10月10日

1. ① (X,d) 是完备度量空间, 往证 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{diam}\, K_n = 0 \Rightarrow \exists!\, x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$. ($x_0 \in (X,d)$?)

- 设 $\{x_n\}$ 为 (X,d) 空间中的 Cauchy 列, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, 则有 $x_0 \in (X,d)$

  取 $K_1 \subset E$, $x_i\ (\forall 1\le i) \in K_1$

  取 $K_2 \subset K_1$, $x_i\ (\forall 2\le i) \in K_2$

  如此往复,得到闭集序列 $\{K_n\}$, K_n 满足 $x_i\ (\forall n\le i) \in K_n$.

  $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{diam}\, K_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon>0.\ \exists N_1\ st\ \forall n>N_2\ \mathrm{diam}\, K_n < \varepsilon$

  $\lim\limits_{n\to\infty}$ ~~diam~~ $x_n = x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon>0.\ \exists N_2\ st\ \forall n>N_2,\ d(x_n, x_0) < \varepsilon/3$

  取 $N=\max\{N_1, N_2\}$, 则 $\forall n>N$, ~~$B_{\frac{\varepsilon}{3}}(x)$ $\{x_{n+1}$~~ $\{x_n, x_{n+1}, \cdots\} \subset B_{\frac{\varepsilon}{3}}(x_0) \subset K_n$.

  故对于 $\forall n>N$, $x_0 \in K_n \Rightarrow x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$.

- 再证唯一性, 设 $\exists x_1 \ne x_0 \in (X,d)$, 由 Cauchy 列 $\{x_n\}$ 可知: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ne x_1$.

  则 $\exists \varepsilon_0 > 0$ ~~st~~ $\exists N_0\ st\ \forall n>N_0,\ d(x_n, x_1) \geq \varepsilon_0$

  取 $\varepsilon = \frac{1}{3}\varepsilon_0$, 则由 ~~$x_0 \in K_n\ (\forall n<N)$ 可知~~ $\mathrm{diam}\, K_n < \varepsilon = \frac{1}{3}\varepsilon_0\ (\forall n>N)$ 得:

  $x_1 \notin K_n\ (\forall n>N)$ 故 x_0 唯一.

② $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{diam}\, K_n = 0 \Rightarrow \exists!\, x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ 且 $x_0 \in (X,d)$, ~~将~~ 往证 (X,d) 为度量空间.

$\forall \varepsilon>0.\ \exists N_1\ st.\ \forall n_1>N_1$, $\mathrm{diam}\, K_{n_1} < \varepsilon$, 取 $x_1 \in K_{n_1}\ (\forall n_1>N_1)$.

$\exists N_2\ st\ \forall n_2>N_2$, $\mathrm{diam}\, K_{n_2} < \frac{\varepsilon}{2}$, 取 $x_2 \in K_{n_2}\ (\forall n_2>N_2)$

$\exists N_3\ st\ \forall n_3>N_3$. $\mathrm{diam}\, K_{n_3} < \frac{\varepsilon}{2^2}$, 取 $x_3 \in K_{n_3}\ (\forall n_3>N_3)$.

$\vdots$

如此进行,得到数列 $\{x_1, x_2, \cdots\}$

由于 $\exists!\, x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$. 故对 $\forall \varepsilon>0.\ \exists N\ st\ \forall n>N.\ x_0 \in K_n.\ d(x_n, x_0) < \varepsilon$

~~故 $\forall n > \max\{N_1, N_2\}$, $\forall$~~ 故 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \in (X,d)$

故 (X,d) 为度量空间

2. (1) $\Rightarrow$ (2)

~~$\forall x_0 \in f^{-1}(F)$，则$f(x_0)\in F$~~ 设$F$为$(Y,d_Y)$中的任意闭集，则$F^c$为$(Y,d_Y)$中的开集

故 $f^{-1}(F^c)$ 为 (X,d_X) 中开集 而 $f^{-1}(F^c)=[f^{-1}(F)]^c$

故 $f^{-1}(F)$ 为闭集

(2) $\Rightarrow$ (1)

对于开集 $F^c\in X$，其原像集 $f^{-1}(F^c)=[f^{-1}(F)]^c$ 亦为开集

$\Leftrightarrow$ f是(X,d)上的连续映射

3. 不是. 反例：

(1) 对于 $(R,d_\infty)\rightarrow(R,d_\infty)$，$y=e^x$ 将闭集$(-\infty,+\infty)$映到开集$(0,+\infty)$

(2) 对于 $(R,d_\infty)\rightarrow(R,d_\infty)$，$y=\sin x$ 将开集$(-\infty,+\infty)$映到闭集$[-1,1]$

4. 反证 若f不是一致连续的，则对$\forall\delta>0$. 存在$x,y\in X$，$\exists\varepsilon_0>0$

st $d_X(x,y)<\delta$时，$d_Y(f(x),f(y))\geq\varepsilon_0$.

取$\delta=\frac{1}{n}$ $(n\in N_+)$ 得到序列$\{x_n\}$.$\{y_n\}$. $d_X(x_n,y_n)<\frac{1}{n}$，$d_Y(f(x_n),f(y_n))\geq\varepsilon_0$

~~由X是紧集可知 $\exists x_0\in X$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$~~

X是紧集 $\Leftrightarrow$ X是自列紧集：$\exists x_0\in X$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$；$\exists y_0\in Y$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}d_X(x_n,y_n)=0$，故 $x_0=y_0$ ~~$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}d_Y(f(x_n),f(y_n))=0$~~

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)$ $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}d_Y(f(x_n),f(y_n))=0<\varepsilon_0$，矛盾.

故f一致连续

~~5(1) ① $\forall x\in N$, $|x_k|\leq 1 \Rightarrow f(x)=0<\infty$, 成立.~~

~~② $x\in l^2$~~

5(1) $x\in l^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2<\infty \Rightarrow$ 至多存在有限个 $|x_{k_1}|,\cdots,|x_{k_p}|$ 大于等于1

故 $f(x)=k_1(|x_{k_1}|-1)+\cdots+k_p(|x_{k_p}|-1)<\infty \Rightarrow$ well-defined.

(2) 往证：$\forall\varepsilon>0. \exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in B_\delta(x_0)\cap l^2$. $d_R(f(x),f(x_0))<\varepsilon$

由 $x. x_0\in l^2$ 可知：$x. x_0$ 中仅有有限项的绝对值大于等于1

记为 $x_1,x_2,\cdots,x_p$; $x_{01},x_{02},\cdots,x_{0q}$

取 $K=\max\{k_1,k_2,\cdots,k_p,k_{01},k_{02},\cdots,k_{0q}\}$, $\delta=\frac{\varepsilon}{K}$

则由 $x\in B_\delta(x_0)\cap l^2$ 可知 $\delta^2>\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-x_{0k}|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|(x_k-1)-(x_{0k}-1)|^2\geq\sum_{k=1}^{\infty}(|r_k|^2+|r_{0k}|^2)$

$\geq\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{|r_k|+|r_{0k}|}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left[\sum_{k=1}^{\infty}(|r_k|+|r_{0k}|)^2\right]$

5.(1) $x\in l^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2<\infty \Rightarrow$ 至多存在有限个 $|x_k|\geq 1$，记为 $|x_{k_1}|\cdots|x_{k_p}|$

则 $f(x)=k_1(|x_{k_1}|-1)+\cdots+k_p(|x_{k_p}|-1)<\infty$. $\Rightarrow$ well-defined.

(2) 往证：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ st $\forall x\in B_\delta(x_0)\cap l^2$，$|f(x_0)-f(x)|<\varepsilon$

由于 $x、x_0\in l^2$，则二者中均至多存在有限个 $|x_k|\geq 1$.

记 x 中 $|x_1'|、|x_2'|,\cdots、|x_p'|\geq 1$，$x_0$ 中 $|x_{01}'|、|x_{02}'|\cdots|x_{0q}'|\geq 1$

~~记 $\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}\cup\{x_{01},x_{02},\cdots,x_{0q}\}=\{x_1',x_2',\cdots,x_m'\}$~~

~~取 $\delta=$ $\delta^2=\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-x_{0k}|^2>\sum_{k=1}^{m}|x_k'-x_{0k}|$~~

~~取 $\delta=$ ，$\delta^2>\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-x_{0k}|^2$ 仅取其中绝对值 $|x_k|$ 或 $|x_{0k}|$ 大于等于1的项~~

~~$\geq\sum_{k=1}^{p}|x_k'-x_{0k}'|^2+\sum_{k=1}^{q}|x_k'-x_{0k}'|^2$~~

$\begin{cases} x=(x_1,x_2,\cdots x_n\cdots) \\ x_0=(x_{01},x_{02},\cdots,x_{0n},\cdots) \end{cases}$ 找到 $|x_1'|\cdots|x_p'|$，$|x_{01}'|,\cdots|x_{0q}'|$ 各自位置，按位置角标从小到大排序，得到数组：

~~$\{(x_{m1},x_{0m1}),(x_{m2},x_{0m2})\cdots($~~

$\{(x_{p_1},x_{0p_1})(x_{p_2},x_{0p_2})\cdots(x_{pm},x_{0pm})\}$，其中 x_{pi} 为 x 中元素，x_{0pi} 为 x_0 中元素

取 $\delta=\sqrt{\frac{\varepsilon}{k_0}}$，$\delta^2>\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-x_{0k}|^2$，取其中 $|x_k|$ 或 $|x_{0k}|\geq 1$ 的项

$\geq\sum_{k=1}^{m}|x_{p_k}-x_{0p_k}|^2$，展开平方项

记 $k_0=\max\{k_1'\cdots k_p',k_{01}'\cdots k_{0q}'\}$ $\geq\sum_{k=1}^{\infty}(|x_{pk}|^2+|x_{0pk}|^2)$，取其中 $|x_{pk}|$ 或 $|x_{0pk}|\geq 1$ 的项

$\geq|x_1'|^2+\cdots+|x_p'|^2+|x_{01}'|^2+\cdots+|x_{0q}'|^2$

$\geq|x_1'|+\cdots+|x_p'|+|x_{01}'|+\cdots+|x_{0q}'|$

$\geq|r_1'|+\cdots+|r_p'|+|r_{01}'|+\cdots+|r_{0q}'|$

$\geq\sum_{k=1}^{\infty}|r_k'|+|r_{0k}'|$

$\geq\sum_{k=1}^{\infty}|r_k'-r_{0k}'|$

故 $\varepsilon>\sum_{k=1}^{\infty}k_0|r_k'-r_{0k}'|\geq\sum_{k=1}^{\infty}|k(r_k-r_{k0})|\geq\left|\sum_{k=1}^{\infty}k(r_k-r_{k0})\right|=|f(x_0)-f(x)|$. □

(3) $A=\{(2,0,\cdots),(0,2,0\cdots)\cdots\}$，$\forall a\in A$，有 $d(a,0)=2$，故A有界

$f(z^{(1)})=1$，$f(z^{(2)})=2\cdots f(z^{(n)})=n$

象集 $\{1,2,\cdots,n,\cdots\}=N_+$，为无界集

10月12日

~~证1. 令 $g(x)=d(x,f(x))$~~

1. 构造 $F:E\to R$　$F(x)=d(x,f(x))$　往证 $\exists x_0$ s.t. $F(x_0)=0$.

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ s.t. $\forall x_0\in E$，$\forall d(x,x_0)<\delta$

$d(F(x),F(x_0))=d(d(x,f(x)),d(x_0,f(x_0)))$

$=|d(x,f(x))-d(x_0,f(x_0))|=|x-x_0+f(x)-f(x_0)|$

$\leq|x-x_0|+|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$　故 $F(x)$ 连续

E为有界闭集，$F(x)\geq0\Rightarrow F(x)$ 有最小值，记为 $g(x_0)$.

若 $x_0\neq f(x_0)$，$g(x_0)=d(x_0,f(x_0))>d(f(x_0),f(f(x_0)))$，与 $g(x_0)$ 最小矛盾.

故 $x_0=f(x_0)$，若 x_0 不唯一，$\exists x_1$ s.t. $d(x_1,x_0)>d(f(x_1),f(x_0))=d(x_1,x_0)$，矛盾. □

2. 取 (X,d)，X为 $(0,+\infty)$ 上所有有理数，易证X为度量空间，但不完备.

对于压缩映射 $f(x)=\frac{1}{2}x$，无不动点.

3. ~~构造 $F:C[a,b]\to C[a,b]$~~ 对度量空间 $(C[a,b],d_\infty)$，易证其完备.

构造 $F:(C[a,b],d_\infty)\longrightarrow(C[a,b],d_\infty)$

$F(\varphi)=\varphi-\frac{1}{M}f(x,\varphi)$，则 $\forall\varphi_1,\varphi_2\in C[a,b]$，不妨令 φ_1

$|F(\varphi_1)-F(\varphi_2)|=|\varphi_1-\varphi_2+\frac{1}{M}f(x,\varphi_2)-\frac{1}{M}f(x,\varphi_1)|$

$=\left|(\varphi_1-\varphi_2)+\frac{1}{M}\frac{f(x,\varphi_2)-f(x,\varphi_1)}{\varphi_2-\varphi_1}(\varphi_2-\varphi_1)\right|$

由微分中值定理 $=|(\varphi_1-\varphi_2)(1-\frac{1}{M}f(\varphi_3))|\leq|\varphi_1-\varphi_2|(1-\frac{m}{M})$

而 $0<1-\frac{m}{M}<1$，故由皮卡-巴拿赫定理，$\exists!\varphi_0\in C[a,b]$，$F(\varphi_0)=\varphi_0\Leftrightarrow f(x,\varphi_0)=0$

故 $f(x,y)=0$ 在 $[a,b]$ 上必有唯一连续解

4. 对度量空间 $(C[a.b], d_\infty)$，易证其完备.

设映射 $F: C[a.b] \to C[a.b]$，$y(s) \longmapsto f(s) + \lambda\int_a^b K(s,t)y(t)dt$

$\forall y_1, y_2 \in C[a.b]$，$d(Fy_1, Fy_2) = \max\limits_{s\in[a.b]}\{\cancel{f_1(s) - f_2(s) +}|\lambda\int_a^b K(s,t)(y_1-y_2)dt|\}$

$$= |\lambda| \max_{s\in[a.b]}\{|\int_a^b K(y_1-y_2)dt|\}$$

$$\le |\lambda|\, d_\infty(y_1,y_2) \max_{s\in[a.b]}\{|\int_a^b K\,dt|\}$$

$$\le |\lambda| M\, d_\infty(y_1,y_2)$$

而 $|\lambda|M<1$，故F有唯一解