10月24日.

1. 对于 $f(x,y) = \frac{\sin(yx^2)}{y}$，在区间 $[0,1]\times(0,1]$ 上连续

补充定义 $y=0$ 时. $f(x,y) = x^2 = \lim\limits_{y\to0^+}\frac{\sin(yx^2)}{y}$，故 $f(x,y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 连续.

$\lim\limits_{y\to0^+}\int_0^1 \frac{\sin(yx^2)}{y}dx = \int_0^1 \lim\limits_{y\to0^+}\frac{\sin(yx^2)}{y}dx = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$

~~2(1) 在区间 $\forall(x,y)\in R\times[0,+\infty)$ 记 $F(x,y) = \frac{\cos(xy)}{y}$~~

~~补充定义 $y=0$ 时 $F(x,0) = \lim\limits_{y\to0}\frac{\cos(x\cdot y)}{y} =$~~

~~2(1) $\forall A_1,A_2$ 满足 $0<A_1<A_2$，取 $B_1 = \min\{A_1,\sqrt{A_1}\}$，$B_2 = \max\{B_2\ A_2,\sqrt{A_2}\}$~~

~~则 $F(x) = \frac{\cos(xy)}{y}$ 在 $[B_1,B_2]_x\times[A_1,A_2]_y$ 连续，$\frac{\partial F}{\partial x} = -\sin x$ 在 $[B_1,B_2]$ 上连续~~

~~而 x,x^2 在 [~~

2(1) $\forall A_1,A_2$ 满足 $0<A_1<A_2$. 取 $B_1 = \min\{A_1,\sqrt{A_1}\}$. $B_2 = \max\{A_2,\sqrt{A_2}\}$

$\forall(x,y)\in[B_1,B_2]\times[A_1,A_2]$. $F(x) = \frac{\cos(xy)}{y}$ 与 $\frac{\partial F}{\partial x} = -\sin(xy)$ 均在 $[B_1,B_2]$. $[A_1,A_2]$ 连续

$x.\ x^2$ 在 $[B_1,B_2]$ 上可微，且当 $A_1\le y\le A_2$ 时，$B_1\le x\le B_2$. $B_1\le x^2\le B_2$

故 $f'(x) = \int_x^{x^2} -\sin(xy)dy + \frac{\cos(x^3)}{x^2}\cdot 2x - \frac{\cos(x^2)}{x}\cdot 1$

$\cancel{(\sin x)(x^2-x) + \cos(x^3)\cdot\frac{2}{x}} = -\cos(x^2)\frac{1}{x} + \frac{\cos(x^3)}{x} - \frac{\cos(x^2)}{x}$

$\cancel{-(x-x^2)\sin x + \frac{2\cos(x^3)}{x} - \frac{\cos(x^2)}{x}} = \frac{3\cos(x^3)}{x} - \frac{2\cos(x^2)}{x}$

由 $A_1.A_2$ 任意性. $A_1\to0^+$ 时 $B_1\to0^+$，$A_2\to+\infty$ 时 $B_2\to+\infty$

可知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 处导数如上所示

同理可证. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)\times(-\infty,0)$，$(-\infty,0)\times(0,+\infty)$. $(-\infty,0)\times(-\infty,0)$ 上导数亦如上.

而 $x=0$ 时. $f'(x) = \lim\limits_{\delta\to0}\frac{f(\delta)-f(0)}{\delta} = \lim\limits_{\delta\to0}\int_\delta^{\delta^2}\frac{\cos(\delta y)}{\delta y}dy$. 极限不存在.

故 $f'(x) = \cancel{(x-x^2)\sin x +}\ \frac{3\cos(x^3)}{x} - \frac{2\cos(x^2)}{x}$，$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\times(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

2(2) $F(t)=\int_0^{t^2}dx\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)dy$. 记 $\varphi(x,t)=\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)dy$

~~$\forall A>0$~~ $\forall a>0$. 记 $A=[-a,a]$，$\sin(x^2+y^2-t^2)$ 在 A^3 上连续，$\frac{\partial\sin(x^2+y^2-t^2)}{\partial t}$ 在 A^3 连续

故 $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\int_{x-t}^{x+t}\cos(x^2+y^2-t^2)(-2t)dy+\sin(2x^2+2xt)+\sin(2x^2-2xt)$

$F(t)=\int_0^{t^2}\varphi(x,t)dx$ 由于 $\varphi(x)$ 与 $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ 在 A^2 上连续

故 $\frac{\partial F}{\partial t}=\int_0^{t^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}dx+\varphi(t^2,t)\cdot 2t$

$\cancel{=\int_0^{t^2}\left(-2t\int_{x-t}^{x+t}\cos(x^2+y^2-t^2)dy\right)dx+\int_{t^2-t}^{t^2+t}\sin(y^2)dy\cdot 2t}$

$=\int_0^{t^2}\left[(-2t)\int_{x-t}^{x+t}\cos(x^2+y^2-t^2)dy\right]dx+\int_0^{t^2}\sin(2x^2+2xt)+\sin(2x^2-2xt)dx$

$+\int_{x-t}^{x+t}\sin(t^4+y^2-t^2)dy$

3(1) $I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\cos^2x}{\sin^2x+a^2\cos^2x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a}{\tan^2x+a^2}dx$. 换元 $\tan x=u$. $x=\arctan u$.

$=\int_0^{+\infty}\frac{2a}{u^2+a^2}d(\arctan u)=\int_0^{+\infty}\frac{2a}{u^2+a^2}\cdot\frac{1}{1+u^2}du$

$\cancel{=\int_0^{+\infty}\frac{2\frac{1}{a}}{(\frac{u}{a})^2+1}}=\frac{2a}{1-a^2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{u^2+a^2}-\frac{1}{1+u^2}du$ $\cancel{\pi}$

$=\frac{2a}{1-a}\left(\frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}-\arctan u\right)\Big|_0^{\infty}$

$=\frac{\pi}{1+a}$

故 $I(a)=\pi\ln(1+a)+C$. $a=1$ 时 $I(1)=0$. 故 $C=-\pi\ln 2$.

故 $I(a)=\pi\ln(1+a)-\pi\ln 2=\pi\ln\left(\frac{1+a}{2}\right)$

(2) $I=\int_0^1\sin(\ln\frac{1}{x})\left(\int_a^b x^y dy\right)dx=\int_0^1\int_a^b\sin(\ln\frac{1}{x})x^y dy\,dx$. 设 $F(x,y)=\sin(\ln\frac{1}{x})x^y$

定义 $F(0,y)=\lim_{x\to 0^+}F(x,y)=0$，则 $F(x,y)$ 在 $[0,1]\times[a,b]$ 上连续.

故 $I=\int_a^b\int_0^1F(x,y)dx\,dy$. 换元. $x=e^{-t}$

$=\int_a^b\int_{+\infty}^0\sin t\,(e^{-t})^y d(e^{-t})\cdot dy=\int_a^b\int_0^{+\infty}\sin t\,e^{-t(y+1)}dt\,dy$

$=\int_a^b\frac{1}{1+(1+y)^2}dy=\arctan(1+b)-\arctan(1+a)$

4. 往证 $F(x)$ 在 $[a.b]$ 上连续、

$$|F(x)-F(x_0)| = \left|\int_\alpha^\beta f(x,y)\,h(y)\,dy - \int_\alpha^\beta f(x_0,y)\,h(y)\,dy\right|$$

$$\le \int_\alpha^\beta |f(x,y)\,h(y) - f(x_0,y)\,h(y)|\,dy$$

由 $h(y)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积 $\Rightarrow \exists M$ st $|h(y)|\le M$ 对 $\forall y\in[\alpha,\beta]$ 成立。

~~故 $\exists\delta < \frac{\varepsilon}{(\beta-\alpha)M}$ st $\forall$~~ $f(x,y)\in C(D) \Rightarrow \overset{\forall\varepsilon>0}{\exists\delta}$ st $\forall\, d((x,y),(x_0,y))<\delta$ 时,有:

$|f(x,y)-f(x_0,y)| < \frac{\varepsilon}{(\beta-\alpha)M}$,故 $\forall x\in B_\delta(x_0)$. $|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon$.

故 $F(x)$ 在 $[a.b]$ 连续. $\lim\limits_{x\to x_0}F(x) = F(x_0)$, 往证 $\varphi(x,y) = f(x,y)\,h(y)$ 对任意 y 均有:

$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x,y) = f(x_0,y)\,h(y) = \varphi(x_0,y)$

由 $|\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y)| = |f(x_0,y)-f(x,y)|\,|h(y)| \le M\,|f(x_0,y)-f(x,y)|$

故由 $f(x,y)$ 连续性可知: $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = \varphi(x_0)$ 成立. 故 $\lim\limits_{x\to x_0}\int_\alpha^\beta f(x,y)\,h(y)\,dy = \int_\alpha^\beta \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\,h(y)\,dy$

~~5. 记 $F(x,y) = f(x,y)\,h(y)$, $\forall x_0\in[a.b]$, 取 $|h|$ 充分小使 x_0 $|h|$ 仍在 $[a.b]$ 中.~~

~~$F(x_0+h$.~~

5. 记 $F(x) = \int_\alpha^\beta f(x,y)\,h(y)\,dy$, $\forall x_0\in[a.b]$. 取 $|h|$ 充分小使得 x_0+h 仍在 $[a.b]$ 中.

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\int_a^b \left(-f(x_0,y)\,h(y) + f(x_0+h,y)\,h(y)\right)dy$$

由于 $h(y)$ 有界, 易证 $\overset{\psi(x)=}{h(y)f(x,y)}$ 在 D 上连续, 故可用微分中值定理

$$\text{原式} = \frac{1}{h}\cdot h\cdot\int_a^b \frac{\partial\psi}{\partial x}(x_0+\theta h,y)\,dy = \int_a^b \frac{\partial\psi}{\partial x}(x_0+\theta h,y)\,dy$$

令 $h\to 0$ 则 $\frac{dF(x)}{dx} = \int_\alpha^\beta f_y'(x,y)\,h(y)\,dy$. □

10月26日

1. $\forall \varepsilon>0$. $\exists A(\varepsilon)>0$ s.t. $\forall y>A$, $|f(x,y)-f_0(x)|<\varepsilon$ 对 $\forall x\in I$ 成立.

(Heine): $y\to+\infty$ 时 $f(x,y)\rightrightarrows f_0(x)$ $\Leftrightarrow$ $\forall\{y_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=+\infty$ 都有 $f_n(x,y_n)\rightrightarrows f_0(x)$

证明: ① $\Rightarrow$ 任意 $\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=+\infty$, 则 $\exists N$ s.t. $\forall n>N$, $y_n>A$.

则 $|f_n(x,y)-f_0(x)|<\varepsilon$ 对 $\forall x\in I$, $\forall n>N$ 成立.

故 $f_n(x,y)\rightrightarrows f_0(x)$.

② $\Leftarrow$ 反证. 若 $f(x,y)\not\rightrightarrows f_0(x)$, 取 $\varepsilon_i=\frac{1}{i}$ $(i=1,2,\cdots)$

对每个 ε_i, 都存在 y_i ~~[illegible]~~ 大于任意大的A. 但 $|f(x,y_i)-f_0(x)|\geq\varepsilon_i$

得到序列 $\{y_i\}$. $\lim\limits_{i\to\infty} y_i=+\infty$ 但 $f_i(x,y_i)\not\rightrightarrows f_0(x)$. 矛盾. 口.

~~2. ①往证 $\forall\varepsilon>0$. $\exists A_0(\varepsilon)>0$ s.t. $\forall A_2>A_0$. $\left|\int_{A_1}^{A_2}\frac{y\cos(yx)}{1+y^2}dy\right|<\varepsilon$ 对 $\forall x\in[a,+\infty)$ 成立.~~

~~2. ① $\int_0^{+\infty}\frac{y\cos(yx)}{1+y^2}dy$ 一致收敛 $\Leftrightarrow$ ($\forall x\in[a,+\infty$~~

~~$\forall\varepsilon>0$. $\exists A_0(\varepsilon)>0$ s.t. $\forall A_2>A_1>A_0$. $\left|\int_{A_1}^{A_2}\frac{y\cos(yx)}{1+y^2}dy\right|<\varepsilon$. 对 $\forall x\in I$ 恒成立.~~

~~$\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta(\varepsilon)>0$ s.t. $\left|\int_a^{\delta+a}\frac{y\cos(yx)}{1+y^2}dy\right|<\varepsilon$ 对 $\forall x\in I$ 恒成立.~~

~~$\left|\int_{A_1}^{A_2}\frac{y\cos(yx)}{1+y^2}dy\right|\leq\int_{A_1}^{A_2}\left|\frac{y}{1+y^2}\right|dy\leq\frac{1}{2}\ln(1+y^2)\Big|_{A_1}^{A_2}$~~

~~由 $\lim\limits_{y\to+\infty}(1+y^2)=+\infty$ 可知: $\exists A_0$ s.t. $\forall A_2>A_1>A_0$. $\frac{1}{2}\ln(1+y^2)\Big|_{A_1}^{A_2}<\varepsilon$ (1)~~

2) $\left|\int_0^A\cos(yx)dy\right|=\left|\frac{\sin xA}{x}\right|\leq\frac{1}{x}\leq\frac{1}{a}$

$y>1$ 时 $y\uparrow$, $\frac{y}{1+y^2}$ 单调递减趋于0; $0<y<1$ 时换元 $y=\frac{1}{m}$, $m\uparrow$, $\frac{m}{1+m^2}$ 单调递减趋于0.

故用Dirichlet判别法. $\int_0^{+\infty}\frac{y\cos(yx)}{1+y^2}dy$ 一致收敛.

若 $x\in(0,+\infty)$ 则 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx^2=+\infty$

$\forall A>0$. $\exists A_1>A_2>A$ s.t. $\int_{A_2}^{A_1}\frac{x}{1+x^2}>1$, 故 $\int_{A_1}^{A_2}\frac{y\cos(xy)}{1+y^2}dy>\int_{A_1}^{A_2}\cos(xy)dy$

取 $x=\frac{\pi}{3y}$, 则 $\int_{A_1}^{A_2}\cos(xy)$ 发散. 故 $\int_0^{+\infty}\frac{y\cos(xy)}{1+y^2}dy$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛

3. 由上题知：$\forall A>0.\ \exists A_1.A_2\ st\ \int_{A_1}^{A_2}\frac{y\sin(yx)}{1+y^2}dy > \int_{A_1}^{A_2}\sin(yx)dy \overset{取x=\frac{\pi}{3y}}{>} \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故不一致收敛.

4. ① 必要性：

[redacted] $\forall \varepsilon>0.\ \exists A_0>0\ st\ \cancel{\forall A_2>A_1>A_0.\ |\int_{A_1}^{A_2}f(x,y)dy|<\varepsilon}$ $\forall A>A_0.\ |\int_A^{+\infty}f(x,y)dy|<\varepsilon$ 对 $\forall x\in[a,b]$ 恒成立

对上述 A_0 $\exists N\in N_+\ st\ \forall n>N.\ A_n>A_0$

则对上述 ε 和 N. 有 $|\sum_{n=N+1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x,y)dy| \le |\int_A^{+\infty}f(x,y)dy|<\varepsilon$. 对 $\forall x\in[a,b]$ 成立

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x,y)dy$ 一致收敛

② 充分性：

$\forall \varepsilon>0.\ \exists N\in N_+\ st\ |\sum_{n=N+1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x,y)dy|<\varepsilon$, 对 $\forall x\in[a,b]$ 成立.

而 $\{A_n\}$ 单增趋于 $+\infty$, 取 $A_0=A_{N+1}$, 则 $\forall \varepsilon>0.\ \exists A_0=A_{N+1}\ st\ \forall A>A_0$.

$|\int_A^{+\infty}f(x,y)dy| \le |\int_{A_0}^{+\infty}f(x,y)dy| = |\sum_{n=N+1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x,y)dy|<\varepsilon$ 对 $\forall x\in[a,b]$ 成立

故 $\int_a^{+\infty}f(x,y)dy$ 一致收敛

5. 往证 $\forall\varepsilon>0.\ \exists A_0\ st\ \forall A>A_0.\ |\int_A^{+\infty}f(x,y)dx|<\varepsilon$ 对 $\forall y\in[\alpha,\beta]$ 成立

由 $I(y)$ 连续性：$\forall\varepsilon>0.\ \exists\delta\ st\ \forall|y-y_0|<\delta$, $|\int_a^{+\infty}f(x,y)dx-\int_a^{+\infty}f(x,y_0)dx|<\frac{\varepsilon}{2}$ $(\forall y_0\in[\alpha,\beta])$

故 $[\alpha,\beta]$ 可以 n 个[redacted]邻域覆盖, 且分别以 y_i 为心, δ_i 为半径, 对应一个共同的 ε.

而 $y=y_i$ 时 $I(y_i)=\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 成立, 即[redacted] $\exists A_i>0.\ \int_{A_i}f(x,y_i)dx<\frac{\varepsilon}{2}$

每一个 y_i 为心的邻域内, 都有 $\cancel{|\int_A^{+\infty}(f(x,y)-f(x,y_i))|\le|\int_a^{+\infty}(f(x,y)-f(x,y_i))|<\varepsilon}$

$$\int_{A_i}^{+\infty}f(x,y)dx = \int_{A_i}^{+\infty}[f(x,y)-f(x,y_i)]dx+\int_{A_i}^{+\infty}f(x,y_i)dx$$
$$\le \int_a^{+\infty}|f(x,y)-f(x,y_i)|dx+\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

取 $\max\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}=A_0$ 则对 $\forall A>A_0.\ |\int_A^{+\infty}f(x,y)dy|<\varepsilon$ 对 $\forall y\in[\alpha,\beta]$ 成立

故 $\int_A^{+\infty}f(x,y)dy$ 一致收敛