11 月 9 日作业

（作业所涉及记号遵从课堂记号约定）

1. 设$(X,<\cdot,\cdot>)$是$[-\pi,\pi]$上 Riemann 可积或者瑕积分平方可积函数构成的内积空间，取通常的内积（注意瑕积分平方可积函数必定是绝对可积函数）。

   证明：（1）$\{1,\cos nx,\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$是一组正交组；

   （2） 设 $f\in X$，求 f 在$\{1,\cos nx,\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$下的 Fourier 级数。

2. 写出 $f(x)=x$ 在$[-\pi,\pi]$上的 Fourier 三角级数。

3. 将 $f(x)=x^2$， $x\in[0,\pi]$奇延拓到$[-\pi,\pi]$，并写出其在$[-\pi,\pi]$上的 Fourier 三角级数。

4. 设$(X,<\cdot,\cdot>)$，并且$\{x_n\}\subset X,\{y_n\}\subset X$。若$\{x_n\}$与$\{y_n\}$分别在$(X,<\cdot,\cdot>)$诱导的度量空间$(X，d)$中收敛于 x 和 y，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}<x_n,y_n>=<x,y>$。

5. 证明：l^2作为实线性空间可以定义内积如下：

$$<x,y>=\sum_{i=1}^{\infty}x_i y_i\ 。$$

   证明：内积空间$(l^2,<\cdot,\cdot>)$诱导的度量空间$(l^2，d)$是完备的度量空间（这样的空间称为 Hilbert 空间）。