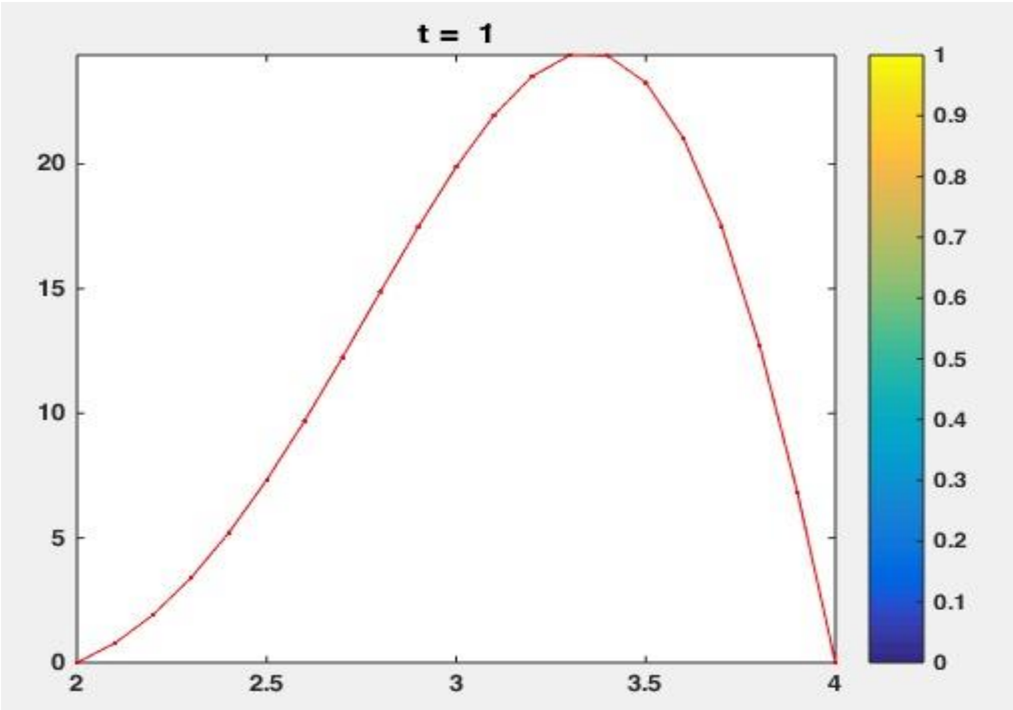
جامعة الحسن الثاني بالدار البيضاء
المدرسة الوطنية العليا للفنون والمهن - الدار البيضاء
Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers - Casablanca

Filière : Génie Industriel

2ème année Cycle

Projet : Implémentation de la Méthode des Éléments Finis

EDP 2 : la résolution numérique Par P2-P3 avec et sans élément de référence



Présenté Par :

- Abidar Mohamed
- Khlifi Taghzouti Haitam
- Ait Ali El Hosayn

Encadré Par :

Mr. Anas Rachid

Table des matières

Introduction

C'est l'un des modèles le plus fréquemment rencontré dans les sciences et L'ingénierie. Il décrit comment la concentration d'un ou de plusieurs substances (par exemple, les polluants) dans un milieu (la rivière) change sous l'influence de trois processus, à savoir, la convection, la diffusion et de réaction.

Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles qui peut être résolue en utilisant plusieurs méthodes à savoir les méthodes de résolutions numériques classiques comme la méthode des différences finies ou méthode des éléments finies.

La convection se réfère à la circulation d'une substance dans un milieu (par exemple dans l'air). La diffusion est le mouvement de la substance à partir d'une zone de forte concentration à une zone de faible concentration, résultat de la distribution uniforme de la substance. Une réaction chimique est un processus qui aboutit à l'inter-conversion des substances chimiques.

La convection-diffusion-réaction (CDR) comme modèle est un modèle mathématique décrivant la manière dont la concentration de la substance répartie dans les changements à moyen sous l'influence de ces trois processus.

Tâche 1 : Familiarisation de l'équation

I. Equations de diffusion-convection-réaction

L'EDP à résoudre combine les trois phénomènes de diffusion, de convection, et de réaction est donné par :

$$\begin{cases} \alpha \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + v \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) - D \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \sigma u(x,t) + \displaystyle\int_0^t u(x,t)\, ds = f(x,t)\,, & 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & 0 < t \leq T \\ u(0,t) = u_0(x) & 0 < x < l \end{cases}$$

Dans cette expression :

- D représente le coefficient de diffusion
- v est le coefficient de convection
- $\int_0^t u(x,t)\, ds$ est le terme de mémoire
- σ est le paramètre de réaction supposé constant
- α un paramètre qui prend 0 ou 1
- f = (x, t) Le terme non homogène
- Les conditions aux limites est de type Dirichlet

Tâche 2 : Formulation variationnelle.

L'équation à résoudre s'écrit sous la forme suivante :

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + v\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \sigma u(x,t) + \int_0^t u(x,s)ds = f(x,t) \begin{cases} 0 < x < l \\ 0 < x \le T \end{cases}$$

$$\begin{cases} les\ conditions\ aux\ limites\ de\ type\ Dirichlet \rightarrow u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ la\ condition\ initiale \rightarrow\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \begin{cases} 0 < x < l \\ 0 < x \le T \end{cases}$$

On remplace le drivée temporel par la formule de schéma de décentré arrière en temps:

$$\boldsymbol{\frac{du}{dt}(x,t) = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}}$$

On écrit l'équation EDP_2 en l'instant k+1 Ce qui nous permet d'obtenir le nouveau système suivant :

$$\boldsymbol{\alpha\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + v\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} - D\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} + \sigma u^{n+1} + \int_0^t u^{n+1}ds = f^{n+1}}$$

$$\rightarrow (\alpha + \sigma.\Delta t)u^{n+1} + \Delta t v\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} - D\Delta t\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} + \Delta t\int_0^t u^{n+1}ds = \Delta t.f^{n+1} + \alpha u^n$$

Puis on multiple fois la fonction de test $v(x)$ et on intègre :

On pose

$$\begin{cases} g1 = (\alpha + \sigma.\Delta t) \\ g2 = \Delta t v \\ g3 = D\Delta t \end{cases}$$

$$\rightarrow g1\int_0^l vu^{n+1} + g2\int_0^l v\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} - g3\int_0^1 v\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} + \Delta t\int_0^l v\int_0^t u^{n+1}ds\,dx$$
$$= \Delta t.\int_0^l v.f^{n+1} + \alpha\int_0^l vu^n$$

$$\rightarrow g1\int_0^l vu^{n+1} + g2\int_0^l v\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + g3\int_0^1 \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + \Delta t\int_0^l v\int_0^t u^{n+1}ds\,dx$$
$$= \Delta t.\int_0^l v.f^{n+1} + \alpha\int_0^l vu^n + g3\left[v\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}\right]_0^l$$

Donc les approximations de u^{n+1}, u^n, v s'écrient comme suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} \mathrm{u^{n+1}}_h = \sum_{i=1}^{N} u_i^{n+1}\varphi_i(x) \\ \mathrm{u^{n}}_h = \sum_{i=1}^{N} u_i^{n}\varphi_i(x) \\ \mathrm{u^{0}}_h = \sum_{i=1}^{N} u_i^{0}\varphi_i(x) \\ \mathrm{v}_h = \langle\varphi_j(x)\rangle \; avec\; 1 \leq j \leq \; N \end{array}\right\}$$

$$\begin{aligned}\rightarrow \mathrm{g1}\sum_{i=1}^{N} u_i^{n+1}\int_0^l \varphi_j(x)\varphi_i(x) + \mathrm{g2}\sum_{i=1}^{N} u_i^{n+1}\int_0^l \varphi_j(x)\varphi_i'(x) + \mathrm{g3}\sum_{i=1}^{N} u_i^{n+1}\int_0^l \varphi_j'(x)\varphi_i'(x) \\ + \Delta\mathrm{t}\int_0^l \varphi_j(x)(\frac{t-0}{2})(u^{n+1} + \mathrm{u}^0)\mathrm{dx} \\ = \Delta\mathrm{t}.\int_0^l \varphi_j(x).\mathrm{f^{n+1}} + \alpha\sum_{i=1}^{N} u_i^{n}\int_0^l \varphi_j(x)\varphi_i(x) + \mathrm{g3}\left[\varphi_j(x)\frac{\partial \mathrm{u^{n+1}}}{\partial \mathrm{x}}\right]_0^l\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rightarrow \left(\mathrm{g1} + \Delta\mathrm{t}\frac{\mathrm{t}}{2}\right)\sum_{i=1}^{N} u_i^{n+1}\int_0^l \varphi_j(x)\varphi_i(x) + \mathrm{g2}\sum_{i=1}^{N} u_i^{n+1}\int_0^l \varphi_j(x)\varphi_i'(x) + \mathrm{g3}\sum_{i=1}^{N} u_i^{n+1}\int_0^l \varphi_j'(x)\varphi_i'(x) \\ = \Delta\mathrm{t}.\int_0^l \varphi_j(x).\mathrm{f^{n+1}} + \alpha\sum_{i=1}^{N} u_i^{n}\int_0^l \varphi_j(x)\varphi_i(x) - \Delta\mathrm{t}\frac{t}{2}\sum_{i=1}^{N} u_i^{0}\int_0^l \varphi_j(x)\varphi_i(x) \\ + \mathrm{g3}\left[\varphi_j(x)\frac{\partial \mathrm{u^{n+1}}}{\partial \mathrm{x}}\right]_0^l\end{aligned}$$

On a fait l'approximation de l'intégrale temporelle par la méthode de trapèze simple. Puis on trouve l'équation suivant :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} u_i^{n+1}\left[\left(\mathrm{g1} + \Delta\mathrm{t}\frac{\mathrm{t}}{2}\right)\int_0^l \varphi_j(x)\varphi_i(x) + \mathrm{g2}\int_0^l \varphi_j(x)\varphi_i'(x) + \mathrm{g3}\int_0^l \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)\right] \\ = \Delta\mathrm{t}.\int_0^l \varphi_j(x).\mathrm{f^{n+1}} + \alpha\sum_{i=1}^{N} u_i^{n}\int_0^l \varphi_j(x)\varphi_i(x) - \Delta\mathrm{t}\frac{t}{2}\sum_{i=1}^{N} u_i^{0}\int_0^l \varphi_j(x)\varphi_i(x) \\ + \mathrm{g3}\left[\varphi_j(x)\frac{\partial \mathrm{u^{n+1}}}{\partial \mathrm{x}}\right]_0^l\end{aligned}$$

Maintenant on peut décrire notre système matriciel :

I. Les fonctions de base de type P2 *"$ax^2 + bx + c$"* :

On prend un seul élément [x1, x3] pour montrer les matrices locales, alors le système matriciel s'écrit comme suivant :

$$\begin{bmatrix} \left(g1+\Delta t\frac{t}{2}\right)\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_1(x)+g2\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_1'(x)+g3\int_{x1}^{x3}\varphi_1'(x)\varphi_1'(x) & \left(g1+\Delta t\frac{t}{2}\right)\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_2(x)+g2\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_2'(x)+g3\int_{x1}^{x3}\varphi_1'(x)\varphi_2'(x) & \left(g1+\Delta t\frac{t}{2}\right)\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_3(x)+g2\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_3'(x)+g3\int_{x1}^{x3}\varphi_1'(x)\varphi_3'(x) \\ \left(g1+\Delta t\frac{t}{2}\right)\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_2(x)+g2\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_2'(x)+g3\int_{x1}^{x3}\varphi_1'(x)\varphi_2'(x) & \left(g1+\Delta t\frac{t}{2}\right)\int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_2(x)+g2\int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_2'(x)+g3\int_{x1}^{x3}\varphi_2'(x)\varphi_2'(x) & \left(g1+\Delta t\frac{t}{2}\right)\int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_3(x)+g2\int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_3'(x)+g3\int_{x1}^{x3}\varphi_2'(x)\varphi_3'(x) \\ \left(g1+\Delta t\frac{t}{2}\right)\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_3(x)+g2\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_3'(x)+g3\int_{x1}^{x3}\varphi_1'(x)\varphi_3'(x) & \left(g1+\Delta t\frac{t}{2}\right)\int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_3(x)+g2\int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_3'(x)+g3\int_{x1}^{x3}\varphi_2'(x)\varphi_3'(x) & \left(g1+\Delta t\frac{t}{2}\right)\int_{x1}^{x3}\varphi_3(x)\varphi_3(x)+g2\int_{x1}^{x3}\varphi_3(x)\varphi_3'(x)+g3\int_{x1}^{x3}\varphi_3'(x)\varphi_3'(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \end{bmatrix}$$

$$= \Delta t\begin{bmatrix} \int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\mathrm{f}^{n+1} \\ \int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\mathrm{f}^{n+1} \\ \int_{x1}^{x3}\varphi_3(x)\mathrm{f}^{n+1} \end{bmatrix} + \alpha\begin{bmatrix} u_1^n\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_1(x)\ +u_2^n\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_2(x)+u_3^n\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_3(x) \\ u_1^n\int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_1(x)\ +u_2^n\int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_2(x)+u_3^n\int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_3(x) \\ u_1^n\int_{x1}^{x3}\varphi_3(x)\varphi_1(x)\ +u_2^n\int_{x1}^{x3}\varphi_3(x)\varphi_2(x)+u_3^n\int_{x1}^{x3}\varphi_3(x)\varphi_3(x) \end{bmatrix} - \Delta t\frac{t}{2}\begin{bmatrix} u_1^0\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_1(x)\ +u_2^0\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_2(x)+u_3^0\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_3(x) \\ u_1^0\int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_1(x)\ +u_2^0\int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_2(x)+u_3^0\int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_3(x) \\ u_1^0\int_{x1}^{x3}\varphi_3(x)\varphi_1(x)\ +u_2^0\int_{x1}^{x3}\varphi_3(x)\varphi_2(x)+u_3^0\int_{x1}^{x3}\varphi_3(x)\varphi_3(x) \end{bmatrix} + g3\begin{bmatrix} -\frac{\partial \mathrm{u}^{n+1}}{\partial \mathrm{x}}(x1) \\ 0 \\ \frac{\partial \mathrm{u}^{n+1}}{\partial \mathrm{x}}(x3) \end{bmatrix}$$

Alors le terme en rouge s'annule car on a des conditions aux limites de type Dirichlet. Donc le système devient :

$$\begin{bmatrix} \left(g1+\Delta t\frac{t}{2}\right)\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_1(x)+g2\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_1'(x)+g3\int_{x1}^{x3}\varphi_1'(x)\varphi_1'(x) & \left(g1+\Delta t\frac{t}{2}\right)\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_2(x)+g2\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_2'(x)+g3\int_{x1}^{x3}\varphi_1'(x)\varphi_2'(x) & \left(g1+\Delta t\frac{t}{2}\right)\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_3(x)+g2\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_3'(x)+g3\int_{x1}^{x3}\varphi_1'(x)\varphi_3'(x) \\ \left(g1+\Delta t\frac{t}{2}\right)\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_2(x)+g2\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_2'(x)+g3\int_{x1}^{x3}\varphi_1'(x)\varphi_2'(x) & \left(g1+\Delta t\frac{t}{2}\right)\int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_2(x)+g2\int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_2'(x)+g3\int_{x1}^{x3}\varphi_2'(x)\varphi_2'(x) & \left(g1+\Delta t\frac{t}{2}\right)\int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_3(x)+g2\int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_3'(x)+g3\int_{x1}^{x3}\varphi_2'(x)\varphi_3'(x) \\ \left(g1+\Delta t\frac{t}{2}\right)\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_3(x)+g2\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_3'(x)+g3\int_{x1}^{x3}\varphi_1'(x)\varphi_3'(x) & \left(g1+\Delta t\frac{t}{2}\right)\int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_3(x)+g2\int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_3'(x)+g3\int_{x1}^{x3}\varphi_2'(x)\varphi_3'(x) & \left(g1+\Delta t\frac{t}{2}\right)\int_{x1}^{x3}\varphi_3(x)\varphi_3(x)+g2\int_{x1}^{x3}\varphi_3(x)\varphi_3'(x)+g3\int_{x1}^{x3}\varphi_3'(x)\varphi_3'(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \end{bmatrix}$$

$$= \Delta t\begin{bmatrix} \int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\mathrm{f}^{n+1} \\ \int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\mathrm{f}^{n+1} \\ \int_{x1}^{x3}\varphi_3(x)\mathrm{f}^{n+1} \end{bmatrix} + \alpha\begin{bmatrix} u_1^n\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_1(x)\ +u_2^n\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_2(x)+u_3^n\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_3(x) \\ u_1^n\int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_1(x)\ +u_2^n\int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_2(x)+u_3^n\int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_3(x) \\ u_1^n\int_{x1}^{x3}\varphi_3(x)\varphi_1(x)\ +u_2^n\int_{x1}^{x3}\varphi_3(x)\varphi_2(x)+u_3^n\int_{x1}^{x3}\varphi_3(x)\varphi_3(x) \end{bmatrix} - \Delta t\frac{t}{2}\begin{bmatrix} u_1^0\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_1(x)\ +u_2^0\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_2(x)+u_3^0\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_3(x) \\ u_1^0\int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_1(x)\ +u_2^0\int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_2(x)+u_3^0\int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_3(x) \\ u_1^0\int_{x1}^{x3}\varphi_3(x)\varphi_1(x)\ +u_2^0\int_{x1}^{x3}\varphi_3(x)\varphi_2(x)+u_3^0\int_{x1}^{x3}\varphi_3(x)\varphi_3(x) \end{bmatrix}$$

Pour passer au calcul par élément de référence il faut transformer les matrices en jeune-vert-Bleu par l'interpolation des intégrales [quadrature de Gauss] et on obtient :

$$\left(\mathrm{g1}+\Delta t\frac{t}{2}\right)\begin{bmatrix}\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_1(x) & \int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_2(x) & \int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_3(x)\\ \int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_2(x) & \int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_2(x) & \int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_3(x)\\ \int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_3(x) & \int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_3(x) & \int_{x1}^{x3}\varphi_3(x)\varphi_3(x)\end{bmatrix}=\frac{h}{2}\left((\alpha+\sigma.\Delta t)+\Delta t\frac{t}{2}\right)\begin{bmatrix}\int_{-1}^{1}\varphi_1(x)\varphi_1(x) & \int_{-1}^{1}\varphi_1(x)\varphi_2(x) & \int_{-1}^{1}\varphi_1(x)\varphi_3(x)\\ \int_{-1}^{1}\varphi_1(x)\varphi_2(x) & \int_{-1}^{1}\varphi_2(x)\varphi_2(x) & \int_{-1}^{1}\varphi_2(x)\varphi_3(x)\\ \int_{-1}^{1}\varphi_1(x)\varphi_3(x) & \int_{-1}^{1}\varphi_2(x)\varphi_3(x) & \int_{-1}^{1}\varphi_3(x)\varphi_3(x)\end{bmatrix}$$

$$g2\begin{bmatrix}\int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_1'(x) & \int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_2'(x) & \int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_3'(x)\\ \int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_2'(x) & \int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_2'(x) & \int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_3'(x)\\ \int_{x1}^{x3}\varphi_1(x)\varphi_3'(x) & \int_{x1}^{x3}\varphi_2(x)\varphi_3'(x) & \int_{x1}^{x3}\varphi_3(x)\varphi_3'(x)\end{bmatrix}=(\Delta tv)\begin{bmatrix}\int_{-1}^{1}\varphi_1(x)\varphi_1'(x) & \int_{-1}^{1}\varphi_1(x)\varphi_2'(x) & \int_{-1}^{1}\varphi_1(x)\varphi_3'(x)\\ \int_{-1}^{1}\varphi_1(x)\varphi_2'(x) & \int_{-1}^{1}\varphi_2(x)\varphi_2'(x) & \int_{-1}^{1}\varphi_2(x)\varphi_3'(x)\\ \int_{-1}^{1}\varphi_1(x)\varphi_3'(x) & \int_{-1}^{1}\varphi_2(x)\varphi_3'(x) & \int_{-1}^{1}\varphi_3(x)\varphi_3'(x)\end{bmatrix}$$

$$g3\begin{bmatrix}\int_{x1}^{x3}\varphi_1'(x)\varphi_1'(x) & \int_{x1}^{x3}\varphi_1'(x)\varphi_2'(x) & \int_{x1}^{x3}\varphi_1'(x)\varphi_3'(x)\\ \int_{x1}^{x3}\varphi_1'(x)\varphi_2'(x) & \int_{x1}^{x3}\varphi_2'(x)\varphi_2'(x) & \int_{x1}^{x3}\varphi_2'(x)\varphi_3'(x)\\ \int_{x1}^{x3}\varphi_1'(x)\varphi_3'(x) & \int_{x1}^{x3}\varphi_2'(x)\varphi_3'(x) & \int_{x1}^{x3}\varphi_3'(x)\varphi_3'(x)\end{bmatrix}=\frac{2}{h}(\Delta tD)\begin{bmatrix}\int_{-1}^{1}\varphi_1'(x)\varphi_1'(x) & \int_{-1}^{1}\varphi_1'(x)\varphi_2'(x) & \int_{-1}^{1}\varphi_1'(x)\varphi_3'(x)\\ \int_{-1}^{1}\varphi_1'(x)\varphi_2'(x) & \int_{-1}^{1}\varphi_2'(x)\varphi_2'(x) & \int_{-1}^{1}\varphi_2'(x)\varphi_3'(x)\\ \int_{-1}^{1}\varphi_1'(x)\varphi_3'(x) & \int_{-1}^{1}\varphi_2'(x)\varphi_3'(x) & \int_{-1}^{1}\varphi_3'(x)\varphi_3'(x)\end{bmatrix}$$

Les expressions des fonctions de Base P2 :

Les fonctions de base et **ses dérives** s'expriment donc à l'aide des quatre fonctions suivantes définies sur [-1*;* 1] :

$\begin{cases}\widehat{W}1\ (t)=\dfrac{t(t-1)}{2}\\ \widehat{W}2\ (t)=-t^2+1\\ \widehat{W}3\ (t)=\dfrac{t(t+1)}{2}\end{cases}$	$\begin{cases}\dfrac{d\widehat{W}1}{dt}=t-\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{d\widehat{W}2}{dt}=-2t\\ \dfrac{d\widehat{W}3}{dt}=t+\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Pour les fonctions de base de type P3, la même procédure se répète sauf que pour les matrices élémentaires sont de type 4x4.

Les expressions des fonctions de Base P3 :

Les fonctions de base et ses dérives s'expriment donc à l'aide des quatre fonctions suivantes définies sur [-1*;* 1] :

$\begin{cases}\widehat{W}1\ (t)=\dfrac{1}{16}(1-t)(3t-1)(3t+1)\\ \widehat{W}2\ (t)=\dfrac{9}{16}(1+t)(t-1)(3t-1)\\ \widehat{W}3\ (t)=\dfrac{9}{16}(1+t)(1-t)(3t+1)\\ \widehat{W}4\ (t)=\dfrac{1}{16}(1+t)(3t-1)(3t+1)\end{cases}$	$\begin{cases}\dfrac{d\widehat{W}1}{dt}=\dfrac{1}{16}(-27t^2+18t+1)\\ \dfrac{d\widehat{W}2}{dt}=\dfrac{9}{16}(9t^2-2t-3)\\ \dfrac{d\widehat{W}3}{dt}=\dfrac{9}{16}(-9t^2-2t+3)\\ \dfrac{d\widehat{W}4}{dt}=\dfrac{1}{16}(27t^2+18t-1)\end{cases}$

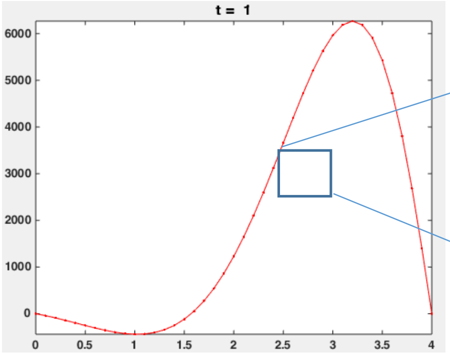
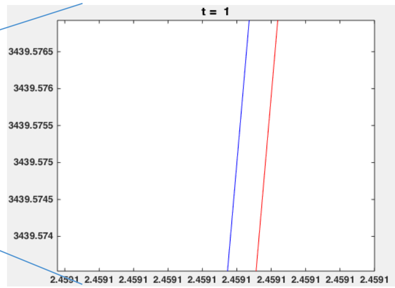
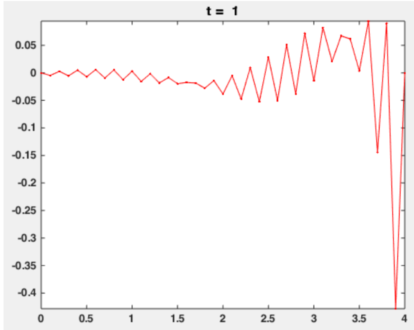
Tâche 3 : Programme MEF & Résultats

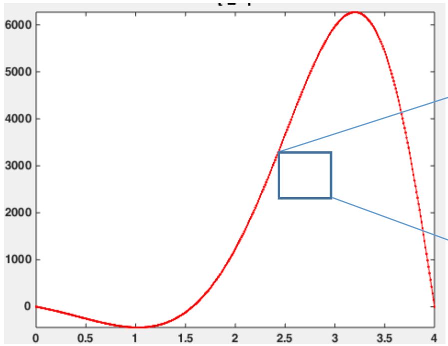
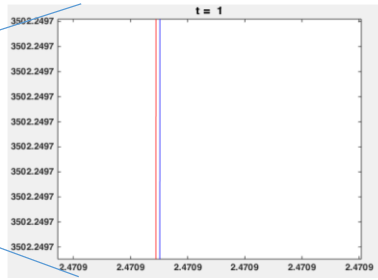
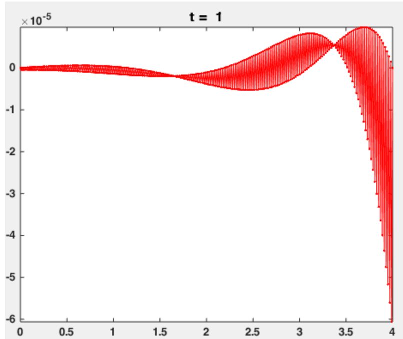
Le programme MEF qu'on a fait est basé sur le concept de programmation orienté objet. Dans le but l'organisation et la hiérarchisation des données et aussi de créer des laissons entre les fonctions. On a réalisé deux programmes, le premier pour résoudre l'EDP_2 soit par les fonctions de base de type P2 sans l'élément de référence soit avec l'élément de référence. Le deuxième est la même de première programme sauf les fonctions de base de type P3.

I. Cas de $\alpha = 1$

1. Effet de Changement de pas d'espace :

P2 / Avec élément de référence	u = x.*(x-4).*(100.*t).*exp(x).*cos(x)		
Conditions au limite de type Dirichlet	L'ordre d'approximation de Gauss =5		
Pas de temps	$ht1 = 0.1$		
Les fonctions (les 15 premières valeurs en 3 instants)	**La solution exacte**	**La solution approchée**	**L'erreur**
$hx1 = 0.1$	0 0 0 -4.2886 -8.5773 -12.8659 -9.0976 -18.1953 -27.2929 -14.3142 -28.6284 -42.9427 -19.7865 -39.5730 -59.3595 -25.3206 -50.6411 -75.9617 -30.6787 -61.3575 -92.0362 -35.5787 -71.1574 -106.7361 -39.6941 -79.3881 -119.0822 -42.6567 -85.3134 -127.9701 -44.0608 -88.1216 -132.1825 -43.4694 -86.9389 -130.4083 -40.4232 -80.8463 -121.2695 -34.4518 -68.9036 -103.3554 -25.0887 -50.1775 -75.2662	0 0 0 -4.2890 -8.5780 -12.8671 -9.0970 -18.1942 -27.2916 -14.3144 -28.6289 -42.9437 -19.7855 -39.5712 -59.3572 -25.3207 -50.6417 -75.9628 -30.6775 -61.3553 -92.0334 -35.5790 -71.1582 -106.7378 -39.6928 -79.3860 -119.0794 -42.6572 -85.3148 -127.9726 -44.0598 -88.1199 -132.1804 -43.4703 -86.9409 -130.4118 -40.4227 -80.8457 -121.2689 -34.4530 -68.9064 -103.3600 -25.0892 -50.1785 -75.2681	0 0 0 -0.0003 -0.0007 -0.0012 0.0006 0.0010 0.0013 -0.0001 -0.0005 -0.0010 0.0010 0.0017 0.0023 -0.0001 -0.0006 -0.0012 0.0013 0.0021 0.0028 -0.0003 -0.0009 -0.0017 0.0013 0.0022 0.0028 -0.0005 -0.0014 -0.0025 0.0010 0.0017 0.0021 -0.0009 -0.0021 -0.0035 0.0005 0.0006 0.0006 -0.0013 -0.0028 -0.0046 -0.0004 -0.0011 -0.0019

			
Temps d'exécution « en s » = 1.537629 seconds.		Valeur moyen du MRS (Mean Root Square)= 0.0022	
Pas de temps	$ht1 = 0.1$		
Les fonctions (les 15 premières valeurs et 3 instants)	**La solution exacte**	**La solution approchée**	**L'erreur**
$hx2 = 0.01$	-0.0000 0.0000 0.0000 -0.4030 -0.8060 -1.2090 -0.8119 -1.6238 -2.4358 -1.2267 -2.4534 -3.6802 -1.6473 -3.2947 -4.9420 -2.0737 -4.1473 -6.2210 -2.5057 -5.0113 -7.5170 -2.9432 -5.8865 -8.8297 -3.3863 -6.7726 -10.1590 -3.8348 -7.6696 -11.5044 -4.2886 -8.5773 -12.8659 -4.7477 -9.4954 -14.2431 -5.2119 -10.4237 -15.6356 -5.6811 -11.3622 -17.0433 -6.1553 -12.3105 -18.4658	0 0 0 -0.4030 -0.8060 -1.2090 -0.8119 -1.6238 -2.4358 -1.2267 -2.4534 -3.6802 -1.6473 -3.2947 -4.9420 -2.0737 -4.1473 -6.2210 -2.5057 -5.0113 -7.5170 -2.9432 -5.8865 -8.8297 -3.3863 -6.7726 -10.1590 -3.8348 -7.6696 -11.5044 -4.2886 -8.5773 -12.8659 -4.7477 -9.4954 -14.2431 -5.2119 -10.4237 -15.6356 -5.6811 -11.3622 -17.0433 -6.1553 -12.3105 -18.4658	1.0e-06 * -0.0000 0.0000 0.0000 -0.0446 -0.0906 -0.1371 0.0070 0.0111 0.0142 -0.0406 -0.0854 -0.1316 0.0137 0.0219 0.0282 -0.0368 -0.0805 -0.1264 0.0203 0.0325 0.0418 -0.0333 -0.0759 -0.1217 0.0265 0.0428 0.0553 -0.0301 -0.0716 -0.1173 0.0326 0.0528 0.0684 -0.0272 -0.0677 -0.1133 0.0385 0.0627 0.0813 -0.0245 -0.0640 -0.1097 0.0441 0.0722 0.0938

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Temps d'exécution « en s » = 9.527845 seconds.</td><td colspan="2">Valeur moyen du MRS (Mean Root Square)= 2.3684e-11</td></tr>
</table>

Résultat :

On remarque que

1- On a l'erreur $pour\ le\ hx = 0.01$ l'erreur est très petit par rapport au $hx = 0.1$

$$\rightarrow \quad La\ dimunition\ de\ pas\ de\ l'espace\ implique\ la\ dimunition\ d'ordre\ d'erreur$$

2- On a l'erreur total $pour\ le\ hx = 0.01$ l'erreur est très petit par rapport au $hx = 0.1$

$$\rightarrow \quad La\ dimunition\ de\ pas\ de\ l'espace\ implique\ la\ dimunition\ d'erreur\ total$$

3-

$$\begin{cases} pour\ le\ hx = 0.1\ , le \text{ temps d'exécution } de\ 1.537629\text{ s} \\ pour\ le\ hx = 0.01\ , le \text{ temps d'exécution } est\ de\ 9.527845\text{ s} \end{cases} \rightarrow \quad La\ dimunition\ de\ pas\ hx\ implique\ l'augmentation\ de\ temps\ d'exécution$$

➔ On a le temps d'exécution $pour\ le\ hx = 0.01$ l'erreur est plus grand par rapport au $hx = 0.1$

- ❖ **La deuxième combinaison de pas de l'espace $hx = 0.01$ est le meilleur car l'erreur est très petite c'est-à-dire que la solution approchée est proche de solution exacte**

<table>
<tr><td colspan="2">P2 / Avec élément de référence</td><td colspan="2">u = x.*(x-4).*(100.*t).*exp(x).*cos(x)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conditions au limite de type Dirichlet</td><td colspan="2">L’ordre d’approximation de Gauss =5</td></tr>
<tr><td>Pas de temps</td><td colspan="3">$ht1 = 0.01$</td></tr>
<tr><td>Les fonctions (les 15 premières valeurs en 3 instants)</td><td>La solution exacte</td><td>La solution approchée</td><td>L’erreur</td></tr>
<tr><td>$hx1 = 0.1$</td>
<td>0 0 0
-0.4289 -0.8577 -1.2866
-0.9098 -1.8195 -2.7293
-1.4314 -2.8628 -4.2943
-1.9786 -3.9573 -5.9359
-2.5321 -5.0641 -7.5962
-3.0679 -6.1357 -9.2036
-3.5579 -7.1157 -10.6736
-3.9694 -7.9388 -11.9082
-4.2657 -8.5313 -12.7970
-4.4061 -8.8122 -13.2182
-4.3469 -8.6939 -13.0408
-4.0423 -8.0846 -12.1269
-3.4452 -6.8904 -10.3355
-2.5089 -5.0177 -7.5266</td>
<td>0 0 0
-0.4289 -0.8578 -1.2867
-0.9097 -1.8194 -2.7292
-1.4314 -2.8629 -4.2943
-1.9785 -3.9571 -5.9357
-2.5320 -5.0641 -7.5962
-3.0678 -6.1355 -9.2034
-3.5579 -7.1158 -10.6737
-3.9693 -7.9386 -11.9080
-4.2657 -8.5314 -12.7972
-4.4060 -8.8120 -13.2181
-4.3470 -8.6940 -13.0411
-4.0423 -8.0846 -12.1269
-3.4453 -6.8906 -10.3359
-2.5089 -5.0179 -7.5269</td>
<td>1.0e-03 *

0 0 0
-0.0201 -0.0503 -0.0865
0.0649 0.1056 0.1348
0.0061 -0.0097 -0.0412
0.1022 0.1740 0.2267
0.0108 -0.0031 -0.0385
0.1189 0.2058 0.2693
0.0007 -0.0247 -0.0746
0.1144 0.1967 0.2537
-0.0214 -0.0703 -0.1447
0.0853 0.1398 0.1693
-0.0538 -0.1359 -0.2420
0.0269 0.0277 0.0065
-0.0945 -0.2155 -0.3557
-0.0640 -0.1443 -0.2394</td></tr>
<tr><td colspan="2">Temps d’exécution « en s » = 8.523015 seconds</td><td colspan="2">Valeur moyen du MRS (Mean Root Square)= 0.0017</td></tr>
<tr><td>Pas de temps</td><td colspan="3">$ht1 = 0.01$</td></tr>
<tr><td>Les fonctions (les 15 premières valeurs et 3 instants)</td><td>La solution exacte</td><td>La solution approchée</td><td>L’erreur</td></tr>
<tr><td>$hx2 = 0.01$</td>
<td>0 0 0
-0.0403 -0.0806 -0.1209
-0.0812 -0.1624 -0.2436
-0.1227 -0.2453 -0.3680
-0.1647 -0.3295 -0.4942
-0.2074 -0.4147 -0.6221
-0.2506 -0.5011 -0.7517
-0.2943 -0.5886 -0.8830
-0.3386 -0.6773 -1.0159
-0.3835 -0.7670 -1.1504
-0.4289 -0.8577 -1.2866
-0.4748 -0.9495 -1.4243
-0.5212 -1.0424 -1.5636
-0.5681 -1.1362 -1.7043
-0.6155 -1.2311 -1.8466</td>
<td>0.0000 -0.0000 0.0000
-0.0403 -0.0806 -0.1209
-0.0812 -0.1624 -0.2436
-0.1227 -0.2453 -0.3680
-0.1647 -0.3295 -0.4942
-0.2074 -0.4147 -0.6221
-0.2506 -0.5011 -0.7517
-0.2943 -0.5886 -0.8830
-0.3386 -0.6773 -1.0159
-0.3835 -0.7670 -1.1504
-0.4289 -0.8577 -1.2866
-0.4748 -0.9495 -1.4243
-0.5212 -1.0424 -1.5636
-0.5681 -1.1362 -1.7043
-0.6155 -1.2311 -1.8466</td>
<td>1.0e-07 *

0.0000 -0.0000 0.0000
-0.0371 -0.0760 -0.1156
0.0079 0.0121 0.0152
-0.0316 -0.0683 -0.1070
0.0153 0.0239 0.0299
-0.0265 -0.0611 -0.0988
0.0223 0.0352 0.0443
-0.0218 -0.0543 -0.0911
0.0290 0.0462 0.0583
-0.0175 -0.0479 -0.0839
0.0353 0.0567 0.0718
-0.0135 -0.0419 -0.0772
0.0414 0.0669 0.0850
-0.0099 -0.0364 -0.0708
0.0471 0.0767 0.0978</td></tr>
<tr><td colspan="2">Temps d’exécution « en s » = 90.257716 seconds.</td><td colspan="2">Valeur moyen du MRS (Mean Root Square)= 1.7670e-11</td></tr>
</table>

Résultats :

On remarque que :

1- On a l'erreur $pour\ le\ ht = 0.01$ l'erreur est très petit par rapport au $ht = 0.1$

$\rightarrow$ $La\ dimunition\ de\ pas\ de\ temps\ \ implique\ la\ dimunition\ d'ordre\ d'erreur$

2- On a l'erreur total $pour\ le\ ht = 0.01$ l'erreur est très petit par rapport au $ht = 0.1$

$\rightarrow$ $La\ dimunition\ de\ pas\ implique\ la\ dimunition\ d'erreur\ total$

3-

$$\begin{cases} pour\ le\ hx = 0.1\ , le\ \text{temps d'exécution}\ de\ 9.52\ \text{s} \\ pour\ le\ hx = 0.01\ , le\ \text{temps d'exécution}\ est\ de\ 90{,}25\ \text{s} \end{cases} \rightarrow \ La\ dimunition\ de\ pas\ ht\ implique\ l'augmentation\ de\ temps\ d'exécution$$

➔ On a le temps d'exécution $pour\ le\ ht = 0.01$ l'erreur est plus grand par rapport au $ht = 0.1$

- **La deuxième combinaison de pas de l'espace $\boldsymbol{ht = 0.01}$ est le meilleur car l'erreur est très petite c'est-à-dire que la solution approchée est proche de solution exacte.**

Conclusion :

En gros, la combinaison avec le pas de temps $ht = 0.01$ et $hx = 0.01$ est la combinaison qui donne la meilleure convergence de solution approche vers la solution exacte.

2. Effet d'utilisation d'élément de référence :

<table>
<tr><td colspan="2">P2 / Sans élément de référence</td><td colspan="3">u = x.*(x-4).*(100.*t).*exp(x).*cos(x);</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conditions au limite de type Dirichlet</td><td colspan="2">Alpha = 1</td><td>L'ordre d'approximation de Gauss =5</td></tr>
<tr><td>Pas de temps</td><td colspan="4">$ht1 = 0.01$</td></tr>
<tr><td>Les fonctions (les 15 premières valeurs et 3 instants)</td><td>La solution exacte</td><td colspan="2">La solution approchée</td><td>L'erreur</td></tr>
<tr><td>$hx2 = 0.01$</td>
<td>0 0 0
-0.0403 -0.0806 -0.1209
-0.0812 -0.1624 -0.2436
-0.1227 -0.2453 -0.3680
-0.1647 -0.3295 -0.4942
-0.2074 -0.4147 -0.6221
-0.2506 -0.5011 -0.7517
-0.2943 -0.5886 -0.8830
-0.3386 -0.6773 -1.0159
-0.3835 -0.7670 -1.1504
-0.4289 -0.8577 -1.2866
-0.4748 -0.9495 -1.4243
-0.5212 -1.0424 -1.5636
-0.5681 -1.1362 -1.7043
-0.6155 -1.2311 -1.8466</td>
<td colspan="2">0.0000 -0.0000 0.0000
-0.0403 -0.0806 -0.1209
-0.0812 -0.1624 -0.2436
-0.1227 -0.2453 -0.3680
-0.1647 -0.3295 -0.4942
-0.2074 -0.4147 -0.6221
-0.2506 -0.5011 -0.7517
-0.2943 -0.5886 -0.8830
-0.3386 -0.6773 -1.0159
-0.3835 -0.7670 -1.1504
-0.4289 -0.8577 -1.2866
-0.4748 -0.9495 -1.4243
-0.5212 -1.0424 -1.5636
-0.5681 -1.1362 -1.7043
-0.6155 -1.2311 -1.8466</td>
<td>1.0e-07 *

0.0000 -0.0000 0.0000
-0.0371 -0.0760 -0.1156
0.0079 0.0121 0.0151
-0.0316 -0.0683 -0.1070
0.0153 0.0239 0.0299
-0.0265 -0.0611 -0.0988
0.0223 0.0352 0.0443
-0.0218 -0.0543 -0.0911
0.0290 0.0462 0.0583
-0.0175 -0.0479 -0.0839
0.0353 0.0567 0.0718
-0.0135 -0.0419 -0.0772
0.0414 0.0669 0.0850
-0.0099 -0.0364 -0.0709
0.0471 0.0767 0.0978</td></tr>
<tr><td colspan="3">Temps d'exécution « en s » = 325.056098 seconds.</td><td colspan="2">Valeur moyen du MRS (Mean Root Square)= 1.7667e-11</td></tr>
</table>

Résultats :

On remarque :

$$\begin{cases} pour\ le\ cas\ 1\ , le\ \text{temps d'exécution}\ de\ 90.257716\ \text{s} \\ pour\ le\ cas\ 2\ , le\ \text{temps d'exécution}\ est\ de\ 325.056098\ \ \text{s} \end{cases} \rightarrow \quad \textit{L'utilisation de l'élémentde référence diminue le temps d'exécution}$$

1- On a le temps d'exécution pour le cas 1 (utilisation d'élément de référence) *le* temps d'exécution est très petit par rapport au cas où on n'a pas utilisé l'élément de référence (2)

Dons l'élément de référence minimise le temps d'exécution de programme.

3. Effet de Changement de degré de quadrature de Gauss :

P2 / Avec élément de référence	u = x.*(x-4).*(100.*t).*exp(x).*cos(x);		
Conditions au limite de type Dirichlet	**Alpha = 1**	L'ordre d'approximation de Gauss =2	
Pas de temps	$ht1 = 0.01$		
Les fonctions (les 15 premières valeurs et 3 instants)	**La solution exacte**	**La solution approchée**	**L'erreur**
$hx2 = 0.01$	-0.0000 -0.0000 0.000 -0.0403 -0.0806 -0.120 -0.0812 -0.1624 -0.243 -0.1227 -0.2453 -0.368 -0.1647 -0.3295 -0.494 -0.2074 -0.4147 -0.622 -0.2506 -0.5011 -0.751 -0.2943 -0.5886 -0.883 -0.3386 -0.6773 -1.015 -0.3835 -0.7670 -1.150 -0.4289 -0.8577 -1.286 -0.4748 -0.9495 -1.424 -0.5212 -1.0424 -1.563 -0.5681 -1.1362 -1.704 -0.6155 -1.2311 -1.846	0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0403 -0.0806 -0.1209 -0.0812 -0.1624 -0.2436 -0.1227 -0.2453 -0.3680 -0.1647 -0.3295 -0.4942 -0.2074 -0.4147 -0.6221 -0.2506 -0.5011 -0.7517 -0.2943 -0.5886 -0.8830 -0.3386 -0.6773 -1.0159 -0.3835 -0.7670 -1.1504 -0.4289 -0.8577 -1.2866 -0.4748 -0.9495 -1.4243 -0.5212 -1.0424 -1.5636 -0.5681 -1.1362 -1.7043 -0.6155 -1.2311 -1.8466	1.0e-07 * -0.0000 -0.0000 0.0000 -0.1271 -0.2581 -0.3904 0.0158 0.0238 0.0292 -0.1150 -0.2413 -0.3715 0.0307 0.0467 0.0574 -0.1039 -0.2254 -0.3535 0.0446 0.0686 0.0847 -0.0936 -0.2103 -0.3364 0.0577 0.0896 0.1109 -0.0840 -0.1961 -0.3200 0.0700 0.1096 0.1362 -0.0752 -0.1826 -0.3044 0.0815 0.1287 0.1604 -0.0671 -0.1700 -0.2896 0.0923 0.1469 0.1837
Temps d'exécution « en s » = 99.601814 seconds.		Valeur moyen du MRS (Mean Root Square)= 1.8637e-10	

Résultats :

On remarque :

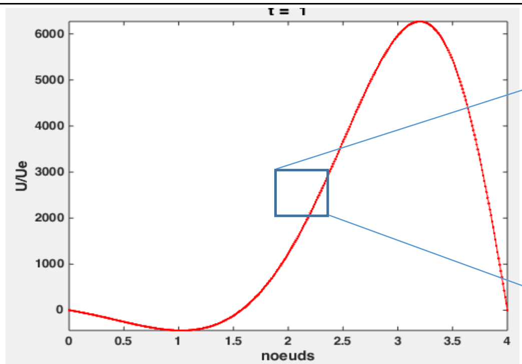
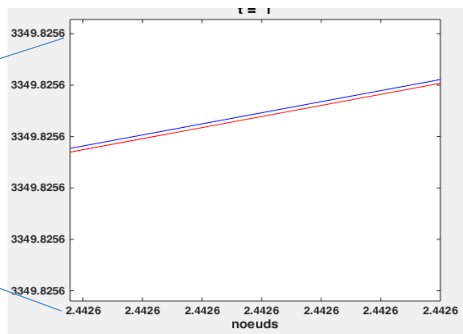
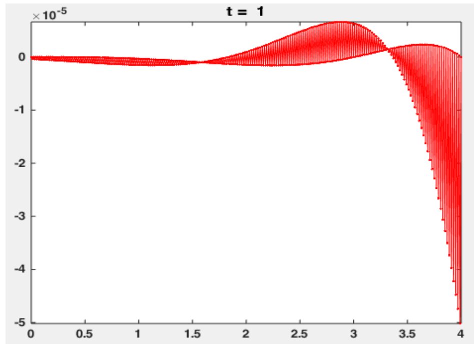
1- On a l'erreur pour le cas d'ordre d'approximation de Gauss 5 est très petit par rapport à L'ordre d'approximation de Gauss =2

Alors puisque l'ordre de quadrature de Gauss est grand plus que l'erreur devient très petit donc la solution approchée est proche de solution exacte.

II. Cas de $\alpha = 0$

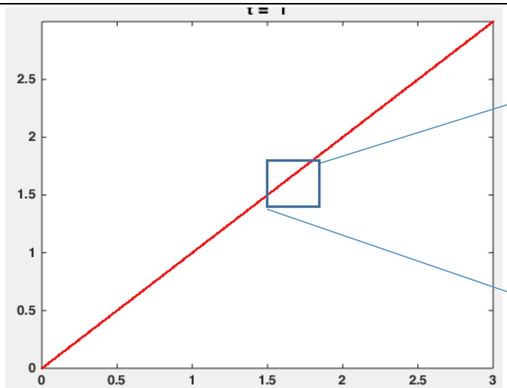
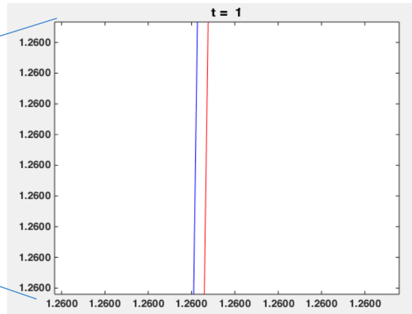
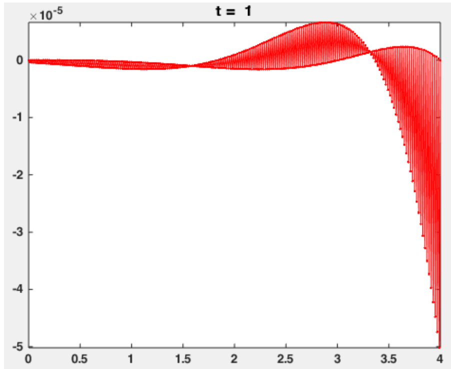
1. Conditions au limite de type Dirichlet

<table>
<tr><td colspan="2">P2 / Avec élément de référence</td><td colspan="2">u = x.*(x-4).*(100.*t).*exp(x).*cos(x);</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conditions au limite de type Dirichlet</td><td>Alpha = 0</td><td>L’ordre d’approximation de Gauss =5</td></tr>
<tr><td>Pas de temps</td><td colspan="3">$ht1 = 0.01$</td></tr>
<tr><td>Les fonctions (les 15 premières valeurs et 3 instants)</td><td>La solution exacte</td><td>La solution approchée</td><td>L’erreur</td></tr>
<tr><td>$hx2 = 0.01$</td><td>0 0 0
-0.0403 -0.0806 -0.1209
-0.0812 -0.1624 -0.2436
-0.1227 -0.2453 -0.3680
-0.1647 -0.3295 -0.4942
-0.2074 -0.4147 -0.6221
-0.2506 -0.5011 -0.7517
-0.2943 -0.5886 -0.8830
-0.3386 -0.6773 -1.0159
-0.3835 -0.7670 -1.1504
-0.4289 -0.8577 -1.2866
-0.4748 -0.9495 -1.4243
-0.5212 -1.0424 -1.5636
-0.5681 -1.1362 -1.7043
-0.6155 -1.2311 -1.8466</td><td>0.0000 -0.0000 0.0000
-0.0403 -0.0806 -0.1209
-0.0812 -0.1624 -0.2436
-0.1227 -0.2453 -0.3680
-0.1647 -0.3295 -0.4942
-0.2074 -0.4147 -0.6221
-0.2506 -0.5011 -0.7517
-0.2943 -0.5886 -0.8830
-0.3386 -0.6773 -1.0159
-0.3835 -0.7670 -1.1504
-0.4289 -0.8577 -1.2866
-0.4748 -0.9495 -1.4243
-0.5212 -1.0424 -1.5636
-0.5681 -1.1362 -1.7043
-0.6155 -1.2311 -1.8466</td><td>1.0e-07 *

0.0009 -0.0006 0.0006
-0.0402 -0.0826 -0.1224
0.0009 -0.0005 0.0008
-0.0422 -0.0868 -0.1287
0.0009 -0.0004 0.0009
-0.0444 -0.0910 -0.1350
0.0009 -0.0004 0.0009
-0.0465 -0.0953 -0.1415
0.0009 -0.0004 0.0009
-0.0487 -0.0997 -0.1481
0.0009 -0.0004 0.0009
-0.0510 -0.1042 -0.1548
0.0009 -0.0005 0.0007
-0.0533 -0.1088 -0.1616
0.0008 -0.0007 0.0005</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Temps d’exécution « en s » = 96.786331 seconds.</td><td colspan="2">Valeur moyen du MRS (Mean Root Square)= 1.8157e-11</td></tr>
</table>

On remarque que pour $\alpha = 0$ le programme fonctionne très bien et donne l'erreur est petit donc la solution approchée est converge vers la solution exacte (au plus de cas de $\alpha = 1$)

2. Condition de Newman

P2 / Avec élément de référence		U = x.*t | [a, b] = [0,3] | U(0)=0, U(3) = t	
Conditions au limite de type Neumann		**Alpha = 1**	L'ordre d'approximation de Gauss =5
Pas de temps	$ht1 = 0.01$		
Les fonctions (les 15 premières valeurs et 3 instants)	**La solution exacte**	**La solution approchée**	**L'erreur**
$hx2 = 0.01$	0 0 0 0.0001 0.0002 0.0003 0.0002 0.0004 0.0006 0.0003 0.0006 0.0009 0.0004 0.0008 0.0012 0.0005 0.0010 0.0015 0.0006 0.0012 0.0018 0.0007 0.0014 0.0021 0.0008 0.0016 0.0024 0.0009 0.0018 0.0027 0.0010 0.0020 0.0030 0.0011 0.0022 0.0033 0.0012 0.0024 0.0036 0.0013 0.0026 0.0039 0.0014 0.0028 0.0042	0.0000 0.0000 0.0000 0.0001 0.0002 0.0003 0.0002 0.0004 0.0006 0.0003 0.0006 0.0009 0.0004 0.0008 0.0012 0.0005 0.0010 0.0015 0.0006 0.0012 0.0018 0.0007 0.0014 0.0021 0.0008 0.0016 0.0024 0.0009 0.0018 0.0027 0.0010 0.0020 0.0030 0.0011 0.0022 0.0033 0.0012 0.0024 0.0036 0.0013 0.0026 0.0039 0.0014 0.0028 0.0042	1.0e-13 * 0.0203 0.0036 0.0026 0.0189 0.0016 -0.0011 0.0176 -0.0004 -0.0047 0.0163 -0.0024 -0.0084 0.0149 -0.0044 -0.0120 0.0136 -0.0064 -0.0157 0.0123 -0.0085 -0.0194 0.0109 -0.0105 -0.0230 0.0096 -0.0125 -0.0267 0.0083 -0.0145 -0.0304 0.0070 -0.0166 -0.0340 0.0056 -0.0186 -0.0377 0.0043 -0.0207 -0.0414 0.0030 -0.0227 -0.0451 0.0017 -0.0248 -0.0488
			
Temps d'exécution « en s » = **56.618314 seconds.**		Valeur moyen du MRS (Mean Root Square)= **1.8157e-11**	

➔ Le programme qu'on a réalisé est flexible, car on peut inclure les conditions aux limites (Dirichlet et Newman)

P3 / Avec élément de référence	u = x.*(x-4).*(100.*t).*exp(x).*cos(x);		
Conditions au limite de type Dirichlet		**Alpha = 1**	L'ordre d'approximation de Gauss =5
Pas de temps	$ht1 = 0.01$		
Les fonctions (les 15 premières valeurs et 3 instants)	**La solution exacte**	**La solution approchée**	**L'erreur**
$hx2 = 0.01$	0 0 0 0.0002 0.0004 0.0006 0.0004 0.0008 0.0013 0.0006 0.0013 0.0019 0.0008 0.0017 0.0025 0.0011 0.0021 0.0032 0.0013 0.0026 0.0039 0.0015 0.0031 0.0046 0.0018 0.0035 0.0053 0.0020 0.0040 0.0060 0.0022 0.0045 0.0067 0.0025 0.0050 0.0074 0.0027 0.0055 0.0082 0.0030 0.0060 0.0089 0.0032 0.0065 0.0097	-0.0000 0.0000 0.0000 0.0002 0.0004 0.0006 0.0004 0.0008 0.0013 0.0006 0.0013 0.0019 0.0008 0.0017 0.0025 0.0011 0.0021 0.0032 0.0013 0.0026 0.0039 0.0015 0.0031 0.0046 0.0018 0.0035 0.0053 0.0020 0.0040 0.0060 0.0022 0.0045 0.0067 0.0025 0.0050 0.0074 0.0027 0.0055 0.0082 0.0030 0.0060 0.0089 0.0032 0.0065 0.0097	1.0e-09 * -0.0000 0.0000 0.0000 0.0002 -0.0041 -0.0145 -0.0013 -0.0117 -0.0342 -0.0051 -0.0240 -0.0610 -0.0044 -0.0271 -0.0741 -0.0058 -0.0345 -0.0936 -0.0093 -0.0461 -0.1195 -0.0086 -0.0492 -0.1325 -0.0103 -0.0573 -0.1531 -0.0146 -0.0703 -0.1810 -0.0142 -0.0741 -0.1952 -0.0161 -0.0825 -0.2161 -0.0202 -0.0954 -0.2440 -0.0197 -0.0990 -0.2580 -0.0216 -0.1075 -0.2793
Temps d'exécution « en s » = **237.698722 seconds**.		Valeur moyen du MRS (Mean Root Square)= **4.1369e-12**	

→ Théoriquement, Si on augmente le degré des fonctions de base. On doit voir une erreur inférieure par rapport le degré précèdent. Mais pour notre cas on a obtenu l'inverse de celui-ci.

Conclusion :

Dans ce projet, on a eu l'opportunité résoudre une EDP monodimensionnelle sur Matlab en utilisant la méthode des éléments finis $\mathbb{P}2$ avec la technique de l'élément de référence. Afin de toucher la complexité des problèmes avec cette méthode, et utiliser les schémas d'approximation pour le terme dérivée et les quadratures d'approximation pour le terme intégral.

En gros on a pu se familiariser de plus avec le Logiciel Matlab, apprendre les aspects algorithmiques et programmation de la simulation en 1D et en espace-temps, et voir en quoi consiste la valeur de la résolution des problèmes par une méthode numérique comme la méthode des éléments finis.