10月19日作业

（作业所涉及记号遵从课堂记号约定）

1. 证明：集合 $A=\{x_n(t)\mid x_n(t)=\sin\dfrac{\pi}{n}t, n\in\mathbb{N}\}$ 是 $(C([0,1]),d_\infty)$ 中的列紧集。

2. 在度量空间 (X,d) 中有界闭集套定理是否成立：即“(X,d) 中任何非空有界闭集套的交集必定非空”是否成立？在什么条件下这个结论是成立的？

3. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的函数列，且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$。若 $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)$ 可以被多项式逼近，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可被多项式逼近。

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，证明存在多项式序列 $\{P_n(x)\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |P_n(x)-f(x)|dx=0$$

5. 设 $P_0=0$，对于 $n=1,2,3,\cdots$，定义

$$P_n(x)=P_{n-1}(x)+\frac{x^2-P_{n-1}^2(x)}{2}.$$

试证：在 $[-1,1]$ 上 $\{P_n(x)\}$ 一致收敛于 $|x|$.