

9月15日作业

(作业所涉及记号遵从课堂记号约定)

- 设 R 是 Dedekind 分割的全体，证明下列乘法保序性：若 $\forall \alpha > 0^*, \beta \geq \sigma > 0^*$ ，则有

$$\alpha\beta \geq \alpha\sigma.$$

- 设有序集 X 。证明：若 X 具有最小上界性，则 X 必成立最大下界性。
- 设 R 是 Dedekind 分割的全体，证明：设 R 中有限子集具有最大元与最小元。
- 设 R 是 Dedekind 分割的全体，关于 R 中乘法逆元的存在性如何证明？
- 证明：具有最小上界性的有序域一定具有 Archimedes 性。
- 思考题：证明：设系统 $(X, +, \cdot, \leq)$ 满足公理(F)(O)和(C)，则 $(X, +, \cdot, \leq)$ 有最小上界性。

即在用公理化定义了实数系后证明了确界存在定理。请接着思考，从确界存在定理出发，如何证明实数集中的单调有界收敛定理，闭区间套定理，有界数列有收敛子列定理，柯西收敛准则，有限覆盖定理？