10 月 12 日作业

1. 设 E 是 R^m 中的有界闭集，f 是 E 到 E 的连续映射，且对于任意 $x, y \in E, x \neq y$，

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y),$$

证明 f 在 E 中有唯一不动点。

2. 举例说明皮卡-巴拿赫压缩映射原理中空间完备性条件不可去掉。

3. 用压缩映射原理证明隐函数存在定理：

设函数 $f(x, y)$ 在条形闭区域 $D = \{a \le x \le b, -\infty < y < +\infty\}$ 上处处连续，并且偏导数 $f_y'(x, y)$ 在 D 上满足 $0 < m \le f_y{}'(x, y) \le M$. 证明：方程 $f(x, y) = 0$ 在闭区间 $[a, b]$ 上必有唯一的连续解 $y = y(x)$。

4. 设 $f(s)$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数，$K(s, t)$ 为 $D = \{a \le s \le b, a \le t \le b\}$ 上的连续函数，并且存在常数 $M > 0$ 使得

$$\int_a^b |K(s, t)|\, dt \le M, \forall s \in [a, b].$$

证明：当 $|\lambda| < \dfrac{1}{M}$ 时，必有唯一的 $y(s) \in C[a, b]$ 满足积分方程：

$$y(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) y(t) dt.$$