7-4 欧拉图与汉密尔顿图

一、欧拉图

主要内容：

1 、欧拉图的定义

2、 欧拉图的判定

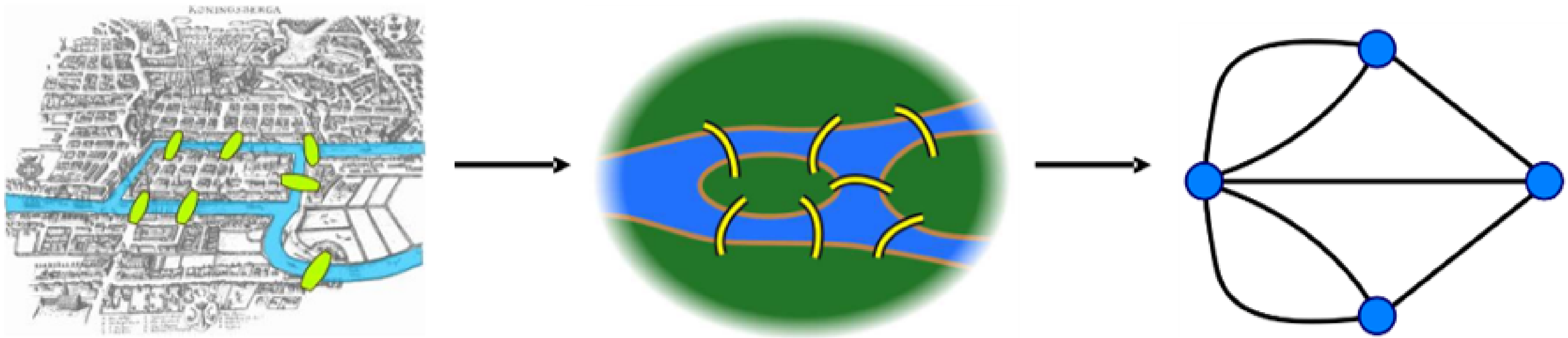
3、 建模：欧拉图应用

重点：欧拉图判定定理

7-4 欧拉图与汉密尔顿图

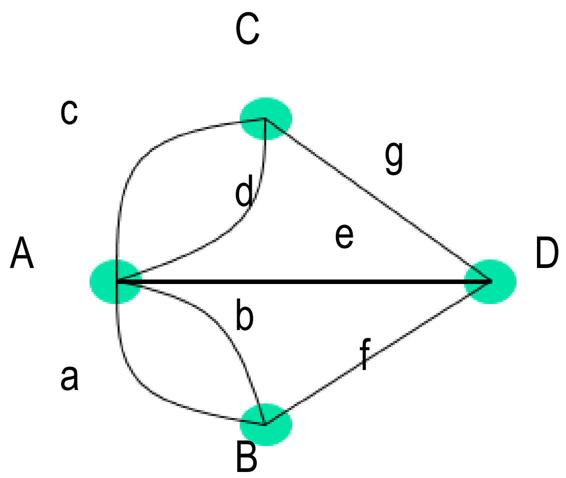
1736年瑞士数学家列昂哈德·欧拉(**Leonhard Euler**)发表了图论的第一篇论文"哥尼斯堡七桥问题"。这个问题是这样的：哥尼斯堡(**Ko*n*igsberg**)城市有一条横贯全城的普雷格尔(**Pre*g*el**) 河，城的各部分用七座桥连接，每逢假日，城中的居民进行环城的逛游，这样就产生一个问题，能不能设计一次"逛游"，使得从某地出发对每座跨河桥走一次，而在遍历了七桥之后却又能回到原地。

7-4 欧拉图与汉密尔顿图



7-4 欧拉图与汉密尔顿图

图7-4.2为七桥问题的图。



图中的结点A，B，C，D表示四块地，而边表示七座桥。哥尼斯堡七桥问题是在图中找寻经过每一条边且仅一次而回到原地的通路。

7-4 欧拉图与汉密尔顿图

欧拉在1736年的一篇论文中提出了一条简单的准则，确定了哥尼斯堡七桥问题是不能解的。下面将讨论这个问题的证明。

[定义] 欧拉回路 给定无孤立结点图G，若存在一条路，经过图中每边一次且仅一次，该条路称为欧拉路；若存在一条回路，经过图中的每边一次且仅一次，该回路称为欧拉回路。具有欧拉回路的图称为欧拉图

7-4 欧拉图与汉密尔顿图

[定理7-4.1] 无向图G具有一条欧拉路，当且仅当G是连通的，且有零个或两个奇数度结点。

证明 必要性: 设G具有欧拉路，即有点边序列 $v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_iv_ie_{i+1}\cdots e_kv_k$，其中结点可能重复出现，但边不重复，因为欧拉路经过图G中每一个结点，故图G必连通的。

对任意一个不是端点的结点v_i，在一个欧拉路中每当v_i出现一次，必关联两条边，故虽然v_i可重复出现，但$deg(v_i)$必是偶数。对于端点，若$v_0=v_k$，则$deg(v_0)$为偶数，即G中无奇数度结点，若端点v_0与v_k不同，则$deg(v_0)$为奇数，$deg(v_k)$为奇数，G中就有两个奇数度结点。

7-4 欧拉图与汉密尔顿图

充分性: 若图G连通，有零个或两个奇数度结点，我们构造一条欧拉路如下：

(1)若有两个奇数度结点，则从其中的一个结点开始构造一条简单通路，即从v_0出发关联e_1“到达”v_1，若$\deg(v_1)$为偶数，则必由v_1再经过e_2到达v_2，如此进行下去，每边仅取一次。由于G是连通的，故必可到达另一奇数度结点停下，得到一条简单通路L_1：$v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_iv_ie_{i+1}\cdots e_kv_k$。若$G$中没有奇数度结点，则从任一结点$v_0$出发，用上述的方法必可回到结点$v_0$，得到上述一条简单回路$L_1$。

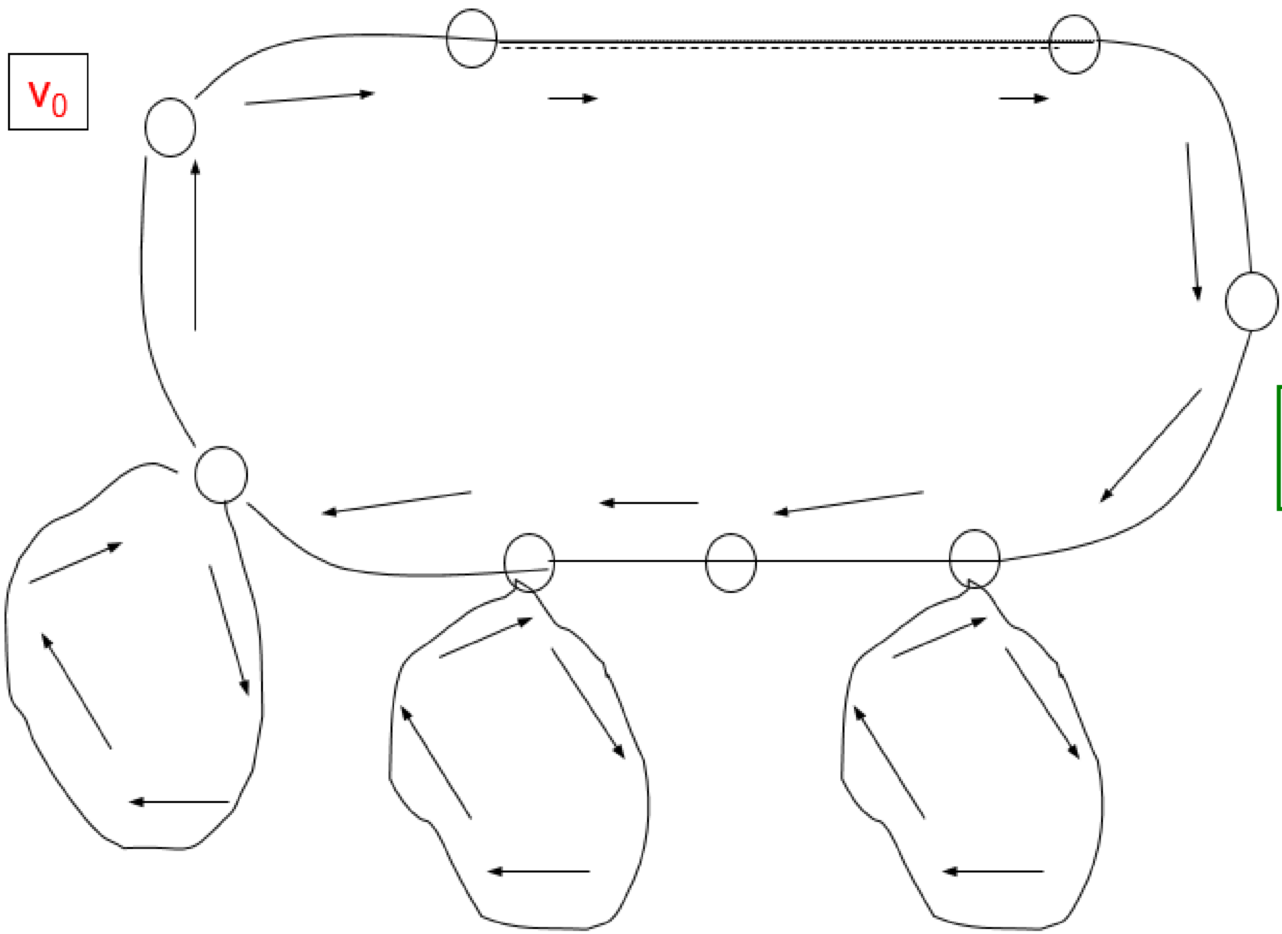
(2)若L_1通过了G的所有边，则L_1就是欧拉路。

7-4 欧拉图与汉密尔顿图

⑶若G中去掉L_1后得到子图G'，则G'中每一点的度数为偶数，因原图是连通的，故L_1与G'至少有一个结点v_i重合，在G'中由v_i出发重复⑴的方法，得到简单回路L_2。

⑷当L_1与L_2组合在一起，如果恰是G，则即得欧拉路，否则重复⑶可得到简单回路L_3，以此类推直到得到一条经过图G中所有边的欧拉路。

7-4 欧拉图与汉密尔顿图



构造法

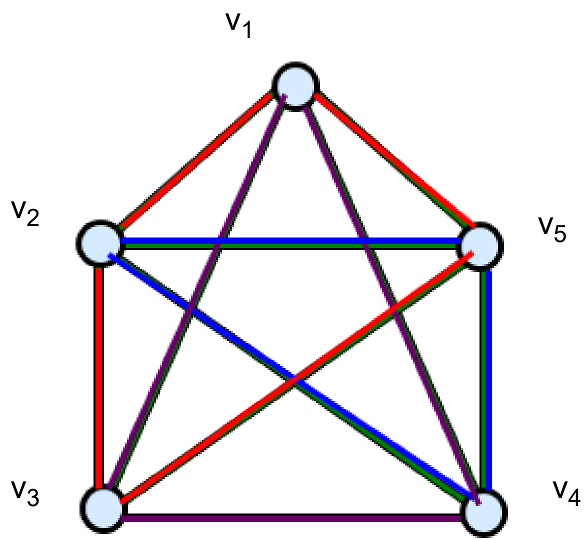
7-4 欧拉图与汉密尔顿图

推论　无向图G具有一条欧拉回路，当且仅当G是连通的，并且所有结点度数为偶数。

由于有了欧拉路和欧拉回路的判别准则，因此哥尼斯堡七桥问题立即有了确切的答案，因为有四个结点的度数皆为奇数，故欧拉路必不存在。

7-4 欧拉图与汉密尔顿图

欧拉图的判定示例



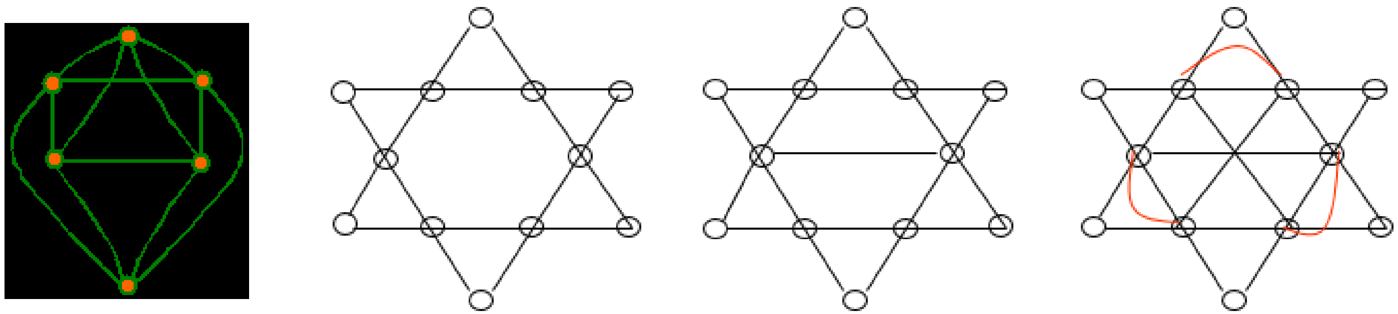
7-4 欧拉图与汉密尔顿图

欧拉图的应用

1 七桥问题

2 一笔画问题

试问下列各图能否一笔画出？

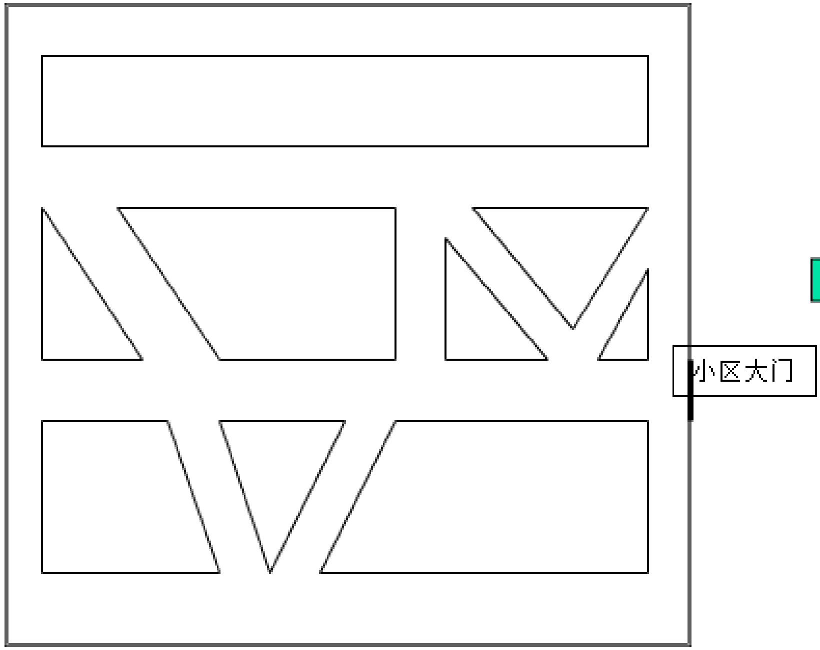


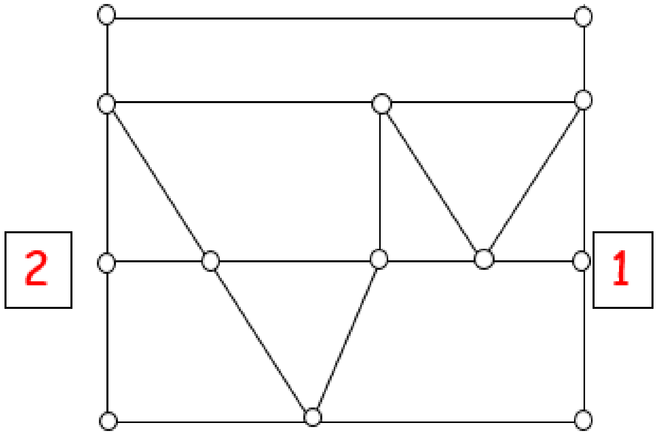
请你思考：**完全图K_n可以几笔画出?**

7-4 欧拉图与汉密尔顿图

欧拉图的应用

3 “街道清扫车”





7-4 欧拉图与汉密尔顿图

欧拉图的应用

推广之：中国邮路问题

一个邮递员从邮局出发，到所管辖的街道投递邮件，最后返回邮局，若必须走遍所辖各街道中每一条至少一次，则怎样选择投递路线使所走的路程最短？

如何用图论的语言来描述？

中国邮路问题的图论模型：在一个带权图G中，能否找到一条回路C，使C包含G的每条边最少一次且C的权值最小？

7-4 欧拉图与汉密尔顿图

欧拉图的应用

我国的数学家管梅谷教授，于1960年首次提出这一问题，被国际数学界称之为中国邮路问题。

它的解题思路大体包括三个方面：

第一 若G没有奇数度结点，则G是欧拉图，于是欧拉回路C是唯一的最小长度。

第二 若G恰有两个奇数度结点v_i和v_j，则G具有欧拉路径，且邮局位于结点v_i，则邮递员走遍所有的街道一次到达结点v_j；从v_j返回v_i可选择其间的一条最短路径。这样，最短邮路问题转化为求v_i到v_j的欧拉路径和v_j到v_i的最短路径问题。

第三 若G中奇数度结点数多于2，则回路中必须增加更多的重复边(路径）。这时，怎样使重复边的总长度最小？有定理给出了判断条件。

7-4 欧拉图与汉密尔顿图

欧拉路和欧拉回路的概念，很容易推广到有向图上去。

[定义7-4.2] 给定有向图G，通过每边一次且仅一次的一条单向路(回路)，称作**单向欧拉路(回路)**。

7-4 欧拉图与汉密尔顿图

[定理7-4.2]有向图G具有一条单向欧拉回路，当且仅当是(弱)连通的，且每个结点的入度等于出度。一个有向图G具有单向欧拉路，当且仅当是(弱)连通的，而且除两个结点外，每个结点的入度等于出度，但这两个结点中，一个结点的入度比出度大1。另一个结点的入度比出度小1。

等价描述

[定理7-4.2’]有向图G具有一条单向欧拉回路，当且仅当是强连通的，且每个结点的入度等于出度。一个有向图G具有单向欧拉路，当且仅当是单侧连通的，而且除两个结点外，每个结点的入度等于出度，但这两个结点中，一个结点的入度比出度大1。另一个结点的入度比出度小1。

7-4 欧拉图与汉密尔顿图

这个定理的证明可以看作是无向图的欧拉路的推广，因为对于有向图的任意一个结点来说，如果入度与出度相等，则该结点的总度数为偶数，若入度和出度之差为1时，其总度数为奇数。因此定理的证明与定理7-4.1相似。

7-4 欧拉图与汉密尔顿图

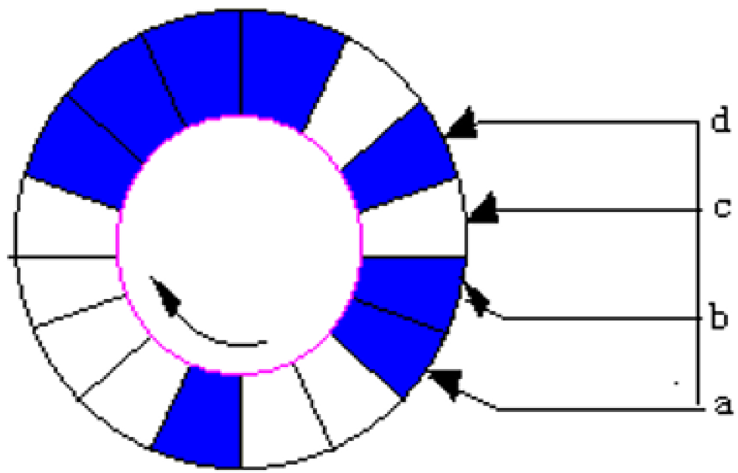
有向欧拉图的应用

计算机鼓轮的设计

设有旋转鼓轮其表面被等分成2^4个部分。

其中每一部分分别用绝缘体或导体组成，绝缘体部分给出信号0，导体部分给出信号1，图中阴影部分表示导体，空白部分表示绝缘体，根据鼓轮的位置，触点将得到信息1101，如果鼓轮沿顺时针方向旋转一个部分，触点将有信息1010。

问鼓轮上16个部分怎样安排导体和绝缘体，才能使鼓轮每旋转一个部分，四个触点能得到一组不同的四位二进制数信息。



7-4 欧拉图与汉密尔顿图

设有八个结点的有向图，如图7-4.5所示，

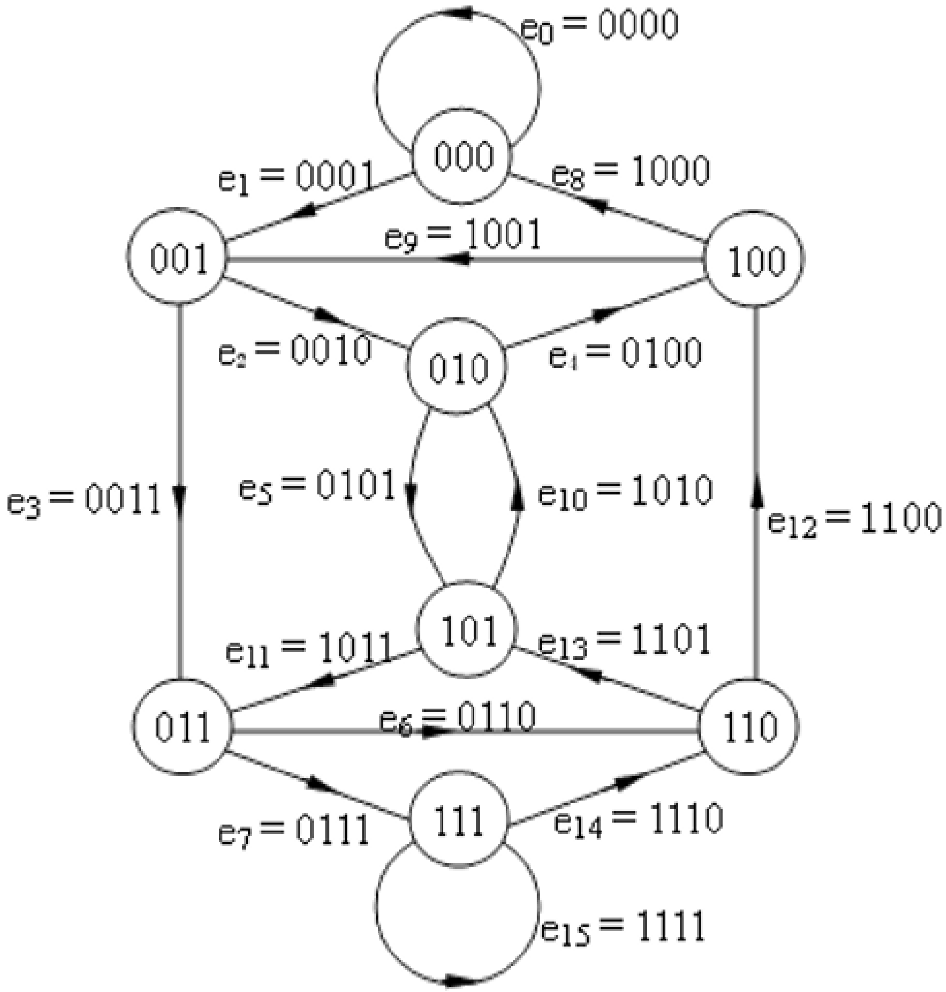


图 7-4.5

7-4 欧拉图与汉密尔顿图

其结点分别记为三位二进制数{000，001，010，011，100，101，110，111}，设$\alpha_i \in \{0,1\}$，从结点$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$可引出两条有向边，其终点分别为$\alpha_2\alpha_3 0$和$\alpha_2\alpha_3 1$。按照上述的方法，对于八个结点的有向图共有16条边，在这种图的任一条路中，其邻接的边必是$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$和$\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$的形式，即是第一条边标号的后三位与第二条边标号的头三位相同。因为图中的16条边被记成不同的二进制数，可见前述鼓轮转动所得的16个不同的位置触点的二进制码，即对应着图中的一条欧拉回路。图7-4.5每个结点的入度为2，出度也为2，图中的欧拉回路是{0000，0001，0010，0100，1001，0011，0110，1101，1010，0101，1011，0111，1111，1110，1100，1000}。根据相邻边的记法16个二进制数可写成对应的0-1码0000100110101111。将它安排成环状，即是所求的鼓轮。

7-4 欧拉图与汉密尔顿图

上述的例子可以推广到有n个触点的鼓轮。

构造2^{n-1}个结点的有向图，设每个结点标记为n-1位二进制数。

二、汉密尔顿图

主要内容：

1 、哈密尔顿图

2 、哈密尔顿图判定定理

3 、建模：哈密尔顿图应用

重点难点：哈密尔顿图判定定理

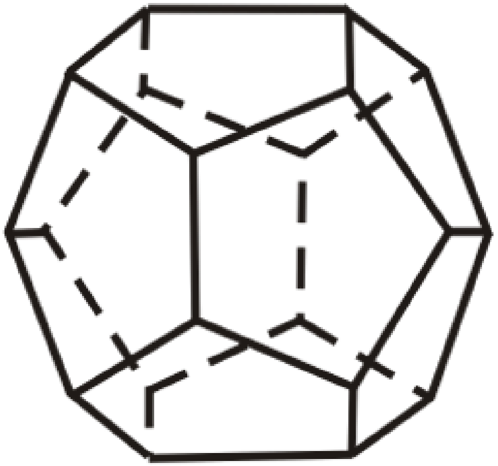
7-4 欧拉图与汉密尔顿图

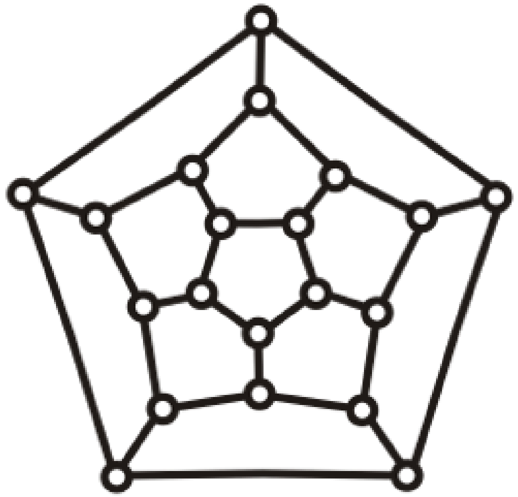
汉密尔顿回路

与欧拉回路非常类似的问题是汉密尔顿回路问题。1859年爱尔兰数学家威廉·汉密尔顿爵士在给他的朋友的一封信中，首先谈到关于十二面体的一个数学游戏：一个木刻的正十二面体，每面系正五边形，三面交于一角，共有20个角，每角标有世界上一个重要城市。汉密尔顿提出一个问题：要求沿正十二面体的边寻找一条路通过20个城市，而每个城市只通过一次，最后返回原地。汉密尔顿将此问题称为周游世界问题。

汉密尔顿周游世界问题

每个顶点是一个城市，有20个城市，要求从一个城市出发，恰好经过每一个城市一次，回到出发点.





7-4 欧拉图与汉密尔顿图

[定义7-4.3] 汉密尔顿路，汉密尔顿回路

给定图G，若存在一条路经过图中的每一个结点恰好一次，这条路称作汉密尔顿路。若存在一条回路，经过图中的每一个结点恰好一次，这个回路称作汉密尔顿回路。

具有汉密尔顿回路的图称为汉密尔顿图。

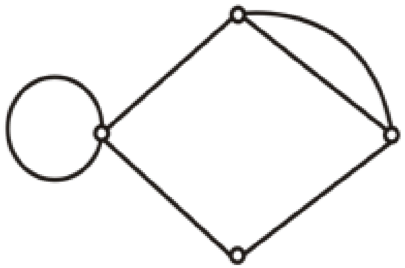
以下如无特指，均表示无向图

注意：环与平行边不影响图的汉密尔顿性.

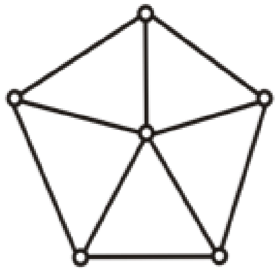
7-4 欧拉图与汉密尔顿图

实例

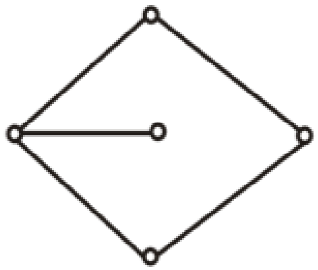
例 是否有汉密尔顿路？汉密尔顿回路?



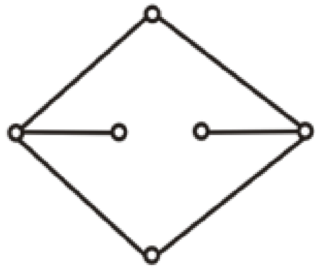
汉密尔顿回路



汉密尔顿回路



汉密尔顿路



都没有

7-4 欧拉图与汉密尔顿图

[定理7-4.3] 无向图具有汉密尔顿回路的必要条件

若图$G=\langle V, E\rangle$具有汉密尔顿回路，则对于结点集V的每一个非空子集S均有$W(G-S)\leqslant|S|$成立。其中$W(G-S)$是$G-S$中连通分支数。

证明 设C是G的一条汉密尔顿回路，则对于V的任何一个非空子集S在C中删去S中任一结点a_1，则$C-a_1$是连通非回路，若删去S中的另一个结点a_2，则$W(C-a_1-a_2)\leqslant 2$，由归纳法得知

$$W(C-S)\leqslant |S|$$

同时$C-S$是$G-S$的一个生成子图，因而

$$W(G-S)\leqslant W(C-S)$$

所以 $W(G-S)\leqslant |S|$

7-4 欧拉图与汉密尔顿图

实例

例 设G为n阶无向连通简单图, 若G中有割点或桥,

则G不是汉密尔顿图.

证 (1) 设v为割点, 则$W(G-v) \geq 2>|\{v\}|=1$. 根据定理, G不是汉密尔顿图.

(2) 若G是K_2(K_2有桥), 它显然不是汉密尔顿图. 除K_2外, 其他的有桥连通图均有割点. 由(1), 得证G不是汉密尔顿图.

7-4 欧拉图与汉密尔顿图

这个方法并不是总是有效的。例如，著名的彼得森(Pertersen)图，如下图所示，在图中删去任一个结点或任意两个结点，不能使它不连通；删去三个结点，最多只能得到有两个连通分支的子图；删去四个结点，最多只能得到有三个连通分支的子图；删去五个或五个以上的结点，余下的结点数都不大于5，故必不能有5个以上的连通分支数。所以该图满足$W(C-S) \leqslant |S|$，但是可以证明它非汉密尔顿图。

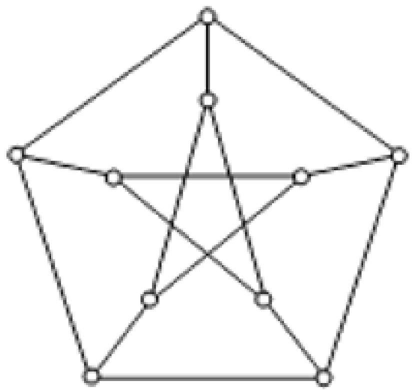


图 7-4.8

雨课堂 Rain Classroom

7-4 欧拉图与汉密尔顿图

虽然汉密尔顿回路问题和欧拉回路问题在形式上极为相似，但对图G是否存在汉密尔顿回路还没有有效的判别准则。下面我们给出一个无向图具有汉密尔顿路的充分条件。

7-4 欧拉图与汉密尔顿图

[定理7-4.4] 无向图具有汉密尔顿路的充分条件

设G具有n个结点的简单图，如果G中每一对结点的度数之和大于等于n-1，则在G中存在一条汉密尔顿路。

证明 首先，证明G是连通的

若G有两个或更多互不连通的分图，设一个分图有n_1个结点，任取一个结点v_1，设另一个分图有n_2个结点，任取一个结点v_2，

由

$$d(v_1) \leqslant n_1 - 1, \quad d(v_2) \leqslant n_2 - 1,$$

有

$$d(v_1) + d(v_2) \leqslant n_1 + n_2 - 2 < n - 1,$$

这表明与题设矛盾，故G必连通。

其次，证明G有汉密尔顿通路

只要在G中构作出一条长为n－1的汉密尔顿通路即可得证。

为此，不妨令P为G中任意一条长为p－1(p＜n)的初级通路，设其结点序列为v_1，v_2，…，v_p。反复应用下面方法来扩充这一通路，直到P长度为n-1：

1）如果有$v \neq v_1$，v_2，…，v_p，它与v_1或v_p有边相关联，那么可立即扩充P为长度为p的通路。

2）如果v_1，v_p均只与原通路P上的结点相邻，则首先证明：G中有一条包含v_1，v_2，…，v_p，长度为p的回路。

2.1) 如果v_1与v_p相邻，则回路已找到。否则

7-4 欧拉图与汉密尔顿图

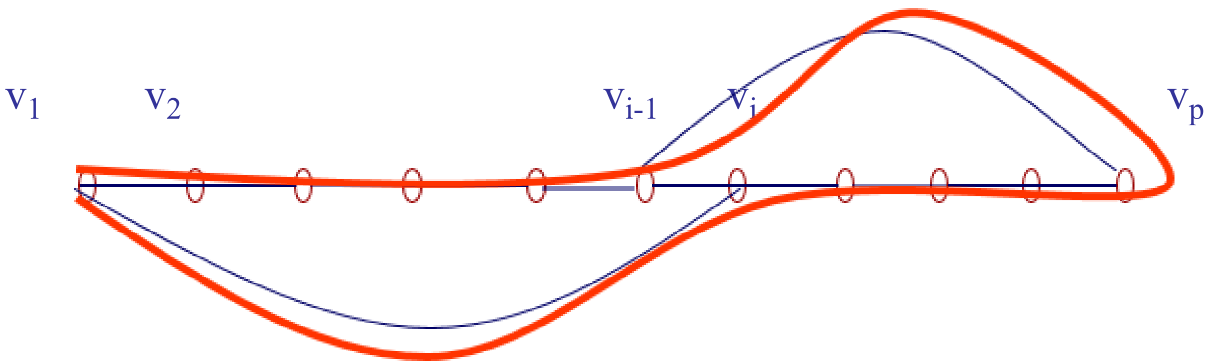
2.2) 如果v_1与v_{i1} ,v_{i2} , …,v_{ir}相邻，1＜i_1，i_2, …, i_r＜p，考虑v_p：

若v_p不与v_{i1-1} ,v_{i2-1} , …, v_{ir-1}中任何一个相邻，则$deg(v_p) \leq p-r-l$,

因而 $deg(v_1)+deg(v_p) \leq r+p - r - l = p - 1 < n - 1$，与题设矛盾，

因此 v_p与v_{i1-1} ,v_{i2-1} , …, v_{ir-1}之一, 例如v_{i1-1}相邻,

于是,可得到包含v_1，v_2，…，v_p的回路：（v_1，v_2，…，v_{i1-1} ,v_p , v_{p-1} , …，v_{i1} , v_1）如图所示。



7-4 欧拉图与汉密尔顿图

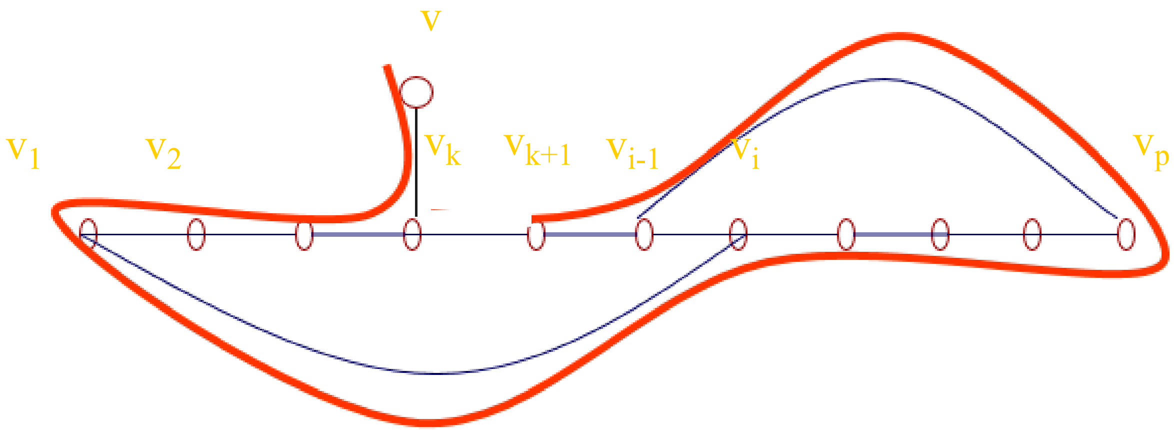
考虑G中这条包含v_1，v_2，…，v_p、长度为p的回路。

由于p<n，故必有回路外结点v与回路上结点(例如v_k)相邻，

如图所示，可以得到一条长度为p的、包含v_1，v_2，…，v_p的通

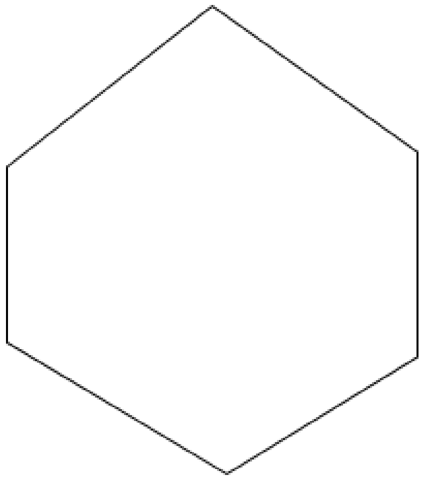
路：$(v, v_k, v_{k-1}, \cdots, v_1, v_{i1}, v_{i1+1}, \cdots, v_p, v_{i1-1}, \cdots, v_{k+1})$。

扩充这一通路，直到P长度为n-1



7-4 欧拉图与汉密尔顿图

容易看出，定理7-4.4的条件是图中的汉密尔顿路的存在的充分条件，但是并不是必要的条件。设图是n边形，如下图所示，其中n=6. 虽然任何两个结点度数的和是4＜6－1，但在G中有一条汉密尔顿路。



7-4 欧拉图与汉密尔顿图

例题1：

考虑在七天内安排七门功课的考试，使得同一位教师所任的两门课程考试不安排在接连的两天里，试证如果没有教师担任多于四门课程，则符合上述要求的考试安排总是可能的。

7-4 欧拉图与汉密尔顿图

证明 设G为七个结点的图，每一个结点对应一门功课的考试，如果这两个结点对应的课程的考试是由不同教师担任的，那么这两个结点之间有一条边，因为每个教师所任的课程不超过**4**，故每个结点的度数至少是**3**，任两个结点度数的和至少是**6**，故G总包含一条汉密尔顿路，它对应于一个七门考试课目的一个适当安排。

7-4 欧拉图与汉密尔顿图

[定理7-4.5] 无向图具有汉密尔顿回路的充分条件

设图G是具有n(大于等于3)个结点的简单图，如果G中每一对结点的度数大于等于n，则在G中存在一条汉密尔顿回路。

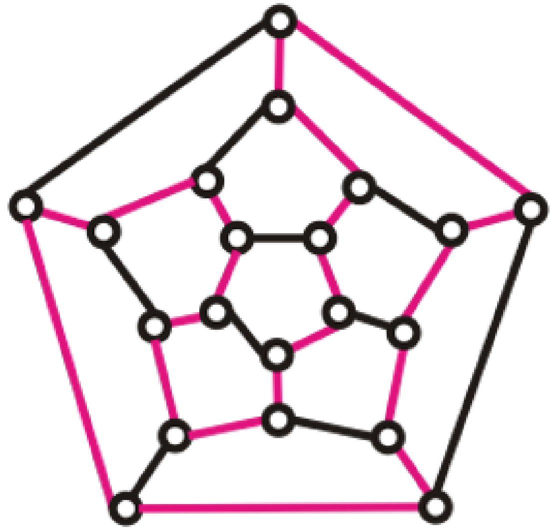
证明 由定理7-4.4可知必有一条汉密尔顿路，设为$v_1v_2\ldots v_n$，如果v_1与v_n邻接，则定理得证。

如果v_1与v_n不邻接，假设v_1邻接于$\{v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k}\}$，$2 \le i_j \le n-1$，可以证明$v_n$必邻接于$v_{i_1-1}, v_{i_2-1}, \cdots, v_{i_k-1}$中之一。如果不邻接于$v_{i_1-1}, v_{i_2-1}, \cdots, v_{i_k-1}$中的任意一点，则$v_n$至多邻接于$n-k-1$个结点，因而$d(v_n) \le n-k-1$，而$d(v_1)=k$，故$d(v_1)+d(v_n) \le n-k-1+k=n-1$，与题设矛盾，所以必有汉密尔顿回路$v_1v_2\ldots v_{j-1}v_nv_{n-1}\ldots v_jv_1$。

判断是否是汉密尔顿图的可行方法

- 观察出一条汉密尔顿回路

例如 右图(周游世界问题)中红边给出一条汉密尔顿回路, 故它是汉密尔顿图.



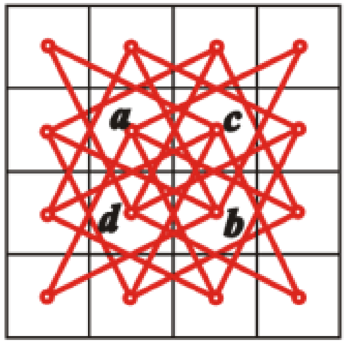
- 满足充分条件

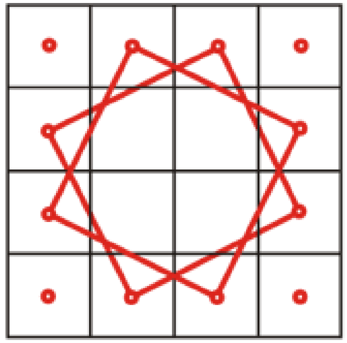
例如 当$n≥3$时, K_n中任何两个不同的顶点 u,v, 均有$d(u)+d(v) = 2(n-1) \geq n$, 所以$K_n$为汉密尔顿图.

判断是否是汉密尔顿图的可行方法(续)

- 不满足必要条件

例 4×4国际象棋盘上的跳马问题: 马是否能恰好经过每一个方格一次后回到原处?





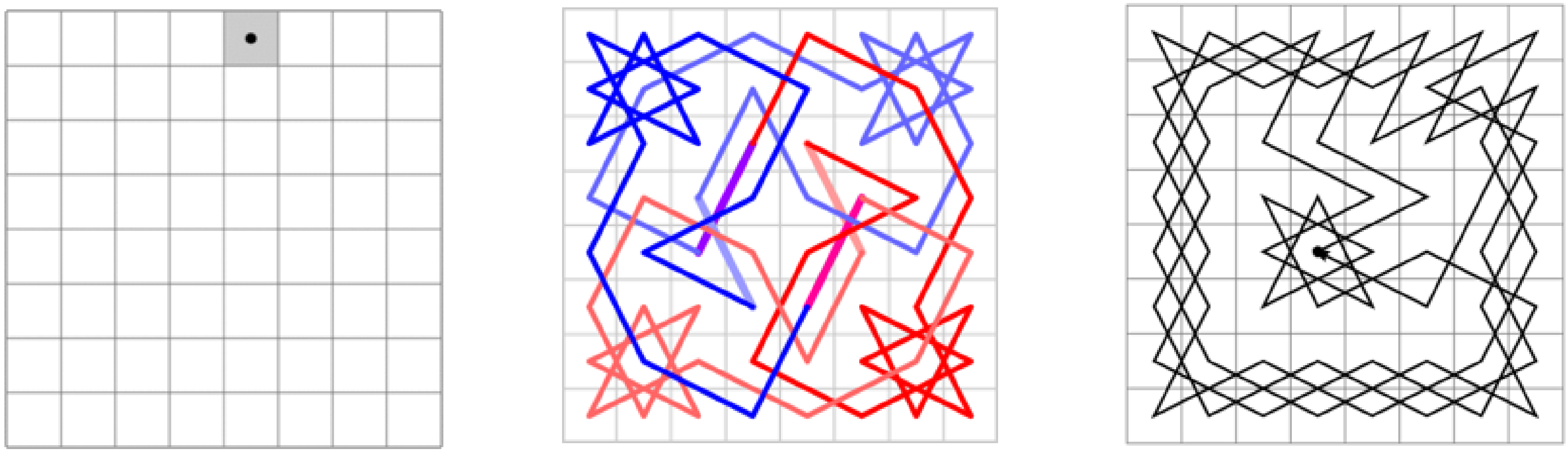
解 每个方格看作一个顶点, 2个顶点之间有边当且仅当马可以从一个方格跳到另一个方格, 得到16阶图G, 如左图红边所示. 取$V_1=\{a, b, c, d\}$, 则$W(G-V_1) = 6 >|V_1|$, 见右图. 由定理, 图中无汉密尔顿回路, 故问题无解.

那么, 在8×8国际象棋盘上, 跳马问题是否有解?

对于一般的图，判断其是否存在汉密尔顿路或哈密顿回路是**NP**完全问题

7-4 欧拉图与汉密尔顿图

骑士巡游(Knight’ s tour)



42

7-4 欧拉图与汉密尔顿图

[定义7-4.4]给定图G=〈V，E〉有n个结点，若将图G中度数之和至少是n的非邻接结点连接起来得图G'，对图G'重复上述步骤，直到不再有这样的结点为止，所得的图，称为原图G的闭包，记作$C(G)$。

7-4 欧拉图与汉密尔顿图

如下图 给出了六个结点的一个图，构造它的闭包过程。在这个例子中$C(G)$是一个完全图。一般情况下，$C(G)$也可能不是一个完全图。

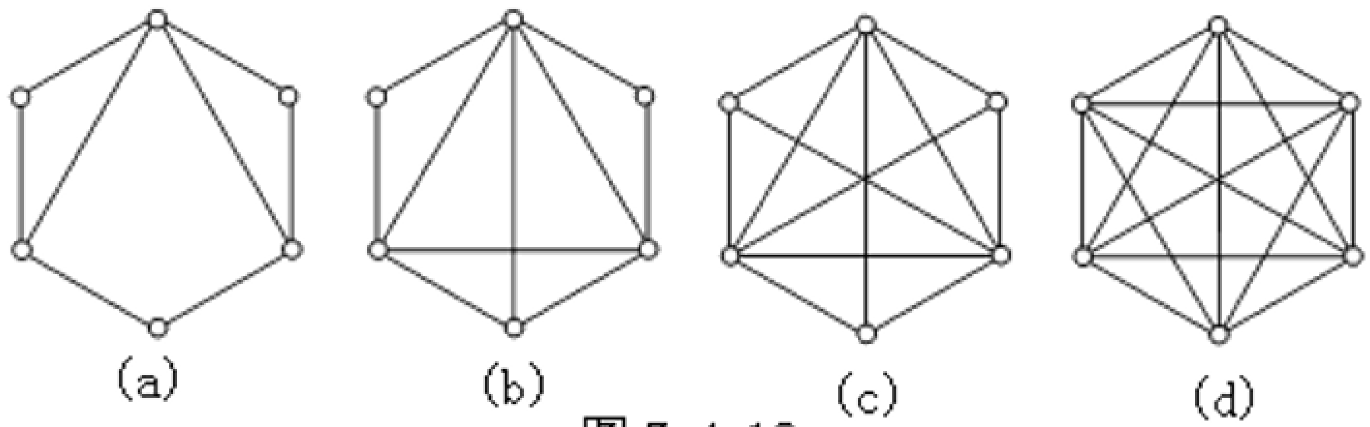


图 7-4.12

7-4 欧拉图与汉密尔顿图

[定理7-4.6]当且仅当一个简单图的闭包是汉密尔顿图时，这个简单图是汉密尔顿图。

证明 略。

7-4 欧拉图与汉密尔顿图

关于图中没有汉密尔顿路的判别尚没有确定的方法，

下面介绍一个说明性的例子。

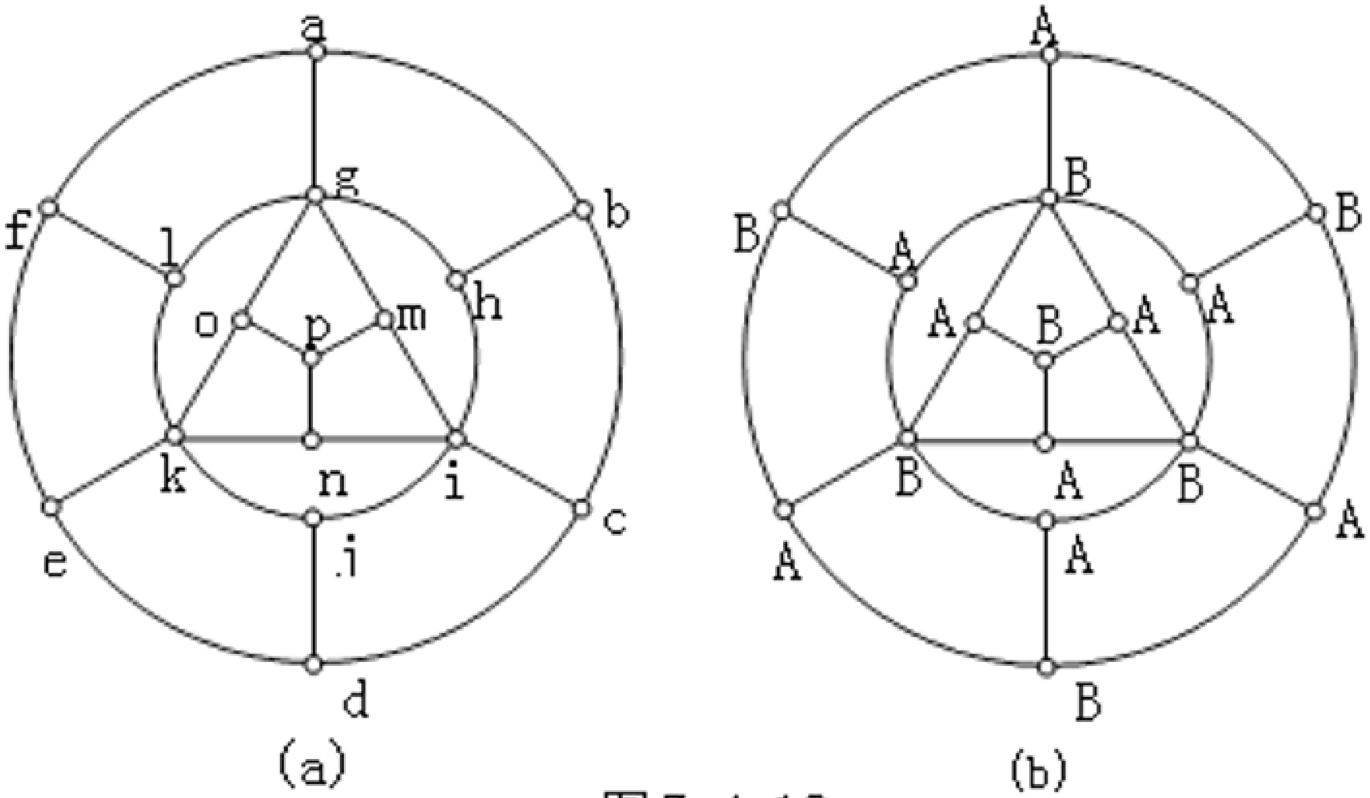


图 7-4.13

7-4 欧拉图与汉密尔顿图

例题2 指出图7-4.13(a)所示的图G中没有汉密尔顿路。

解 用A标记任意一个结点a，所有与a邻接的结点均标记B，继续不断地用A标记所有邻接于B的结点，用B标记所有邻接于A的结点，直到所有结点标记完毕。这个有标记的图如图7-4.13(b)所示，如果在图G中有一条汉密尔顿路，那么它必交替通过结点A和结点B，然而本例中共有九个A结点和七个B结点，所以不可能存在一条汉密尔顿路。

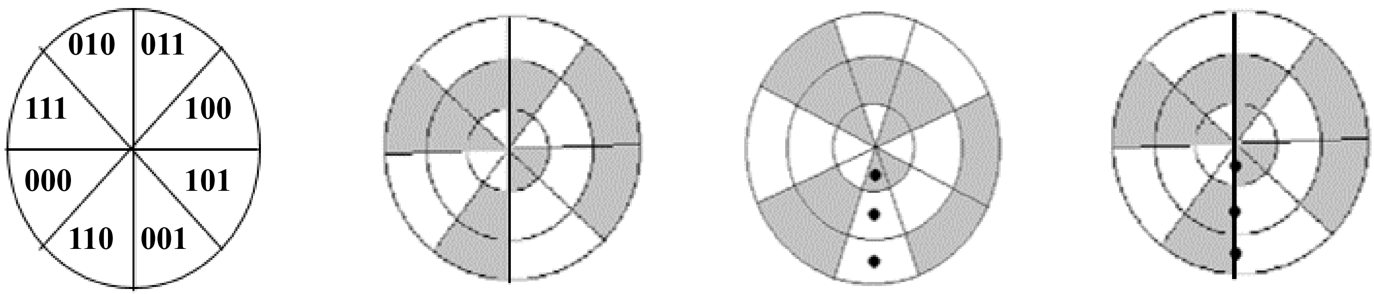
7-4 欧拉图与汉密尔顿图

格雷码(gray code)

为了确定圆盘停止旋转后的位置，把圆盘划分成2^n个扇区，每个扇区分配一个n位0-1串. 要用某种电子装置读取扇区的赋值.

当圆盘停止旋转后，如果电子装置处于一个扇区的内部，它将能够正确的读出这个扇区的赋值，如果电子装置恰好处于两个扇区的边界上，就可能出问题.

如何赋值，才能将可能出现的误差减少到最小？



格雷码(续)

格雷码: 相邻的两个以及最后一个和第一个之间只有一位不同的把n位0-1串序列

例如, 000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100是一个格雷码

构造n维立方体图: 2^n个顶点, 每个顶点表示一个n位串, 两个顶点之间有一条边当且仅当它们的n位串仅相差一位.

当$n\geq 2$时, 图中一定存在哈密顿回路.