

10月26日作业

(作业所涉及记号遵从课堂记号约定)

1. 给出函数 $f(x, y) ((x, y) \in I \times (a, +\infty))$ 当 $y \rightarrow +\infty$ 时关于 $x \in I$ 一致收敛的定义, 给出一致收敛的 Heine 定理并证明之。
2. 证明: 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{y \cos(yx)}{1+y^2} dy$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致收敛, 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛。这里 $a > 0$ 。
3. 证明: 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{y \sin(yx)}{1+y^2} dy$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛。
4. 证明: 积分 $\int_a^{+\infty} f(x, y) dy$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛的充分必要条件是: 对任一严格单调趋于 $+\infty$ 的数列 $\{A_n\}$ ($A_1 = a$), 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x, y) dy$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛。
5. 证明 (Dini 定理): 设 $f(x, y)$ 在 $[a, +\infty) \times [\alpha, \beta]$ 上连续, 非负。如果含参变量广义积分 $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 那么 $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 关于 y 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛。