9 月 28 日作业

（作业所涉及记号遵从课堂记号约定）

1. 考察 $C[-1,1]$ 上的函数列 $\{f_n(x)\}$，说明 $C[a,b]$ 在度量 $d_1(f,g)=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$ 意义下是不完备的，其中 $f_n(x)=\begin{cases}-1, & -1\le \mathrm{x}\le -\dfrac{1}{n},\\ nx, & -\dfrac{1}{n}\le x\le \dfrac{1}{n},\\ 1, & \dfrac{1}{n}\le x\le 1.\end{cases}$

2. 证明：(l^p,d_p) 与 (l^∞,d_∞) 是完备的度量空间。其中 $1\le p<\infty$。

3. 设 (X,d) 是度量空间。

（1）称 (X,d) 中两个 Cauchy 列 $\{x_n\}\{y_n\}$ 是等价的，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=0$。证明这是一个等价关系。

（2）设 $\tilde{X}$ 是这样得到的一切等价类的集合。如果 $\mathrm{P}\in\tilde{X}$，$\mathrm{Q}\in\tilde{X}$，$\{x_n\}\in\mathrm{P},\{y_n\}\in\mathrm{Q}$，定义 $\tilde{d}(P,Q)=\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)$。则这样定义的 $\tilde{d}$ 是恰当的，并且 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 是度量空间。

（3）对于每个 $x\in X$,各项均为 x 的常驻点列也是 Cauchy 列，记此 Cauchy 列为 $\{x\}$。设 P_x 是 $\tilde{X}$ 中包含常驻点列 $\{x\}$ 的成员。证明：对于一切 $x,y\in X$，$\tilde{d}(P_x,P_y)=d(x,y)$，即映射 $f(x)=P_x$ 是 (X,d) 到 $(\tilde{X}_0,\tilde{d})$ 的等距映射。其中 $\tilde{X}_0=\{P_x\mid x\in X\}$。

（4）证明：$(\tilde{X}_0,\tilde{d})$ 在 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 中稠密。

（5）证明：$(\tilde{X},\tilde{d})$ 是完备的度量空间。

4. 设 (X,d) 是完备的度量空间，A 是 X 的一个子集. 证明下列语句等价:

(1) A 是自列紧集.

(2) A 是全有界集，并且是闭集.