Fonction Gamma d'Euler et fonction zêta de Riemann

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

1. Introduction

2. La fonction $\Gamma(z)$

Existe-t-il une manière naturelle d'*interpoler* la fonction factorielle $\mathbb{N} \ni n \longmapsto n!$ entre deux entiers n et $n+1$ quelconques ? La réponse est oui !

Pour $x > 0$ réel, la *fonction Gamma* est définie par :

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt.$$

Cette intégrale converge près de $t = 0$, puisque la fonction t^{x-1} y est intégrable d'après le critère de Riemann, et elle converge aussi pour $t \longrightarrow \infty$, simplement parce que la décroissance de e^{-t} neutralise toute croissance polynomiale. En intégrant par parties, le lecteur pourra vérifier que l'on a $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, mais il peut s'en dispenser, puisque nous allons aussi faire ce calcul dans un instant. Sans attendre, décollons vers l'imaginaire !

Quelques observations simples permettent en effet d'étendre le domaine de définition.

Théorème 2.1. *La fonction $\mathbb{R}_+^* \ni x \longmapsto \Gamma(x)$ se prolonge comme fonction holomorphe dans le demi-plan droit $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 0\}$, par la formule :*

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt \qquad (\operatorname{Re} z > 0).$$

Évidemment, on note :

$$z = x + i\, y.$$

Démonstration. Commençons par observer que :

$$\big|e^{-t}\, t^{z-1}\big| = e^{-t}\, \big|e^{(z-1)\log t}\big| = e^{t}\, e^{(x-1)\log t} = e^{-t}\, t^{x-1},$$

de telle sorte que cette intégrale complexe converge effectivement lorsque $\operatorname{Re} z = x > 0$, puisqu'elle est majorée par :

$$\begin{aligned}\big|\Gamma(z)\big| = \left|\int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt\right| &\leqslant \int_0^\infty \big|e^{-t}\, t^{z-1}\big|\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt = \Gamma(x) < \infty.\end{aligned}$$

Mais pourquoi l'application $z \longmapsto \Gamma(z)$ serait-elle de surcroît holomorphe ?

Il suffit de faire voir, pour tous nombres positifs $0 < \delta < \text{M} < \infty$, que cette intégrale définit une fonction qui est holomorphe dans la bande verticale :

$$B_{\delta,\text{M}} := \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ \delta < \mathsf{Re}\, z < \text{M}\big\}.$$

Puisqu'elle peut être envisagée comme $\lim_{\varepsilon \xrightarrow{>} 0} \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon}$, introduisons :

$$\Phi_\varepsilon(z) := \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} e^{-t}\, e^{(z-1)\log t}\, dt.$$

D'après un théorème connu, puisque l'intégrande est visiblement holomorphe par rapport à z, cette fonction $z \longmapsto \Phi_\varepsilon(z)$ est holomorphe dans la bande $B_{\delta,\text{M}}$. En prenant $\varepsilon := \frac{1}{n}$, il suffit alors de montrer que la suite $\big(\Phi_{\frac{1}{n}}(z)\big)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions holomorphes dans $B_{\delta,\text{M}}$ converge uniformément vers $\Gamma(z)$, car un théorème connu de Cauchy garantira alors que la limite y est holomorphe.

À cette fin, estimons :

$$\big|\Gamma(z) - \Phi_\varepsilon(z)\big| \leqslant \int_0^\varepsilon e^{-t}\, t^{x-1}\, dt + \int_{1/\varepsilon}^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \qquad {\scriptstyle (z \in B_{\delta,\text{M}})}.$$

La première intégrale converge uniformément vers 0 lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$, puisqu'on peut la majorer par :

$$\int_0^\varepsilon e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \leqslant 1 \cdot \int_0^\varepsilon t^{x-1}\, dt = \Big[\tfrac{1}{x}\, t^x\Big]_0^\varepsilon = \frac{\varepsilon^x}{x} \leqslant \frac{\varepsilon^\delta}{\delta}.$$

Quant à la seconde :

$$\bigg|\int_{1/\varepsilon}^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt\bigg| \leqslant \int_{1/\varepsilon}^\infty e^{-t}\, t^{\text{M}-1}\, dt \leqslant \mathsf{constante} \int_{1/\varepsilon}^\infty e^{-t/2}\, dt \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0. \qquad \square$$

Malgré le fait que l'intégrale qui définit $\Gamma(z)$ n'est *pas* absolument convergente pour les valeurs de z telles que $\mathsf{Re}\, z \leqslant 0$, nous allons pouvoir prolonger méromorphiquement Γ au plan complexe $\mathbb{C}$ tout entier, avec peu de pôles, seulement aux point entiers négatifs $z = 0, -1, -2, -3, \dots$. L'unicité de ce prolongement méromorphe sera alors garantie par le principe d'unicité pour les fonctions holomorhes, en-dehors de cet ensemble discret de pôles. Nous continuerons à noter $\Gamma \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ ce prolongement méromorphe.

L'existence de pôles aux points entiers négatifs provient en fait d'une identité fonctionnelle importante.

Lemme 2.2. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $x = \mathsf{Re}\, z > 0$, on a :*

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z),$$

et :

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad {\scriptstyle (\forall\, n \in \mathbb{N})}.$$

Démonstration. Une simple intégration par parties dans le domaine de convergence $\{\mathsf{Re}\, z > 0\}$ explique l'identité :

$$\begin{aligned} z\,\Gamma(z) &= \int_0^\infty e^{-t}\, z\, t^{z-1}\, dt \\ &= \underline{\Big[e^{-t}\, t^z\Big]_0^\infty} - \int_0^\infty -e^{-t}\, t^z\, dt \\ &= 0 + \Gamma(z+1), \end{aligned}$$

et comme :

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = \Big[-e^{-t}\Big]_0^\infty = 1,$$

une récurrence instantanée donne $\Gamma(n+1) = n!$ — point d'exclamation de plaisir ! $\square$

C'est la division nécessaire par le facteur z dans la formule quasi-équivalente $\Gamma(z) = \frac{1}{z}\,\Gamma(z+1)$ qui va introduire des pôles — heureusement simples !

Théorème 2.3. *La fonction $\Gamma(z)$, initialement définie dans $\{\mathsf{Re}\, z > 0\}$, bénéficie d'un prolongement méromorphe au plan complexe $\mathbb{C}$ tout entier dont les seules singularités sont des pôles* simples *aux entiers négatifs $z = 0, -1, -2, -3, \dots$, où elle a pour résidus :*

$$\mathsf{res}_{z=-n}\,\Gamma = \frac{(-1)^n}{n!} \qquad\qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

Démonstration. Il suffit de prolonger Γ à tout demi-plan de la forme $\{\mathsf{Re}\, z > -m\}$ avec un entier $m \geqslant 1$ quelconque.

Pour $\mathsf{Re}\, z > -1$, définissons :

$$\Phi_1(z) := \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

Puisque $\Gamma(z+1)$ est holomorphe dans $\{\mathsf{Re}\, z > -1\}$, il est clair que Φ_1 est méromorphe dans ce demi-plan, et qu'elle y a une unique singularité, un pôle d'ordre 1 en $z = 0$. Comme $\Gamma(1) = 1$, son résidu y vaut $1 = \frac{(-1)^0}{0\,!}$. De plus, dans le sous-demi-plan $\{\mathsf{Re}\, z > 0\} \subset \{\mathsf{Re}\, z > -1\}$, l'identité fondamentale montre que cette fonction :

$$\Phi_1(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \Gamma(z)$$

coïncide bien avec la fonction à prolonger.

Pour un entier $m \geqslant 1$ quelconque, définissons dans le demi-plan $\{\mathsf{Re}\, z > -m\}$ la fonction :

$$\Phi_m(z) := \frac{\Gamma(z+m)}{(z+m-1)\cdots(z+n+1)(z+n)(z+n-1)\cdots(z+1)z}.$$

Visiblement, cette fonction est méromorphe avec des pôles simples en $z = -m+1, \dots, -1, 0$, et en un point entier négatif $z = -n$ avec $0 \leqslant n \leqslant m-1$ quelconque, elle y a pour résidu :

$$\begin{aligned}
\mathsf{res}_{z=-n}\,\Phi_m(z) &= \frac{\Gamma(-n+m)}{(-n+m-1)\cdots(1)\ (-1)(-2)\cdots(-n)} \\
&= \frac{(m-n+1)\,!}{(m-n+1)\,!\,(-1)^n\,n!} \\
&= \frac{(-1)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

De plus, dans le sous-demi-plan $\{\mathsf{Re}\, z > 0\} \subset \{\mathsf{Re}\, z > -m\}$, une itération de l'identité fondamentale du Lemme 2.2 :

$$\Gamma(z+m) = (z+m-1)\cdots(z+1)z\,\Gamma(z)$$

montre aussitôt que $\Phi_m(z) = \Gamma(z)$ coïncide bien avec la fonction à prolonger.

D'ailleurs, le principe d'identité garantit aussi que $\Phi_m = \Phi_n$ pour tous entiers $1 \leqslant n \leqslant m$, dans $\{\mathsf{Re}\, z > -n\}\big\backslash\mathbb{Z}_-$. $\square$

L'identité fondamentale $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ continue d'être satisfaite (exercice mental) dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$ — c'est-à-dire en-dehors des pôles — parce que (solution) les deux côtés de cette formule coïncident dans $\{\mathrm{Re}\, z > 0\}$.

On peut même se convaincre (exercice) qu'en un entier négatif quelconque $z = -n$ avec $n \geqslant 1$, les deux membres de l'identité $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ sont infinis, et que :

$$\mathrm{res}_{z=-n}\,\Gamma(z+1) \,=\, (-n)\,\mathrm{res}_{z=-n}\,\Gamma(z).$$

Enfin, en $z = 0$, notons que :

$$\Gamma(1) \,=\, \lim_{z\to 0} z\,\Gamma(z).$$

Voici une démonstration alternative du Théorème 2.3, encore plus éclairante, dont les idées se recontreront aussi plus tard. Elle consiste à décomposer l'intégrale qui définit $\Gamma(z)$ pour $\mathrm{Re}\, z > 0$ en deux morceaux :

$$\Gamma(z) \,=\, \int_0^1 e^{-t}\,t^{z-1}\,dt + \int_1^\infty e^{-t}\,t^{z-1}\,dt.$$

Grâce à la décroissance forte de e^{-t}, le deuxième définit une fonction holomorphe entière, définie sur $\mathbb{C}$. Quant au premier morceau, développons-y en série entière l'exponentielle, justifions la convergence normale (exercice), et intégrons terme à terme :

$$\int_0^1 e^{-t}\,t^{z-1}\,dt \,=\, \sum_{n=0}^\infty \int_0^1 \frac{(-t)^n}{n!}\,t^{z-1}\,dt \,=\, \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,(n+z)}.$$

Ceci nous permet d'écrire formellement :

$$\Gamma(z) \,=\, \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,(n+z)} + \int_1^\infty e^{-t}\,t^{z-1}\,dt \qquad (\mathrm{Re}\, z > 0).$$

Assertion 2.4. *Cette série infinie* $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,(n+z)}$ *définit une fonction méromorphe dans* $\mathbb{C}$ *ayant pour seules singularités des pôles simples aux entiers négatifs* $z = -n$ *où elle a pour résidus* $\frac{(-1)^n}{n!}$.

Démonstration. Pour un grand rayon $\mathrm{R} \gg 1$, et pour un entier $\mathrm{N} > 2\,\mathrm{R}$, décomposons-la en :

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,(n+z)} \,=\, \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+z)} + \sum_{n=\mathrm{N}+1}^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,(n+z)}.$$

La première somme, qui est finie, définit une fonction méromorphe dans le disque $\{|z| < \mathrm{R}\}$ avec les pôles et les résidus annoncés, tout à fait en accord avec ce que la première démonstration a déjà fait voir.

Pour ce qui est de la deuxième somme portant sur des entiers $n > \mathrm{N} > 2\,\mathrm{R}$, toujours pour $|z| < \mathrm{R}$, comme $|n+z| \geqslant \mathrm{R}$ implique :

$$\left|\frac{(-1)^n}{n!\,(n+z)}\right| \,\leqslant\, \frac{1}{n!\,\mathrm{R}},$$

nous voyons instantanément qu'elle converge normalement sur le disque $\{|z| < \mathrm{R}\}$, donc y définit une fonction holomorphe grâce à un théorème déjà connu.

Comme $\mathrm{R} \gg 1$ pouvait être choisi arbitrairement grand, tout ceci montre que la représentation de $\Gamma(z)$ sous la forme d'une série méromorphe infinie suivie d'une intégrale est valable dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$ tout entier. $\square$

En définitive, nous avons pour *tout* $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$:

$$\Gamma(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,!\,(n+z)} + \int_1^{\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt. \tag{2.5}$$

Présentons maintenant d'autres propriétés de la fonction Γ. Voici une identité qui dévoile une symétrie fondamentale de Γ par rapport à la droite $\{\mathsf{Re}\, z = \frac{1}{2}\}$.

Théorème 2.6. [Formule des compléments] *En tout* $z \in \mathbb{C}$ *:*

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) \;=\; \frac{\pi}{\sin \pi\, z}.$$

Observons que $\Gamma(1-z)$ a des pôles simples aux entiers naturels $z = 1, 2, 3, \dots$, de telle sorte que le produit $\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)$, une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, possède des pôles simples en *tous* les entiers relatifs $\in \mathbb{Z}$, tout aussi bien que la fonction $\frac{\pi}{\sin \pi\, z}$.

Démonstration. Il suffit d'établir cette identité en des points *réels* $0 < x < 1$, car alors le principe d'identité garantira aussitôt qu'elle est vraie dans tout $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$.

Lemme 2.7. *Pour un paramètre réel* $0 < a < 1$ *quelconque, on a :*

$$\int_0^{\infty} \frac{v^{a-1}}{1+v}\, dv \;=\; \frac{\pi}{\sin \pi\, a}.$$

Démonstration. Il suffit d'effectuer le changement de variable $v = e^x$ et de se souvenir de l'intégration, déjà vue, de la fonction $f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$ le long de rectangles de sommets $-\,\mathrm{R}$, R, $\mathrm{R} + 2i\pi$, $-\mathrm{R} + 2i\pi$ avec $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$, pour calculer l'intégrale qui apparaît :

$$\int_0^{\infty} \frac{v^{a-1}}{1+v}\, dv \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\, dx \;=\; \frac{\pi}{\sin \pi\, a}.$$

□

Pour établir le théorème, avec un paramètre $t > 0$ quelconque, en effectuant le changement de variable $v\, t = u$, préparons :

$$\Gamma(1-x) \;=\; \int_0^{\infty} e^{-u}\, u^{-x}\, du \;=\; t \int_0^{\infty} e^{-vt}\, \big(v\, t\big)^{-x}\, dv,$$

et grâce à cette astuce, calculons, puis concluons :

$$\begin{aligned}
\Gamma(1-x)\,\Gamma(x) \;&=\; \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, \Gamma(1-x)\, dt \\
&=\; \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{x-1} \left(t \int_0^{\infty} e^{-vt}\, \big(v\, t\big)^{-x}\, dv \right) dt \\
&=\; \int_0^{\infty} v^{-x} \left(\int_0^{\infty} e^{-t\,(1+v)}\, dt \right) dv \\
&=\; \int_0^{\infty} v^{-x} \left[\frac{e^{-t\,(1+v)}}{-1-v} \right]_0^{\infty} dv \\
&=\; \int_0^{\infty} \frac{v^{-x}}{1+v}\, dv \\
&=\; \frac{\pi}{\sin \pi\,(1-x)} \\
&=\; \frac{\pi}{\sin \pi\, x}.
\end{aligned}$$

□

En particulier, au point $z = \frac{1}{2}$, en observant que $\Gamma(x) > 0$ quand $x \in \mathbb{R}_+^*$, nous trouvons la valeur spéciale :

$$\Gamma\big(\tfrac{1}{2}\big) \,=\, \sqrt{\pi}.$$

Poursuivons notre étude de la fonction Gamma en regardant son inverse, fonction qui devient entière et à croissance contrôlée.

Théorème 2.8. *La fonction $z \longmapsto \Gamma(z)$ d'Euler jouit des propriétés suivantes.*

(1) $\frac{1}{\Gamma(z)} \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ *est holomorphe entière, avec des zéros simples aux entiers négatifs* $z = 0, -1, -2, \dots,$ *et aucun zéro ailleurs.*

(2) $\frac{1}{\Gamma(z)}$ *a pour croissance :*

$$\bigg|\frac{1}{\Gamma(z)}\bigg| \,\leqslant\, c_1\, e^{c_2\,|z|\,\log|z|} \qquad\qquad (\forall\, z \in \mathbb{C}),$$

où $0 < c_1, c_2 < \infty$ *sont des constantes universelles.*

Une telle inégalité doit en fait s'interpréter quand $|z| \longrightarrow \infty$. On dit alors que $\frac{1}{\Gamma(z)}$ est *d'ordre* $\leqslant 1$, au sens où, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $0 < c_{1,\varepsilon} < \infty$ telle que :

$$\bigg|\frac{1}{\Gamma(z)}\bigg| \,\leqslant\, c_{1,\varepsilon}\, e^{c_2\,|z|^{1+\varepsilon}}.$$

L'Exercice 1 montre que l'on ne peut pas ici se dispenser d'un $\varepsilon > 0$ dans la puissance $|z|^{1+\varepsilon}$.

Démonstration. Grâce au Théorème 2.6 qui précède, nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \,=\, \frac{\sin \pi z}{\pi}\,\Gamma(1-z),$$

et à droite, les pôles simples de $\Gamma(1-z)$ situés aux entiers $z = 1, 2, 3, \dots$ sont annihilés par les zéros simples de $\sin \pi z$, donc $\frac{1}{\Gamma(z)}$ est holomorphe entière avec des zéros simples aux zéros restants de $\sin \pi z$, c'est-à-dire en $z = 0, -1, -2, \dots$. De plus, $\frac{1}{\Gamma(z)} \neq 0$ ailleurs, car les seuls zéros de $\sin \pi z$ sont en $z \in \mathbb{N}$.

Pour établir l'estimée de croissance, avec un réel $x \geqslant 0$ quelconque, et avec l'entier positif unique $x \leqslant n \leqslant x+1$, commençons par :

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty e^{-t}\, t^x\, dt \,&\leqslant\, \int_0^\infty e^{-t}\, t^n\, dt \\
&=\, n\,! \\
&\leqslant\, n^n \\
&=\, e^{n \log n} \\
&\leqslant\, e^{(x+1)\,\log\,(x+1)}.
\end{aligned}$$

En revenant à l'identité (2.5) écrite pour $\Gamma(1-z)$:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \,=\, \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,!\,(n+1-z)} + \frac{\sin \pi z}{\pi} \int_1^\infty e^{-t}\, t^{-z}\, dt,$$

nous pouvons alors en utilisant $\big|e^w\big| \leqslant e^{|w|}$ ainsi que pour $t \geqslant 0$:

$$\big|t^{-z}\big| \,=\, \big|e^{-z \log t}\big| \,=\, e^{-\mathrm{Re}\, z\, \log t} \,\leqslant\, e^{|\mathrm{Re}\, z|\, \log t} \,\leqslant\, e^{|z|\, \log t} \,=\, t^{|z|},$$

estimer la croissance du deuxième terme :

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}{2i\,\pi}\right|\left|\int_1^\infty e^{-t}\,t^{-z}\,dt\right| &\leqslant \frac{e^{\pi|z|}}{\pi}\int_1^\infty e^{-t}\,t^{|z|}\,dt\\ &\leqslant \frac{e^{\pi|z|}}{\pi}\,e^{(|z|+1)\,\mathsf{log}\,(|z|+1)}\\ &\leqslant c_1\,e^{c_2\,|z|\,\mathsf{log}\,|z|}.\end{aligned}$$

Quant au premier terme :

$$\frac{\mathsf{sin}\,\pi z}{\pi}\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n\,!\,(n+1-z)},$$

dans un premier cas où $|\mathsf{Im}\,z|\geqslant 1$, puisqu'on a alors pour tout entier $n\geqslant 0$:

$$\big|n+1-z\big|\;\geqslant\;1,$$

il se majore aisément :

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathsf{sin}\,\pi\,z}{\pi}\right|\left|\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n\,!\,(n+1-z)}\right| &\leqslant \frac{e^{\pi|z|}}{\pi}\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n\,!\cdot 1}\\ &= \frac{e^{\pi|z|+1}}{\pi}.\end{aligned}$$

Dans l'autre cas où $|\mathsf{Im}\,z|<1$, introduisons l'unique entier $k=k_z$ avec $k-\frac{1}{2}\leqslant\mathsf{Re}\,z<k+\frac{1}{2}$, et distinguons deux sous-cas.

Lorsque $k\geqslant 1$, mettons en exergue, dans la somme infinie, le terme $n=k-1$:

$$\frac{\mathsf{sin}\,\pi z}{\pi}\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n\,!\,(n+1-z)} = \frac{\mathsf{sin}\,\pi z}{\pi}\,\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)\,!\,(k-z)}+\frac{\mathsf{sin}\,\pi z}{\pi}\sum_{n\neq k-1}\frac{(-1)^n}{n\,!\,(n+1-z)},$$

et démontrons que les deux expressions à droite sont bornées.

Pour la première expression, avec la constante :

$$\max_{|w|\leqslant 3/2}\left|\frac{\mathsf{sin}\,\pi w}{\pi\,w}\right| =:\;c\;<\;\infty,$$

finie parce que $w\longmapsto\frac{\mathsf{sin}\,\pi w}{\pi\,w}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ car en 0 on a $\mathsf{sin}\,\pi w=\pi w+\mathrm{O}(w^2)$, estimons la par cette constante :

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathsf{sin}\,\pi z}{\pi}\,\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)\,!\,(k-z)}\right| &= \left|\frac{\mathsf{sin}\,\pi\,(k-z)}{\pi\,(k-z)}\right|\frac{1}{(k-1)!}\\ [w\,:=\,k-z]\qquad &\leqslant \max_{|w|\leqslant 3/2}\left|\frac{\mathsf{sin}\,\pi w}{\pi\,w}\right| \;=\; c,\end{aligned}$$

sachant que l'on a ici :

$$|w|\;=\;\big|k-z\big|\;\leqslant\;\big|k-\mathsf{Re}\,z\big|+|\mathsf{Im}\,z|\;\leqslant\;\tfrac{1}{2}+1.$$

Ensuite, grâce à :

$$
\begin{aligned}
n \leqslant k-2 \quad &\Longrightarrow \quad |n+1-z| \geqslant |n+1-\operatorname{Re} z| = \operatorname{Re} z - n - 1 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \geqslant k - \tfrac{1}{2} - n - 1 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \geqslant \tfrac{1}{2}, \\
n \geqslant k \quad &\Longrightarrow \quad |n+1-z| \geqslant |n+1-\operatorname{Re} z| = n+1-\operatorname{Re} z \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \geqslant n+1-k-\tfrac{1}{2} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \geqslant \tfrac{1}{2},
\end{aligned}
$$

constatons que le second terme est lui aussi borné :

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{n \neq k-1} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+1-z)} \right| &\leqslant \left| \frac{e^{i\pi x - \pi y} - e^{-i\pi x + \pi y}}{2i\pi} \right| \sum_{n \neq k-1} \frac{1}{n! \cdot \frac{1}{2}} \\
&\leqslant \frac{e^{\pi |y|}}{\pi}\, 2\, e^1 \\
&\leqslant \frac{2}{\pi}\, e^{\pi+1}.
\end{aligned}
$$

Enfin, lorsque $k \leqslant 0$, d'où $\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}$ d'après notre supposition, il devient inutile de mettre un terme en exergue, car alors on a toujours :

$$
\big| n+1-z \big| \geqslant n+1-\operatorname{Re} z \geqslant n+1-\tfrac{1}{2} \geqslant \tfrac{1}{2} \qquad\qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}),
$$

d'où similairement :

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+1-z)} \right| &\leqslant \frac{e^{\pi |y|}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \frac{2}{\pi}\, e^{\pi+1}.
\end{aligned}
$$

□

Le fait que $\frac{1}{\Gamma}$ satisfasse une condition du type qui a été discuté dans un chapitre précédent conduit naturellement à une factorisation de Hadamard.

Rappelons auparavant que la *constante d'Euler :*

$$
\gamma := \lim_{\mathrm{N} \to \infty} \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n} - \log \mathrm{N},
$$

est bien définie, car :

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n} - \log \mathrm{N} &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\, dx + \frac{1}{\mathrm{N}} - \int_1^{\mathrm{N}} \frac{1}{x}\, dx \\
&= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x} \right) dx + \frac{1}{\mathrm{N}},
\end{aligned}
$$

avec, lorsque $n \leqslant x \leqslant n+1$:

$$
0 \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{x} = \frac{x-n}{x\,n} \leqslant \frac{1}{n^2},
$$

donc :

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n} - \log \mathrm{N} \;=\; \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} a_n + \frac{1}{\mathrm{N}},$$

avec $0 < a_n \leqslant \frac{1}{n^2}$, ce qui fait voir la convergence, grâce à $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$.

Théorème 2.9. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$:*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \;=\; e^{\gamma z}\, z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}.$$

Démonstration. Grâce au théorème de factorisation de Hadamard, et au fait que $\frac{1}{\Gamma}$ est entière d'ordre $\leqslant 1$, avec des zéros simples en $z = 0, -1, -2, \dots$, nous pouvons représenter $\frac{1}{\Gamma}$ sous la forme d'un produit de Weierstrass :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \;=\; e^{\mathrm{A}z+\mathrm{B}}\, z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}},$$

dans lequel il reste à déterminer les deux constantes $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{C}$.

Mais si nous nous souvenons que $z\,\Gamma(z) \longrightarrow 1$ quand $z \longrightarrow 0$, nous trouvons $\mathrm{B} = 0$, ou n'importe quel multiple entier de $2i\pi$, ce qui ne change rien.

Ensuite, assignons $z := 1$ et utilisons $\Gamma(1) = 1$:

$$\begin{aligned}
e^{-\mathrm{A}} &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{\mathrm{N} \to \infty} \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{\mathrm{N} \to \infty} e^{\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} [\log(1+1/n) - 1/n]} \\
&= \lim_{\mathrm{N} \to \infty} e^{\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} [\log(n+1) - \log n] - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} 1/n} \\
&= \lim_{\mathrm{N} \to \infty} e^{\log(\mathrm{N}+1) - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} 1/n} \\
&= \lim_{\mathrm{N} \to \infty} e^{\log(1+1/\mathrm{N}) + \log \mathrm{N} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} 1/\mathrm{N}} \\
&= e^{-\gamma}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{A} = \gamma + 2ik\pi$ pour un entier $k \in \mathbb{Z}$, mais comme $\Gamma(x)$ est réelle pour $x > 0$ réel, il faut $k = 0$, ce qui conclut. □

Ces arguments montrent que $\frac{1}{\Gamma}$ est essentiellement caractérisée, à des constantes normalisatrices près, comme la fonction holomorphe entière :

- qui a des zéros simples en $z = 0, -1, -2, \dots$ et ne s'annule nulle part ailleurs ;
- est d'ordre de croissance $\leqslant 1$.

Observons que $\sin \pi z$ a des propriétés analogues, excepté le fait qu'elle s'annule en *tous* les entiers $z = k \in \mathbb{Z}$. Cependant, tandis que $\sin \pi z$ jouit d'une propriété de croissance de la forme $\sin \pi z = \mathrm{O}\big(e^{c\,|z|}\big)$, l'Exercice 1 montre que tel n'est *pas* le cas pour $\frac{1}{\Gamma(z)}$.

3. La fonction $\zeta(s)$

La *fonction zêta* de Riemann est définie, pour $s \in \mathbb{C}$ complexe avec $\mathrm{Re}\, s > 1$, par la série :

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

convergente et définit, comme nous l'avons déjà vu, une fonction holomorphe dans le demi-plan complexe $\{\mathrm{Re}\, s > 1\}$.

Comme la fonction $\Gamma(z)$ d'Euler, cette fonction $\zeta(s)$ de Riemann peut être prolongée méromorphiquement au plan complexe tout entier, avec un unique pôle, simple, en $s = 1$. En fait, il existe de nombreuses démonstrations de ce prolongement, et nous en présentons une qui dévoile une équation fonctionnelle importante satisfaite par $\zeta(s)$.

Toutefois, le prolongement de $\zeta(s)$ au plan complexe $\mathbb{C}$ tout entier est plus délicat que celui de la fonction $\Gamma(z)$. La voie argumentative que nous choisissons relie ζ et Γ à une autre fonction importante en théorie analytique des nombres. Commençons par quelques préliminaires.

D'après le cours d'*Analyse de Fourier*, on sait que la fonction $x \longmapsto e^{-\pi x^2}$ — qui appartient à l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ des fonctions à décroissance (très) rapide à l'infini — coïncide avec sa transformée de Fourier :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx \;=\; e^{-\pi\xi^2}.$$

Avec un paramètre réel $t > 0$, le changement de variable dans cette intégrale :

$$x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{t}}$$

donne que la transformée de Fourier de la fonction $f(x) := e^{-\pi t x^2}$ est $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{\pi\xi^2}{t}}$.

Rappelons aussi la *formule sommatoire de Poisson*, valable pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n),$$

qui donne ici :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi t n^2} \;=\; \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{t}}.$$

Si donc nous introduisons la fonction ϑ définie, pour $t > 0$ réel, par :

$$\vartheta(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t},$$

nous voyons qu'elle satisfait l'équation fonctionnelle :

$$\vartheta(t) \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{t}}\, \vartheta\big(\tfrac{1}{t}\big). \tag{3.1}$$

L'information dont nous aurons besoin concerne la décroissance exponentielle de cette fonction :

$$\vartheta(t) \;=\; 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t},$$

lorsque $t \longrightarrow \infty$, ainsi que son comportement singulier quand $t \stackrel{>}{\longrightarrow} 0$.

Lemme 3.2. *Il existe une constante universelle $0 < C < \infty$ telle que :*

$$(0 \leqslant) \quad \vartheta(t) - 1 \ \leqslant \ C\, e^{-t} \qquad\qquad (\forall\, t \geqslant 1),$$

et :

$$\vartheta(t) \ \leqslant \ C\, \tfrac{1}{\sqrt{t}} \qquad\qquad (\forall\, 0 < t \leqslant 1).$$

Démonstration. Comme $\big\{n^2 \colon n \geqslant 1\big\} \supset \{m \geqslant 1\}$, on a :

$$\begin{aligned}
\vartheta(t) - 1 \ = \ 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \ &\leqslant \ 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\pi m t} \\
&= \ 2\, e^{-\pi t} \Big[1 + e^{-\pi t} + e^{-2\pi t} + e^{-3\pi t} + \cdots\Big] \\
&= \ 2\, e^{-\pi t}\, \frac{1}{1 - e^{-\pi t}},
\end{aligned}$$

et pour $t \geqslant 1$, puisque $e^{-\pi t} \leqslant e^{-\pi}$, nous obtenons bien :

$$\vartheta(t) - 1 \ \leqslant \ 2\, \frac{e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}.$$

Ensuite, grâce à l'équation fonctionnelle (3.1), pour $0 < t \leqslant 1$, d'où $1 \leqslant \frac{1}{t} < \infty$, en recyclant ce que nous venons de faire :

$$\begin{aligned}
\vartheta(t) \ = \ \frac{1}{\sqrt{t}}\, \vartheta\Big(\frac{1}{t}\Big) \ &= \ \frac{1}{\sqrt{t}} \bigg(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 \frac{1}{t}}\bigg) \\
&\leqslant \ \frac{1}{\sqrt{t}} \bigg(1 + 2\, \frac{e^{-\pi \frac{1}{t}}}{1 - e^{-\pi \frac{1}{t}}}\bigg) \\
&\leqslant \ \frac{1}{\sqrt{t}} \bigg(1 + 2\, \frac{e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}\bigg).
\end{aligned}$$

Tout ceci montre qu'on peut prendre comme constante universelle $C := 1 + 2\, \frac{e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}$. □

Nous sommes maintenant en position d'établir une relation importante entre les trois fonctions ζ, Γ, ϑ.

Théorème 3.3. *Pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec* $\mathsf{Re}\, s > 1$*, on a :*

$$\int_0^{\infty} u^{\frac{s}{2} - 1} \Big[\frac{\vartheta(u) - 1}{2}\Big]\, du \ = \ \frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}}}\, \Gamma\big(\tfrac{s}{2}\big)\, \zeta(s).$$

Démonstration. Comme $\frac{\vartheta(u) - 1}{2}$ consiste en la sommation des termes $e^{-\pi n^2 u}$ pour $n = 1, \dots, \infty$, calculons les intégrales suivantes dans lesquelles nous effectuons le changement de variable $u = \frac{1}{\pi n^2}\, t$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} u^{\frac{s}{2} - 1}\, e^{-\pi n^2 u}\, du \ &= \ \int_0^{\infty} \frac{\pi n^2}{(\pi n^2)^{\frac{s}{2}}}\, t^{\frac{s}{2} - 1}\, e^{-t}\, \frac{dt}{\pi n^2} \\
&= \ \frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}}}\, \frac{1}{n^s} \int_0^{\infty} t^{\frac{s}{2} - 1}\, e^{-t}\, dt \\
\text{[Reconnaître } \Gamma\text{]} \qquad &= \ \frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}}}\, \frac{1}{n^s}\, \Gamma\big(\tfrac{s}{2}\big).
\end{aligned}$$

Les estimées du Lemme 3.2 justifient alors l'interversion entre sommation infinie et intégration dans le calcul conclusif suivant :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1}\left[\frac{\vartheta(u)-1}{2}\right]du &= \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1}\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 u}\right)du \\ &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1}\,e^{-\pi n^2 u}\,du \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}}}\,\frac{1}{n^s}\,\Gamma\big(\tfrac{s}{2}\big) \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}}}\,\zeta(s)\,\Gamma\big(\tfrac{s}{2}\big)\end{aligned}$$

□

Au vu de cela, introduisons une certaine modification de la fonction ζ, appelée *fonction xi*, définie pour $\mathsf{Re}\,s>1$ comme étant le résultat que nous venons d'obtenir :

$$\xi(s) := \frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}}}\,\Gamma\big(\tfrac{s}{2}\big)\,\zeta(s),$$

et qui met en lumière une symétrie fondamentale.

Théorème 3.4. *Cette fonction $\xi(s)$ est holomorphe dans $\{\mathsf{Re}\,s>1\}$ et possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ tout entier, holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$, avec deux pôles simples en $s=0$ et en $s=1$.*

De plus, pour tout $s\in\mathbb{C}$:

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

Bien entendu, en $s=0$ et 1, on a $\xi(0)=\infty=\xi(1)$.

Démonstration. Soit la fonction auxiliaire $\psi(u) := \frac{\vartheta(u)-1}{2}$, déjà considérée plus haut. L'équation fonctionnelle $\vartheta(u)=\frac{1}{\sqrt{u}}\,\vartheta\big(\frac{1}{u}\big)$ se transmet à ψ :

$$2\,\psi(u)+1 = \frac{1}{\sqrt{u}}\left[2\,\psi\Big(\frac{1}{u}\Big)+1\right],$$

c'est-à-dire :

$$\psi(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}\,\psi\Big(\frac{1}{u}\Big)+\frac{1}{2\sqrt{u}}-\frac{1}{2}.$$

En partant du Théorème 3.3, découpons l'intégrale, insérons, changeons de variable, transformons, et calculons (patiemment) pour $\mathrm{Re}\, s > 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}}}\,\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\,\zeta(s) \;&=\; \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1}\,\psi(u)\,du \\ &=\; \int_0^1 u^{\frac{s}{2}-1}\,\psi(u)\,du + \int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1}\,\psi(u)\,du \\ &=\; \int_0^1 u^{\frac{s}{2}-1}\Big[\frac{1}{\sqrt{u}}\,\psi\Big(\frac{1}{u}\Big) + \frac{1}{2\sqrt{u}} - \frac{1}{2}\Big]\,du + \int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1}\,\psi(u)\,du \\ &=\; \int_0^1 \frac{u^{\frac{s}{2}}}{u\sqrt{u}}\,\psi\Big(\frac{1}{u}\Big)\,du + \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(u^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} - u^{\frac{s}{2}-1}\Big)\,du + \int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1}\,\psi(u)\,du \\ [u = \tfrac{1}{v}] \qquad &=\; \int_1^\infty v^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\,\psi(v)\,dv + \frac{1}{2}\Bigg[\frac{u^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}}{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} - \frac{u^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}}\Bigg]_0^1 + \int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1}\,\psi(u)\,du \\ &=\; \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty \Big(u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + u^{\frac{s}{2}-1}\Big)\,\psi(u)\,du. \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\xi(s) \;=\; \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty \Big(u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + u^{\frac{s}{2}-1}\Big)\,\psi(u)\,du.$$

Or puisque la fonction ψ décroît exponentiellement à l'infini, cette dernière intégrale à paramètre définit une fonction holomorphe entière, ce qui fait clairement voir que :

$$\xi \,\in\, \mathscr{M}(\mathbb{C}) \cap \mathscr{O}\big(\mathbb{C}\backslash\{0,1\}\big),$$

avec deux pôles simples en $s = 0$ et en $s = 1$.

De plus, il est visible que $\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$ est invariant lorsqu'on remplace $s \longmapsto 1 - s$, et on se convainc aisément que l'intégrale est aussi invariante à travers $s \longmapsto 1 - s$. En définitive, on a bien $\xi(s) = \xi(1-s)$. □

Grâce à cette identité qui montre la symétrie de $\xi(s)$ à travers la réflexion d'axe $\big\{\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}\big\}$, nous pouvons facilement déduire les propriétés de la fonction zêta de Riemann : son prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, ainsi que son équation fonctionnelle.

Théorème 3.5. *La fonction $\zeta(s)$ possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, avec un unique pôle simple en $s = 1$ de résidu égal à 1, et elle satisfait l'équation fonctionnelle :*

$$\zeta(s) \;=\; 2^s\,\pi^{s-1}\,\mathrm{sin}\,\big(\tfrac{1}{2}\,\pi\,s\big)\,\Gamma(1-s)\,\zeta(1-s).$$

Démonstration. Le prolongement méromorphe de $\zeta(s)$ est fournit instantanément par la formule :

$$\zeta(s) \;=\; \pi^{\frac{s}{2}}\,\frac{\xi(s)}{\Gamma(\frac{s}{2})}.$$

Mais comme $\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}$ est holomorphe entière, d'après le Théorème 2.8, avec des zéros simples en $s = 0, -2, -4, \dots$, le pôle simple de $\xi(s)$ en $s = 0$ est annihilé par le zéro correspondant de $\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}$. Par conséquent, il ne reste, comme singularité pour $\zeta(s)$, que le pôle simple de ξ en $s = 1$.

Ensuite, l'équation fonctionnelle pour $\xi(s)$:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\big(\tfrac{s}{2}\big)\,\zeta(s) \;=\; \xi(s) \;=\; \xi(1-s) \;=\; \pi^{\frac{-1+s}{2}}\,\Gamma\big(\tfrac{1-s}{2}\big)\,\zeta(1-s),$$

donne :

$$\zeta(s) \,=\, \pi^{s-\frac{1}{2}}\,\frac{\Gamma\big(\frac{1-s}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{s}{2}\big)}\,\zeta(1-s),$$

et il nous faut encore remplacer ici $\Gamma\big(\frac{1-s}{2}\big)$. Or avec $z := \frac{1-s}{2}$, la formule de l'Exercice 3 :

$$\Gamma(z) \,=\, \pi^{\frac{1}{2}}\,2^{1-2z}\,\frac{\Gamma(2\,z)}{\Gamma\big(z+\frac{1}{2}\big)}$$

devient :

$$\Gamma\big(\tfrac{1-s}{2}\big) \,=\, \pi^{\frac{1}{2}}\,2^{s}\,\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\big(1-\frac{s}{2}\big)}.$$

Nous pouvons donc remplacer, réorganiser et appliquer au final la formule des compléments :

$$\begin{aligned}
\zeta(s) \,&=\, \pi^{s-\frac{1}{2}}\,\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\,2^{s}\,\Gamma(1-s)}{\Gamma\big(\frac{s}{2}\big)\,\Gamma\big(1-\frac{s}{2}\big)}\,\zeta(1-s) \\
&=\, 2^{s}\,\pi^{s-1}\,\frac{\pi}{\Gamma\big(\frac{s}{2}\big)\,\Gamma\big(1-\frac{s}{2}\big)}\,\Gamma(1-s)\,\zeta(1-s) \\
\text{[Théorème 2.6]} \qquad &=\, 2^{s}\,\pi^{s-1}\,\sin\big(\pi\,\tfrac{s}{2}\big)\,\Gamma(1-s)\,\zeta(1-s). \qquad \square
\end{aligned}$$

4. Exercices

Exercice 1. **(a)** Montrer qu'il n'existe pas de constantes $0 < c_1, c_2 < \infty$ telles que :

$$\left|\frac{1}{\Gamma(z)}\right| \,\leqslant\, c_1\,e^{c_2|z|} \qquad\qquad (\forall\, z\in\mathbb{C}).$$

Indication: Aux points $z = -\,k - \frac{1}{2}$ avec $k \geqslant 1$ entier, constater que :

$$\left|\frac{1}{\Gamma(-k-\frac{1}{2})}\right| \,\geqslant\, \frac{k\,!}{\pi}.$$

(b) Montrer qu'il n'existe pas de fonction holomorphe entière $F \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ de croissance $|F(z)| \leqslant c_1 e^{c_2|z|}$ ayant des zéros simples aux entiers négatifs $z = 0, -1, -2, \dots$, et qui ne s'annule nulle part ailleurs.

Exercice 2. Montrer que la fonction Gamma (réelle) d'Euler :

$$\Gamma(x) \,:=\, \int_0^\infty t^{x-1}\,e^{-t}\,dt \qquad\qquad (x>0),$$

est *logarithmiquement convexe*, c'est-à-dire satisfait :

$$\Gamma'(x)\,\Gamma'(x) \,\leqslant\, \Gamma(x)\,\Gamma''(x) \qquad\qquad (\forall\, x>0).$$

Exercice 3. **(a)** Montrer que la formule classique de Wallis peut s'écrire sous la forme :

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \,=\, \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n+1)!}\,\big(2n+1\big)^{1/2}.$$

(b) En déduire l'identité satisfaite par la fonction méromorphe Gamma :

$$\Gamma(z)\,\Gamma\big(z+\tfrac{1}{2}\big) \,=\, \pi^{\frac{1}{2}}\,2^{1-2z}\,\Gamma\big(2\,z\big) \qquad\qquad (\forall\, z\in\mathbb{C}).$$

Exercice 4. EE

Exercice 5. EE