9 月 21 日作业

（作业所涉及记号遵从课堂记号约定）

1. （1）试用闭集的语言叙述拓扑空间的公理;

   （2）设拓扑空间(X,τ)，$E\subset X$。证明$\overline{\left(\overline{E}\right)}=\overline{E}$；

   （3）证明：如果F是拓扑空间(X,τ)的闭集，G是(X,τ)的开集，证明：$G\setminus F$是(X,τ)的开集。

   （4）设(Y,τ_Y)是拓扑空间(X,τ_X)的子空间，$E\subset Y\subset X$。证明：如果$E\in\tau_X$，则$E\in\tau_Y$。

2. X是无穷集合，对于$p\in\mathrm{X},q\in X$，定义

$$d(x,y)=\begin{cases}1, p\neq q\\ 0, p=q\end{cases}。$$

   证明：(X,d)是一个度量空间。并指出(X,d)中那些子集是(X,d)中的开集，闭集与紧集。

3. （1）证明：在度量空间(X,d)中，令$d_1=\dfrac{d}{1+d}$，则(X,d_1)也是度量空间。

   （2）(X,d)与(X,d_1)所诱导的拓扑空间是否是同一个拓扑空间？

4. 拓扑空间的子集称为相对紧的，如果它的闭包是紧集。举出$\mathbb{R}^n$中相对紧子集的例子。

5. 拓扑空间称为局部紧集，如果这个空间的每个点有相对紧的邻域。举出局部紧但不紧的拓扑空间的例子。