10月17日作业

（作业所涉及记号遵从课堂记号约定）

1. 证明：度量空间$(\mathrm{B}(X),d_{\infty})$是完备的，其中$B(X)$是度量空间$(X,d)$上的连续有界函数全体。

2. 举例说明：对于度量空间(X,d)上的函数列$\{f_n(x)\}$，在$\{f_n(x)\}\subset B(X)$并不意味着$\{f_n(x)\}$在X上逐点有界。

3. 证明：（1）$\{\sin\frac{x}{n}\}$在$(-\infty,+\infty)$上等度连续。

   (2) 函数列$\{f_n(x)\}$在区间I上等度连续，并且$\{f_n(x)\}$在I上收敛于$f(x)$，则$f(x)$在I上一致连续。

   (3) 函数列$\{f_n(x)\}$在区间$[a,b]$上等度连续，并且$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上收敛于$f(x)$，则$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$。

   (4) 请问(3)中有限闭区间改成无穷区间结论是否还成立？请说明理由。

4. 设(X,d)是紧度量空间，E是$B(X)$中的子集. 证明E是$(\mathrm{B}(X),d_{\infty})$中紧子集当且仅当$E$是逐点有界集，等度连续集与一致闭集（关于一致收敛是闭的）。

5. 证明 dini 定理：设(X,d)是紧则$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$度量空间，并且

（1）$\{f_n(x)\}$是X上的泛函列，且$\{f_n(x)\}\subset C((X,d))$；

（2）$\{f_n(x)\}$在X上收敛于$f(x)$，且$f(x)\in C((X,d))$；

（3）对于每个$x\in X$，$\{f_n(x)\}$关于n单调。

则$\{f_n(x)\}$在X上一致收敛于$f(x)$。