10月31日作业

（作业所涉及记号遵从课堂记号约定）

1. 叙述并证明含参变量无穷积分$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dy$关于$x$在区间$E$上一致收敛的 Abel 判别法。

2. 叙述并证明含参变量无穷积分$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dy$的可积性定理（用两种方法证明）。

3. 研究下列反常积分在指定区间上的一致收敛性：

（1）$\int_{1}^{+\infty} e^{-xy}\dfrac{\cos y}{\sqrt{y}}dy$，$\mathrm{E}=[0,+\infty)$；

（2）$\int_{0}^{+\infty} \sqrt{y}e^{-yx^2}dy$，$\mathrm{E}=[0,+\infty)$。

4. 研究下列函数在指定区间上的连续性

（1）$I(x)=\int_{0}^{+\infty}\dfrac{y}{2+y^x}dy,\quad x\in(2,+\infty)$；

（2）$I(y)=\int_{0}^{\pi}\dfrac{\sin x}{x^y(\pi-x)^y}dx,\quad y\in(0,2)$。

5. 设函数$f(x,u)$满足：

（1）$f(x,u)$与$\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}$在$\mathrm{D}=[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$上连续；

（2）$\int_{a}^{+\infty}\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛；

（3）存在$u_0\in[\alpha,\beta]$，$\int_{a}^{+\infty} f(x,u_0)dx$收敛。

证明：$\int_{a}^{+\infty} f(x,u)dx$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛于连续可导函数$I(u)=\int_{a}^{+\infty} f(x,u)dx$，并且，$I'(u)=\int_{a}^{+\infty} f_u'(x,u)dx$。