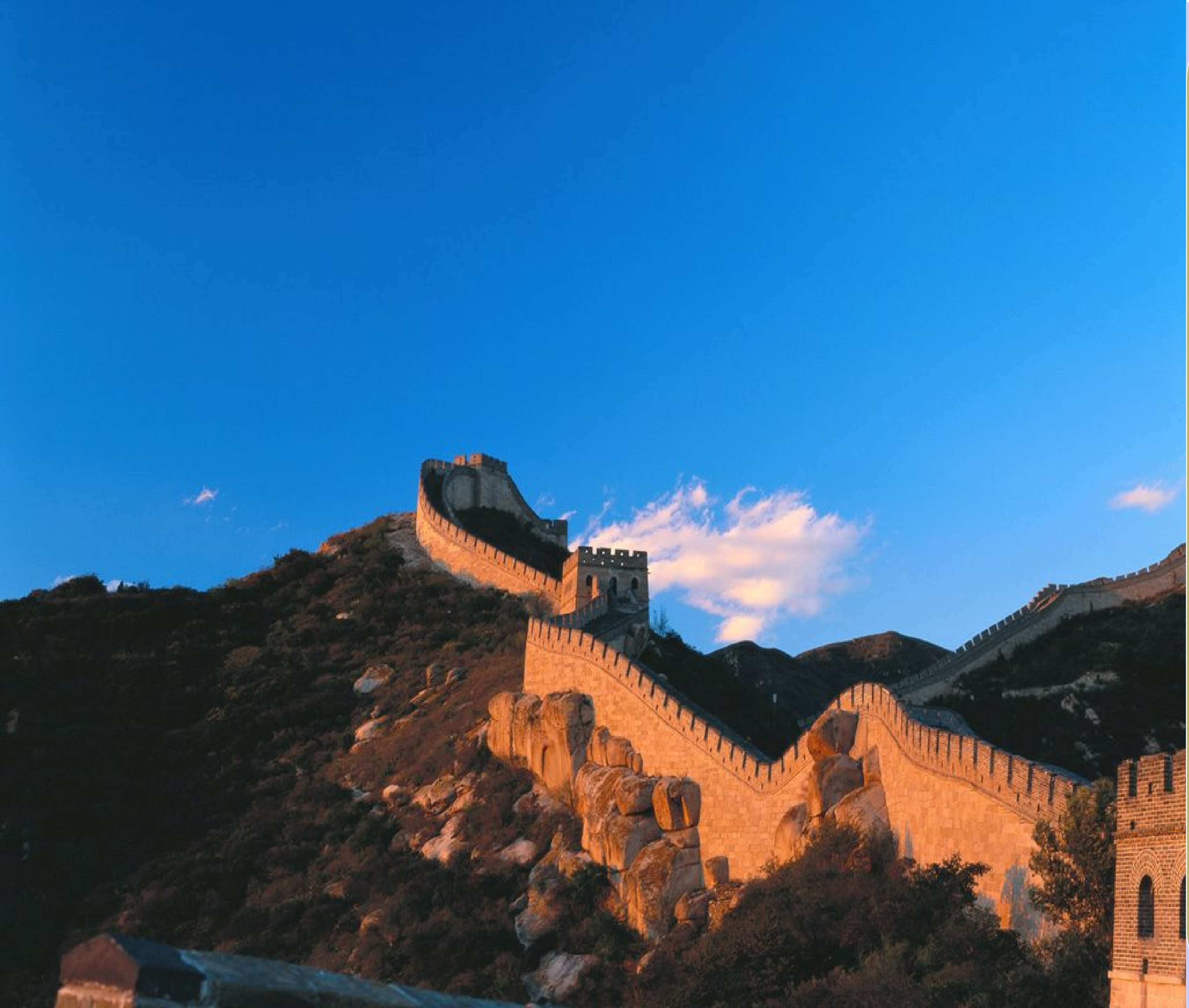

中国科学院研究生院

运筹通论II

刘克

中科院数学与系统科学研究院 北京100190

邮箱地址: kliu@amss.ac.cn

练习一：随机过程以及排队论

第一题：

给定一个马尔可夫链$\{X_n|n \geq 0\}$，它的状态空间是S，概率转移矩阵是P。对S中的一个元素j，假设u是集合S上的非负函数，它满足对某个$\epsilon > 0$，

$$u(i) \geq \sum_{k \in S} P_{ik} u(k) + \epsilon, \text{对任意} i \in S \backslash \{j\}$$

那么我们有

$$E[u(X_{(n+1)\wedge\tau_j})|X_0 = j] \leq E[u(X_{n\wedge\tau_j})|X_0 = j] - \epsilon P(\tau_j > n|X_0 = j),$$

这里$\tau_j = \inf\{n \geq 1|X_n = j\}$。并根据此不等式证明$j$是正常返的。

第二题：

考虑一个具有可变输入和可变服务率的$M/M/1/\infty$排队系统。当系统队长是n时，顾客到达的速率是λ_n，服务台的服务速率是μ_n(这里$\mu_0 = 0$)，$\lambda_n/\mu_{n+1} < \rho < 1,\ \lambda_n < C,\ n = 0, 1, \cdots$。设$t$时刻的队长是$L_t$，计算

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T p_{ij}(t),$$

其中

$$p_{ij}(t) = P(L_t = j | L_0 = i).$$

第三题：

考虑一个有优先权的单服务台无限容量排队系统。系统有两类顾客独立到达，第一类顾客的到达是参数为$\lambda_1 = 3/4$的泊松过程，服务时间服从参数是$\mu_1 = 2$的负指数分布；第二类顾客的到达是参数为$\lambda_2 = 1/4$的泊松过程，服务时间服从参数是$\mu_2 = 1$的负指数分布。第一类顾客优先服务，也就是说当第一类顾客到达时，如果服务台正在服务第二类顾客，那么停止服务第二类顾客而转向服务第一类顾客。计算该系统在统计平衡下的平均队长。

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 6 of 7
Go Back
Full Screen
Close
Quit

第四题：

考虑一个批量到达的单服务台无限容量排队系统。顾客以参数为$\lambda = 1$的泊松流到达，每次到达的顾客数量是i的概率是q_i，$q_1 = q_2 = 1/2$，服务时间服从参数为$\mu = 4$的负指数分布。计算该系统在统计平衡下的队长的概率分布。

第五题：

(开放式问题)现在银行服务都采用顾客取号等待的方式而不是顾客直接去柜台排队的方式。你能否用排队理论解释这一现象。请举出生活中其他的运用排队中的结果来提高效率的例子。