10月17日.

1. 设$\{f_n(x)\} \subset (B(X), d_\infty)$是Cauchy列

则有$\forall \varepsilon>0$. $\exists N$ s.t. $\forall n>N$, $\forall p \in N$: $d_\infty(f_{n+p}(x), f_n(x)) < \varepsilon$.

任意固定x. 即有: $\forall \varepsilon>0$. $\exists N$ s.t. $\forall n>N$. $\forall p\in N$, $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ ①

故$\{f_n(x)\}$为R上的Cauchy列, 记$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

令①式中$p\to\infty$, 则$\forall \varepsilon>0$. $\exists N$ s.t. $\forall n>N$, $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ ②

由x的任意性可知: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$

由连续性定理可知: $f(x) \in C(X)$

由$\{f_n(x)\}$为Cauchy列可知: 对$\varepsilon=1$. $\exists N_1 \in N$, s.t. $\forall n>N_1$, $|f_n(x) - f_{N_1+1}(x)| < 1$

故$|f_n(x)| \le |f_n(x) - f_{N_1+1}(x)| + |f_{N_1+1}(x)| \le 1+M_0$ $(|f_{N_1+1}(x)| \le M_0)$

而由②: $\exists N_2 \in N$, 对$\varepsilon=1$, 有$\forall n>N_2$. $|f(x) - f_n(x)| < 1$

取$N = \max\{N_1, N_2\}$, 对$n>N$, $|f(x)| \le |-f_n(x) + f(x)| + |f_n(x)| \le 2+M$.

故$f(x) \in B(X)$. 故$(B(X), d_\infty)$完备.

2. ~~取$f_n(x) = n\sin(nx)$~~ $f_n(x) = n\sin x$.

$|f_n(x)| = |n\sin x| \le n$. 故$f(x) \in (B(X), d_\infty)$, 但$x_0 = \frac{\pi}{2}$时:

$f_1(x_0)=1$, $f_2(x_0)=2$, $\cdots$, $f_n(x_0)=n$, $\cdots$ 无界, 故$\{f_n(x)\}$非一致有界

3. (1) $\forall \varepsilon>0$. ~~$\exists\delta$ s.t. $\forall$~~ 取$\delta=\varepsilon$. 则$\forall x,y\in X$, $d(x,y) = |x-y| < \delta$, 对$\forall n \in N$.

有: $|\sin\frac{x}{n} - \sin\frac{y}{n}| \le |\frac{x}{n} - \frac{y}{n}| \le |x-y| < \varepsilon$. 故$\{\sin\frac{x}{n}\}$等度连续.

~~(2). $\forall\varepsilon>0$. $\exists N$ s.t. $\forall n>N$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ 对任意$x\in X$成立.~~

~~由于$\{f_n(x)\}$在X上等度连续, 故……在X上一致连续.~~

~~任取$x,y\in X$. $|f(x)-f(y)| \le |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f(y)| + |f_n(y)-f(y)| < \ldots$~~

(2) $\{f_n(x)\}$在I上等度连续 ⇒ 从一$f_n(x)$在I上一致连续

$f_n(x) \to f(x)$: $\forall \varepsilon>0$. $\exists N$ st $\forall n>N$. $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ 对 $\forall x\in I$ 成立.

$f_n(x)$一致连续: $\exists \delta$ st $\forall |x-y|<\delta$, $|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$ 对 $\forall n\in N$ 成立.

故. $\forall x,y \in I$ 满足 $|x-y|<\delta$, 有:

$|f(x)-f(y)| \le |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(y)| + |f_n(y)-f(y)| < 3\varepsilon$. □

(3). $f_n(x)$在$[a,b]$上一致连续:

$\forall \varepsilon>0$. $\exists \delta>0$ st $\forall |x-y|<\delta$, $|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$. 对 $\forall n\in N$ 成立

~~$f_n(x)\to f(x)$: $\forall\varepsilon>0$. $\exists N$ st $\forall n>N$, $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$. 对 $\forall x\in[a,b]$ 成立.~~

~~对固定的x, 取上述δ, 令$y\in B_\delta(x)$~~

由 $f_n(x)\to f(x)$ 知: $\exists N$ st $\forall n>N$, $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$. 对 $\forall x\in[a,b]$ 成立

~~$\forall\varepsilon>0$. $\forall y\in B_\delta(x)$~~ 将$[a,b]$取 $x_1=a$. $x_2=a+\frac{b-a}{\delta}$, $x_3=a+\frac{b-a}{\delta}\cdot 2$, $\cdots$, $x_{\delta+1}=b$

则 $\forall y\in B_\delta(x_i)$ 均有 $|f(y)-f_n(y)| \le |f(y)-f(x)| + |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(y)| < 3\varepsilon$

$\exists N_i\in N$ 使得对 $\forall n>N_i$, 上式成立.

记 $N_0=\max\{N_i\}$. 故 $\forall n>N$. $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$. $f_n(x)$在$[a,b]$一致连续.

(4) 不对。若为无穷区间则 x_i 至多可列个, $\{N_i\}$可能无最大值

4. ① 已知E为紧子集

则E为(B_X, d_∞)中的自列紧集. 任取E中无限函数列$\{f_n(x)\}$, 则$\exists f(x)\in E$ st $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$

故E为一致闭集, 由一致收敛可得: $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1$ st $\forall n>N_1$ $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ 对 $\forall x\in X$ 成立.

不妨取 $\varepsilon<1$, 则 $\forall x\in X$. $|f_n(x)| \le \max\{|f(x)|+1, f_1(x), \cdots, f_{N_1}(x)\}$, 故$E$为逐点有界集

~~由于$f(x)\in E$, 故$f(x)$连续. [illegible]~~

~~故$\forall\varepsilon>0$.~~ 对上述N_1, $\forall n>N_1$, 均有: ~~$f_n(x)-f(x)$~~ $f(x)-\varepsilon \le f_n(x) \le f(x)+\varepsilon$

故对于$n>N_1$, $\forall\delta>0$. $\forall x,y\in X$, $d(x,y)<\delta$, $|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$

~~[illegible] 时 $f_n(x)$ 一致连续~~

又由$\{f_n(x)\}$的任意性可知：对于$\forall n\in N$,

$\forall \varepsilon>0.\ \exists\delta>0$ st $\forall x,y\in X$, $d(x,y)<\delta$, $|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$. 故$E$等度连续

③ 已知E逐点有界，等度连续、一致闭集

$E\subset(B(X),d_\infty)\subset(C(X),d_\infty)$；$E$逐点有界；$E$等度连续

$\Rightarrow$由Arzela-Ascoli定理：E在X上一致有界 ~~故E逐点有界~~

~~记{fn}⊂E，{fn(x)}是E中的任意无穷函数列 则∀ε>0 ∃δ>0 ∀x,y∈X |x-y|<δ |fn(x)-fn(y)|<ε~~

且$\forall\{f_n\}\subset E$，$\{f_n(x)\}$在E上一致收敛，又因E一致闭：$f_n(x)\rightrightarrows f(x)\in E$.

故E自列紧 $\Rightarrow$ E紧集

5. 构造函数 $t_n(x)=f(x)-f_n(x)$，$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=0$

则$\forall\varepsilon>0.\ \exists N(\varepsilon,x)$ st $\forall n>N$, $0\le|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$

由于$f_n(x)$与$f(x)$连续，故$t_n(x)$连续，故$\exists\delta_x>0$, st $\forall t\in(x-\delta_x,x+\delta_x)$.

有 $0\le t_n(x)<\varepsilon$，$\bigcup\limits_{x\in X}(x-\delta_x,x+\delta_x)$构成一个$X$的开覆盖.

X紧 $\Rightarrow$ 存在有限子覆盖，令$N=\max(N_1,N_2,\cdots,N_p)$.

则$\forall\varepsilon>0.\ \forall n>N$, $0\le t_n(x)<\varepsilon$，故$\{f_n(x)\}$一致收敛

10月19日

1. 取A中无限点列$\{x_n(t)\}=\{\sin\pi t,\ \sin\frac{\pi}{2}t,\ \sin\frac{\pi}{3}t,\cdots\}$

$\forall\varepsilon>0.\ \exists N=\frac{2\pi}{\varepsilon}$ st $\forall m,n>N$, $|\sin\frac{\pi}{m}t-\sin\frac{\pi}{n}t|\le|\pi t|\frac{|m-n|}{|mn|}\le\pi|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}|\le\pi|\frac{1}{m}|+\pi|\frac{1}{n}|<\varepsilon$

~~故∃δ=ε/π，对∀m,n>N~~，故$\{x_n(t)\}$为Cauchy列，记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)=x(t)$.

又由$(C[0,1],d_\infty)$为完备的度量空间可知：$x(t)\in C[0,1]$，故A为列紧集

2. 不成立. 反例：(Q,d_∞)中，闭集套$\{I_n\}=$ ~~{q | … < e^2}~~ $=\{q\,|\,(1+\frac{1}{n})^n\le q\le(1+\frac{1}{n})^{n+1}, q\in$

X为紧集时 ~~该条件~~成立.

3. $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$：$\forall \varepsilon>0$. $\exists N$ st $\forall n>N$. $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ 对 $\forall x\in[a.b]$ 成立. $\forall n\in N$

$P_{nm}(x) \rightrightarrows f_n(x)$：$\forall \varepsilon>0$. $\exists M$ st $\forall m>M$. $|P_{nm}(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ 对 $\forall x\in[a.b]$ 成立

不妨取 $n=N+1$，则 $\forall m>M$. $|P_{N+1,m}(x)-f(x)| \leq |P_{N+1,m}(x)-f_{N+1}(x)| + |f_{N+1}(x)-f(x)|$

$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$

故 $\exists\{P_i\}$ st $P_i(x) \rightrightarrows f(x)$. □.

4. 首先证明：~~连续函数可用~~ 可积函数可用连续函数逼近

即：f 是 $[a.b]$ 上 Riemann 可积的函数，则 $\exists$ 连续函数族 $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$

使得 $\int_a^b |f(x)-f_k(x)|dx \to 0, k\to\infty$.

证：因为 f 在 $[a.b]$ 上 Riemann 可积，故 $\forall \varepsilon>0$. $\exists$ 划分 $a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b$

满足 $f^*(x)=\sup\limits_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)$. $(j=1,2,\cdots N)$ 有 $\int_a^b |f^*(x)-f(x)|dx<\varepsilon$ ①

再取一个较小的 δ，构造 $\tilde{f}(x)$，$\tilde{f}(x)$ 在 $[x_i-\delta, x_i+\delta]$ 外与 $f^*(x)$ 相等.

在该区间内是 $(x_i-\delta, f^*(x_i-\delta))$ 与 $(x_i+\delta, f^*(x_i+\delta))$ 的端点的连线

特别地，取 $\tilde{f}(a)=f^*(a)$, $\tilde{f}(b)=f^*(b)$；记 $\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|=B$

则有 $\int_a^b |f^*(x)-\tilde{f}(x)|dx \leq (2\delta)(2B)\cdot N$

故可取 $\delta<\frac{\varepsilon}{4BN}$，使得 $\int_a^b |f^*(x)-\tilde{f}(x)|dx<\varepsilon$. ②

综合 ①.② 可得：$\int_a^b |f(x)-\tilde{f}(x)|<2\varepsilon$

取 $2\varepsilon=\frac{1}{k}$，$k=\frac{1}{2\varepsilon}$，得到 $f_k(x)=\tilde{f_k}(x)$，$\{f_k(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$

再由题目3可知：

Riemann 可积函数可用连续函数逼近 $\}$ => Riemann 可积函数可用
连续函数可用多项式函数逼近 $\}$ 多项式函数逼近

5)先证 $P_n(x)$ 在 $x\in[-1,1]$ 上满足 $0\le P_n(x)\le 1$

1)若 $P_n(x)>1$，则 $P_n(x)=P_{n-1}(x)+\frac{x^2-P_{n-1}^2(x)}{2}>1 \Rightarrow (P_{n-1}(x)-1)^2+(1-x^2)>0$. 显然矛盾 故 $P_n(x)\le 1$

2)若 $P_n(x)<0$，则 $P_n(x)=P_{n-1}(x)+\frac{x^2-P_{n-1}^2(x)}{2}<0 \Rightarrow (P_{n-1}(x)-1)^2>1$，与 $P_n(x)\le 1$ 矛盾，故 $P_n(x)\ge 0$.

$P_n(x)-|x|=P_{n-1}(x)+\frac{x^2-P_{n-1}^2(x)}{2}-|x|=(P_{n-1}(x)-|x|)\left(1-\frac{P_{n-1}(x)+|x|}{2}\right)$

① $x=0$ 时，$P_n(x)=|x|=0$.

② $x\ne 0$ 时. $0<(P_{n-1}(x)-|x|)\left(1-\frac{P_{n-1}(x)+|x|}{2}\right)<P_{n-1}(x)-|x|$

记 $a_n(x)=P_n(x)-|x|$，则 $\begin{cases} x=0\text{时}, a_n(x)=0 \\ x\ne0\text{且}x\in[-1,1]\text{时}, a_n(x)\downarrow\text{且}a_n(x)>0. \end{cases}$

$\Rightarrow \forall x_0\in[-1,0)\cup(0,1]$. $\lim_{n\to\infty} a_n(x_0)=0$.

故 $\{a_n(x)\}$ 收敛于常函数 0

又由 $a_n(x)=\begin{cases} P_n(x)-x, & x\ge 0 \\ P_n(x)+x, & x<0 \end{cases}$，可知 $\{a_n(x)\}$ 是等度连续的

则由10月17日3-(3)结论可得：$\{a_n(x)\}$ 一致收敛于 0 $\Rightarrow P_n(x)$ 一致收敛于 $|x|$

阅

10.27