

Automaty Komórkowe

Wykład 4

Witold Bołt, 13.03.2024

Poprzednio omówiliśmy

- **Wykład 1:** Sprawy organizacyjne, motywację do zajmowania się CA, podstawowe pojęcia / definicje / intuicje.
- **Wykład 2:** Definicja (formalna) i podstawowe fakty o ECA. Reprezentacja Wolframa.
- **Wykład 3:** Symetrie w zbiorze ECA, relacje do ogólnej teorii układów dynamicznych, własności CA/ECA

Alternatywne reprezentacje CA

Reprezentacja wielomianowa ECA

- Niech $f(x, y, z)$ oznacza wartość reguły lokalnej f pewnego ECA dla argumentów $x, y, z \in \{0, 1\}$. Co więcej niech f zadane będzie przez LUT $(\ell_7, \ell_6, \dots, \ell_0)$.

- Wtedy:

$$f(x, y, z) = \ell_7 x y z + \ell_6 x y (1 - z) + \ell_5 x (1 - y) z + \ell_4 x (1 - y) (1 - z) + \\ \ell_3 (1 - x) y z + \ell_2 (1 - x) y (1 - z) + \ell_1 (1 - x) (1 - y) z + \ell_0 (1 - x) (1 - y) (1 - z)$$

Naturalnie, we wzorze powyżej $\ell_i \in \{0, 1\}$. Równanie powyżej będziemy oznaczać jako równanie (*).

- Ciekawostka** (ważna). Jeśli w powyższym wzorze przyjmimy $\ell_i \in [0, 1]$ oraz $x, y, z \in [0, 1]$ dostaniemy funkcję $f: [0, 1]^3 \rightarrow [0, 1]$ definiującą tzw. **afiniczny, ciągły** automat komórkowy (ACCA).

Reprezentacja logiczna

- Podobne reprezentacje można uzyskać stosując operacje logiczne. Jeśli stany $\{0,1\}$ utożsamimy z wartościami logicznymi $\{F, T\}$ (false / true), to wielomian z poprzedniego slajdu można zapisać jako:

$$f(x, y, z) = \ell_7 \wedge x \wedge y \wedge z \vee \ell_6 \wedge x \wedge y \wedge \neg z \vee \ell_5 \wedge x \wedge \neg y \wedge z \vee \ell_4 \wedge x \wedge \neg y \wedge \neg z \vee \\ \ell_3 \wedge \neg x \wedge y \wedge z \vee \ell_2 \wedge \neg x \wedge y \wedge \neg z \vee \ell_1 \wedge \neg x \wedge \neg y \wedge z \vee \ell_0 \wedge \neg x \wedge \neg y \wedge \neg z$$

- Stosujemy prostą odpowiedniość: mnożenie zastępujemy przez operację AND (\wedge), dodawanie przez operację OR (\vee) a wyrażenia $(1 - x)$ przez negację (\neg).
- Taką formę zapisu wyrażenia logicznego nazywamy dysjunktywną postacią normalną (ang. ***disjunctive normal form, DNF***).
- Oczywiście można następnie “uproszczyć” takie wyrażenie logiczne stosując inne, znane operatory logiczne (XOR, NAND, NOR, ...)
- **Ciekawostka.** Przedstawienie wielomianowe **ACCA** można traktować jako “fuzzyfikacja” (rozszerzenie do logiki rozmytej - *fuzzy logic*) postaci logicznej DNF.

Reprezentacja algebraiczna (inna)

Commun. Math. Phys. 93, 219–258 (1984)

Communications in
**Mathematical
Physics**

© Springer-Verlag 1984

Algebraic Properties of Cellular Automata

Olivier Martin^{1,★}, Andrew M. Odlyzko², and Stephen Wolfram^{2,3,★★}

1 California Institute of Technology, Pasadena, CA 91125, USA

2 Bell Laboratories, Murray Hill, NJ 07974, USA

3 The Institute for Advanced Study, Princeton, NJ 08540, USA

Abstract. Cellular automata are discrete dynamical systems, of simple construction but complex and varied behaviour. Algebraic techniques are used to give an extensive analysis of the global properties of a class of finite cellular automata. The complete structure of state transition diagrams is derived in terms of algebraic and number theoretical quantities. The systems are usually irreversible, and are found to evolve through transients to attractors consisting of cycles sometimes containing a large number of configurations.

Reprezentacja wielomianowa dla większej liczby stanów?

- **Pytanie.** Czy da się zapisać regułę lokalną wielo-stanowego CA za pomocą wielomianu podobnego do tego, danego równaniem (*)? Okazuje się, że **TAK!**
- Pomysł sprawdza się do oznaczenia s -elementowego zbioru stanów jako wektory bazy standardowej przestrzeni \mathbb{R}^s , czyli na przykład automat 3-stanowy operować będzie na stanach:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

Wtedy wielomian staje się “trójwymiarowy”, ale na każdej współrzędnej jest bardzo podobny do przypadku 2-stanowego.

Uwaga. W tej notacji jeden z **wymiarów** jest nadmiarowy i można go pominąć. Wówczas notacja dla CAs 2-stanowych jest spójna z tradycyjną notacją .



Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Computational Science

journal homepage: www.elsevier.com/locate/jocs



On the decomposition of stochastic cellular automata



Witold Bolt^{a,b,*}, Jan M. Baetens^b, Bernard De Baets^b

^a Systems Research Institute, Polish Academy of Sciences, Newelska St. 6, 01-447 Warsaw, Poland

^b KERMIT, Department of Mathematical Modelling, Statistics and Bioinformatics, Ghent University, Coupure Links 653, B-9000 Gent, Belgium

ARTICLE INFO

Article history:

Received 16 February 2015

Received in revised form 18 August 2015

Accepted 9 September 2015

Available online 24 September 2015

Keywords:

Stochastic cellular automata

Complexity analysis

Continuous cellular automata

Decomposition

ABSTRACT

In this paper we present two interesting properties of stochastic cellular automata that can be helpful in analyzing the dynamical behavior of such automata. The first property allows for calculating cell-wise probability distributions over the state set of a stochastic cellular automaton, *i.e.* images that show the average state of each cell during the evolution of the stochastic cellular automaton. The second property shows that stochastic cellular automata are equivalent to so-called stochastic mixtures of deterministic cellular automata. Based on this property, any stochastic cellular automaton can be decomposed into a set of deterministic cellular automata, each of which contributes to the behavior of the stochastic cellular automaton.

© 2015 Elsevier B.V. All rights reserved.

Problem klasyfikacji gęstości (Density Classification Problem, DCP)

Density Classification Task (DCT), Majority Classification, Majority Voting, Consensus Modeling, Emergent Computation

Gęstość

- Niech $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^N$ będzie konfiguracją CA.
- Liczbę:

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i,$$

nazywamy **gęstością** \mathbf{x} (density of \mathbf{x}).

Klasyfikacja gęstości - definicja

Niech $F: \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ będzie automatem komórkowym. Mówimy, że F rozwiązuje **problem klasyfikacji gęstości warunku początkowego**, jeśli dla **każdej** konfiguracji początkowej $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^N \subset \{0, 1\}^*$, zachodzi:

Jeśli $\rho(\mathbf{x}) < 0.5$, to: $\lim_{T \rightarrow \infty} F^T(\mathbf{x}) = (0, 0, \dots, 0)$.

Jeśli $\rho(\mathbf{x}) > 0.5$, to: $\lim_{T \rightarrow \infty} F^T(\mathbf{x}) = (1, 1, \dots, 1)$.

Uwaga. Powyższa definicja (dla klasycznych CAs) oznacza, że:

$$\forall_N \exists_{T_0} \forall_{\mathbf{x} \in \{0, 1\}^N} \quad \rho(\mathbf{x}) < 0.5 \Rightarrow F^{T_0}(\mathbf{x}) = (0, 0, \dots, 0)$$

$$\forall_N \exists_{T_0} \forall_{\mathbf{x} \in \{0, 1\}^N} \quad \rho(\mathbf{x}) > 0.5 \Rightarrow F^{T_0}(\mathbf{x}) = (1, 1, \dots, 1)$$

Naturalnie T_0 rośnie proporcjonalnie do N .

Klasyfikacja gęstości - definicja uogólniona

Niech $F: \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ będzie automatem komórkowym. Mówimy, że F rozwiązuje **problem klasyfikacji gęstości warunku początkowego z progiem ρ_0** , jeśli dla **każdej** konfiguracji początkowej $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^N \subset \{0, 1\}^*$, zachodzi:

Jeśli $\rho(\mathbf{x}) < \rho_0$, to: $\lim_{T \rightarrow \infty} F^T(\mathbf{x}) = (0, 0, \dots, 0)$.

Jeśli $\rho(\mathbf{x}) > \rho_0$, to: $\lim_{T \rightarrow \infty} F^T(\mathbf{x}) = (1, 1, \dots, 1)$.

Uwaga. Powyższa definicja (dla klasycznych CAs) oznacza, że:

$$\forall_N \exists_{T_0} \forall_{\mathbf{x} \in \{0, 1\}^N} \quad \rho(\mathbf{x}) < \rho_0 \Rightarrow F^{T_0}(\mathbf{x}) = (0, 0, \dots, 0)$$

$$\forall_N \exists_{T_0} \forall_{\mathbf{x} \in \{0, 1\}^N} \quad \rho(\mathbf{x}) > \rho_0 \Rightarrow F^{T_0}(\mathbf{x}) = (1, 1, \dots, 1)$$

Naturalnie T_0 rośnie proporcjonalnie do N .

No Perfect Two-State Cellular Automata for Density Classification Exists

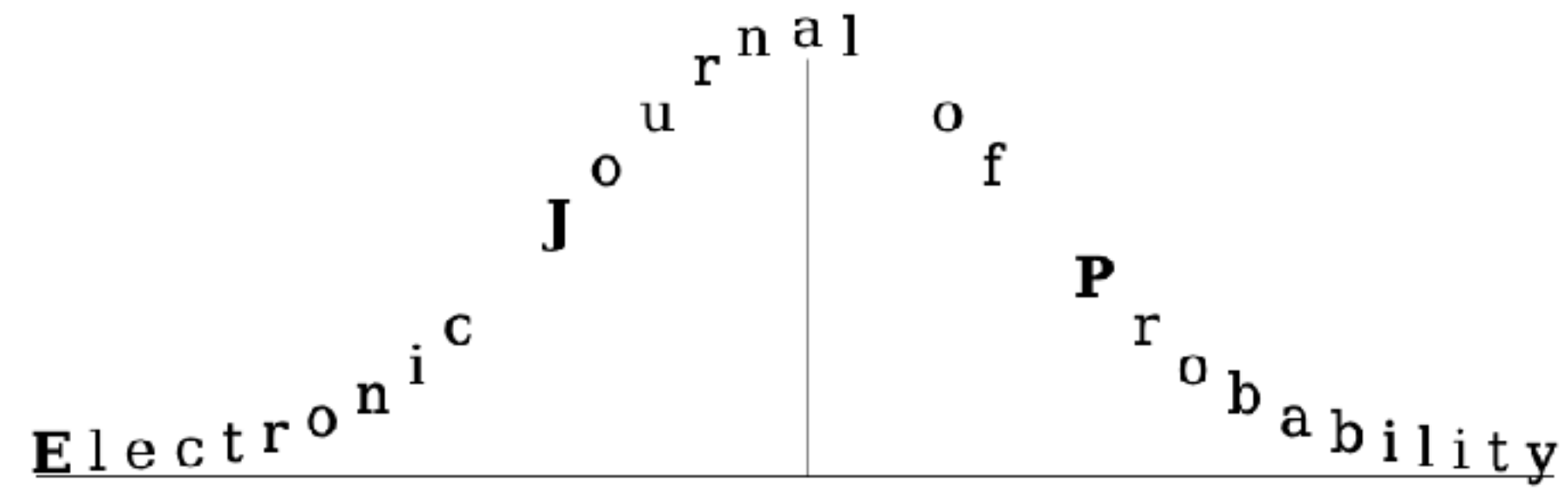
Mark Land and Richard K. Belew

Department of Computer Science and Engineering, University of California, San Diego, La Jolla, California 92093-0114

(Received 9 January 1995)

Recently there have been many attempts to evolve one-dimensional two-state cellular automata which classify binary strings according to their densities of 1's and 0's. The current best-known approaches involve particle-based systems of information transfer. A proof is given that there does not exist a two-state cellular automata which performs the task perfectly. This is true even in multiple dimensions.

PACS numbers: 89.80.+h, 02.70.Rw, 47.11.+j



Electron. J. Probab. **18** (2013), no. 51, 1–22.
ISSN: 1083-6489 DOI: 10.1214/EJP.v18-2325

Density classification on infinite lattices and trees*

Ana Bušić[†] Nazim Fatès[‡] Jean Mairesse[§] Irène Marcovici[§]

Abstract

Consider an infinite graph with nodes initially labeled by independent Bernoulli random variables of parameter p . We address the density classification problem, that is, we want to design a (probabilistic or deterministic) cellular automaton or a finite-range interacting particle system that evolves on this graph and decides whether p is smaller or larger than $1/2$. Precisely, the trajectories should converge to the uniform configuration with only 0's if $p < 1/2$, and only 1's if $p > 1/2$. We present solutions to the problem on the regular grids of dimension d , for any $d \geq 2$, and on the regular infinite trees. For the bi-infinite line, we propose some candidates that we back up with numerical simulations.

PCA = Probabilistic
Cellular Automata

Proposition 2.1. *There exists no PCA or IPS that solves perfectly the density classification problem on \mathbb{Z}_n , that is, for any integer $n \geq 1$, and for any configuration $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}_n}$, $(\delta_x F^t)_{t \geq 0}$ converges to δ_0 if $|x|_0 > n/2$ and to δ_1 if $|x|_1 > n/2$.*

(...)

We have proved that for any $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}_n}$ (with $n \geq \ell$), the number of occurrences of ones after application of F to x is almost surely equal to $|x|_1$. This is in contradiction with the fact that F classifies the density. \square

Klasyfikacja gęstości - problem?

Innymi słowy w dowodach pokazano, że z założenia, że F jest idealnym rozwiązaniem DCP wynika, że spełniona jest następująca własność:

$$\rho(F(\mathbf{x})) = \rho(\mathbf{x}), \quad (**)$$

co w oczywisty sposób stoi **w sprzeczności** z definicją DCP.

Powyższa własność jest znana i często badana w kontekście CAs. Jeśli F spełnia równanie (**) to mówimy, że F jest automatem komórkowym zachowującym gęstość (**density-conserving** CA).

Będziemy jeszcze mówić o takich CA w przyszłości - ważny temat!

Zasadnicze pytanie?

Zatem po co zajmować się zagadnieniem DCP? :)

- Rozwiązania *przybliżone*
- Uogólnienia CA - czy i jakie modyfikacje definicji CA pozwolą na rozwiązanie DCP
- Uogólnienia problemu (relaxed DCP)

Rozwiązania przybliżone

Założmy, że $N > 0$. Szukamy takiego CA F , który poprawnie rozwiązuje DCP dla jak **największego podzbioru** konfiguracji początkowych $C \subset \{0, 1\}^N$.

Wyznacznikiem “jakości” takiego klasyfikatora F jest $\frac{|C|}{2^N} \times 100\%$.

Problem praktyczny. Jeśli F jest kandydatem na “dobre” rozwiązanie przybliżone, to jak wyznaczyć zbiór C dla dużych N ? Można *oczywiście* sprawdzić wszystkie 2^N możliwości, ale czym większe N tym jest to trudniejsze.

Rozwiązania przybliżone - kilka faktów

Założmy, że F jest rozwiązaniem przybliżonym, $N > 0$ a $C \subset \{0, 1\}$ zbiorem konfiguracji początkowych poprawnie klasyfikowanych przez F . Niech S_L i S_R to odpowiednio ECA “shift left” i “shift right”.

Wtedy:

- jeśli $\mathbf{x} \in C$ to $S_L(\mathbf{x}) \in C$ oraz $S_R(\mathbf{x}) \in C$, a co za tym idzie,
- $S_L^T(\mathbf{x}) \in C$ i $S_R^T(\mathbf{x}) \in C$ dla dowolnego $T > 0$.

Dzięki temu możemy **istotnie** ograniczyć liczbę warunków początkowych, które trzeba przebadać aby wyznaczyć podzbiór $C \subset \{0, 1\}$.

Przykład rozwiązania przybliżonego

Najbardziej znanym rozwiązaniem przybliżonym jest reguła **GKL** nazwana od pierwszych liter nazwisk autorów Gács, Kurdyumov, Levin (praca w języku rosyjskim ukazała się w **1978**).

Physics Letters A 383 (2019) 2264–2266



Contents lists available at ScienceDirect

Physics Letters A

www.elsevier.com/locate/pla



Simply modified GKL density classifiers that reach consensus faster

J. Ricardo G. Mendonça^{a,b}

^a LPTMS, UMR 8626, CNRS, Université Paris-Sud, Université Paris Saclay, 91405 Orsay CEDEX, France

^b Escola de Artes, Ciências e Humanidades, Universidade de São Paulo, Rua Arlindo Bettio 1000, 03828-000 São Paulo, SP, Brazil



ARTICLE INFO

Article history:

Received 15 January 2019

Received in revised form 6 April 2019

Accepted 16 April 2019

Available online 23 April 2019

Communicated by F. van Wijland

Keywords:

Cellular automata

Density classification problem

Spatially distributed computing

Emergence

ABSTRACT

The two-state Gacs-Kurdyumov-Levin (GKL) cellular automaton has been a staple model in the study of complex systems due to its ability to classify binary arrays of symbols according to their initial density. We show that a class of modified GKL models over extended neighborhoods, but still involving only three cells at a time, achieves comparable density classification performance but in some cases reach consensus more than twice as fast. Our results suggest the time to consensus (relative to the length of the CA) as a complementary measure of density classification performance.

© 2019 Elsevier B.V. All rights reserved.

Przykład rozwiązania przybliżonego

Niech funkcja maj: $\{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ dana będzie wzorem:

$$\text{maj}(x, y, z) = \begin{cases} 1, & x + y + z > 1 \\ 0, & x + y + z \leq 1 \end{cases}.$$

Oczywiście jest to reguła lokalna ECA o nazwa “majority”. **Nie** jest ona dobrym rozwiązaniem DCP.

Reguła lokalna automatu GKL $f_{GKL}: \{0, 1\}^7 \rightarrow \{0, 1\}$ dana jest wzorem:

$$f_{GKL}(x_{-3}, \dots, x_0, \dots, x_3) = \begin{cases} \text{maj}(x_{-3}, x_{-1}, x_0), & \text{jeśli } x_0 = 0, \\ \text{maj}(x_0, x_1, x_3), & \text{jeśli } x_0 = 1. \end{cases}$$

Przykład rozwiązania przybliżonego

Reguła lokalna automatu uogólnionego $GKL(j,k)$ dla pewnych $0 < j < k$

$f_{GKL(j,k)}: \{0, 1\}^{2k+1} \rightarrow \{0, 1\}$ dana jest wzorem:

$$f_{GKL(j,k)}(x_{-k}, \dots, x_0, \dots, x_k) = \begin{cases} \text{maj}(x_{-k}, x_{-j}, x_0), & \text{jeśli } x_0 = 0, \\ \text{maj}(x_0, x_j, x_k), & \text{jeśli } x_0 = 1. \end{cases}$$

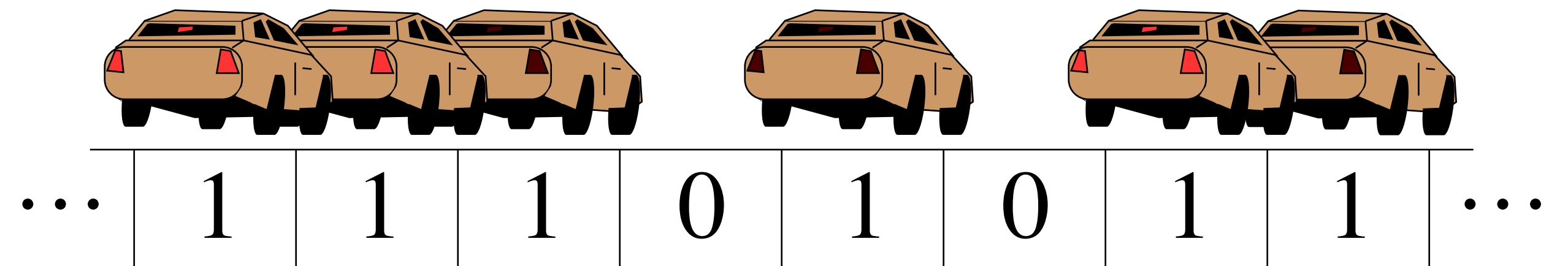
Zatem $GKL(1,3)$ to “klasyczny” GKL.

Modyfikacja definicji CA

Rozważmy dwa ECA: majority i traffic.

Majority (zdefiniowany na poprzednich slajdach) - ECA 232

Traffic - ECA 184



Rozwiązanie DCP. Dla zadanego $N > 0$ działamy najpierw przez $T = \frac{N}{2}$ kroków regułą traffic, a następnie przez następne $T = \frac{N}{2}$ kroków czasu regułą majority. (Henryk Fukś, 1997)

Modyfikacja definicji CA

Stochastic Cellular Automata Solve the Density Classification Problem with an Arbitrary Precision

Nazim Fatès

INRIA Nancy – Grand Est, LORIA, Nancy Université
Campus scientifique, BP 239, 54 506 Vandœuvre-lès-Nancy, France
`nazim.fates@loria.fr`

Abstract

The density classification problem consists in using a binary cellular automaton (CA) to decide whether an initial configuration contains more 0s or 1s. This problem is known for having no exact solution in the case of binary, deterministic, one-dimensional CA. Stochastic cellular automata have been studied as an alternative for solving the problem. This paper is aimed at presenting techniques to analyse the behaviour of stochastic CA rules, seen as a “blend” of deterministic CA rules. Using analytical calculations and numerical simulations, we analyse two previously studied rules and present a new rule. We estimate their quality of classification and their average time of classification. We show that the new rule solves the problem with an arbitrary precision. From a practical point of view, this rule is effective and exhibits a high quality of classification, even when the simulation time is kept small.

Zmiana definicji DCP

Density-conserving affine continuous cellular automata solving the relaxed density classification problem

Barbara Wolnik¹, Marcin Dembowski¹ , Witold Bolt^{2,3},
Jan M Baetens³ and Bernard De Baets³

¹ Institute of Mathematics, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, University of Gdańsk, 80-308 Gdańsk, Poland

² Systems Research Institute, Polish Academy of Sciences, Newelska 6, 01-447 Warsaw, Poland

³ KERMIT, Department of Mathematical Modelling, Statistics and Bioinformatics, Ghent University, Coupure links 653, B-9000 Gent, Belgium

E-mail: barbara.wolnik@mat.ug.edu.pl and marcin.dembowski@gmail.com

Received 23 December 2016, revised 25 June 2017

Accepted for publication 4 July 2017

Published 31 July 2017



CrossMark

Definition 4 (Relaxed formulation of the density classification problem). Let $\rho_0 \in]0, 1[$ and F be the global rule of an ACCA. We say that this ACCA solves the DCP at the threshold ρ_0 in the *relaxed sense* if it holds that:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\exists T) (\forall \mathbf{x} \in \{0, 1\}^n) (\forall t \geq T) \left(\begin{cases} \rho(\mathbf{x}) < \rho_0 \Rightarrow F^t(\mathbf{x}) \in [0, \rho_0[^n \\ \rho(\mathbf{x}) > \rho_0 \Rightarrow F^t(\mathbf{x}) \in]\rho_0, 1]^n \end{cases} \right). \quad (7)$$

Abstract

The focus of this paper is on the density classification problem in the context of affine continuous cellular automata. Although such cellular automata cannot solve this problem in the classical sense, most density-conserving affine continuous cellular automata with a unit neighborhood radius are valid solutions of a slightly relaxed version of this problem. This result follows from a detailed study of the dynamics of the density-conserving affine continuous cellular automata that we introduce.

Dziękuję bardzo
Witold.Bolt@ug.edu.pl

