

9月19日作业

(作业所涉及记号遵从课堂记号约定)

1. 设 $l^p = \{(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) : x_k \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, \sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k|^p < \infty\}$, 对于任意 $x, y \in l^p$, 定义函数

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ 则 } (l^p, d_p) \text{ 是一个度量空间。}$$

2. 设 $C[a, b]$ 是 $[a, b]$ 上所有连续函数构成的集合, 对于任意 $x(t), y(t) \in C[a, b]$, 定义函数

$$d_p(x(t), y(t)) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ 则 } (C[a, b], d_p) \text{ 是一个度量空间。}$$

3. 设非空集合 X , 对于任意 $x, y \in X$, 定义函数 $d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$, 则 (X, d) 是一个

度量空间。特别地该度量空间邻域具有什么特点?

4. 设度量空间 (X_1, d_1) , (X_2, d_2) , 验证 $(X_1 \times X_2, d_B)$, $(X_1 \times X_2, d_C)$ 是度量空间, 并考

察这些度量空间的邻域的关系。

5. 在度量空间 $(C[a, b], d_p)$ 中, 若 $\{x_n(t)\} \subset C[a, b], x(t) \in C[a, b]$, 并且函数列 $\{x_n(t)\}$ 在

$(C[a, b], d_p)$ 中收敛 $x(t)$, 是否可以推出 (1) $\{x_n(t)\}$ 在 $[a, b]$ 中点态收敛于 $x(t)$; (2)

$\{x_n(t)\}$ 在 $[a, b]$ 中一致收敛于 $x(t)$? 请举反例说明。