Automaty Komórkowe

Wykład 2

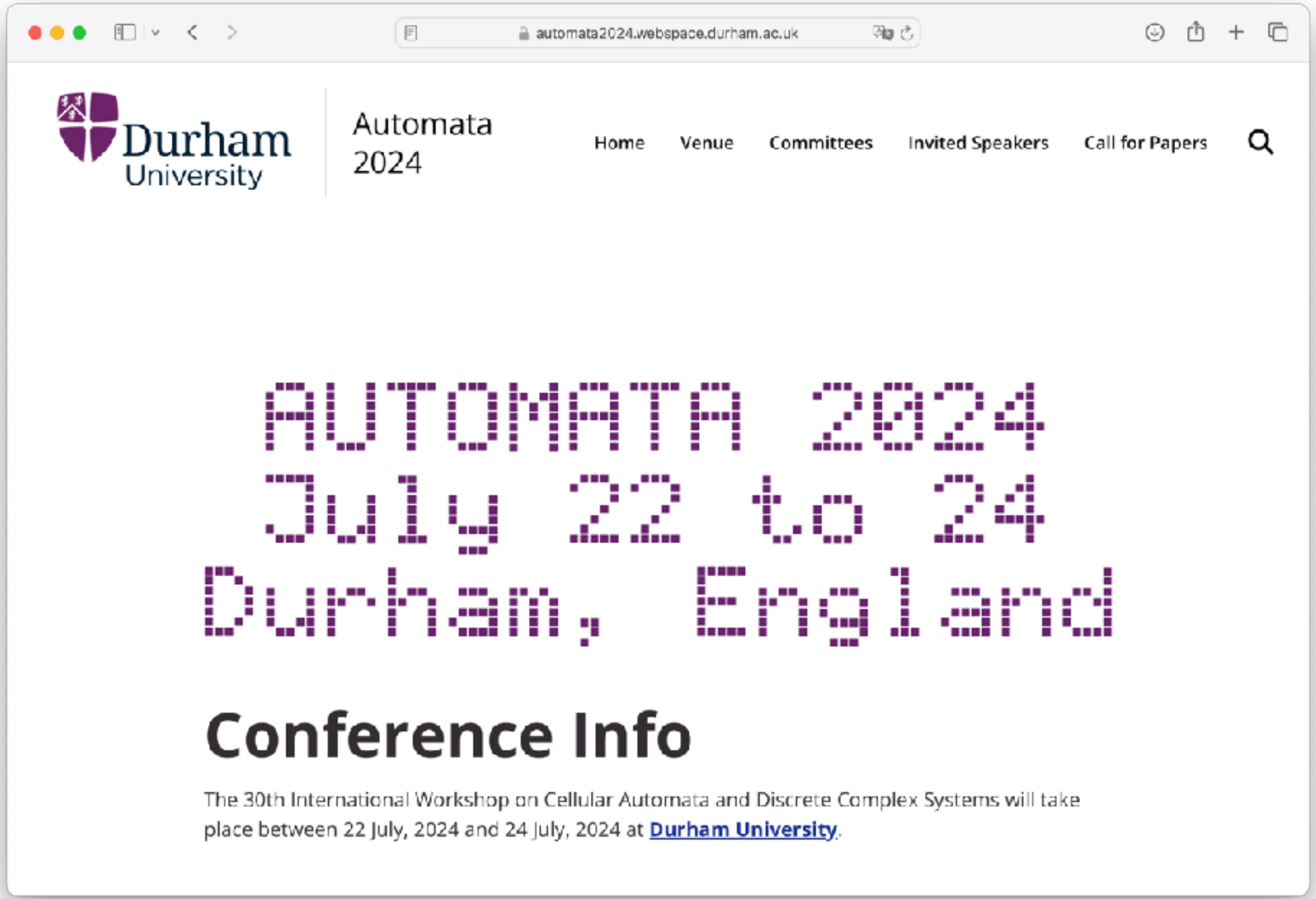
Witold Bołt, 28.02.2024

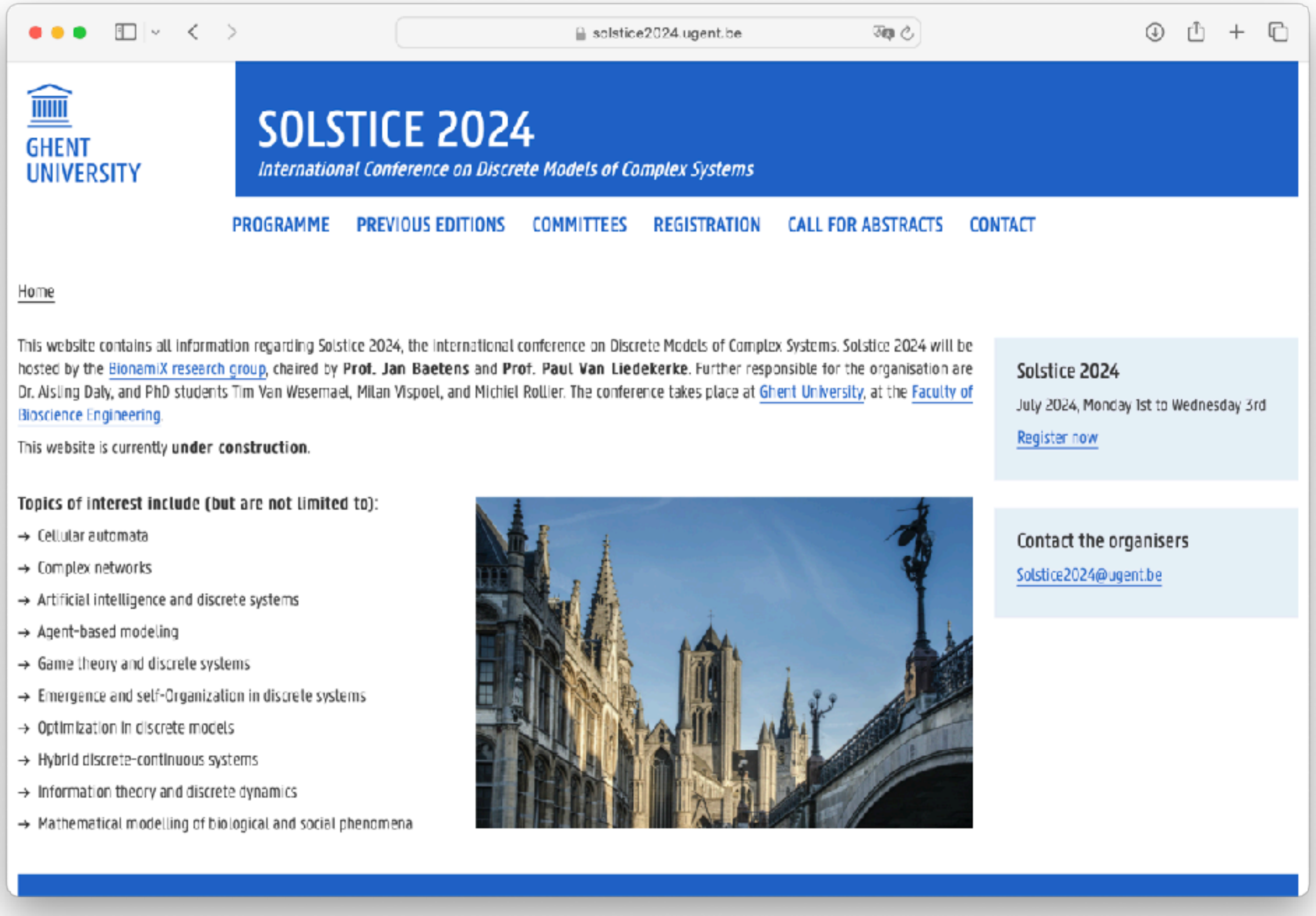
Poprzednio omówiliśmy

Wykład 1:

- Sprawy organizacyjne, motywację do zajmowania się CA, podstawowe pojęcia / definicje / intuicje.

Konferencje 2024





Jedźmy tam razem!

około wykładu **4** / **5** opowiem o pomysłach…

Nie do końca formalna definicja

Automat Komórkowy:

- deterministyczny **układ dynamiczny**
- czas jest dyskretny
- przestrzeń, podzielona jest na niepodzielne, przeliczalne “kawałki”
- każdy z takich “kawałków” przyjmuje jeden ze **skończenie wielu** stanów
- stany zmieniają się w czasie w oparciu o **lokalne** oddziaływanie

Ultra-krótki rys historyczny

- Lata ’40 XX wieku - prace **Stanisława Ulama** i **John’a von Neumanna**
  - Wczesne prace nad “artificial life” i samo-replikacją
- Lata ’70 XX wieku - przypadkowa i mało istotna praca **John’a Conway’a** - “Game of Life” do dziś jeden z ważniejszych i popularniejszych automatów komórkowych
- Lata ’80 XX wieku - seria praca **Stephan’a Wolfram’a** - podsumowana w książce “A New Kind of Science” (2002)

- Artykuł na Wikipedii: https://en.wikipedia.org/wiki/Cellular_automaton ma sensownie opracowane ujęcie historyczne - polecam

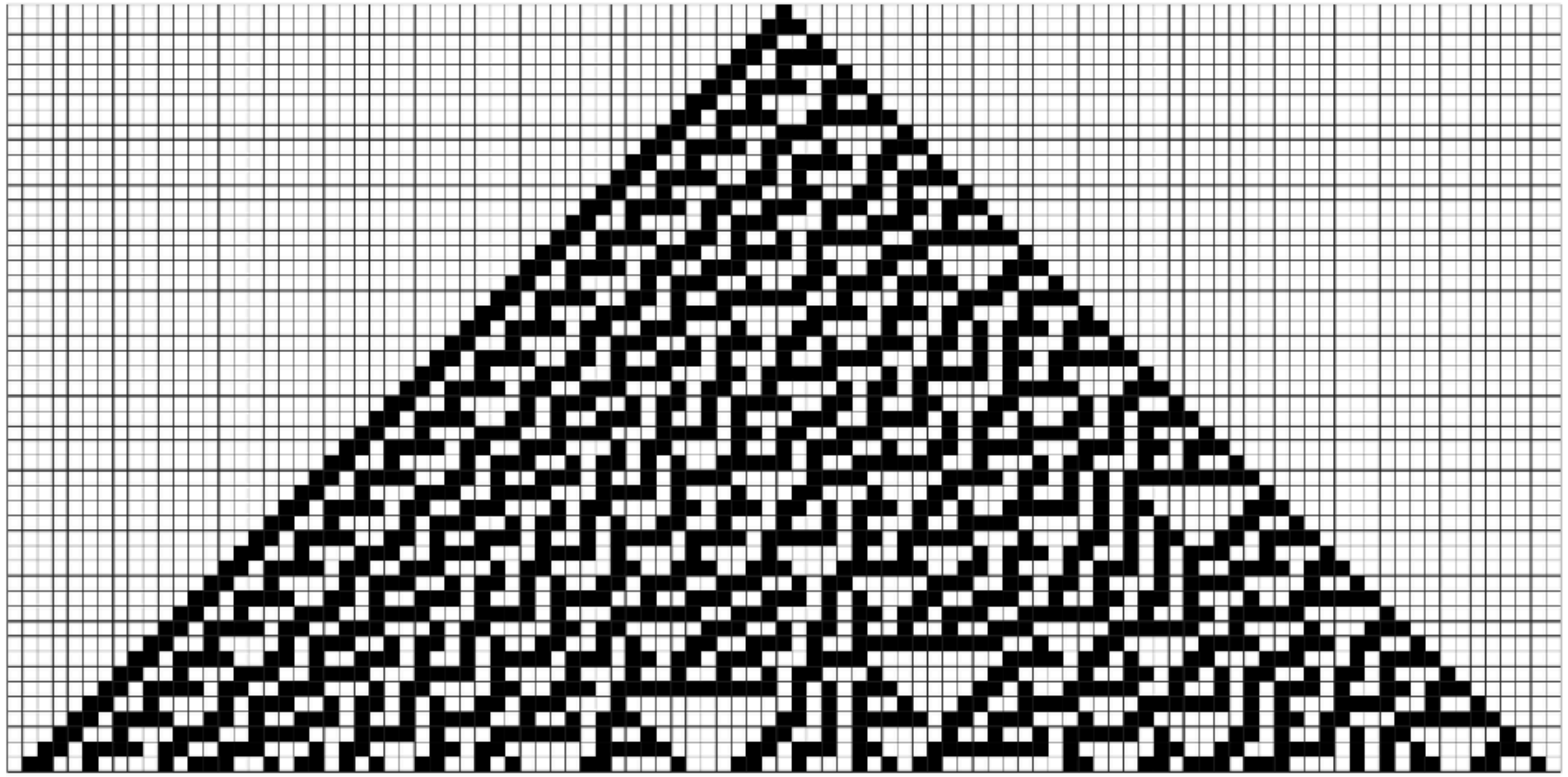
Podstawowe pojęcia

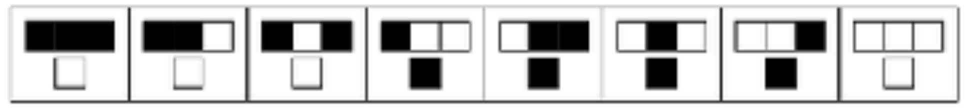
- Automat Komórkowy (*Cellular Automat**on***, CA),
- Automat**y** Komórkowe (*Cellular Automat**a***, CA**s**)
- Przestrzeń (*space*), komórka (*cell*), sąsiedztwo (*neighborhood*)
- Stan (*state*), konfiguracja sąsiedztwa (*neighborhood configuration*), konfiguracja (*configuration*), konfiguracja początkowa (*initial configuration*)
- Warunki brzegowe (*boundary conditions*): periodyczne (*periodic*), zerowe (*null*)
- Reguła lokalna i global (*local & global rule*)
- <u>Tabel wyszukiwania (?) (*look-up table, LUT*)</u>
- <u>Diagram czasoprzestrzenny (*space-time diagram*)</u>

Elementarne Automaty Komórkowe

- Elementary Cellular Automata (ECAs)
- **Stephan Wolfram (1959 -)** brytyjski przedsiębiorca i naukowiec; założyciel firmy Wolfram Research, fizyk cząstek elementarnych, matematyk i informatyk specjalizujący się w automatach komórkowych i algebrze komputerowej. Twórca programu komputerowego Mathematica.

- **Zbiór stanów** = {0,1}
- **Przestrzeń** 1-wymiarowa
- **Sąsiedztwo** - symetryczne, o promieniu 1 (lewa, centralna, prawa)





A cellular automaton with a simple rule that generates a pattern which seems in many respects random. The rule used is of the same type as in the previous examples, and the cellular automaton is again started from a single black cell. But now the pattern that is obtained is highly complex, and shows almost no overall regularity. This picture is our first example of the fundamental phenomenon that even with simple underlying rules and simple initial conditions, it is possible to produce behavior of great complexity. In the numbering scheme of Chapter 3, the cellular automaton shown here is rule 30.

The picture shows what happens when one starts with just one black cell and then applies this rule over and over again. And what one sees is something quite startling—and probably the single most surprising scientific discovery I have ever made. Rather than getting a simple regular pattern as we might expect, the cellular automaton instead produces a pattern that seems extremely irregular and complex.

S. Wolfram - New Kind of Science, 2002

https://www.wolframscience.com/nks/p27--how-do-simple-programs-behave/

Elementarne Automaty Komórkowe

Niech dana będzie **dowolna** funkcja $f\colon \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ - będziemy ją nazywać **regułą lokalną** ECA.

Niech funkcja $F_N\colon \{0,1\}^N \to \{0,1\}^N$ zadana będzie tak, że

$$F_N(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) = (x'_0, x'_1, \ldots, x'_{N-1})$$

gdzie:

$$x'_i = f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}),$$

a operacje na indeksach wykonywane są modulo N (zakładamy dla ułatwienia periodyczne warunki brzegowe).

Wtedy F_N nazywamy **regułą globalną** N-komórkowego ECA.

Elementarne Automaty Komórkowe

Niech $\{0,1\}^* = \bigcup_{N>0} \{0,1\}^N$, oraz niech $F\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ zdefiniowane będzie tak, że dla dowolnego $\mathbf{x} \in \{0,1\}^N \subset \{0,1\}^*$ zachodzi $F(\mathbf{x}) = F_N(\mathbf{x})$. Wtedy takie F nazywamy regułą globalną ECA. Taką regułę będziemy **utożsamiać** z ECA i traktować jako jego definicję.

- Zwróć uwagę, że zarówno definicja F_N jak i F zależy od definicji f, zatem w istocie to reguła lokalna definiuje CA - reszta to powtarzalna "otoczka formalna".

- W literaturze spotyka się analogiczną definicję dla nieskończonej liczby komórek, gdzie $F\colon \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ a wszystko inne odbywa się na tej samej zasadzie co wyżej (poza tym, że nie stosujemy operacji na indeksach modulo N, bo nie ma N).

- Ciąg $(\mathbf{x}, F(\mathbf{x}), F(F(\mathbf{x})), \ldots, F^T(\mathbf{x}))$ będziemy przedstawiać graficznie (*zaraz zobaczymy jak*) i nazywać diagramem czasoprzestrzennym (*por*. pojęcie orbity punktu w teorii układów dynamicznych).

Numeracja reguł ECA - kody Wolframa

Niech $f\colon \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ będzie regułą lokalną ECA. Aby zdefiniować f musimy określić wartości dla 8 zestawów argumentów:

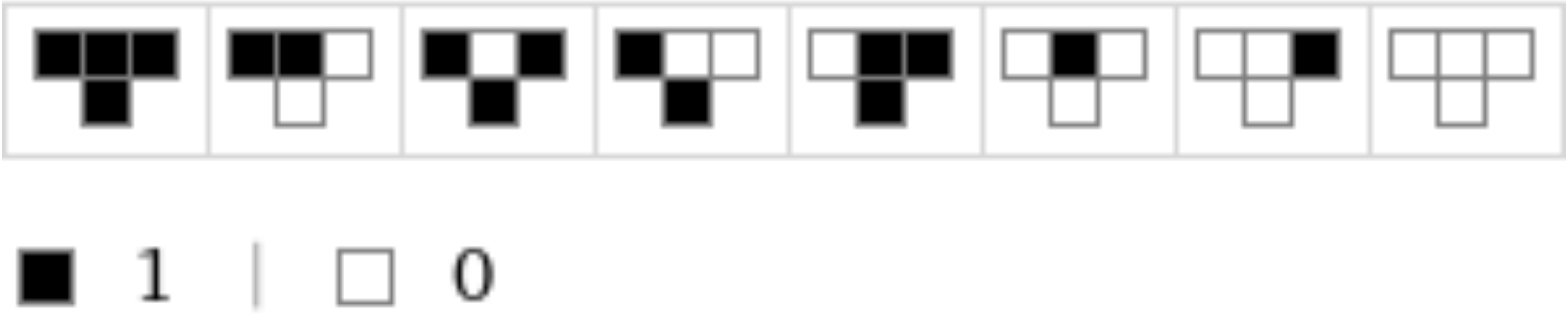
(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1).

Możemy potraktować te wektory jako binarny zapis liczb i wtedy mamy po prostu liczby od 0 do 7. Innymi słowy każdej z takich liczb musimy przyporządkować cyfrę binarną (0 lub 1) - dla zestawu numer i przypisujemy wartość ℓ_i

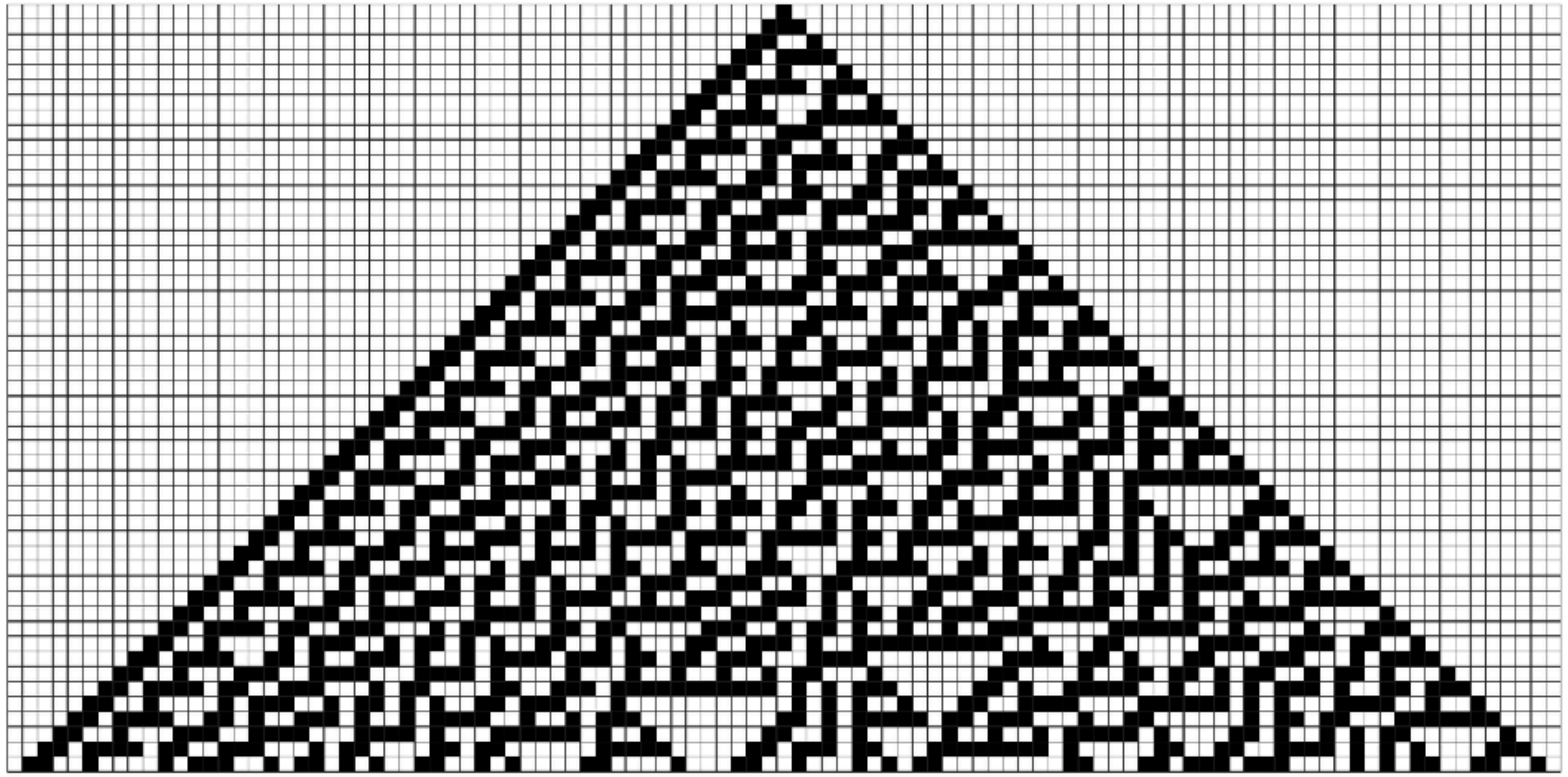
Definicją f jest więc wektor binarny o długości 8, który znów możemy potraktować jako liczbę zapisaną binarnie. Zwyczajowo wartości te zapisuje się w odwróconej kolejności, tj. $(\ell_7, \ell_6, \ell_5, \ell_4, \ell_3, \ell_2, \ell_1, \ell_0)$ i taki wektor binarny odczytuje się jako liczbę całkowitą.

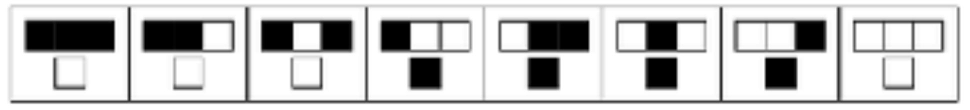
Liczba ta jest kodem Wolframa lub numerem Wolfram reguły f.

Numeracja reguł ECA - kody Wolframa



Jaki jest numer rej reguły?





A cellular automaton with a simple rule that generates a pattern which seems in many respects random. The rule used is of the same type as in the previous examples, and the cellular automaton is again started from a single black cell. But now the pattern that is obtained is highly complex, and shows almost no overall regularity. This picture is our first example of the fundamental phenomenon that even with simple underlying rules and simple initial conditions, it is possible to produce behavior of great complexity. In the numbering scheme of Chapter 3, the cellular automaton shown here is rule 30.

The picture shows what happens when one starts with just one black cell and then applies this rule over and over again. And what one sees is something quite startling—and probably the single most surprising scientific discovery I have ever made. Rather than getting a simple regular pattern as we might expect, the cellular automaton instead produces a pattern that seems extremely irregular and complex.

S. Wolfram - New Kind of Science, 2002

https://www.wolframscience.com/nks/p27--how-do-simple-programs-behave/

Ważne przykłady ECA

- Identyczność: $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$; $f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = x_i$
- Negacja / przeciwieństwo: $F(\mathbf{x}) = 1 - \mathbf{x}$; $f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = 1 - x_i$
- Przesunięcie w prawo (right shift): $f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = x_{i-1}$
- Przesunięcie w lewo (left shift): $f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = x_{i+1}$

- Traffic (left / right) ECA 184, ECA 226 (będzie później)
- …

Demo: ECAs

https://elife-asu.github.io/wss-modules/modules/1-1d-cellular-automata/

1-wymiarowe Automaty Komórkowe

Analogicznie można zdefiniować 1-wymiarowe CA o większym sąsiedztwie komórki.

Niech $f\colon \{0,1\}^{2r+1} \to \{0,1\}$ będzie dowolną funkcją, dla $r \geq 0$. Mówimy wówczas, że f jest reguła lokalną 1-wymiarowego CA o promieniu (sąsiedztwa) równym r. Oczywiście ECA mają reguły lokalne o promieniu $r = 1$.

Niech $\mathscr{A}_r$ będzie zbiorem wszystkich reguł globalnych, które można wyrazić przez reguły lokalne o promieniu r.

Fakt. $\mathscr{A}_r \subset \mathscr{A}_{r+1}$.

“Proste” fakty

- Jeśli F oraz G to reguły CA, to funkcja $F \circ G$ jest również regułą CA. **Dlaczego?** Zwróć uwagę, że nie mówimy tu o **E**CA!
- **Zadanie**. Niech $F \in \mathscr{A}_r$ oraz $G \in \mathscr{A}_q$. Wiemy, że $F \circ G \in \mathscr{A}_p$ dla pewnego p. Ile może wynosić to p?
- Niech S_L oraz S_R będą odpowiednio regułami (globalnymi) ECA shift left / shift right. Dla dowolnej reguły F zachodzi $F \circ S_L = S_L \circ F$ oraz $F \circ S_R = S_R \circ F$. Innymi słowy CA są “shift commuting” (komutują z przesunięciem). Jest to ważna własność wykorzystywana w teorii / w dowodzeniu twierdzeń.
- Niech I będzie regułą odpowiadającą ECA “negacja” ($I(\mathbf{x}) = 1 - \mathbf{x}$), oraz niech F będzie regułą pewnego **E**CA. Wtedy $F \circ I$ oraz $I \circ F$ to również reguły **E**CA.
- **Zadanie**. Sprawdź kiedy są one sobie równe.

Symetrie ECA

- Complement / complementary rule, czyli obłożenie negacją (ECA 51), czyli zamiana zer na 1, czyli $f^c(x, y, z) = 1 - f(1 - x, 1 - y, 1 - z)$

- Reflection / reflected rule, czyli symetria prawo-lewo, czyli $f^\star(x, y, z) = f(z, y, x)$

Complex Systems 4 (1990) 281–297

The Structure of the Elementary Cellular Automata Rule Space

Wentian Li
Santa Fe Institute, 1120 Canyon Road, Santa Fe, NM 87501, USA

Norman Packard
Center for Complex Systems Research, Physics Department, Beckman Institute, University of Illinois, Urbana, IL 61801, USA

https://content.wolfram.com/sites/13/2018/02/04-3-3.pdf

An elementary CA rule f can be equivalent to another rule f_1 under the left-to-right transformation, if

$$f_1(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = f(x_{i+1}, x_i, x_{i-1}) \tag{2.1}$$

is true for all 3-site blocks. f is equivalent to rule f_2 under the 0-to-1 transformation (represented by the overhead bar), if

$$f_2(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = \overline{f(\overline{x_{i-1}}, \overline{x_i}, \overline{x_{i+1}})} \tag{2.2}$$

is always true, and it is equivalent to rule f_3 under the joint operation of both if

$$f_3(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = \overline{f(\overline{x_{i+1}}, \overline{x_i}, \overline{x_{i-1}})} \tag{2.3}$$

holds. Suppose the rule table of f is $(t_7 t_6 t_5 t_4 t_3 t_2 t_1 t_0)$, the three equivalent rules are $f_1 = (t_7 t_3 t_5 t_1 t_6 t_2 t_4 t_0)$, $f_2 = (\bar{t_0} \bar{t_1} \bar{t_2} \bar{t_3} \bar{t_4} \bar{t_5} \bar{t_6} \bar{t_7})$, and $f_3 = (\bar{t_0} \bar{t_4} \bar{t_2} \bar{t_6} \bar{t_1} \bar{t_5} \bar{t_3} \bar{t_7})$. The spatial-temporal patterns for f_1, f_2 and f_3 are exactly the same by a mirror reflection transformation, or a white-to-black transformation, or a combination of both.

“Proste” fakty ciąg dalszy

- Regułę globalna F określoną na przestrzeni $\{0,1\}^*$ możemy rozpatrywać jako **deterministyczny**, **dyskretny** układ dynamiczny zadany przez ogólną równość: $\mathbf{x}^{t+1} = F(\mathbf{x}^t)$.
- Konfiguracja CA $\mathbf{x} \in \{0,1\}^*$, w języku układów dynamicznych jest punktem z przestrzeni stanów, a ciąg $(\mathbf{x}, F(\mathbf{x}), F(F(\mathbf{x})), \ldots, F^T(\mathbf{x}), \ldots)$ jest **orbitą** punktu $\mathbf{x}$, czasem oznaczaną jako $Orb(\mathbf{x})$.
- W teorii układów dynamicznych interesuje nas m.in. badanie / poszukiwanie punktów **stałych** - czyli takich, dla których $\mathbf{x} = F(\mathbf{x})$ oraz punktów **okresowych**, czyli takich, dla których $\mathbf{x} = F^T(\mathbf{x})$ dla pewnego $T > 0$.
- **Pytanie**. Co możemy powiedzieć o punktach stałych i okresowych ECA? Jak można (próbować) badać orbity ECA / CA?
- Zbiór $\{\mathbf{x} \in \{0,1\}^* \,|\, \forall_{\mathbf{y} \in \{0,1\}^*} F(\mathbf{y}) \neq \mathbf{x}\}$ nazywamy Ogrodem Eden (**Garden of Eden**) danego CA. Badanie konfiguracji GoE danego CA to istotne zagadnienie teorii CAs.

Klasyfikacja ECA (wg. Wolframa)

- Class 1: Cellular automata which rapidly converge to a **uniform state**. (**Uniform** / homogeneous class)
- Class 2: Cellular automata which rapidly converge to a **repetitive** or **stable** state. (**Periodic** class)
- Class 3: Cellular automata which appear to remain in a **random** state. (**Random** class)
- Class 4: Cellular automata which form **areas of repetitive** or stable states, but also form **structures that interact with each other** in complicated ways. (**Complex** class)

Klasyfikacja ECA (wg. Wolframa)

Wolfram's classes	**Rules**
Class I	0 8 32 40 128 136 160 168
Class II	1 2 3 4 5 6 7 9 10 11 12 13 14 15 19 23 24 25 26 27 28 29 33 34 35 36 37 38 42 43 44 46 50 51 56 57 58 62 72 73 74 76 77 78 94 104 108 130 132 134 138 140 142 152 154 156 162 164 170 172 178 184 200 204 232
Class III	18 22 30 45 60 90 105 122 126 146 150
Class IV	41 54 106 110

source: https://www.researchgate.net/publication/370524359_A_study_on_the_composition_of_elementary_cellular_automata

(warto przeczytać ten artykuł!)

Materiały

- https://plato.stanford.edu/entries/cellular-automata/index.html
- https://plato.stanford.edu/entries/cellular-automata/supplement.html
- https://natureofcode.com/cellular-automata/
- https://rosettacode.org/wiki/Elementary_cellular_automaton
- https://mathworld.wolfram.com/ElementaryCellularAutomaton.html
- https://www.youtube.com/watch?v=W1zKu3fDQR8
- https://www.youtube.com/watch?v=60P7717-XOQ
- https://www.wolframscience.com/nks/

Dziękuję bardzo

Witold.Bolt@ug.edu.pl