

---

## 第三周作业

提交截止时间：2022-10-08 11:40

---

1. 做参考书 1 和 4 相应章节的例题并自行与书解法对照（不用提交）。
2. 证明： $n$  维微分系统 (2)（见 PPT）在区域  $G$  内最多有  $n$  个函数独立的首次积分。
3. 设函数  $F = F(t, x_1, \dots, x_n)$  在某个区域  $G \subset D$  内连续可微并且在  $G$  的任意子区域上都不是常函数。证明： $F(t, x_1, \dots, x_n)$  是微分系统 (2)（见 PPT）在区域  $G$  内的首次积分当且仅当

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} f_i(t, x_1, \dots, x_n) \equiv 0, \forall (t, x_1, \dots, x_n) \in G.$$

4. 求 SIR 模型:

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \nu I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \nu I(t)\end{aligned}$$

的首次积分。

5. 求系统

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial y}, \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x}\end{aligned}$$

的首次积分，其中  $H(x, y)$  是  $\mathbb{R}^2$  上的二阶可微函数。

6. 参考书 1（第二版）Page 45: 1(1)(3).
7. 参考书 1（第二版）Page 45: 2(2)(3).
8. 参考书 1（第二版）Page 45: 3(1)(2).
9. 参考书 1（第二版）Page 45: 4,5.
10. 参考书 1（第二版）Page 62: 4,5.