Automaty Komórkowe

Wykład 9

https://github.com/houp/ca-class

Witold Bołt, 08.05.2024

Poprzednio omówiliśmy

- **Wykład 1**: Sprawy organizacyjne, motywację do zajmowania się CA, podstawowe pojęcia / definicje / intuicje.
- **Wykład 2**: Definicja (formalna) i podstawowe w fakty o ECA. Reprezentacja Wolframa.
- **Wykład 3**: Symetrie w zbiorze ECA, relacje do ogólnej teorii układów dynamicznych, własności CA/ECA.
- **Wykład 4**: Alternatywne reprezentacje reguły lokalnej (wielomiany, wyrażenia logiczne), problem klasyfikacji gęstości (DCP).
- **Dwa tygodnie przerwy** 😥
- **Wykład 5 (zdalny):** Algorytmy ewolucyjne - poszukiwanie automatów komórkowych o określonych własnościach
- **Wykład 6:** Stochastyczne automaty komórkowe - SCAs, pLUT, α-ACAs, Diploid CAs, stochastic mixture, dekompozycja pLUT
- **Wykład 7**: Afiniczne Ciągle Automaty Komórkowe - wielomiany, cLUT, relaxed DCP + bonus - praca w IT w Trójmieście (i nie tylko)
- **Wykład 8**: Identyfikacja Deterministycznych Automatów Komórkowych
- **Wykład 9**: Identyfikacja Stochastycznych Automatów Komórkowych

Co będzie dalej*

- (15.05) **Wykład 10**: Dwu-wymiarowe Automaty Komórkowe / Reguła Life i Life-like / Totalistyczne i Zewnętrzne-Totalistyczne Automaty Komórkowe (totalistic & outer-totalistic CAs)
- (29.05) **Wykład 11**: Automaty Komórkowe zachowujące gęstość
- (5.06) **Wykład 12**: Nie-jednorodne (non-uniform) Automaty Komórkowe; Zastosowania w modelowaniu ruchu ulicznego
- (12.06) **Wykład 13**: Modele pożaru lasu, rozprzestrzeniania się epidemii, Greenberg–Hastings i podobne modele
- (**termin dodatkowy**) **Wykład 14**: Neural CAs (Neuronowe Automaty Komórkowe)

* zastrzegam sobie prawo do wprowadzania zmian w rozkładzie - bez uprzedzenia 😉

Totalistyczne Automaty Komórkowe

Definicja

- Niech $f\colon \{0,1\}^{2r+1} \to \{0,1\}$ będzie regułą lokalną pewnego automatu komórkowego. Będziemy mówili, że reguła ta definiuje automat komórkowy, który jest:
  - **totalistyczny** (ang. *totalistic*), jeśli istnieje funkcja $g\colon \{0,1,\ldots,2r+1\} \to \{0,1\}$ taka, że zachodzi:
  $$f\left(x_{-r}, x_{-r+1}, \ldots, x_0, \ldots, x_{r-1}, x_r\right) = g\left(\sum_{i=-r}^{r} x_i\right),$$
  - **zewnętrzny-totalistyczny** (ang. *outer-totalistic*), jeśli istnieje funkcja $h\colon \{0,1\} \times \{0,1,\ldots,2r\} \to \{0,1\}$ taka, że zachodzi:
  $$f\left(x_{-r}, x_{-r+1}, \ldots, x_0, \ldots, x_{r-1}, x_r\right) = h\left(x_0, \sum_{i=-r}^{-1} x_i + \sum_{i=1}^{r} x_i\right)$$
- Naturalnie można z łatwością rozszerzyć tą definicję na większe zbiory stanów i większą liczbę wymiarów.
- Mówiąc po ludzku automat totalistycznych wylicza stan komórki w oparciu o **sumę stanów sąsiedztwa**. Natomiast automatu zewnętrzny-totalistyczny bierze pod uwagę sumę stanów sąsiedztwa bez komórki centralnej i osobno stan komórki centralnej.

Co wynika z definicji?

- **Fakt**. Jeśli reguła lokalna f definiuje automat komórkowy totalistyczny to definiuje również automat zewnętrzny-totalistyczny.

  Dowód. Skoro f jest totalistyczna, to istnieje g taka, że $f(x_{-r}, \ldots, x_r) = g(\sum x_i)$.
  Niech $h(x, y) = g(x + y)$. Wtedy oczywiście
  $h(x_0, \sum_{i=-r}^{-1} x_i + \sum_{i=1}^{r} x_i) = g(\sum_{i=-r}^{r} x_i) = f(x_{-r}, \ldots, x_r)$.

- **Fakt**. Niech $r > 0$ będzie promieniem sąsiedztwa. Istnieje 2^{2r+2} dwu-stanowych, 1-wymiarowych reguł totalistycznych, oraz $2^{2(2r+1)}$ reguł zewnętrznych-totalistycznych.

- **Obserwacja.** Wszystkich reguł jest $2^{2^{2r+1}}$, czyli znacznie więcej!

Co wynika z definicji?

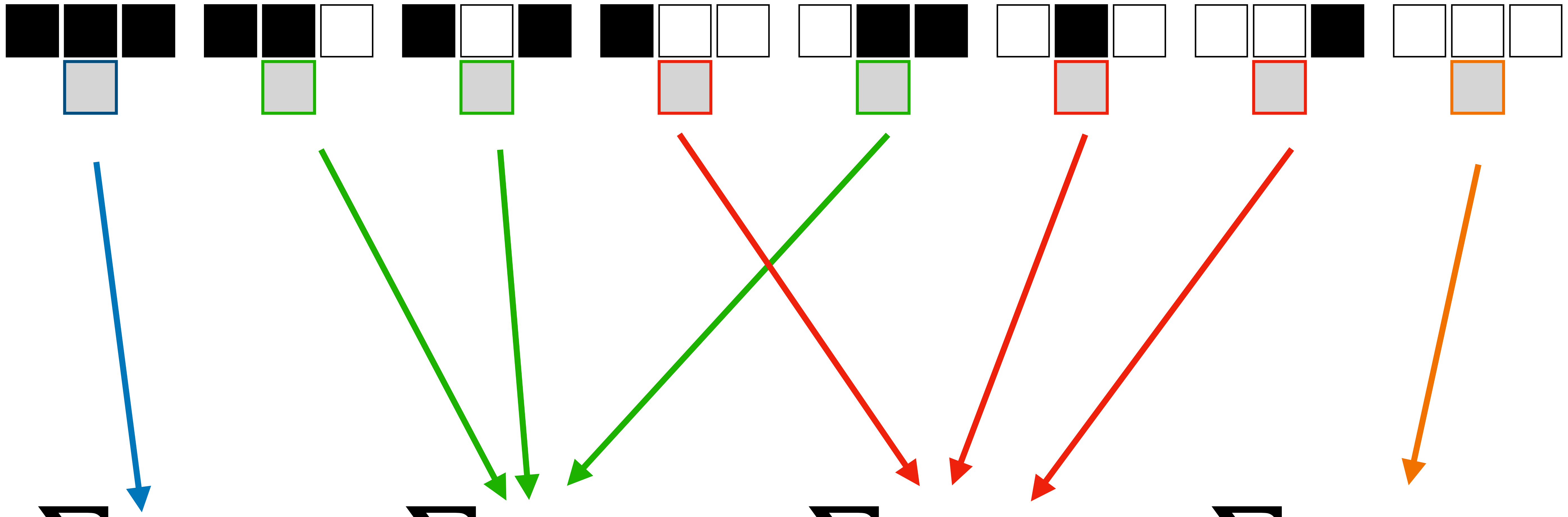
- Reguły totalistic (oraz outer-totalistic) możemy zapisać w formie specjalnej tablicy podobnej do LUT.
- Przykład dla $r = 1$ i reguł totalistic:

$\sum x_i = 3$	$\sum x_i = 2$	$\sum x_i = 1$	$\sum x_i = 0$
$\tilde{\ell}_3$	$\tilde{\ell}_2$	$\tilde{\ell}_1$	$\tilde{\ell}_0$

- Podobnie jak w przypadku zwykłego LUT, możemy użyć drugi wiersz takiej tabelki do ponumerowania reguł.

Co wynika z definicji?

- Relacja między “zwykłym” LUT a “LUT totalistycznym”:

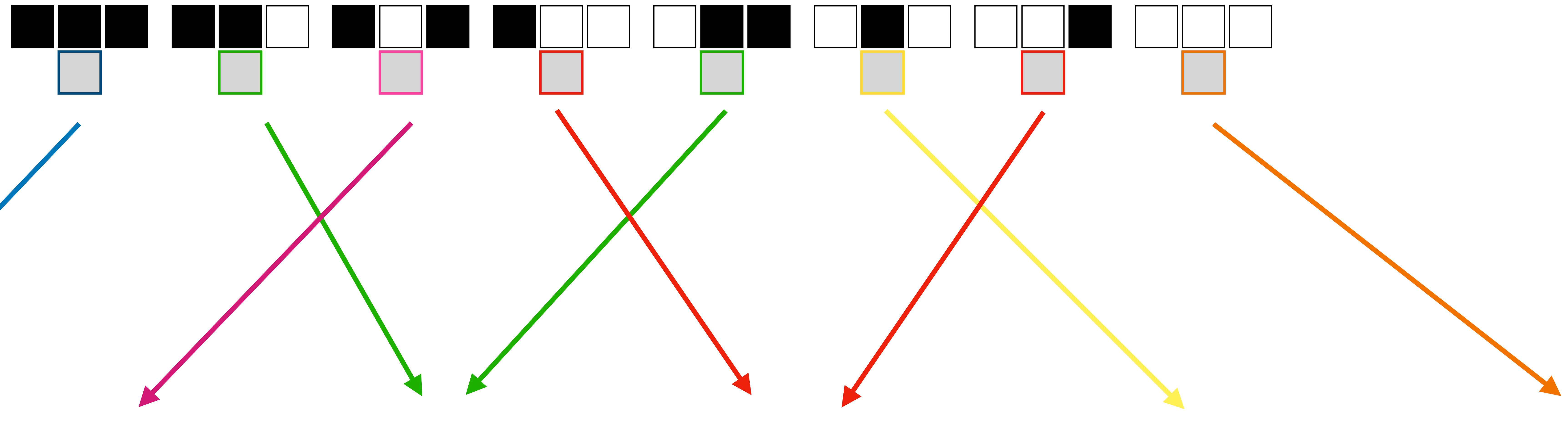


$$\sum x_i = 3 \qquad \sum x_i = 2 \qquad \sum x_i = 1 \qquad \sum x_i = 0$$

$$\tilde{\ell}_3 \qquad \tilde{\ell}_2 \qquad \tilde{\ell}_1 \qquad \tilde{\ell}_0$$

Co wynika z definicji?

- Relacja między “zwykłym” LUT a “LUT zewnętrznym-totalistycznym”:



$$1,\ \sum x_i = 2 \quad 0,\ \sum x_i = 2 \quad 1,\ \sum x_i = 1 \quad 0,\ \sum x_i = 1 \quad 1,\ \sum x_i = 0 \quad 0,\ \sum x_i = 0$$

$$\tilde{\ell}_{1,2} \quad \tilde{\ell}_{0,2} \quad \tilde{\ell}_{1,1} \quad \tilde{\ell}_{0,1} \quad \tilde{\ell}_{1,0} \quad \tilde{\ell}_{0,0}$$

Ćwiczenia dla czytelnika

- Wypisz wszystkie ECA, które są totalistic i outer-totalistic.
- Wypisz wszystkie ECA, które nie są outer-totalistic.
- Sprawdź czy własności bycia totalistic / outer-totalistic wpływają na "complexity" wyrażone przez klasyfikację Wolframa, lub podobne klasyfikacje. To znaczy, czy reguły outer-totalistic są mniej / bardziej złożone od pozostałych? Czy ta własność raczej mówi o tym, że te reguły są "prostsze" czy przeciwnie bardziej złożone?

Polecam!

ELSEVIER

Physica D: Nonlinear Phenomena

Volume 432, April 2022, 133074

Review

Progress, gaps and obstacles in the classification of cellular automata

Milan Vispoel , Aisling J. Daly, Jan M. Baetens

Show more

Add to Mendeley Share Cite

https://doi.org/10.1016/j.physd.2021.133074

Get rights and content

https://doi.org/10.1016/j.physd.2021.133074

Uwagi

- SCA oraz ACCA też mogą być totalistic / outer-totalistic. Definicja jest właściwie identyczna / analogiczna (jedynie dziedzina funkcji g oraz h musi być odpowiednio dobrana w przypadku ACCA).
- Automaty totalistic i outer-totalistic mają istotne zastosowania, bo własność ta dobrze odpowiada własnościom znanym z **fizyki** i **chemii**.
- Dzięki temu, że tych automatów jest znacznie mniej (niż wszystkich) i dzięki temu, że można je sensownie numerować - sensowne jest badanie całej klasy np. automatów totalistycznych o zadanym promieniu.
    - Można napisać GA, który poszukuje automaty totalistyczne o zadanych własnościach.

Dwuwymiarowe Automaty Komórkowe

A co jeśli chcemy mieć 2D CA?

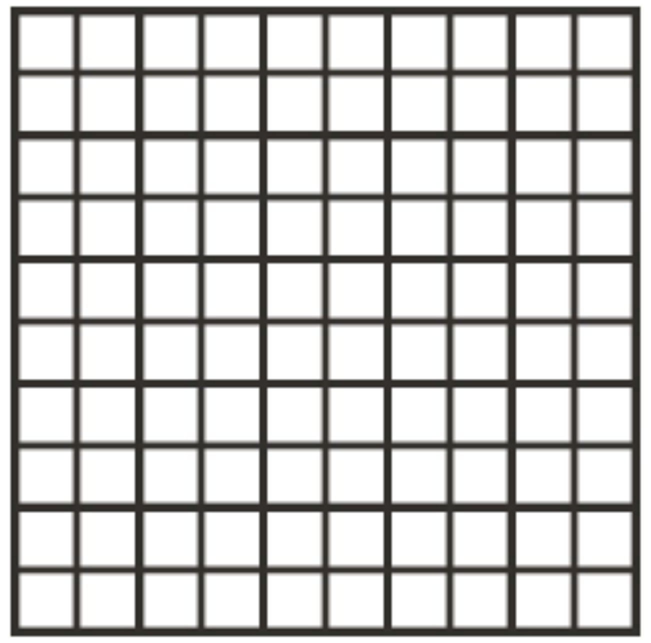
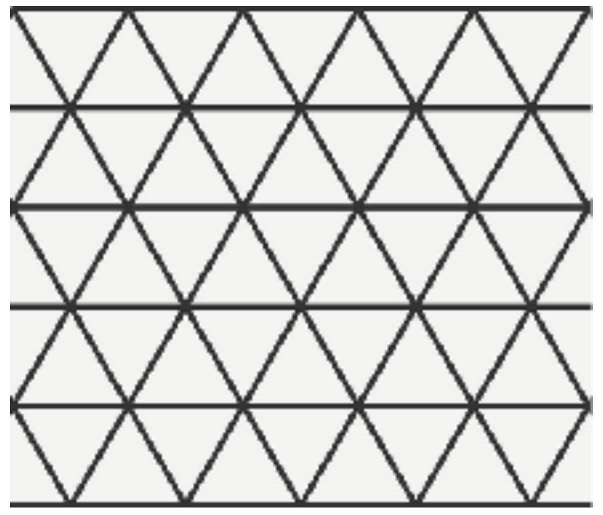
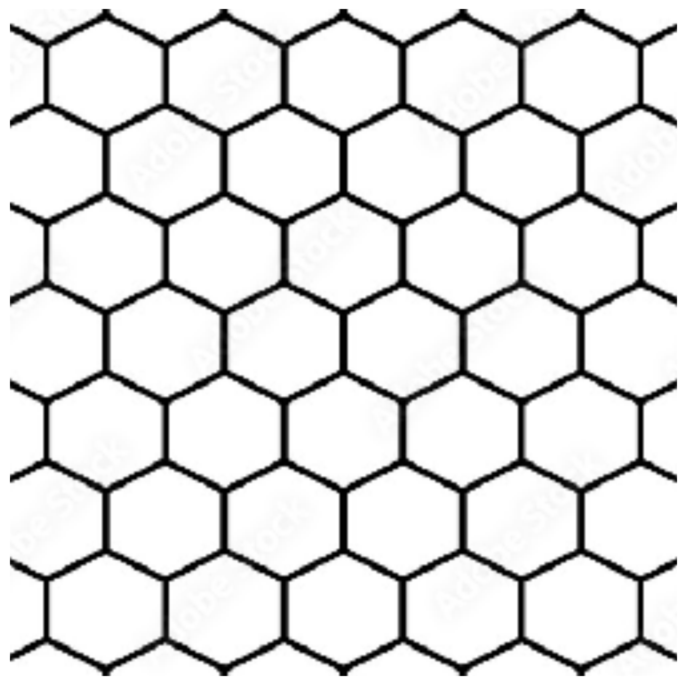
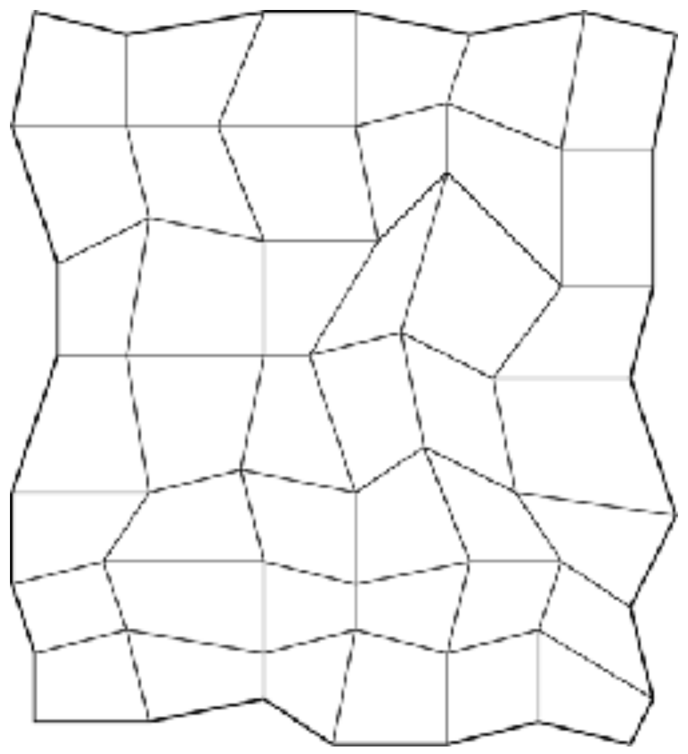
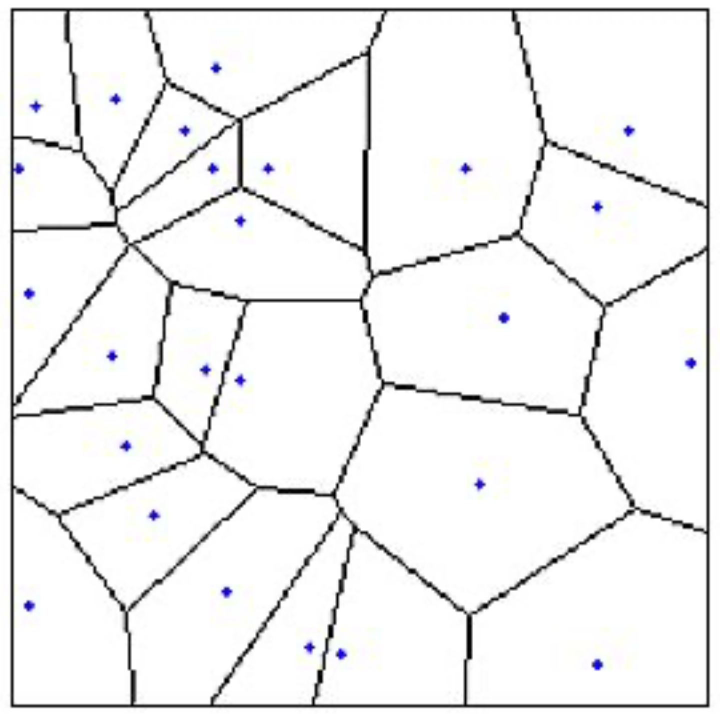
- Póki co rozpatrywaliśmy automaty komórkowe 1-wymiarowe. To miłe i fajne, ale mało praktyczne, bo wszystko wskazuje na to, że nasz świat nie jest 1-wymiarowy.
- Co trzeba zrobić aby CA miał więcej wymiarów?
  - Stany
  - Komórki
  - Sąsiedztwo
  - Warunki brzegowe
  - Reguła lokalna i globalna, LUT
  - Space-time diagram

A co jeśli chcemy mieć 2D CA?

- **Stany** - bez zmian, każda z komórek może mieć przypisany któryś ze (skończenie wielu) stanów, ze zbioru stanów.

- **Komórki** - w przypadku 1D dzieliliśmy odcinek / prostą na niepodzielne kawałki. Rysowaliśmy je co prawda jako kwadraciki, ale ich rozmiar nie miał żadnego znaczenia - liczyło się tylko ułożenie obok siebie.

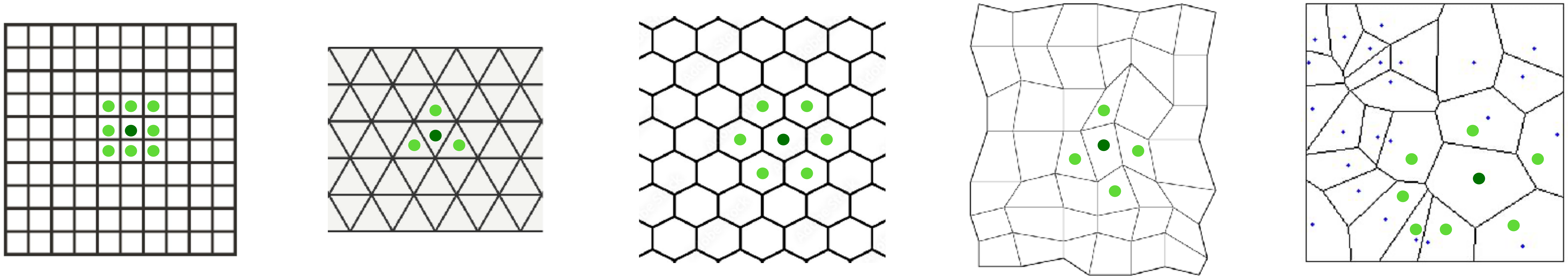
- W przypadku 2D jest podobnie, ale **inaczej**. Mamy bowiem **wiele sposobów** podziału **płaszczyzny** na małe, niepodzielne kawałki - różnego rodzaju “kraty” i inne podziały.

A co jeśli chcemy mieć 2D CA?

- **Sąsiedztwo** - w przypadku 1D musieliśmy ustalić jedynie promień, czyli liczbę komórek “w prawo” / “w lewo” i właściwie nie było więcej opcji.

- Na płaszczyźnie, zależnie od tego jakie mamy komórki, możemy tworzyć bardzo różne sąsiedztwa. Przykłady (można wymyślać **więcej**!):



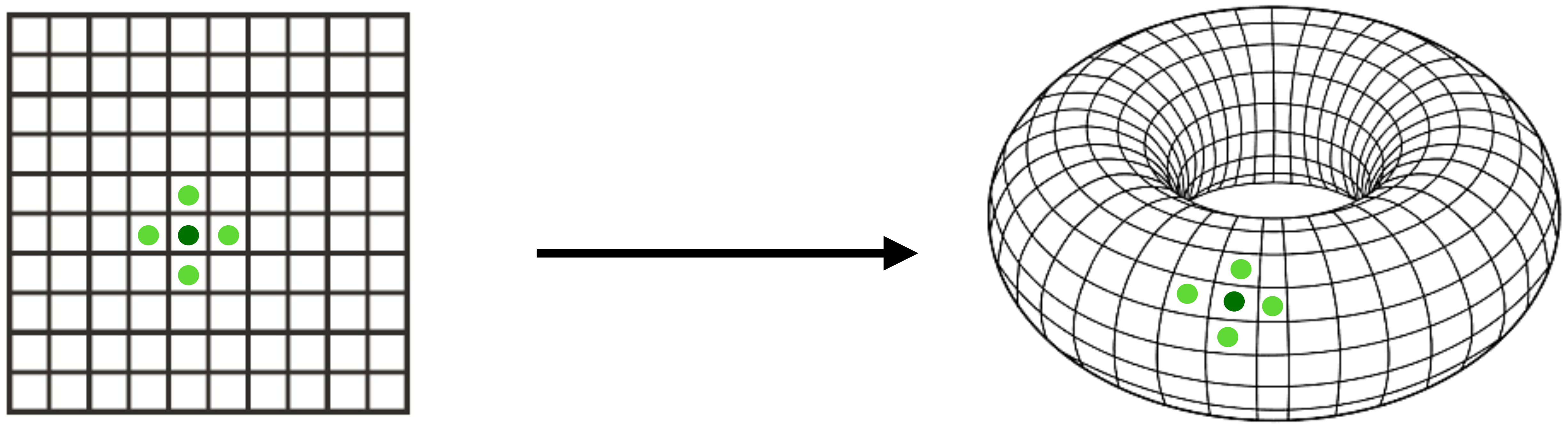
komórka “centralna”

komórka “sąsiednie” względem “centralnej”

A co jeśli chcemy mieć 2D CA?

- **Warunki brzegowe** - w przypadku 1D, jeśli mieliśmy skończenie wiele komórek, musieliśmy ustalić co się dzieje przed pierwszą i po ostatniej komórce. Popularne wyjścia to “periodic” (sklejamy początek z końcem), “null” (same zera), ewentualnie “reflective” (odbicie lustrzane).

- W przypadku 2D robimy podobnie, ale mamy więcej możliwości.



Przykład: periodyczne warunki brzegowe w 2D.

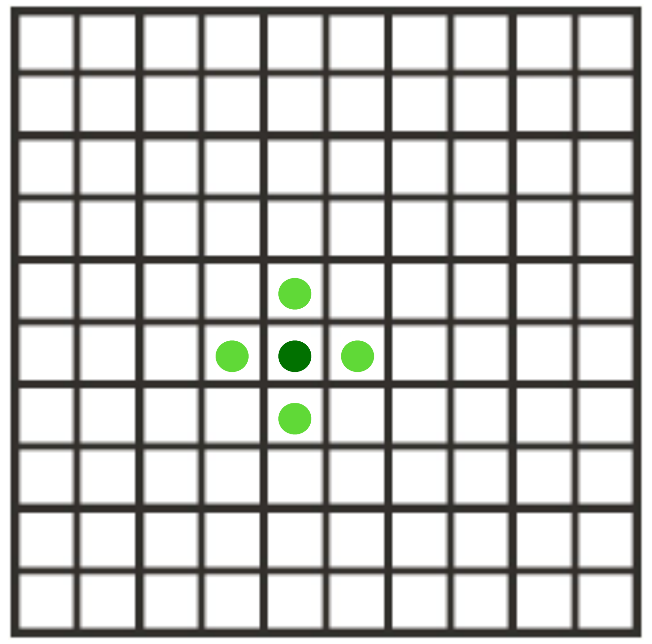
A co jeśli chcemy mieć 2D CA?

- **Reguła lokalna i globalna** - w przypadku 1D to były po prostu funkcje. Reguła lokalna zależna była od tego ile komórek znajduje się w sąsiedztwie. Reguła globalna przypisywała nowe stany wszystkim komórkom “na raz” zgodnie z regułą lokalną.

- W przypadku 2D robimy dokładnie tak samo, ale… z reguły nawet najprostsze przypadki będą miały więcej komórek w sąsiedztwie niż ECA, a zatem reguł lokalnych będzie **dużo**.

- Oczywiście LUT działa analogicznie jak w 1D.

To jest zwykła funkcja 5 zmiennych, ale argumenty są napisane tak, żeby odpowiadały “kształtowi” sąsiedztwa.



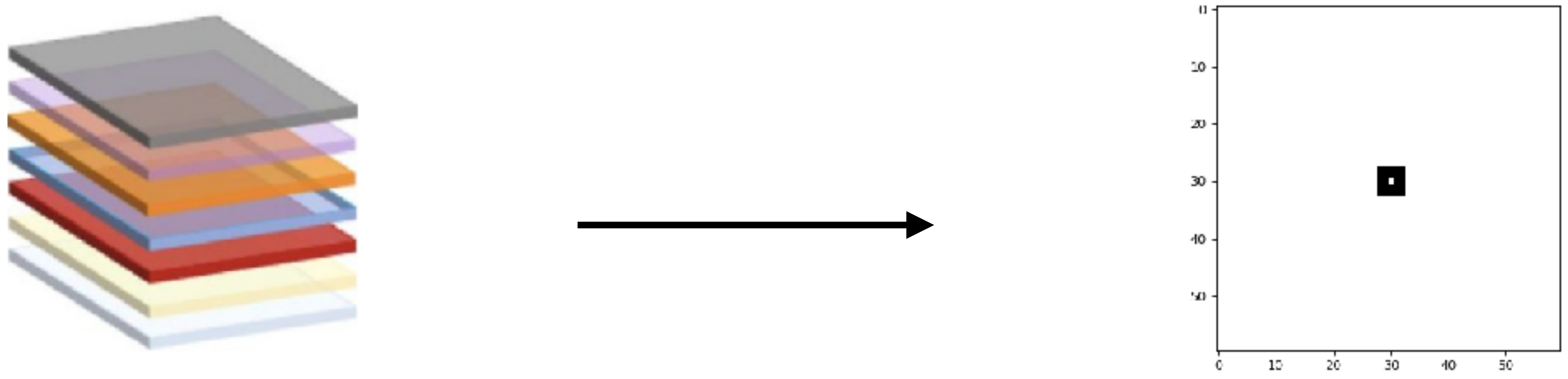
$$\longrightarrow \quad f\begin{pmatrix} & x_u & \\ x_l & x_c & x_r \\ & x_d & \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad f(x_u, x_l, x_c, x_r, x_d)$$

A co jeśli chcemy mieć 2D CA?

- **Space-time diagram** - w przypadku 1D CA diagram był dwu-wymiarowy. Każdy wiersz diagramu odpowiadał pełnemu krokowi czasowemu pokazując stany wszystkich komórek. Innymi słowy space-time diagram pomagał zwizualizować czas.

- W przypadku 2D CA można by rozważać space-time diagram skonstruowany analogicznie jednak jest to bardzo niepraktyczne, bo w tym przypadku … space-time diagram to macierz trójwymiarowa! Trudno taki obiekt zwizualizować w sposób, który dawałby nam sensowne informacje.

- Dlatego dużo częściej wizualizujemy 2D CA w postaci animacji!



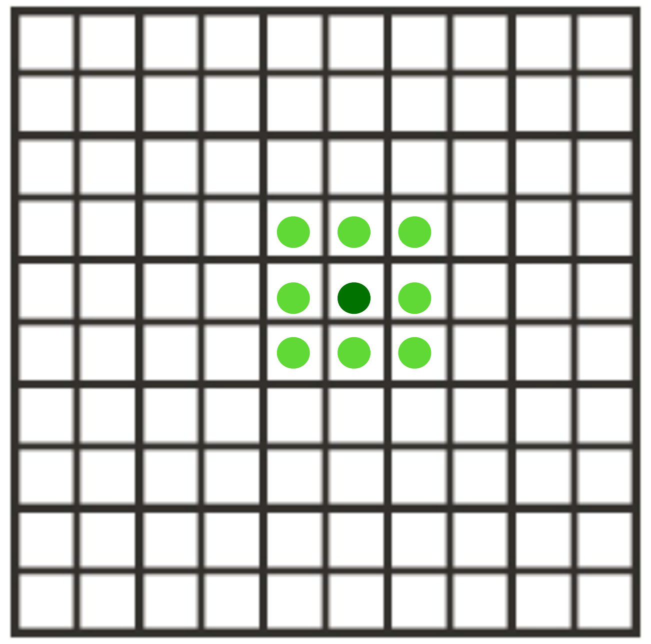
Typowy przypadek

- Będziemy rozważali jedynie przypadek 2D, w którym płaszczyzna podzielona jest na kwadratowe komórki o równym rozmiarze (ang. square grid).

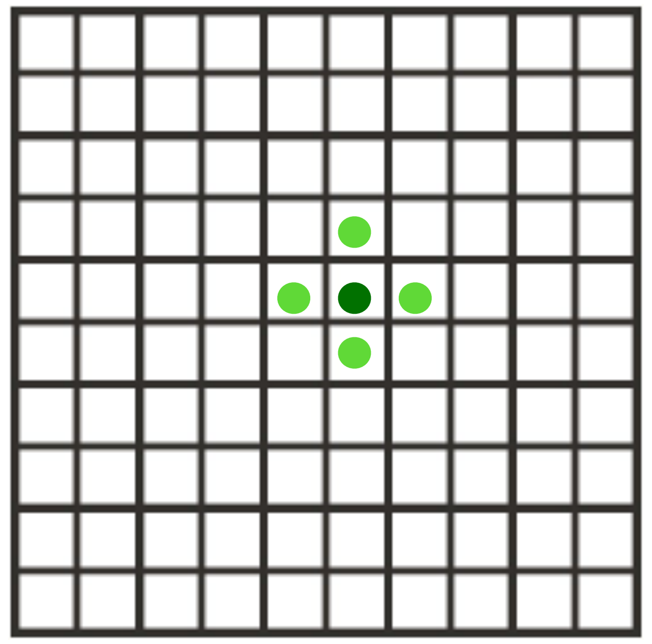
- Komórek będzie skończenie wiele.

- Obowiązywać będą (najczęściej) periodyczne warunki brzegowe.

- Rozważać będziemy dwa rodzaje sąsiedztwa:



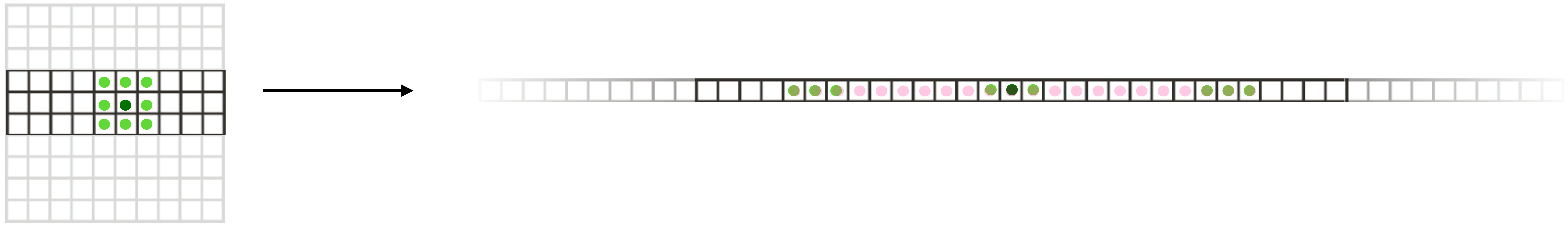
sąsiedztwo Moore'a



sąsiedztwo von Neumanna

Drobna uwaga

- Zauważmy, że takie automaty komórkowe, choć interpretujemy je jako 2D, to tak na prawdę są w pewnym sensie 1D…



… ale nie będziemy tak myśleć i jest to w pewnym sensie oszustwo :)

Conway’s Game of Life

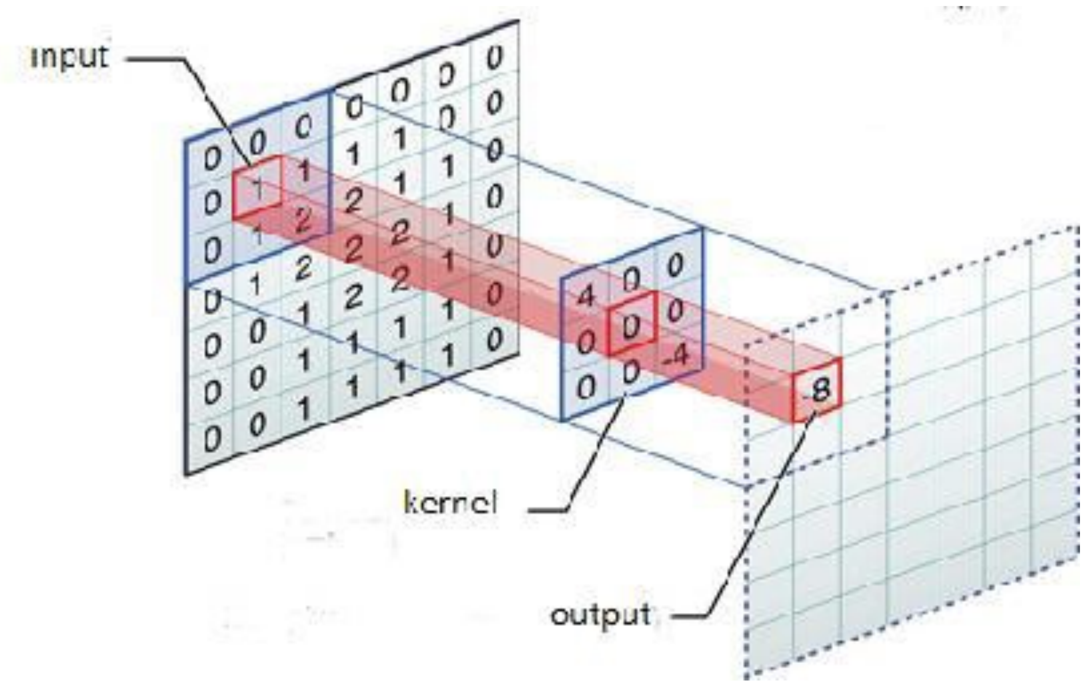
John Horton Conway (1937 - 2020)

Game of Life

- Automat Komórkowy, dwu-stanowy, dwu-wymiarowy, zadany na sąsiedztwie Moore'a, **outer-totalistic**! Czyli prawie wszystko już wiemy!
- Stany: 0 - komórka martwa, 1 - komórka żywa
- Reguła lokalna:
  - martwa komórka, która ma dokładnie 3 żywych sąsiadów, staje się żywa w następnej jednostce czasu (rodzi się);
  - żywa komórka z 2 albo 3 żywymi sąsiadami pozostaje nadal żywa; przy innej liczbie sąsiadów umiera (z „samotności" albo „zatłoczenia").

Implementacja Game of Life

- Operacja splotu macierzy / tensora (ang. *convolution*) w szczególności **conv2d**.
- Popularna dzięki sieciom CNN (Convolution Neural Network).



$$\begin{aligned}&4*0 + 0*0 + 0*0\\ &+ 0*0 + 0*1 + 0*1\\ &+ 0*0 + 0*1 + (-4)*2 = -8\end{aligned}$$

- Kernel to “mała” macierz, która “wędruje” po dużej macierzy i zawiera wagi, przez które mnożone są odpowiednie wartości, a wynik w obrębie mnożenia jest sumowany, zgodnie z rysunkiem powyżej.
- Jak zadziała conv2d z jądrem $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$?
  - Jaki to ma związek z Game of Life i regułami outer-totalistic na sąsiedztwie Moore’a?

```python
import numpy as np
from scipy.signal import convolve2d

kernel = np.array([
                    [1, 1, 1],
                    [1, 0, 1],
                    [1, 1, 1]
                    ])

game_of_life_rule = lambda n, c: (n == 3) | (c & (n == 2))

def update_grid(grid, rule):
    neighbors = convolve2d(grid, kernel, mode='same', boundary='wrap')
    new_grid = np.zeros_like(grid)
    for i in range(grid.shape[0]):
        for j in range(grid.shape[1]):
            new_grid[i, j] = rule(neighbors[i, j], grid[i, j])
    return new_grid
```

[1] ✓ 9.3s Python

pygame

Pygame is a set of *Python* modules designed for writing video games. Pygame adds functionality on top of the excellent *SDL* library. This allows you to create fully featured games and multimedia programs in the python language.

https://www.pygame.org/wiki/about

Podstawy pygame

- Inicjalizacja
- Main game loop
- Obsługa zdarzeń (eventów)
    - Klawiatura, mysz, resize okna, wyjście z programu
- Rysowanie w 2D - podstawy

- Nic więcej nie potrzebujemy
    - … no ewentualnie pisanie napisów :)

Dziękuję bardzo

Witold.Bolt@ug.edu.pl