Automaty Komórkowe

Wykład 3

Witold Bołt, 06.03.2024

Poprzednio omówiliśmy

- **Wykład 1**: Sprawy organizacyjne, motywację do zajmowania się CA, podstawowe pojęcia / definicje / intuicje.

- **Wykład 2**: Definicja (formalna) i podstawowe w fakty o ECA. Reprezentacja Wolframa.

Podstawowe pojęcia

- Automat Komórkowy (*Cellular Automat**on***, CA),
- Automat**y** Komórkowe (*Cellular Automat**a***, CA**s**)
- Przestrzeń (*space*), komórka (*cell*), sąsiedztwo (*neighborhood*)
- Stan (*state*), konfiguracja sąsiedztwa (*neighborhood configuration*), konfiguracja (*configuration*), konfiguracja początkowa (*initial configuration*)
- Warunki brzegowe (*boundary conditions*): periodyczne (*periodic*), zerowe (*null*)
- Reguła lokalna i global (*local & global rule*)
- Tabel wyszukiwania (?) (*look-up table, LUT*)
- Diagram czasoprzestrzenny (*space-time diagram*)

Elementarne Automaty Komórkowe

Niech dana będzie **dowolna** funkcja $f\colon \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ - będziemy ją nazywać **regułą lokalną** ECA.

Niech funkcja $F_N\colon \{0,1\}^N \to \{0,1\}^N$ zadana będzie tak, że

$$F_N(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) = (x'_0, x'_1, \ldots, x'_{N-1})$$

gdzie:

$$x'_i = f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}),$$

a operacje na indeksach wykonywane są modulo N (zakładamy dla ułatwienia periodyczne warunki brzegowe).

Wtedy F_N nazywamy **regułą globalną** N-komórkowego ECA.

1-wymiarowe Automaty Komórkowe

Analogicznie do ECAs można zdefiniować 1-wymiarowe, dwustanowe (binarne) CAs o większym rozmiarze sąsiedztwa.

Niech $f\colon \{0,1\}^{2r+1} \to \{0,1\}$ będzie **dowolną** funkcją, dla pewnego $r \geq 0$. Mówimy wówczas, że f jest **reguła lokalną** 1-wymiarowego CA o promieniu (sąsiedztwa) równym r. Oczywiście ECA mają reguły lokalne o promieniu $r = 1$.

Definicja reguły globalnej - *tak jak w przypadku* ECAs.

Niech $\mathscr{A}_r$ będzie zbiorem wszystkich 2-stanowych reguł **globalnych**, które można wyrazić przez reguły lokalne o promieniu r.

Fakt. $\mathscr{A}_r \subset \mathscr{A}_{r+1}$.

Naturalnie dla większych zbiorów stanów wszystkie definicje budujemy analogicznie.

Fakt. Liczba różnych reguł lokalnych o promieniu $r \geq 0$ wynosi $2^{2^{2r+1}}$. Dla $s \geq 0$ stanów liczba ta wynosi oczywiście $s^{s^{2r+1}}$.

Przykład. 2-stanowych reguł o promieniu 2 jest **4 294 967 296**, natomiast 3-stanowych odpowiedników ECAs jest **7 625 597 484 987**. Jeśli na przebadanie każdego binarnego CA o promieniu 2 poświęcilibyśmy 1 sekundę, to cały zbiór moglibyśmy zbadać w **136** lat (w przypadku reguł 3-stanowych potrzeba byłoby **241 806** lat).

"Proste" fakty

- Jeśli F oraz G to reguły CA, to funkcja $F \circ G$ jest również regułą CA. **Dlaczego?** Zwróć uwagę, że nie mówimy tu o **E**CA!
- **Zadanie**. Podaj wzór reguły lokalnej $F \circ G$ zakładając, że f i g to reguły lokalne odpowiednio F i G.
- **Zadanie**. Niech $F \in \mathscr{A}_r$ oraz $G \in \mathscr{A}_q$. Wiemy, że $F \circ G \in \mathscr{A}_p$ dla pewnego p. Ile może wynosić to p?
- Niech S_L oraz S_R będą odpowiednio regułami (globalnymi) ECA shift left / shift right. Dla dowolnej reguły F zachodzi $F \circ S_L = S_L \circ F$ oraz $F \circ S_R = S_R \circ F$. Innymi słowy CA są "shift commuting" (komutują z przesunięciem). Jest to ważna własność wykorzystywana w teorii / w dowodzeniu twierdzeń.
- Niech I będzie regułą odpowiadającą ECA "negacja" ($I(\mathbf{x}) = 1 - \mathbf{x}$), oraz niech F będzie regułą pewnego **E**CA. Wtedy $F \circ I$ oraz $I \circ F$ to również reguły **E**CA.
- **Zadanie**. Sprawdź kiedy są one sobie równe.

Symetrie ECA

- Complement / complementary rule, czyli obłożenie negacją (ECA 51), czyli zamiana zer na 1, czyli $f^c(x, y, z) = 1 - f(1 - x, 1 - y, 1 - z)$

- Reflection / reflected rule, czyli symetria prawo-lewo, czyli $f^\star(x, y, z) = f(z, y, x)$

Complex Systems 4 (1990) 281–297

The Structure of the Elementary Cellular Automata Rule Space

Wentian Li
Santa Fe Institute, 1120 Canyon Road, Santa Fe, NM 87501, USA

Norman Packard
Center for Complex Systems Research, Physics Department, Beckman Institute, University of Illinois, Urbana, IL 61801, USA

https://content.wolfram.com/sites/13/2018/02/04-3-3.pdf

An elementary CA rule f can be equivalent to another rule f_1 under the left-to-right transformation, if

$$f_1(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = f(x_{i+1}, x_i, x_{i-1}) \tag{2.1}$$

is true for all 3-site blocks. f is equivalent to rule f_2 under the 0-to-1 transformation (represented by the overhead bar), if

$$f_2(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = \overline{f(\overline{x_{i-1}}, \overline{x_i}, \overline{x_{i+1}})} \tag{2.2}$$

is always true, and it is equivalent to rule f_3 under the joint operation of both if

$$f_3(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = \overline{f(\overline{x_{i+1}}, \overline{x_i}, \overline{x_{i-1}})} \tag{2.3}$$

holds. Suppose the rule table of f is $(t_7t_6t_5t_4t_3t_2t_1t_0)$, the three equivalent rules are $f_1 = (t_7t_3t_5t_1t_6t_2t_4t_0)$, $f_2 = (\bar{t}_0\bar{t}_1\bar{t}_2\bar{t}_3\bar{t}_4\bar{t}_5\bar{t}_6\bar{t}_7)$, and $f_3 = (\bar{t}_0\bar{t}_4\bar{t}_2\bar{t}_6\bar{t}_1\bar{t}_5\bar{t}_3\bar{t}_7)$. The spatial-temporal patterns for f_1, f_2 and f_3 are exactly the same by a mirror reflection transformation, or a white-to-black transformation, or a combination of both.

Co wynika z tych symetrii?

- Wszystkich ECAs jest $2^{2^3} = 256$, bo tyle różnych LUTs można podać.
- Pytanie czy pod względem własności dynamicznych mamy w istocie do czynienia z 256 *różnymi* regułami?
- Odpowiedź jest **negatywna**. Biorąc pod uwagę symetrie przebadane przez Li i Packarda możemy wyróżnić zbiór **88** "unikalnych" reguł ECAs. Pozostałe powstają przez zastosowanie jednej bądź obu "symetrycznych" operacji. Listę tych reguł znajdziesz np. w artykule Li i Packarda.
- Naturalnie analogiczne operacji redukcji przestrzeni reguł można wprowadzić dla większych sąsiedztw i (przynajmniej w pewnym sensie) dla większej liczby stanów. Wciąż jednak przestrzenie te mają zdecydowanie zbyt wiele elementów aby przebadać je w całości reguła-po-regule.

Co wynika z tych symetrii?

0(255), 1(127), 2(16,191,247), 3(17,63,119), 4(223), 5(95),
6(20,159,215), 7(21,31,87), 8(64,239,253), 9(65,111,125),
10(80,175,245), 11(47,81,117), 12(68,207,221), 13(69,79,93),
14(84,143,213), 15(85), 18(183), 19(55), 22(151), 23, 24(66,189,231),
25(61,67,103), 26(82,167,181), 27(39,53,83), 28(70,157,199),
29(71), 30(86,135,149), 32(251), 33(123), 34(48,187,243),
35(49,59,115), 36(219), 37(91), 38(52,155,211), 40(96,235,249),
41(97,107,121), 42(112,171,241), 43(113), 44(100,203,217),
45(75,89,101), 46(116,139,209), 50(179), 51, 54(147), 56(98,185,227),
57(99), 58(114,163,177), 60(102,153,195), 72(237), 73(109),
74(88,173,229), 76(205), 77, 78(92,141,197), 90(165), 104(233),
105, 106(120,169,225), 108(201), 128(254), 129(126), 130(144,190,246),
131(62,145,118), 132(222), 133(94), 134(148,158,214), 136(192,238,252),
137(110,124,193), 138(174,208,244), 140(196,206,220), 142(212),
146(182), 150, 152(188,194,230), 154(166,180,210), 156(198),
160(250), 161(122), 162(176,186,242), 164(218), 168(224,234,248),
170(240), 172(202,216,228), 178, 184(226), 200(236), 204, 232

Table 1: Clusters of all independent elementary rules. The rules outside the parenthesis are representative rules with the smaller λ value and the smaller decimal rule number. Those inside the parenthesis are rules equivalent to the representative rule.

Klasyfikacja ECA (wg. Wolframa)

- Class 1: Cellular automata which rapidly converge to a **uniform state**. (**Uniform** / homogeneous class)
- Class 2: Cellular automata which rapidly converge to a **repetitive** or **stable** state. (**Periodic** class)
- Class 3: Cellular automata which appear to remain in a **random** state. (**Random** class)
- Class 4: Cellular automata which form **areas of repetitive** or stable states, but also form **structures that interact with each other** in complicated ways. (**Complex** class)

Klasyfikacja ECA (wg. Wolframa)

Wolfram's classes	Rules
Class I	0 8 32 40 128 136 160 168
Class II	1 2 3 4 5 6 7 9 10 11 12 13 14 15 19 23 24 25 26 27 28 29 33 34 35 36 37 38 42 43 44 46 50 51 56 57 58 62 72 73 74 76 77 78 94 104 108 130 132 134 138 140 142 152 154 156 162 164 170 172 178 184 200 204 232
Class III	18 22 30 45 60 90 105 122 126 146 150
Class IV	41 54 106 110

source: https://www.researchgate.net/publication/370524359_A_study_on_the_composition_of_elementary_cellular_automata

(warto przeczytać ten artykuł!)

“Proste” fakty ciąg dalszy

- Regułę globalna F określoną na przestrzeni $\{0,1\}^*$ możemy rozpatrywać jako **deterministyczny**, **dyskretny** układ dynamiczny zadany przez ogólną równość: $\mathbf{x}^{t+1} = F(\mathbf{x}^t)$.

- Konfiguracja CA $\mathbf{x} \in \{0,1\}^*$, w języku układów dynamicznych jest punktem z przestrzeni stanów, a ciąg $(\mathbf{x}, F(\mathbf{x}), F(F(\mathbf{x})), \ldots, F^T(\mathbf{x}), \ldots)$ jest **orbitą** punktu $\mathbf{x}$, czasem oznaczaną jako $Orb(\mathbf{x})$.

- W teorii układów dynamicznych interesuje nas m.in. badanie / poszukiwanie punktów **stałych** - czyli takich, dla których $\mathbf{x} = F(\mathbf{x})$ oraz punktów **okresowych** (periodycznych), czyli takich, dla których $\mathbf{x} = F^T(\mathbf{x})$ dla pewnego $T > 0$.

- W układach dynamicznych często mamy do czynienia ze zjawiskiem “przyciągających” punktów stałych / okresowych - punkty z otoczenia punktu stałego / okresowego w jakiś sposób dążą do tych tzw. *atraktorów*. **Pytanie.** Czy takie zjawiska mają miejsce w świecie CAs?

- Zbiór $\{\mathbf{x} \in \{0,1\}^* \,|\, \forall_{\mathbf{y} \in \{0,1\}^*} \; F(\mathbf{y}) \neq \mathbf{x}\}$ nazywamy Ogrodem Eden (**Garden of Eden**) danego CA. Badanie konfiguracji GoE danego CA to istotne zagadnienie teorii CAs.

Co to ma wspólnego z klasyfikacją?

- Badanie rozmiaru zbioru GoE dla zadanego N (które siłą rzeczy musi być dość małe) może być dobrym pomysłem jako podstawa dla klasyfikacji ECA.
- Jak to można zrobić?
  - Wybieramy N dla którego da się zbadać **wszystkie** konfiguracje początkowe, których jest 2^N. Warto wykonać eksperymenty dla kilku różnych wartości N.
  - Dla każdej takiej konfiguracji początkowej $\mathbf{x} \in \{0,1\}^N$ liczymy $F(\mathbf{x})$.
  - Porównujemy zbiory $\{0,1\}^N$ oraz $\{F(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \{0,1\}^N\}$ i szukamy GoE.
  - **Podpowiedź**. Zwróć uwagę, że każdy element $\{0,1\}^N$ można jednoznacznie utożsamić z pewną liczbą naturalną $k \in \{0,1,\ldots,2^N - 1\}$ co może pomóc w wydaje implementacji (ale nie trzeba z tego korzystać).

Co jeszcze z tego możemy wyciągnąć?

- Wykonanie eksperymentu z poprzedniego slajdu, może dodatkowo posłużyć jako metoda budowy i późniejszej analizy tzw. globalnego diagramy przejść stanów (*global state transition diagram*).

- Jest to graf skierowany, w którym jest N wierzchołków odpowiadających konfiguracjom początkowym, a krawędzi między wierzchołkami odpowiadają po prostu działaniu reguły globalnej.

- Taki graf stanowi zatem alternatywny opis **reguły globalnej** F_N (z której oczywiście da się wyczytać postać reguły lokalnej f).

- **Ćwiczenie**. Relatywnie łatwo można zwizualizować state transition diagram w Pythonie korzystając np. z biblioteki igraph albo NetworkX.

- Struktura tego grafu pozwala charakteryzować różne własności globalne CAs - np. interesująca jest liczba spójnych składowych (*connected components*) tego grafu (zob. https://networkx.org/documentation/stable/reference/algorithms/component.html)

  - Ciekawe badania na ten temat znajdziesz na stronie Andy'ego Wuensche http://www.ddlab.org/publications.html - **polecam**!

Co jeszcze z tego możemy wyciągnąć?

- Analizując diagram przejść stanów dla dowolnego CA zdefiniowanego na skończonej liczbie komórek prędzej czy później dojdziemy do szokującego odkrycia…

- **Fakt**. Ewolucja dowolnego deterministycznego CA, dla dowolnej liczby komórek i dowolnego warunku początkowego, po określonej, skończonej liczbie kroków czasu, staje się **periodyczna**.

- Inaczej mówić, w świecie CA historia kołem się toczy i to dosłownie :)

- Wciąż jednak dla danego CA i N czas dojścia do orbity periodycznej może być bardzo *długi*. **Wskazówka.** Również ten czas można użyć jako coś co charakteryzuje dany CA.

- W dalszej części tego przedmiotu poznamy uogólnienia CA, które pozbawione są tej cechy, która w wielu przypadkach może uchodzić za wadę.

Alternatywne reprezentacje CA

Reprezentacja wielomianowa ECA

- Niech $f(x, y, z)$ oznacza wartość reguły lokalnej f pewnego ECA dla argumentów $x, y, z \in \{0,1\}$. Co więcej niech f zadane będzie przez LUT $(\ell_7, \ell_6, \ldots, \ell_0)$.
- Wtedy:

$$f(x, y, z) = \ell_7\, x\, y\, z + \ell_6\, x\, y\, (1-z) + \ell_5\, x\, (1-y)\, z + \ell_4\, x\, (1-y)\, (1-z) +$$
$$\ell_3\, (1-x)\, y\, z + \ell_2\, (1-x)\, y\, (1-z) + \ell_1\, (1-x)\, (1-y)\, z + \ell_0\, (1-x)\, (1-y)\, (1-z)$$

Naturalnie, we wzorze powyżej $\ell_i \in \{0,1\}$. Równanie powyżej będziemy oznaczać jako równanie (*).

- **Ciekawostka** (ważna). Jeśli w powyższym wzorze przyjmiemy $\ell_i \in [0,1]$ oraz $x, y, z \in [0,1]$ dostaniemy funkcję $f\colon [0,1]^3 \to [0,1]$ definiującą tzw. **afiniczny**, **ciągły** automat komórkowy (ACCA).

Reprezentacja logiczna

- Podobne reprezentacje można uzyskać stosując operacje logiczne. Jeśli stany $\{0,1\}$ utożsamimy z wartościami logicznymi $\{F, T\}$ (false / true), to wielomian z poprzedniego slajdu można zapisać jako:

$$f(x, y, z) = \ell_7 \wedge x \wedge y \wedge z \vee \ell_6 \wedge x \wedge y \wedge \neg z \vee \ell_5 \wedge x \wedge \neg y \wedge z \vee \ell_4 \wedge x \wedge \neg y \wedge \neg z \vee$$
$$\ell_3 \wedge \neg x \wedge y z \vee \ell_2 \wedge \neg x \wedge y \neg z \vee \ell_1 \wedge \neg x \wedge \neg y \wedge z \vee \ell_0 \wedge \neg x \wedge \neg y \wedge \neg z$$

- Stosujemy prostą odpowiedniość: mnożenie zastępujemy przez operację AND (∧), dodawanie przez operację OR (∨) a wyrażenia $(1 - x)$ przez negację (¬).

- Taką formę zapisu wyrażenia logicznego nazywamy dysjunktywną postacią normalną (ang. ***disjunctive normal form, DNF***).

- Oczywiście można następnie "uprościć" takie wyrażenie logiczne stosując inne, znane operatory logiczne (XOR, NAND, NOR, …)

- **Ciekawostka**. Przedstawienie wielomianowe **ACCA** można traktować jako "fuzzyfikacja" (rozszerzenie do logiki rozmytej - *fuzzy logic*) postaci logicznej DNF.

Reprezentacja algebraiczna (inna)

Commun. Math. Phys. 93, 219–258 (1984)

Communications in Mathematical Physics

Algebraic Properties of Cellular Automata

Olivier Martin[1,*], Andrew M. Odlyzko[2], and Stephen Wolfram[2,3,**]

1 California Institute of Technology, Pasadena, CA 91125, USA
2 Bell Laboratories, Murray Hill, NJ 07974, USA
3 The Institute for Advanced Study, Princeton, NJ 08540, USA

Abstract. Cellular automata are discrete dynamical systems, of simple construction but complex and varied behaviour. Algebraic techniques are used to give an extensive analysis of the global properties of a class of finite cellular automata. The complete structure of state transition diagrams is derived in terms of algebraic and number theoretical quantities. The systems are usually irreversible, and are found to evolve through transients to attractors consisting of cycles sometimes containing a large number of configurations.

https://projecteuclid.org/journals/communications-in-mathematical-physics/volume-93/issue-2/Algebraic-properties-of-cellular-automata/cmp/1103941055.pdf

Reprezentacja wielomianowa dla większej liczby stanów?

- **Pytanie**. Czy da się zapisać regułę lokalną wielo-stanowego CA za pomocą wielomianu podobnego do tego, danego równaniem (*)? Okazuje się, że **TAK**!

- Pomysł sprawdza się do oznaczenia s-elementowego zbioru stanów jako wektory bazy standardowej przestrzeni $\mathbb{R}^s$, czyli na przykład automat 3-stanowy operować będzie na stanach:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

Wtedy wielomian staje się “trójwymiarowy”, ale na każdej współrzędnej jest bardzo podobny do przypadku 2-stanowego.

Uwaga. W tej notacji jeden z **wymiarów** jest nadmiarowy i można go pominąć. Wówczas notacja dla CAs 2-stanowych jest spójna z tradycyjną notacją .

Journal of Computational Science 11 (2015) 245–257

Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Computational Science

journal homepage: www.elsevier.com/locate/jocs

On the decomposition of stochastic cellular automata

Witold Bołt[a,b,*], Jan M. Baetens[b], Bernard De Baets[b]

[a] *Systems Research Institute, Polish Academy of Sciences, Newelska St. 6, 01-447 Warsaw, Poland*
[b] *KERMIT, Department of Mathematical Modelling, Statistics and Bioinformatics, Ghent University, Coupure Links 653, B-9000 Gent, Belgium*

A R T I C L E I N F O

Article history:
Received 16 February 2015
Received in revised form 18 August 2015
Accepted 9 September 2015
Available online 24 September 2015

Keywords:
Stochastic cellular automata
Complexity analysis
Continuous cellular automata
Decomposition

A B S T R A C T

In this paper we present two interesting properties of stochastic cellular automata that can be helpful in analyzing the dynamical behavior of such automata. The first property allows for calculating cell-wise probability distributions over the state set of a stochastic cellular automaton, *i.e.* images that show the average state of each cell during the evolution of the stochastic cellular automaton. The second property shows that stochastic cellular automata are equivalent to so-called stochastic mixtures of deterministic cellular automata. Based on this property, any stochastic cellular automaton can be decomposed into a set of deterministic cellular automata, each of which contributes to the behavior of the stochastic cellular automaton.

https://arxiv.org/pdf/1503.03318.pdf https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1877750315300181

Materiały

- https://plato.stanford.edu/entries/cellular-automata/index.html
- https://plato.stanford.edu/entries/cellular-automata/supplement.html
- https://natureofcode.com/cellular-automata/
- https://rosettacode.org/wiki/Elementary_cellular_automaton
- https://mathworld.wolfram.com/ElementaryCellularAutomaton.html
- https://www.youtube.com/watch?v=W1zKu3fDQR8
- https://www.youtube.com/watch?v=60P7717-XOQ
- https://www.wolframscience.com/nks/

Dziękuję bardzo

Witold.Bolt@ug.edu.pl