9.19作业

1. 往证 $(L^p, d_p)$ 是一个度量空间

1) 非负性：$d_p(x,y)=0 \Leftrightarrow (\sum_{k\in N}(x_k-y_k)^p)^{\frac{1}{p}}=0 \Leftrightarrow x_k=y_k \Leftrightarrow x=y$

若 $x\neq y$，则 $d_p(x,y)>0$，故 $d_p(x,y)\geq 0$

2) 对称性：$d_p(x,y)=d_p(y,x)$ 易证

3) 三角不等式：由Minkeski不等式：$d_p(x,y)=(\sum_{k\in N}^{\infty}|x_k-y_k|^p)^{\frac{1}{p}}$

$=(\sum_{k\in N}^{\infty}|(x_k-z_k)-(y_k-z_k)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{k\in N}^{\infty}|x_k-z_k|^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{k\in N}^{\infty}|y_k-z_k|^p)^{\frac{1}{p}}$

$=d_p(x,z)+d_p(y,z)$

2. 1) 非负性：由 $d_p(x,y)$ 定义，$d_p(x,y)\geq 0$，$d_p(x,y)=0 \Leftrightarrow x(t)=y(t)$

2) 对称性：$d_p(x,y)=d_p(y,x)$ 易证

3) 三角不等式：由Minkeski不等式：

$$d_p(x(t),y(t))=(\int_a^b[(x(t)-z(t))-(y(t)-z(t))]^p dt)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq(\int_a^b(x(t)-z(t))^p dt)^{\frac{1}{p}}+(\int_a^b(y(t)-z(t))^p dt)^{\frac{1}{p}}$$

$$=d_p(x,z)+d_p(y,z)$$

3. 邻域只有自身一个点，

$\forall r\in(0,1]$，$\forall x_0\in X$，$B_r(x_0)=\{x\in X \mid d(x_0,x)<r\}=\{x_0\}$.

4. $(X_1\times X_2, d_B)$

(1&2) $d_B((x_1,x_2),(x_1',x_2'))=d_1(x_1,x_1')+d_2(x_2,x_2')$

$=d_1(x_1',x_1)+d_2(x_2',x_2)$

$=d_B((x_1',x_2'),(x_1,x_2))\geq 0$.

(3) $d_B((x_1,x_2),(x_1',x_2'))=d_1(x_1,x_1')+d_2(x_2,x_2')$

$\leq d_1(x_1,x_1'')+d_1(x_1',x_1'')+d_2(x_2,x_2'')+d_2(x_2',x_2'')$

$=d_B((x_1,x_2),(x_1'',x_2''))+d_B((x_1',x_2'),(x_1'',x_2''))$

邻域：$B_r^B(a)=\{(x_1,x_2)\in X_1\times X_2 \mid d_B((x_1,x_2),(a_1,a_2))<r\}$

即：$d_1(x_1,a_1)+d_2(x_2,a_2)<r$

$(\mathbb{X}_1\times\mathbb{X}_2, d_C)$

(1&2) 由 $d_C$ 定义及 $d_1, d_2$ 的非负性、对称性易证.

(3). $d_C((x_1,x_2),(x_1',x_2'))=\max\{d_1(x_1,x_1'), d_2(x_2,x_2')\}$

$\le \max\{d_1(x_1,x_1''), d_2(x_2,x_2'')\}+\max\{d_1(x_1',x_1''), d_2(x_2',x_2'')\}$

$= d_C((x_1,x_2),(x_1'',x_2''))+d_C((x_1',x_2'),(x_1'',x_2''))$

邻域 $B_r^C(a)=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{X}_1\times\mathbb{X}_2 \mid \max\{d_1(x_1,a), d_2(x_2,a)\}<r\}$

$B_r^B(a)\subset B_r^C(a)$，故 $r$ 相同时 ~~[illegible]~~ $B_r^C(a)$ 更大

5. (1)(2) 均不可. 反例：$x_k(t)=x_0(t)+e^{\frac{(x-\frac{a+b}{2})^2}{k^2}}$

满足 $\left(\int_a^b |x_k(t)-x_0(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\to 0$，但不逐点收敛，也不一致收敛

9-21作业.

~~1.(i) <i> φ~~

1. (1) 设$\gamma$是$X$上的子集族，且$\gamma$中的集合称为$X$中闭集

<i> $\phi\in\gamma,\ X\in\gamma$

<ii> $\forall\alpha\in A(\gamma_\alpha\in\gamma)\Rightarrow\bigcap_{\alpha\in A}\gamma_\alpha\in\gamma$

<iii> $\gamma_i\in\gamma\ (i=1,2,\cdots,n)\Rightarrow\bigcup_{i=1}^{n}\gamma_i\in\gamma$

(2) $\bar{E}=E\cup E'\Rightarrow\bar{E}$是闭集 $\Rightarrow\overline{(\bar{E})}=\bar{E}$

(3) $F^c$是开集 $\Rightarrow G\setminus F=G\cap F^c$也是开集

(4) $\tau_Y=\{Y\cap G\mid G\in\tau_X\}$，若$E\subset Y$且$E\in\tau_X\Rightarrow E\in Y\cap\tau_X$

即有：$E\in\tau_Y$

2. 1) 非负性：$d(x,y)\geq 0$. 易证

2) 对称性：$d(x,y)=d(y,x)$

3) 三角不等式：<1> $x\neq y$时，$d(x,y)=1$，$d(x,z)+d(y,z)\geq 1$.

<2> $x=y$时，$d(x,y)=0$.

综上：$d(x,y)\leq d(x,z)+d(y,z)$

$$\begin{cases}\text{开集：}\{\phi,X,\{p^c\mid\forall p\in X\}\}\\ \text{闭集：}\{\phi,X,\{p\mid\forall p\in X\}\}\\ \text{紧集：}\{p\mid\forall p\in X\}\end{cases}$$

3. (1&2) 由$d_1$及$d$的定义易知：$d_1$满足非负性与对称性.

(3) $d_1=1-\frac{1}{1+d}$，往证$d_1(x,y)\leq d_1(x,z)+d_1(y+z)$

即证：$\frac{1}{1+d(x,z)}+\frac{1}{1+d(y,z)}\leq\frac{1}{1+d(x,y)}+1$.

$\Longleftrightarrow\frac{1}{1+d(x,y)}\geq\frac{2+d(x,z)+d(y,z)}{1+d(x,z)+d(y,z)+d(x,z)d(y,z)}-1$

设$d(x,z)=m$，$d(y,z)=n$，$d(x,y)=t$

即证：$(1-mn)t\leq(1+m)(1+n)$

<1> 若 $1-mn\le 0$. 则 $(1-mn)t\le 0\le (1+m)(1+n)$

<2> 若 $1-mn>0$. $(1-mn)t\le (1-mn)(m+n)\le (1+m)(1+n)$. □

3-2 不是，$d_1<1$ 而 $d$ 可取任意值.

4. $I^n=\{x\in R^n \mid a_i<x_i<b_i,\ i=1,2,\cdots n\}$

5. $R^n$