

9 月 15 日作业

(作业所涉及记号遵从课堂记号约定)

1. 设 R 是 Dedekind 分割的全体, 证明下列乘法保序性: 若 $\forall \alpha > 0^*, \beta \geq \sigma > 0^*$, 则有 $\alpha\beta \geq \alpha\sigma$ 。
2. 设有序集 X 。证明: 若 X 具有最小上界性, 则 X 必成立最大下界性。
3. 设 R 是 Dedekind 分割的全体, 证明: 设 R 中有限子集具有最大元与最小元。
4. 设 R 是 Dedekind 分割的全体, 关于 R 中乘法逆元的存在性如何证明?
5. 证明: 具有最小上界性的有序域一定具有 Archimedes 性。
6. 思考题: 证明: 设系统 $(X, +, \cdot, \leq)$ 满足公理(F)(O)和(C), 则 $(X, +, \cdot, \leq)$ 有最小上界性。

即在用公理化定义了实数系后证明了确界存在定理。请接着思考, 从确界存在定理出发, 如何证明实数集中的单调有界收敛定理, 闭区间套定理, 有界数列有收敛子列定理, 柯西收敛准则, 有限覆盖定理?