\cdots)$

由于E_i是闭集，故 $G_i = E_1 \setminus E_i$ 相对于(E_1,d)为开集

故$\{G_i\}$ $(i=2,3,\cdots)$ 是(E_1,d)的一个开覆盖

由于$E_1 \subset K$，K为全有界集，故E_1为全有界集（K的ε网可覆盖E_1）

故E_1可被有限个$\{G_i\}$覆盖（否则取$\varepsilon < G_1$的最窄处，此时不存在以ε半径的有限ε-网来覆盖E_1，与E_1的全有界性矛盾）

设E_1可被$\{G_{i_1}, \cdots G_{i_p}\}$覆盖，故$\exists m$ st $G_m \supset E_1$，即$E_1 \setminus G_m = \phi$

$E_m = E_1 \setminus (E_1 \setminus E_m) = E_1 \setminus G_m = \phi$，与$E_m \neq \phi$矛盾.

故 $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = \phi$

3. ~~(1) $\forall p \in E$. ① 若$p>0$. 取 $\delta = \frac{1}{5p}$，$\therefore (p-\frac{1}{5p})^2 < 3$，$B_\delta(p) \subset E$~~.

~~② 若$p<0$~~

(1) 若$p>0$. 由 $\sqrt{3}-p > \frac{\sqrt{3}+p}{4}(\sqrt{3}-p) = \frac{1}{4}(3-p^2)$；$p-\sqrt{2} > (p-\sqrt{2})\frac{p+\sqrt{2}}{4} = \frac{p^2-2}{4}$

可知：取 $\delta = \min\{\cancel{\sqrt{3}-p, \sqrt{4}-} \frac{3-p^2}{4}, \frac{p^2-2}{4}\}$，则 $B_\delta(p) \subset E$

若$p<0$，由 $|p-(-\sqrt{3})| > |\frac{p+\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}-p)|$；$|-\sqrt{2}-p| > |(p-\sqrt{2})\frac{p+\sqrt{2}}{4}|$

可知：取 $\delta=\min\{\frac{3-p^2}{4},\frac{p^2-2}{4}\}$，$B_\delta(p)\subset E$

综上：E为开集。

(2) 由有理数稠密性：$\forall\delta>0.\ \forall p\in E$，$B_\delta(\mathring{p})\cap E\neq\phi$

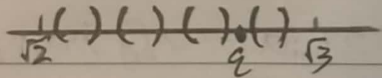
故 $E'=E\Rightarrow\bar{E}=E'\cup E=E$. 故E为闭集

$\forall p\in E$，~~$-2<p<2$~~ $|p-(-2)|\leq 4$，故E为有界集

综上：E为有界闭集

(3) 反证：假设为全有界集，取 $\varepsilon=\frac{1}{10N}$（N为有限点集中点的个数）

则N个ε-网最多覆盖区域长度为：$2\varepsilon\cdot N=\frac{1}{5}<\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

故对于 $\sqrt{2}<p<\sqrt{3}$，有限ε-网存在间隙. 

又由Q的稠密性：$\exists q$：$2<q^2<3$. q不被有限ε-网覆盖，与全有界集定义矛盾.

故~~非~~ E不是全有界集

(4) 由紧集E $\Leftrightarrow$ 自列紧集E

数列 $x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+\frac{2}{x_{n-1}})$，$x_1=\frac{3}{2}$ ~~收敛~~ 满足 $x_i\in E\ (i=1,2,\cdots)$

但 $\lim x_n=\sqrt{2}\notin E$. 故E非自列紧，故E不是紧集

4. 由E是全有界集可知. $\forall\varepsilon>0$. 均 $\exists N$ s.t. $E=\{x_1,\cdots,x_N\}$ 组成的有限ε-网覆盖E.

[引理]：A为全有界集，B为A的非空子集，则B亦为全有界集

(显然)：A的有限ε-网可以覆盖B.

① 取 $\varepsilon_0=1$，$\bigcup_{i=0}^{N_0}B_{\varepsilon_0}(x_{i0})\supset E$，记 $B_{\varepsilon_0}(x_{i0})\cap E=I_{i0}\ (i=1,2,\cdots,N_0)$，$I_{i0}\subset E$

① 由引理：I_0 亦为全有界集，对 I_{i0} 取有限ε-网

~~③ 取 $\varepsilon_1=\frac{1}{2}$，$\bigcup_{i=0}^{N_1}B_{\varepsilon_0}(x_{i1})\supset E$，记~~

② 取 $\varepsilon_1=\frac{1}{2}$，$\forall i\ (i=1,2,\cdots,N_0)$ $\bigcup_{j=0}^{N_1}B_{\varepsilon_1}(x_{j1})\supset I_{i0}$，记 $B_{\varepsilon_1}(x_{j1})\cap I_{i0}=K_{j0}$ $(j=1,2,\cdots N_1)$

$K_{j0}\subset I_0$. 由引理，K_{j0} 亦为全有界集，对 K_{j0} 取有限ε-网

… 如此进行，ε取 $\frac{1}{2^0},\frac{1}{2^1},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$ 共可列个.

每个ε对应的ε网点.为有限个，记为F_i，F_i至多有限个元素.

~~记所有ε网点($\varepsilon=\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots$)的集合为F，则F为至多可列集~~

~~$\varepsilon_n=\frac{1}{n}$ 时 当n充分大时，取$\varepsilon_n=\frac{1}{n}$~~

~~取F_n中属于E的点，记为F，则$F\subset E$，F为至多可数集~~

~~对于$\forall\varepsilon=\frac{1}{n}>0$，取$F_n\setminus F$中的点$x_i$与其附近F中的点$y_i$均满足$d(x_i,y_i)<\varepsilon$~~

~~故$\bar{F}=F_n\supset E$~~

~~取F_n~~ n充分大时，取$\varepsilon=\frac{1}{n}<1$，记$F_n$中属于E的点组成集合F.

① $F\subset E$. 成立.

② $\forall x\in E\setminus F$. $\exists x_i$ st $x\in B_{2\varepsilon}(x_i)$，即$x_i\in\bar{F}$

综上 $F\subset E$ 且 $E\subset\bar{F}$

5. Hausdorff拓扑空间的紧子集均为闭集。反证.假设$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda=\phi$

对G_λ取补集，记$K_\lambda=X\setminus G_\lambda$，由于$G_\lambda$闭集，故$K_\lambda$为开集

对X中任意x，由假设可知，x至少不属于某个G_{λ_0}，即$x\in K_{\lambda_0}$

~~故$x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$~~ 故$x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}K_\lambda$. $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}K_\lambda$构成X一开覆盖.

由紧致定义.必有有限子覆盖$\{K_{p_1},K_{p_2},\dots,K_{p_n}\}$覆盖X

则$X=\bigcup_{i=1}^{n}K_{p_i}=(X\setminus G_{p_1})\cup(X\setminus G_{p_2})\cup\cdots\cup(X\setminus G_{p_n})$

$\Rightarrow G_{p_1}=\cdots=G_{p_n}=\phi$，$G_{p_1}\cap\cdots\cap G_{p_n}=\phi$. 矛盾.

故$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda\neq\phi$

9.28.

1. $\forall \varepsilon>0$. $\exists N=[\frac{2}{\varepsilon}]+1$，$\forall m \geq n > N$，均有：$\varepsilon > \frac{2}{n}$

$d(f_m, f_n) = \int_a^b |f_m(x) - f_n(x)| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| \leq \frac{2}{n} < \varepsilon$

故 $\{f_n\}$ 为 Cauchy 列，设 $\{f_n\}$ 收敛于 f，往证 $f \notin C[-1,1]$。~~反证：~~

$\exists \varepsilon_0 = 1$，$\forall \delta>0$，$\exists n \in N$ s.t. $\frac{1}{n} < \delta$，则邻域 $B_\delta(0)$ 内，~~恒有 $|f(\frac{1}{n}) - f(0)|$~~

~~$d(f(\frac{1}{n}), f(0))$~~ $|f(\frac{1}{n}) - f(0)| = 1 \geq \varepsilon_0$.

故 f 在 $x=0$ 处不连续，$f \notin C[-1,1]$，故 $C[a,b]$ 不完备.

2. 首先证明 (l^p, d_p) (l^∞, d_∞) 为度量空间. [9月19日作业1.]

正定性与对称性易得，三角不等式利用 Minkoski 不等式 $(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p)^{\frac{1}{p}}$ 易证.

往证二者完备性

<1> 设 $\{x_i\}$ 是 (l^p, d_p) 中的 Cauchy 列

$x_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in}, \cdots\}$ $(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$

~~设 Cauchy 列 $\{x_i\}$ 收敛于 x，即 $\forall i = 1,2,\cdots,n,$~~

设 Cauchy 列 $\{x_i\}$ 收敛于 x：即 $\lim_{i\to\infty} x_{i1} = x_1, \cdots, \lim_{i\to\infty} x_{in} = x_n \cdots$

$x = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$. 往证 $x \in (l^p, d_p)$

由 (l^p, d_p) 定义，往证 $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty$

$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{ik} + x_{ik}|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{ik}|^p + \sum_{k=1}^{\infty} |x_{ik}|^p$ $(\forall i = 1,2,\cdots,n,\cdots$

由于 $\{x_i\}$ 为 Cauchy 列：$\forall \varepsilon$ $\exists N$ s.t. $\forall i > N$ $(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{ik}|^p)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{ik}|^p < \varepsilon$

又由于 $\{x_i\} \in l^p$，故 $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{ik}|^p < +\infty$

故 $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ ~~$\leq \varepsilon + (+\infty)$~~ $\leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{ik}|^p + \sum_{k=1}^{\infty} |x_{ik}|^p < +\infty$，故 $x \in (l^p, d_p)$

故 (l^p, d_p) 为完备度量空间.

(2) 设 $\{x_i\}$ 为 (l^∞, d_∞) 中的 Cauchy 列

$x_i=\{x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in}, \cdots\}$ $(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$

设 Cauchy 列 $\{x_i\}$ 收敛于 $x=\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$. 往证 $x\in(l^\infty, d_\infty)$

根据 (l^∞, d_∞) 定义. 往证 $|x_k|<+\infty$ $(k=1,2,\cdots,n,\cdots)$

$|x_k|=|x_k+x_{ik}-x_{ik}|\le|x_k-x_{ik}|+|x_{ik}|$ $(\forall i=1,2,\cdots,n,\cdots)$

由于 $\{x_i\}$ 为 Cauchy 列: $\forall\varepsilon>0.\ \exists N$ st $\forall i>N$. $|x_k-x_{ik}|<\varepsilon$.

而 $\{x_i\}\in(l^\infty, d_\infty)$, $|x_{ik}|<+\infty$, 故 $|x_k|\le|x_k-x_{ik}|+|x_{ik}|<+\infty$. $\Rightarrow x\in(l^\infty, d_\infty)$

故 (l^∞, d_∞) 为完备度量空间.

3(1) $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列 $\xRightarrow{\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=0}$ $\{y_n\}$ 为 Cauchy 列且与 x_n 收敛至同一点.

$\forall\varepsilon>0.\ \exists N_1$ st $\forall n>N_1$. $d(x_n,x)<\varepsilon\cdot\frac{1}{2}$ (设 x_n 收敛至 x)

$\forall\varepsilon>0.\ \exists N_2$ st $\forall n>N_2$. $d(x_n,y_n)<\varepsilon\cdot\frac{1}{2}$

$\Rightarrow d(y_n,x)\le d(x_n,x)+d(x_n,y_n)<\varepsilon$ $\Rightarrow\lim_{n\to\infty} y_n=x$. □

反之,同理可证: $\{y_n\}$ 为 Cauchy 列且 $\lim_{n\to\infty} y_n=y$ $\xRightarrow{\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=0}$ $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列且 $\lim_{n\to\infty} x_n=y$

故 $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=0\Longrightarrow(X,d)$ 中 Cauchy 列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 等价

(2) proof1: $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 为 Cauchy 列. $\Rightarrow\forall\varepsilon>0.\ \exists N\in\mathbb{N}$ st. $\forall m,n>N$: $d(x_m,x_n)<\varepsilon$. $d(y_m,y_n)<\varepsilon$

由三角不等式可得: $|d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)|\le d(x_n,x_m)+d(y_n,y_m)<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$.

故 $\{d(x_n,y_n)\}$ 是 R 中的 Cauchy 列, 故收敛.

又由于. 对 $\{x_n'\}\sim\{x_n\}$, $\{y_n'\}\sim\{y_n\}$, 则 $|d(x_n,y_n)-d(x_n',y_n')|\le d(x_n,x_n')+d(y_n,y_n')$

$n\to\infty$ 时 $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_n')=\lim_{n\to\infty} d(y_n,y_n')=0$. 即 $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty} d(x_n',y_n')$

故是 well-defined.

proof 2. 易证 $\tilde{d}$ 满足正定性，对称性，下面验证满足三角不等式

设 $[\{x_n\}], [\{y_n\}], [\{z_n\}] \in \tilde{X}$,

$$\tilde{d}([\{x_n\}],[\{y_n\}]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) \le \lim_{n\to\infty}\left(d(x_n,z_n)+d(z_n,y_n)\right)$$

$$= \tilde{d}([\{x_n\}],[\{z_n\}]) + \tilde{d}([\{z_n\}],[\{y_n\}])$$

(3). 由 $\tilde{d}(Px,Py) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$ 可知：取 x_n, y_n 为常~~数~~驻点列 $\{x\},\{y\}$.

则 $\tilde{d}(Px,Py) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = d(x,y)$

(4) $\forall x\in X$，常驻点列 $\{x\}$ 是 Cauchy 列，设 $\tilde{x} = [\{x\}] \in \tilde{X}$

令 $\tilde{X}_0 = \{\tilde{x} \mid x\in X\} \subset \tilde{X}$ 则 $(\tilde{X}_0,\tilde{d})$ 与 (X,d) 是等距的.

故只往证 $(\tilde{X}_0,\tilde{d})$ 在 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 中稠密

$\forall \xi \in [\{x_n\}] \in \tilde{X}$，由于对 $k=1,2,\cdots$，$x_k \in X$，

故 $\tilde{x}_k \in \tilde{X}_0$，$k=1,2,\cdots$，即 $\{\tilde{x}_k\}$ 是 $\tilde{X}_0$ 中点列，且 $\tilde{d}(\xi,\tilde{x}_k) = \tilde{d}([\{x_n\}],\tilde{x}_k) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,x_k)$

$k\to\infty$ 时，$\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_k)=0$，即 $\tilde{x}_k \xrightarrow{(\tilde{X},\tilde{d})} \xi$，$k\to\infty$.

故 $(\tilde{X}_0,\tilde{d})$ 在 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 中稠密，从而 (X,d) 在 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 中稠密，

(5) 设 $\{\xi_n\} \subset \tilde{X}$ 是 Cauchy 列，往证 $\lim_{n\to\infty} \xi_n \in (\tilde{X},\tilde{d})$

由稠密性，可取 $\tilde{x}_n \in \tilde{X}_0 \cap B^{\tilde{X}}_{\frac{1}{n}}(\xi_n)$ $(n=1,2,\cdots)$

又由于 $\{\xi_n\}$ 是 $\tilde{X}$ 中的 Cauchy 列，$\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall m,n>N$，$\tilde{d}(\xi_m,\xi_n)<\varepsilon$

于是 $\tilde{d}(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m) \le \tilde{d}(\tilde{x}_n,\xi_n) + \tilde{d}(\xi_n,\xi_m) + \tilde{d}(\xi_m,\tilde{x}_m)$

$$< \frac{1}{n} + \varepsilon + \frac{1}{m} < 3\varepsilon \quad (N>\tfrac{1}{\varepsilon})$$

即 $\{\tilde{x}_n\}$ 是 $(\tilde{X}_0,\tilde{d})$ 中的 Cauchy 列，结合 $(\tilde{X}_0,\tilde{d})$ 与 (X,d) 等距.

故有：$\{x_n\} = \{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$ 是 (X,d) 中的 Cauchy 列。记 $\xi = [\{x_n\}]$，$\xi \in \tilde{X}$

又由于 $\tilde{d}(\xi_n,\xi)\le\tilde{d}(\xi_n,\tilde{x_n})+\tilde{d}(\tilde{x_n},\xi)$

$$\le\frac{1}{n}+\lim_{l\to\infty}d(x_n,x_l)$$

当 $n\to\infty$ 时，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，$\lim_{n\to\infty}\lim_{l\to\infty}d(x_n,x_l)=0$

即：$\xi_n\xrightarrow{(\tilde{X},\tilde{d})}\xi\in\tilde{X}$，故 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 是完备的.

4. (1)⇒(2) 已知A为自列紧集

①设 x 为A的聚点，则 $\forall\delta>0$，$\mathring{B}_\delta(x)\cap A\ne\phi$

取 $\delta_0=1$，$\delta_1=\frac{1}{2}$，…，$\delta_n=\frac{1}{2^n}$，…，且中取 $x_0\in \mathring{B}_{\delta_0}(x)\cap A$，…，$x_n\in \mathring{B}_{\delta_n}(x)\cap A$；

则 $\{x_i\}$ 是A中的一个无限点列，由A自列紧可知：$\lim_{i\to\infty}x_i=x\in A$.

故 $A'\subset A$，A为闭集

② 反证. 若A非全有界集. 则覆盖A的ε-网至少为可数个，记为 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$

任取 $y_1\in B_{\varepsilon_1}(x_1)\cap A$，$y_2\in B_{\varepsilon_2}(x_2)\cap A$，…，$y_n\in B_{\varepsilon_n}(x_n)\cap A$.

则 ~~$\{y_1,\cdots,y_n\}$~~ $y_1,\cdots,y_n,\cdots\in A$，$\{y_i\}$ $(i=1,2\cdots)$ 为A中无限点列

由A自列紧性可知：$\lim_{n\to\infty}y_n=y$ 且 ~~对~~ $y\in A$

即：$\forall\varepsilon>0$. $\exists N$ s.t. $\forall n>N$. ~~有~~ $y_n\in B_\varepsilon(y)$，由 $y_1\cdots y_n\cdots$ 选取的任意性：

A可被 ~~由~~ $\{x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},y\}$ 组成的有限ε-网覆盖，与假设矛盾.

故A为全有界集

(2)⇒(1) 已知A为全有界集且为闭集

A为自列紧集 ⇒ 存在 ~~一~~ 有限ε-网覆盖A，记 $E_1=\{y_{11},y_{12}\cdots y_{1n}\}$

设 $\{x_i\}$ 为A中一个无限点列. 则至少存在一个 ~~无~~ ε球包含了 $\{x_i\}$ 中的无限点.

对于该ε球，取其与A的交集，即 ~~$B_\varepsilon(x$~~ $B_{\varepsilon_k}(y_k)\cap A$（记球心 y_k，半径 ε_k）

对 $B_{\varepsilon_k}(y_k)\cap A$ 这一全有界集再取有限ε网，亦至少存在一个ε球包含 $\{x_i\}$ 中无限点.

~~对~~ 该ε球执行上述操作

如此往复……

得到了一系列包含$\{x_i\}$中无限个点的ε球，记为$B_{\varepsilon_1}(c_1)$, $B_{\varepsilon_2}(c_2)$; …; $B_{\varepsilon_n}(c_n)$ …

在每个球中各取一个$\{x_i\}$中元素：

设 $x_{k_1} \in B_{\varepsilon_1}(c_1)$, $x_{k_2} \in B_{\varepsilon_2}(c_2)$; …; $x_{k_n} \in B_{\varepsilon_n}(c_n)$; …

则$\{x_{k_i}\}$为$\{x_i\}$的一个子列，由$\{x_i\}$的随机性可知：$\{x_{k_i}\}$为A中的任一无限点列

~~往证：$\{x_i\}$为Cauchy列~~. 往证 $\lim\limits_{i\to\infty} x_i \in A$

$\forall \varepsilon>0$. $\exists N$ s.t. $0<\varepsilon_N<\varepsilon$，则 $\forall m,n>N$, $d(x_{k_m}, x_{k_n}) < 2\varepsilon_N < 2\varepsilon$

故$\{x_{k_i}\}$为Cauchy列.

由(X,d)为完备度量空间可知：$\exists x$ s.t. $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$

又因为 $\forall \varepsilon>0$. $B_\varepsilon(\mathring{x}) \cap A \neq \phi$，故$x$为$A$的聚点，$x\in A$.

故 $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x \in A$ $\Rightarrow$ A为自列紧集