第五周作业.

P71 1-(1) $f(x,y)=|y|^{\alpha}$. 则 $|f(x,y_0)-f(x,0)|=|y|^{\alpha}$

设 $F(r)=|r|^{\alpha}$, 则 $|f(x,y)-f(x,0)|\le F(y-0)$

① $\alpha>1$. $\int_0^{r_1}\frac{dr}{F(r)}=\frac{1}{1-\alpha}|r|^{1-\alpha}\Big|_0^{r_1}=\infty$, $\Rightarrow y(0)=0$ 解唯一.

② $\alpha=1$. $\int_0^{r_1}\frac{dr}{F(r)}=\ln|r|\Big|_0^{r_1}=\infty$ $\Rightarrow y(0)=0$ 解唯一.

③ $0<\alpha<1$ $\int_0^{r_1}\frac{dr}{F(r)}=\frac{1}{1-\alpha}|r|^{1-\alpha}\Big|_0^{r_1}<+\infty$ $\Rightarrow y(0)=0$ 解不唯一.

故 $\alpha\ge1$ 解唯一 $0<\alpha<1$. 解不唯一.

(2) $\lim\limits_{y\to0}y|\ln y|=0$ $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}$ 在 R 上连续.

取 $F(r)=|r\ln|r||$, 有 $|f(x,y)-f(x,0)|\le F(y-0)$

$\int_0^{r_1}\frac{dr}{F(r)}=\infty$ 故解唯一.

3. 反证. 假设右侧解不唯一. 记为 $y_1(x)$. $y_2(x)$

则: $y_1(x_0)=y_2(x_0)=y_0$. ; $\exists x_1>x_0$, st $y_1(x_1)>y_2(x_1)$

令 $\mu=\sup\{x_0\le x<x_1,\ y_1(x)=y_2(x)\}$, 由 y 的连续性可知

$\forall x\in(\mu,x_1)$. $y_1(x)>y_2(x)$. 令 $m(x)=y_1(x)-y_2(x)$. 则 $m(\mu)=0$.

$\frac{dm}{dx}=f(x,y_1(x))-f(x,y_2(x))$, 因为 $f(x,y)$ 对 y 递减. 故 $\frac{dr}{dx}<0$.

对 $\forall x\in(\mu,x_1)$, $r(x)<r(\mu)=0$, $\Rightarrow$ 由 y 的连续性: $y_1(x_1)<y_2(x_1)$ 矛盾.

故右侧解唯一.

P89 2.(1) $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$. 则 $f(x,y)$ 在 $G_1\{-\infty<x<+\infty, y\ne0\}$ 上连续

或在 $G_2\{-\infty<x<0\cup0<x<+\infty, -\infty<y<+\infty\}$ 上连续

由延伸定理: 对 G_1、G_2 中任意一点 P_0, 均有 ~~唯一~~ 积分曲线 $\Gamma: y=\phi(x)$

延伸至 G_1、G_2 边界

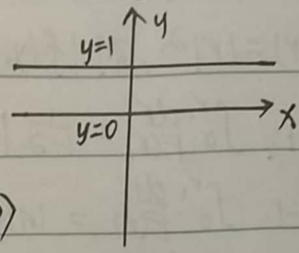
即对于 G_1. 解的存在区间为 $(-\infty,+\infty)$

对于 G_2. 解的存在区间为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

(2) $f=y(y-1)$ 对 ~~x~~ 在 (x,y) 上连续，且对 y 有连续的偏导数.

故 $\forall P_0(x_0,y_0)\in G$，$\exists!\ \Gamma: y=\phi(x)$ 且 Γ 可延伸至无限远

而 $y=0$ 与 $y=1$ 显然为解.



综合 $y<0$；$0<y<1$；$y>1$ 三种情况

均有 $x\in(-\infty,+\infty)$ $\Rightarrow$ 故解所在区间 $(-\infty,+\infty)$

(3) 令 $f(x,y)=y\sin(xy)$，则 $f(x,y)$ 在 $\{-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty\}$ 连续

取 $A(x)=1$，$B(x)=0$. $|f(x,y)|\le A(x)|y|+B(x)$.

$\Rightarrow$ 故区间为 $(-\infty,+\infty)$

3. 不矛盾. 将该方程化为微分方程：$\frac{dy}{dx}=\cancel{\ } -\frac{x}{y}$

令 $f(x,y)=-\frac{x}{y}$ 则 $f(x,y)$ 在 G 上不~~满~~连续 $(y\neq0)$

不满足延伸定理条件.

4. 对该初值问题，由延伸定理推论：

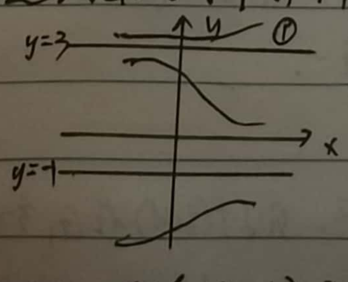
任意一个包含 (x_0,y_0) 的区域 G，初值问题解存在且唯一，并可延伸至 G 边界.

$y^2-2y-3=(y-3)(y+1)$ $\Rightarrow$ $y=3$. $y=-1$ 是线素场水平等斜线.

~~y>3~~ ① $y=3$ 上方的积分曲线单增

② $y=-1$，$y=3$ 间的积分曲线单减

③ $y=-1$ 下方的积分曲线单增



①：$P(x_0,y_0)$ 位于①，则必向左延伸至 $-\infty$. ~~xx~~ $(-\infty,x_0)$ 必有解

②：$P(x_0,y_0)$ 位于② 则必向右延伸至 $+\infty$，向~~x~~左延伸至 $-\infty$. $(-\infty,+\infty)$ 必有解

③：$P(x_0,y_0)$ 位于③. 则必向右延伸至 $+\infty$，$(x_0,+\infty)$ 必有解

综上：$a=-\infty$ / $b=+\infty$ 至少成立一个

~~5. $\varphi_n(x) = f(x,y)$ $\varphi_n(x)$ 满足 $\frac{dy}{dx} = f(x,y) - \varepsilon_n$. 而 $f(x,y) - \varepsilon_n < F(x,y)$~~

~~由第一比较定~~

~~①待证：$\varphi(x) \le \phi(x)$. $x_0 \le x < b$.~~

5. $\varphi_n(x)$ 满足 $\frac{dy}{dx} = f(x,y) - \varepsilon_n$，而 $f(x,y) - \varepsilon_n < F(x,y)$

由第一比较定理：

$\varphi_n(x) < \phi(x) \quad (x_0 \le x < b) \xrightarrow{n \to \infty} \varphi(x) \le \phi(x)$，$x_0 \le x < b$

$\varphi_n(x) > \phi(x) \quad (a < x \le x_0) \xrightarrow{n \to \infty} \varphi(x) \ge \phi(x)$，$a < x \le x_0$