
第三周作业

提交截止时间: 2022-10-08 11:40

1. 做参考书 1 和 4 相应章节的例题并自行与书解法对照 (不用提交)。
2. 证明: n 维微分系统 (2) (见 PPT) 在区域 G 内最多有 n 个函数独立的首次积分。
3. 设函数 $F = F(t, x_1, \dots, x_n)$ 在某个区域 $G \subset D$ 内连续可微并且在 G 的任意子区域上都不是常函数。证明: $F(t, x_1, \dots, x_n)$ 是微分系统 (2) (见 PPT) 在区域 G 内的首次积分当且仅当

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} f_i(t, x_1, \dots, x_n) \equiv 0, \quad \forall (t, x_1, \dots, x_n) \in G.$$

4. 求 SIR 模型:

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \nu I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \nu I(t)_0\end{aligned}$$

的首次积分。

5. 求系统

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial y}, \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x}\end{aligned}$$

的首次积分, 其中 $H(x, y)$ 是 \mathbb{R}^2 上的二阶可微函数。

6. 参考书 1 (第二版) Page 45: 1(1)(3).
7. 参考书 1 (第二版) Page 45: 2(2)(3).
8. 参考书 1 (第二版) Page 45: 3(1)(2).
9. 参考书 1 (第二版) Page 45: 4,5.
10. 参考书 1 (第二版) Page 62: 4,5.