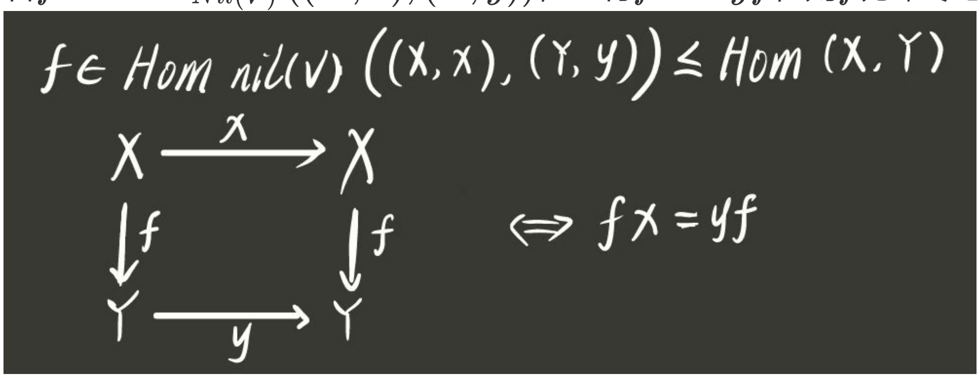
0.背景知识：

- 范畴(category)：有限维向量空间的集合
- 对象(object)：范畴中的元素
- 态射(mophism)：对象之间的关系

1.幂零范畴与幂零态射

1.1 幂零范畴与幂零态射的定义

- 幂零范畴(nilpotent category)：
  设A是一个有限维线性空间，a是A上的幂零算子，则(A,a)构成幂零范畴
- 幂零态射(nilpotent mophism)：
  若$f \in Hom_{Nil(V)}\left((X,x),(Y,y)\right)$，且有$fx=yf$，则$f$为幂零态射



1.2 幂零态射的维数

用K^p表示p维的线性空间；J_p表示K^p上的幂零变换，其在标准基下对应的矩阵是p阶约当块。定义$dim(X,x)=dim(X)$

【定理】
（1）$(X,x)\in Nil(V)$是不可分解的 $\iff$ $(X,x)\cong(K^p,J_p)$
（2）设p,q为两个正整数，则$\dim\operatorname{Hom}\left((K^p,J_p),(K^q,J_q)\right)=\min\{p,q\}$
进一步：对于$\forall(X,x)=\bigoplus\limits_{i=1}^{s}\left(K^{p_i},J_{p_i}\right),(Y,y)=\bigoplus\limits_{j=1}^{t}\left(K^{p_j},J_{q_j}\right)\in nil(V).$
$\dim\operatorname{Hom}((X,x),(Y,y))=\sum\limits_{1\le i\le s,1\le j\le t}\min\left(p_i,q_j\right)$

【证明】
由定义:

$$f\in Hom\left((K^p,J_p),(K^q,J_q)\right)\iff f\in Hom(K^p,K^q)\ satisfies\ fJ_p=J_qf$$

在一组特定的基下，实则是一个李雅普诺夫方程$MX-XN=0$(X为未知矩阵)

提取X的列，该方程等价于$(M^T \otimes I - I \otimes N)x = 0$，其中$M = J_q, N = J_p$，代入得：

$$J_q^T \otimes I_p - I_q \otimes J_p = \begin{pmatrix} -J_p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ I_p & -J_p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_p & -J_p & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I_p & -J_p & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & I_p & -J_p \end{pmatrix}_{pq \times pq}$$

> $A \otimes B$ 将B乘以A中的元素并放至相应位置

欲计算f维数，只需计算$J_q^T \otimes I_p - I_q \otimes J_p$零空间的维数

> $dimR(A^T) = dimR(A) = r$
> $dimN(A) = dimN(A^T) = n - r$

$r\left(J_q^T \otimes I_p - I_q \otimes J_p\right) = pq - min\left\{p, q\right\}$
故 $dim\ Hom((K^p, J_p), (k^q, J_q)) = pq - (pq - min\left\{p, q\right\}) = min\left\{p, q\right\}$

1.3 幂零态射的基

给定$Hom((K^p, J_p), (k^q, J_q))$，则满足以下条件的$\{f_i\}$为$f$的一组基

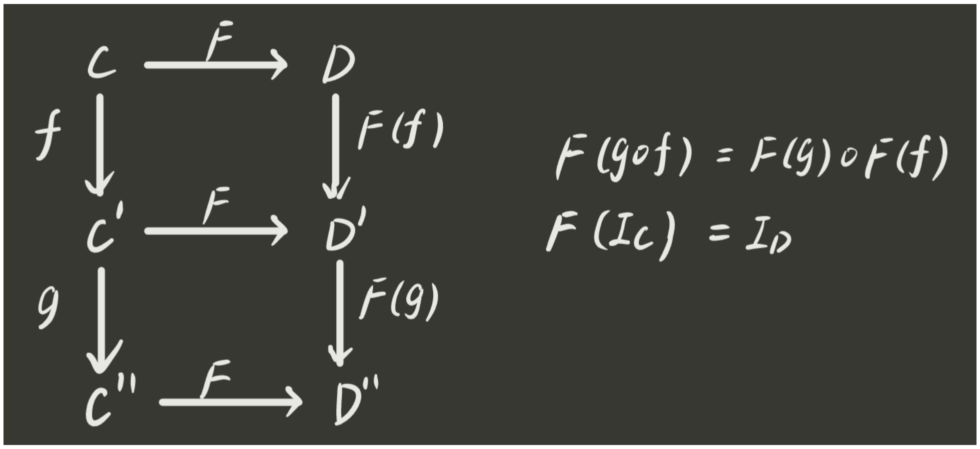
1. $J_q f_i = f_i J_p$（f_i满足f定义）
2. $J_q f_i = f_{i+1}$，$i = 1 \cdots, min\left\{p, q\right\} - 1$（每次迭代向上移动一行）
3. 满足条件1、2 的 f_1 对应矩阵的最后一行不为 0（0不可为基）

2.函子

2.1 函子的定义

令C和D是两个范畴。一个从C到D的函子F由如下信息给出：

1. 将每个对象 $X \in C$映射至一对象 $F(X) \in D$ 上，
2. 将每个态射 $f: X \to Y \in C$ 映射至一态射 $F(f): F(X) \to F(Y) \in D$ 上，使之满足下列条件:
3. 对任何对象 $X \in C$，恒有 $F\left(\mathbf{id}_X\right) = \mathbf{id}_{F(X)}$ (单位元映到单位元)
4. 对任何态射 $f: X \to Y, g: Y \to Z$，恒有 $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ （保持态射的复合）



2.2 tensor函子

给定线性空间B，$b \in End_v(B)$是B上的可逆线性算子，则$tensor$函子$Nil(v) \to Nil(v)$由以下组成：

- 函数$ob(Nil(v)) \to ob(Nil(v))$

$$(X, x) \longmapsto (X \otimes B, x \otimes b)$$

- $\forall (X, x), (Y, y) \in Nil(v)$，函数$Hom((X, x), (Y, y)) \to Hom((X \otimes B, x \otimes b), (Y \otimes B, y \otimes b))$

$$f \longmapsto f \otimes 1_B$$

2.3 Hom函子

给定幂零范畴(A, a)，Hom函子$Hom((A, a), -)$：$Nil(v) \to Nil(v)$由以下组成：

- 函数$ob(Nil(v)) \to ob(Nil(v))$

$$(X, x) \longmapsto (Hom((A, a), (X, x)), \theta_x)$$

  其中 $\theta_x = fx,\ \forall f \in Hom((A, a), (X, x))$
- $\forall (X, x), (Y, y) \in Nil(v)$，函数$Hom((X, x), (Y, y)) \to Hom(Hom((A, a), (X, x)), Hom((A, a), (Y, y)))$

$$f \longmapsto Hom((A, a), f)$$