

9月14日作业

(作业所涉及记号遵从课堂记号约定)

1. 证明剩余类环 \mathbb{Z}_p (p 是素数) 是一个域。
2. 证明有理数域 Q 满足 Archimedes 公里。
3. 证明 $\alpha = 0^* \cup \{p \mid p \geq 0 : p^2 < 2\}$ 是一个 Dedekind 无理分割。
4. 设 R 是 Dedekind 分割的全体，并定义序关系： $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$ 。证明若 E 是 R 的一个上有界子集，则 $\beta = \bigcup_{\alpha \in E} \alpha$ 是一个 Dedekind 分割。
5. 思考：设复数域 C 中元素 $z = a + bi, w = c + di$ ，若 $a < c$ ，或者 $a = c$ 但 $b < d$ ，就规定 $z < w$ 。证明复数域 C 在这种顺序关系下成为有序集。进一步思考这种顺序关系有没有最小上界性（有上界的子集具有上确界）？
6. 思考：用无尽小数出发引进实数系之后，建立的第一个实数基本定理是什么？该定理是如何证明的？