第四篇 图论

- 起源于1736年，欧拉的哥尼斯堡七桥问题

瑞士数学家欧拉

（1707-1783）

7-1　图的基本概念

本节要熟悉下列概念（26个）：

图、无向边、有向边、起始结点、终止结点、

无向图、有向图、混合图、

邻接点、邻接边、孤立结点、零图、平凡图、

结点的度数、图的最大度和最小度、

结点的入度、结点的出度、

平行边、多重图、简单图、

完全图、补图、子图、生成子图、

子图的相对于图的补图、

图的同构

2

7-1 图的基本概念

一、图的定义

定义1 图G由一个三元组<V(G), E(G), φ_G>表示，其中：

非空集合$V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_r\}$称为图G的结点集，其成员$v_i(i=1,2,\ldots,r)$称为结点或顶点；

集合$E(G)=\{e_1,e_2,\ldots,e_s\}$称为图G的边集，其成员$e_j(j=1,2,\ldots s)$称为边。

函数φ_G是从边集合E到结点无序偶（有序偶）集合上的函数。

3

7-1 图的基本概念

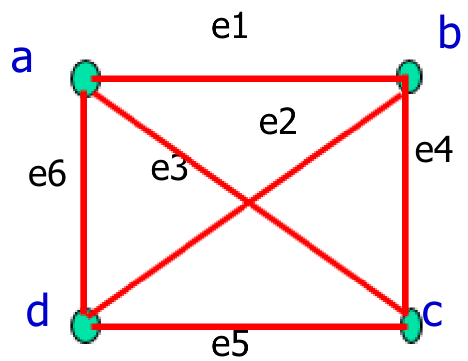
例1：$G=<V(G), E(G), \varphi_G>$

其中$V(G)=\{a, b, c, d\}$，

$E(G)=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$，

$\varphi_G(e_1)=(a, b)$，$\varphi_G(e_2)=(a, c)$，$\varphi_G(e_3)=(b, d)$，

$\varphi_G(e_4)=(b, c)$，$\varphi_G(e_5)=(d, c)$，$\varphi_G(e_6)=(a, d)$



4

7-1　图的基本概念

若把图中的边e_j看作总是和两个结点关联，那么一个图亦简记为G=< V, E>，

其中非空集合V称为图G的结点集，

集合 E称为图G的边集。

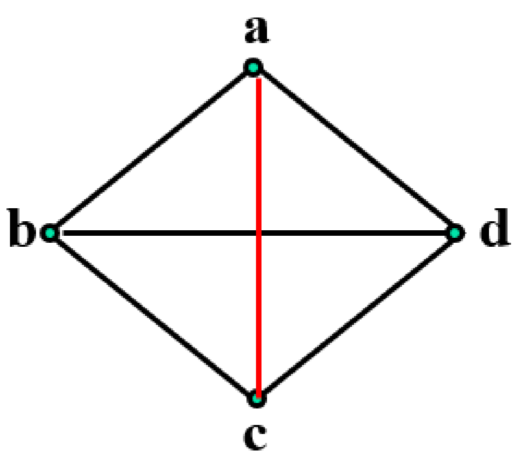
7-1 图的基本概念

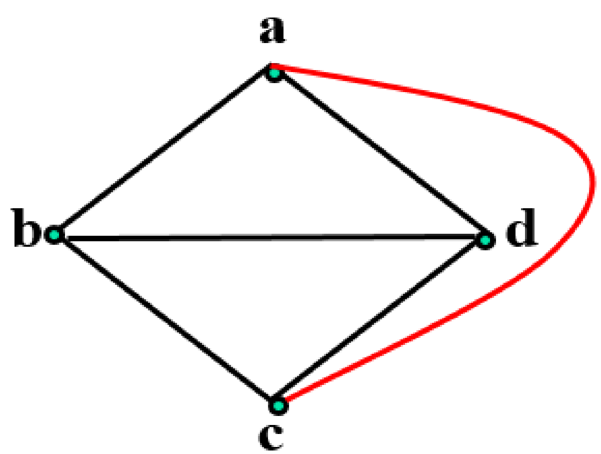
例2：$G=<V(G), E(G), \varphi_G>$

其中$V(G)=\{a, b, c, d\}$，$E(G)=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$，

$\varphi_G(e_1)=(a, b)$，$\varphi_G(e_2)=(a, c)$，$\varphi_G(e_3)=(b, d)$，

$\varphi_G(e_4)=(b, c)$，$\varphi_G(e_5)=(d, c)$，$\varphi_G(e_6)=(a, d)$





一个图与结点、连接结点的边、边与结点的关联有关。

7-1 图的基本概念

图的分类

无向边：如果E中边e_i对应V中的结点对是无序的(u，v)

称e_i是无向边，记$e_i=(u，v)$，称u，v是e_i的两个端点。

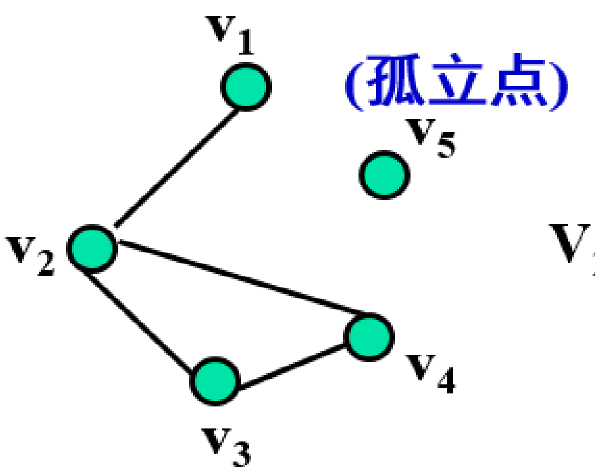
有向边：如果e_i与结点有序对<u，v>相对应，称e_i是有向边，记$e_i=\langle u，v\rangle$，称u为e_i的始点，v为e_i的终点。

7-1　图的基本概念

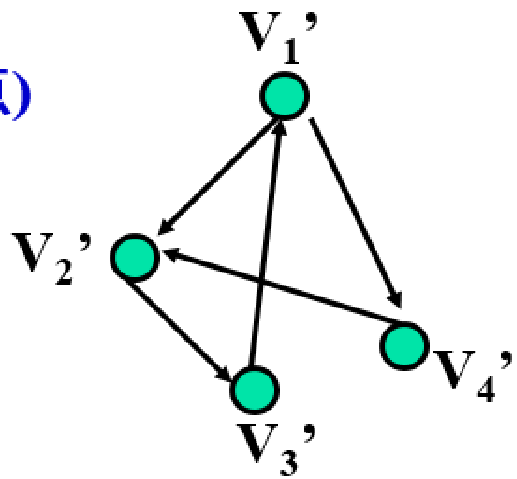
1.无向图：每条边均为无向边的图称为无向图。

2.有向图：每条边均为有向边的图称为有向图。

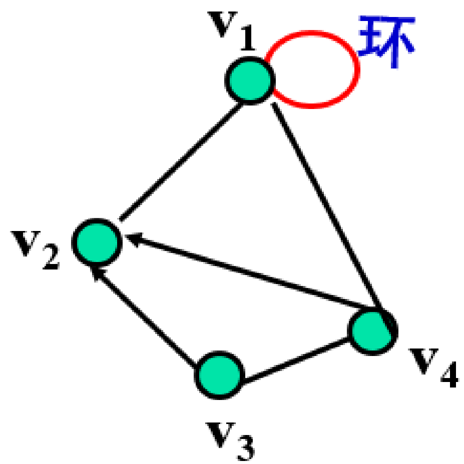
3.混合图：有些边是无向边，有些边是有向边的图称为混合图。



(a)无向图



(b)有向图



(c) 混合图

7-1　图的基本概念

练习：画出下面的图。

1、G1=<V1，E1>是无向图，其中V1={v1, v2, v3,v4,v5, v6}，E1={e1, e2, e3, e4, e5, e6}，

e1=(v1, v3)，e2=(v1, v4)，e2=(v2, v4)，e3=(v3, v4)，

e4=(v3, v6)，e5=(v4, v5)，e6=(v5, v6)

2、G2=<V2，E2>是有向图，其中V2={v1, v2, v3, v4}，

E={<v3, v1>, <v3, v2>, <v1, v1>, <v1, V2>, <v4, v1>, <v3, v4>, <v4, v3>}

3、G3=<V3，E3>是混合图，V3={v1, v2, v3, v4}，

E3={<v1, v1>, (v1, v3), <v3, v1>, <v1, v2>, (v4, v2)}

7-1 图的基本概念

4、点和边的关联：如e_i=(u，v)或e_i=<u，v>称u，v与e_i关联。

5、点与点的相邻：关联于同一条边的结点称为邻接点。

6、边与边的邻接：关联于同一结点的边称为邻接边。

7、孤立结点：不与任何边相关联的结点称为孤立结点。

8、零图：仅有孤立结点的图。

9、平凡图：仅有一个孤立结点的图。

7-1 图的基本概念

10、自回路(环)：关联于同一结点的边称为自回路，或称为环。

11、平行边：在有向图中，始点和终点均相同的边称为平行边，无向图中若两点间有多条边，称这些边为平行边，两点间平行边的条数称为边的重数。

二、点的度数

1. 点的度数的定义

定义2 在图G=<V，E>，$v \in V$，**与结点v关联的边数**称为该点的**度数**，记为**deg(v)**。

孤立结点的度数为0，每个环在其对应结点上度数+2。

2. 出度与入度

定义3 在**有向图**中，$v \in V$，以v为始点的边数称为该结点的出度，记作$\deg^{+}(v)$；以v为终点的边数称为该结点的入度，记作$\deg^{-}(v)$。

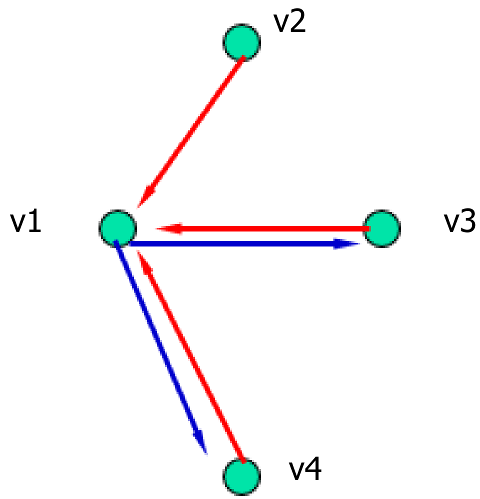
显然有$\deg(v)=\deg^{+}(v)+\deg^{-}(v)$

7-1　图的基本概念

例：**G1**是无向图，**deg(v1)=3**，**deg(v2)=1**

G2是有向图，$deg^{+}(v1)=2$，$deg^{-}(v1)=3$，$deg(v1)=5$，

G1



G2

7-1 图的基本概念

3. 最大度和最小度：

图G最大度数记为$\Delta(G)=\max\{\deg(v)|v\in V(G)\}$，

最小度数记为$\delta(G)=\min\{\deg(v)|v\in V(G)\}$。

定理1 每个图中，**结点度数总和等于边数的两倍。**

即 $\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|$ ，又称握手定理。

证明：因为每条边必关联两个结点，而一条边给予关联的每个结点的度数为1。因此在每个图中，结点度数总和等于边数的两倍。

7-1　图的基本概念

定理2 在任何图中，度数为奇数的结点必定是偶数个。

证明：设G中奇数度结点集合为V_1,偶数度结点集合为V_2

则有 $\sum\limits_{v\in V_1}\deg(v)+\sum\limits_{v\in V_2}\deg(v)=\sum\limits_{v\in V}\deg(v)=2|E|$

由于$\sum\limits_{v\in V_2}\deg(v)$是偶数之和，必为偶数，

而$2|E|$是偶数，故得$\sum\limits_{v\in V_1}\deg(v)$是偶数，

而各个$\deg(v_i)$ $(v_i\in V_1)$是奇数，

这就要求偶数个$\deg(v_i)$求和，即$|V_1|$是偶数。

15

7-1　图的基本概念

定理3 在任何有向图中，所有结点的入度之和等于所有结点的出度之和。

证明：因为每一条有向边必对应一个入度和一个出度，若一个结点具有一个入度或出度，则必关联一条有向边，

所以有向图中，各结点入度之和等于边数，各结点出度之和也等于边数 。

因此，在任何有向图中，所有结点的入度之和等于所有结点的出度之和。

7-1　图的基本概念

三、特殊的图

定义4　含有平行边的图称为多重图。

不含平行边和环的图称为简单图。

定义5　简单图G=<V，E>中，若每一对结点间均有边相连，则称该图为完全图。

无向完全图：每一条边都是无向边

不含有平行边和环

每一对结点间都有边相连

有n个结点的无向完全图记为K_n。

7-1　图的基本概念

定理4 **n个结点的无向完全图K_n的边数为　$\frac{1}{2}n(n-1)$。**

证明： n个结点中任取两个结点的组合数为

$$C_n^2 = n(n-1)/2$$

故K_n的边数为 $|E| = n(n-1)/2$

如果在K_n中，对每一条边任意确定一个方向，则称该图为n个结点的竞赛图。显然，它的边数也为$n(n-1)/2$

18

例题

证明在任何n阶竞赛图中，所有结点入度的平方之和等于所有结点的出度平方之和。

证明 对于任意结点v_i均有

$$deg^+(v_i) + deg^-(v_i) = n-1 \qquad (1)$$

而n阶竞赛图的边数为$n(n-1)/2$，

由定理7-1.1有$\sum deg^+(v_i) + \sum deg^-(v_i) = n(n-1)$

由定理7-1.3 有$\sum deg^+(v_i) = \sum deg^-(v_i)$

所以$\sum deg^+(v_i) = \sum deg^-(v_i) = n(n-1)/2 \quad (2)$

由（1）有$(deg^+(v_i))^2 = (n-1 - deg^-(v_i))^2$

因此

$$\sum (deg^+(v_i))^2 = \sum (n-1 - deg^-(v_i))^2$$

$$= \sum [(n-1)^2 - 2(n-1)\, deg^-(v_i) + (deg^-(v_i))^2]$$

例题

$\sum(\deg^+(v_i))^2 = \sum (n-1 - \deg^-(v_i))^2$

$= \sum[(n-1)^2 -2(n-1)\deg^-(v_i) + (\deg^-(v_i))^2]$

$= n(n-1)^2 - \sum 2(n-1)\deg^-(v_i) + \sum (\deg^-(v_i))^2$

$=n(n-1)^2 - 2(n-1)\sum\deg^-(v_i) + \sum (\deg^-(v_i))^2$

由（2）有 $\sum \deg^-(v_i) = n(n-1)/2$

代入上式即得

$\sum(\deg^+(v_i))^2 = \sum (\deg^-(v_i))^2$

7-1 图的基本概念

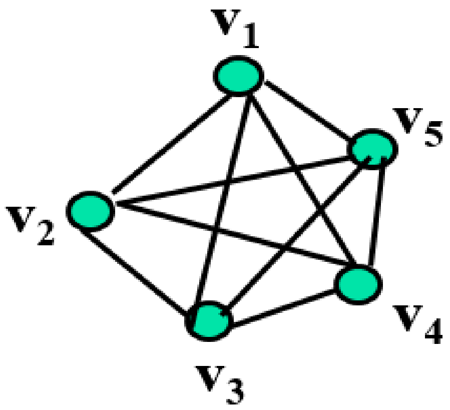
补图

定义6 给定一个简单图G，由**G中所有结点**和所有能使G成为**完全图的添加边**组成的图，称为**G的补图**，记为$\overline{G}$。

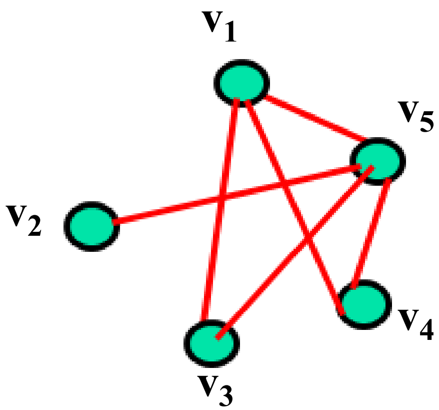
即$G=<V, E_1>$，$\overline{G}=<V, E_2>$，

其中$E_2=\{(u, v)|u, v\in V, (u, v)\notin E_1\}$。

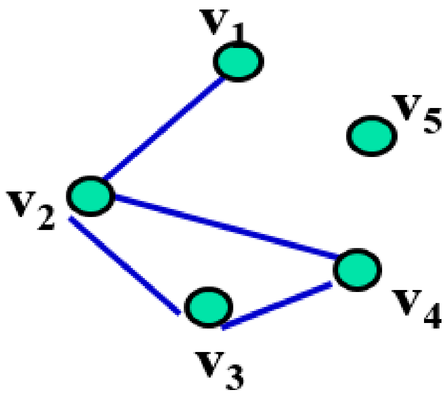
7-1　图的基本概念



(a)完全图K_5



(b)图G



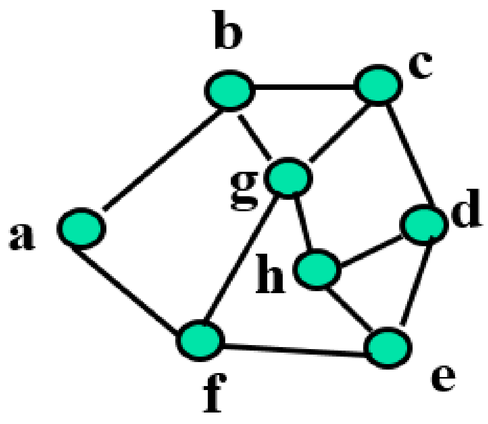
(c)图G的补图$\overline{G}$

7-1 图的基本概念

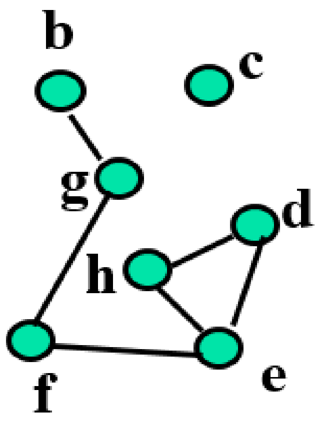
定义7 设图G=<V，E>，如果有图G’=<V’，E’>，且 E’$\subseteq$E，V’$\subseteq$V，则称G’为G的**子图**。

当V’=V时，则称G’为G的**生成子图**。

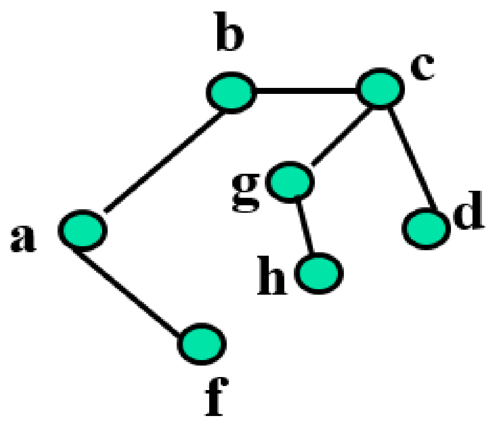
例：图(b)和图(c)都是图(a)的子图。



(a)



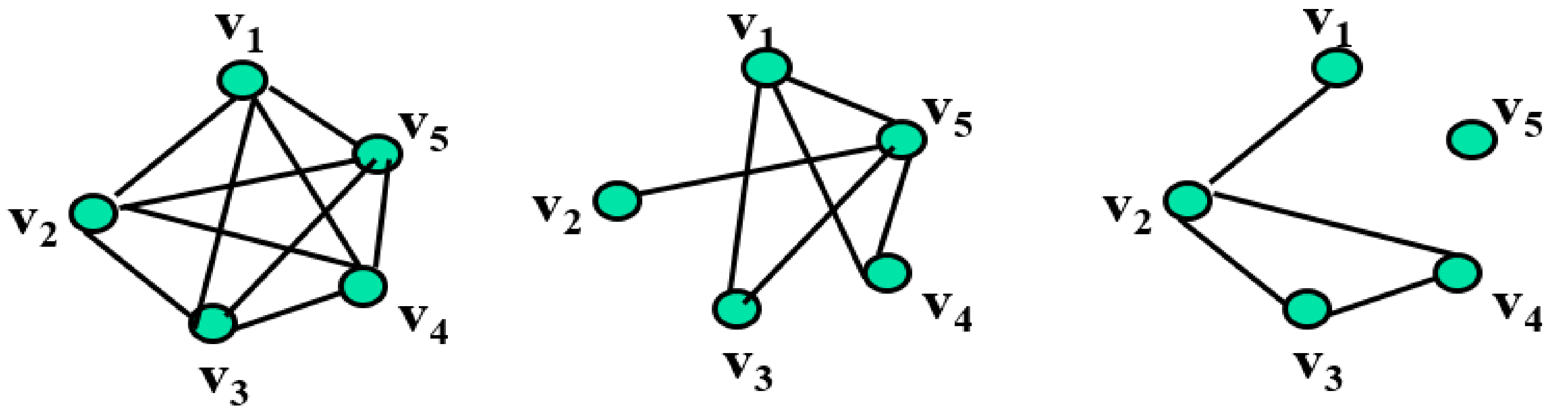
(b)



(c)

7-1　图的基本概念

例：图(b)的G和图(c)的G’　都是图(a)的K_5的生成子图。



(a) 完全图K_5　　(b) 图G　　(c) 图G′

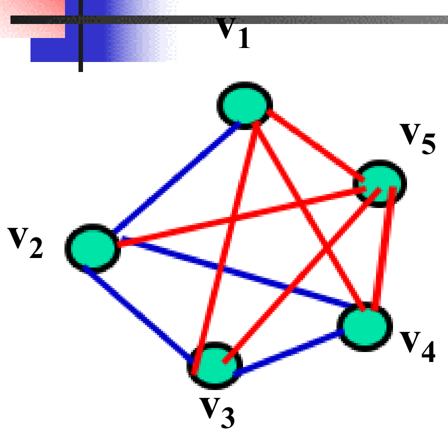
24

7-1 图的基本概念

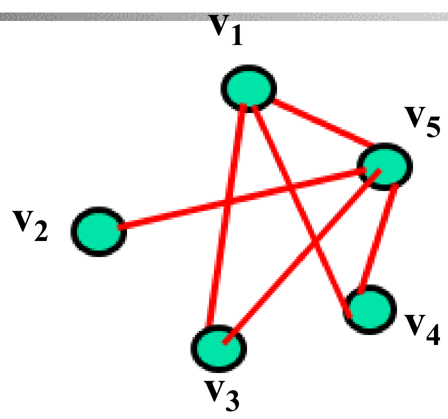
相对于图G的补图

定义8 设G’=<V’，E’>是G=<V，E>的子图，若给定另一个图G”=<V”，E”>，使得E”=E-E’，且V”中仅包含E”的边所关联的结点，则称G”是子图G’相对于图G的补图。

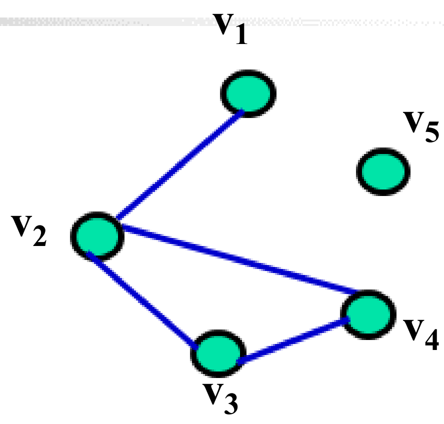
7-1 图的基本概念



(a) 完全图K_5



(b) 图G



(c) 图G’

图G是图G’ 相对于图K_5的补图。

图G’ 不是图G 相对于图K_5的补图。（图G’ 中有结点v5 ）

7-1 图的基本概念

图的同构

定义9 设图G=<V, E>及图G'=<V', E'>，如果存在一一对应的映射g：$v_i \to v_i'$ 且e=(v_i, v_j)(或<v_i, v_j>)是G的一条边，当且仅当e'=(g(v_i)，g(v_j)) (或<g(v_i)，g(v_j)>)是G'的一条边，则称G与G'同构，记作G $\cong$ G'。

两图同构意味着：

两个图的结点和边分别存在着一一对应，且保持关联关系。

7-1 图的基本概念

两图同构的一些必要条件：

1. 结点数目相同；
2. 边数相等；
3. 度数相同的结点数目相等。

补充练习：

至少有两个结点的简单图有两个相同度数的结点。

解：设**G**是一个具有**n**个结点的简单图（**n≥2**）。因为每个结点仅仅能够与另外**n-1**个结点邻接，所以，每个结点的度数≤**n-1**。因此，G中结点可能出现的度数是：

0，1，2，3，…，n-1

由于度数是0的结点是孤立结点，而度数为n-1的结点是邻接其它n-1个结点的，所以，G中度数是0和度数为n-1的结点不可能同时出现。因此，在G中可以出现的度数应该分成以下两种情况

（1）0，1，2，3，…，n-2

（2）1，2，3，4，…，n-1

无论是哪一种情况都最多有n-1种不同的度数。就第一种情况而言，我们可以设想具有编号为0，1，2，3，…，n-2的n-1匣子，现将G中的结点按其度数放入与编号数相同的匣子中去因为G中有n个结点，而匣子仅有n-1只，所以总有一只匣子包含两个或两个以上的结点，这些结点具有相同的度数。对于第二种情况，也可类似地证明。

7-2 路与回路

学习本节要熟悉如下术语**(22**个**):**

通路、路的长度、回路、简单通路、初级通路、圈

连通、连通分支、连通图

点割集、割点、点连通度、边割集、割边、边连通度

可达、单侧连通、强连通、弱连通

强分图、弱分图、单侧分图

7-2　路与回路

定义7-2.1　给定图G=<V,E>,设 $v_0,v_1,\ldots,v_n \in V, e_1,\ldots,e_n \in E$, 其中$e_i$是关联于结点$v_{i-1},v_i$的边，交替序列 $v_0e_1v_1e_2\ldots e_nv_n$称为联结$v_0$到$v_n$的通路（路）。

v_0和v_n分别称为路的起点和终点，

边的数目n称作路的长度。

当$v_0=v_n$时，这条路称作回路。

若一条路中所有的边$e_1, \ldots, e_n$均不相同，称作简单通路。

若一条路中所有的结点$v_0, v_1,\ldots, v_n$均不相同,称作初级通路。

闭合的初级通路,即除$v_0=v_n$之外，其余结点均不相同，且边均不相同，称作圈。

7-2 路与回路

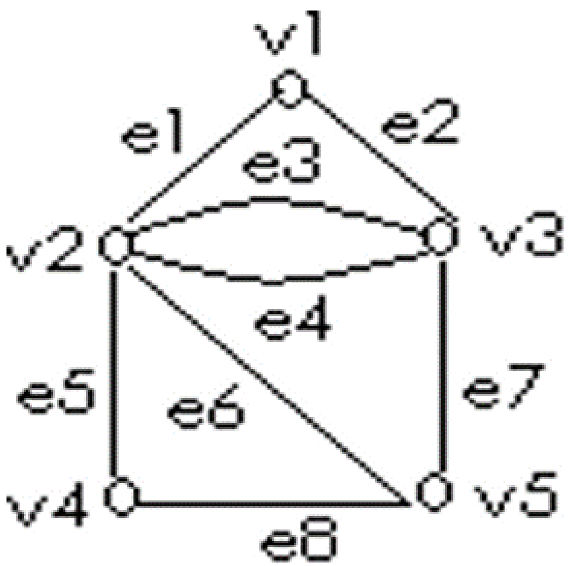
例：

通路：$v_1e_2v_3e_3v_2e_3v_3e_4v_2e_6v_5e_7v_3$

简单通路：$v_5e_8v_4e_5v_2e_6v_5e_7v_3e_4v_2$ （边不相同）

初级通路：$v_4e_8v_5e_6v_2e_1v_1e_2v_3$ （结点不相同）

圈：$v_2e_1v_1e_2v_3e_7v_5e_6v_2$



7-2　路与回路

不含平行边和环的图称为简单图。

注意:

1. 在简单图中一条路$v_0e_1v_1e_2\cdots e_nv_n$，由它的结点序列$v_0,v_1,\cdots,v_n$确定，所以简单图的路，可由其结点序列表示。

2. 在有向图中，结点数大于1的一条路亦可由边序列$e_1e_2\cdots e_n$表示。

7-2 路与回路

定理7-2.1 在一个具有n个结点的图中，如果从结点v_j到结点v_k存在一条路，则从结点v_j到结点v_k必存在一条不多于$n-1$条边的路。

推论 在一个具有n个结点的图中，如果从结点v_j到结点v_k存在一条路，则从结点v_j到结点v_k必存在一条边数小于n的初级通路。

7-2 路与回路

定理7-2.1的证明

如果从结点v_j到v_k存在一条路，该路上的结点序列是$v_j \cdots v_i \cdots v_k$，如果在这条中有$l$条边，则序列中必有$l+1$个结点，若$l>n-1$，则必有结点$v_s$，它在序列中不止出现一次，即必有结点序列$v_j \cdots v_s \cdots v_s \cdots v_k$，在路中去掉从$v_s$到$v_s$的这些边，仍是$v_j$到$v_k$的一条路，但此路比原来的路边数要少，如此重复进行下去，必可得到一条从v_j到v_k的不多于$n-1$条边的路。

7-2 路与回路

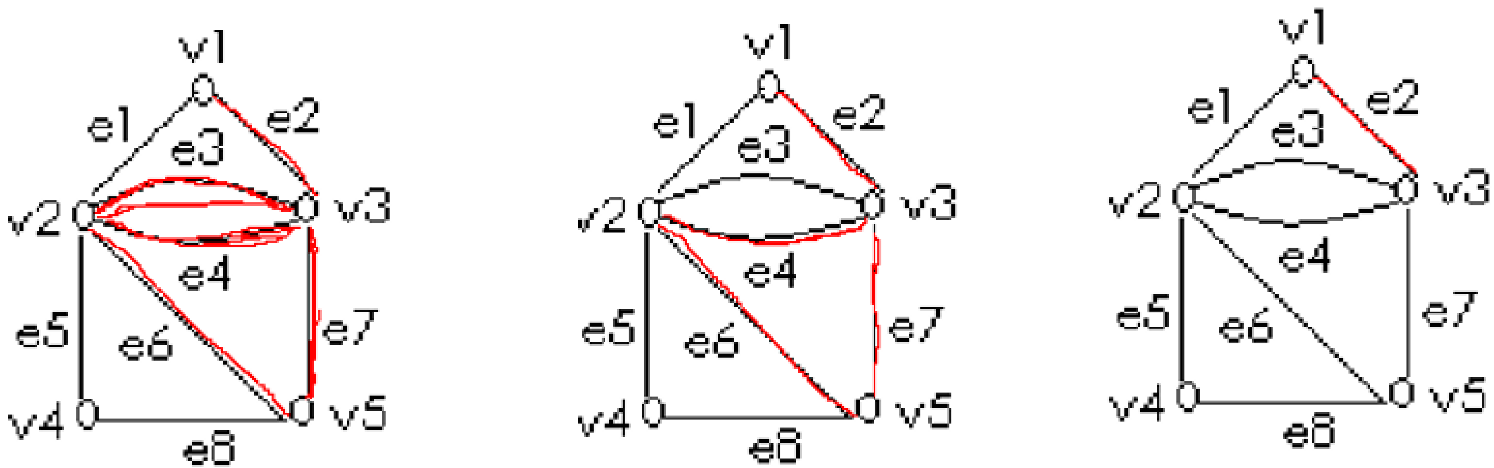
例：如图中有5个结点。

v_1到v_3的一条路为：$v_1e_2v_3e_3v_2e_3v_3e_4v_2e_6v_5e_7v_3$

此路中有6条边，去掉e_3，

有路 $v_1e_2v_3e_4v_2e_6v_5e_7v_3$ 有4条边。

v_1到v_3最短的路为$v_1e_2v_3$



37

7-2 路与回路

定义7-2.2 在无向图G中，如果从结点u和结点v之间若存在一条路，则称结点u和结点v是连通的。

结点之间的连通性是结点集V上的等价关系，对应该等价关系，必可将V作出一个划分，把V分成非空子集V_1, V_2, …, V_m,使得两个结点v_j和v_k是连通的，当且仅当它们属于同一个V_i。

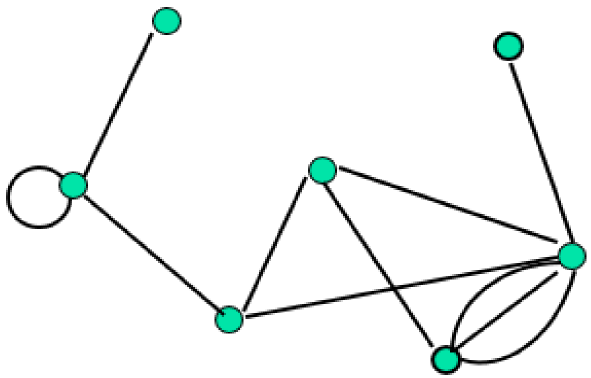
把导出子图$G[V_1]$, $G[V_2]$, …, $G[V_m]$称为图G的**连通分支**,图G的连通分支数记为W(G) .

注： $G[V_1]:=< V_1 , E' >$，其中E’是两个端点都在V_1中的图G中的边构成的集合.

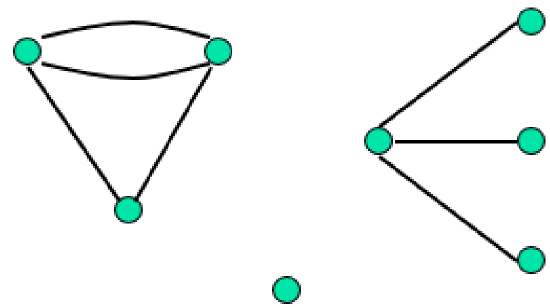
7-2 路与回路

定义7-2.3 若图**G**只有一个连通分支，则称**G**是连通图。

在连通图中，任意两个结点之间必是连通的。



连通图



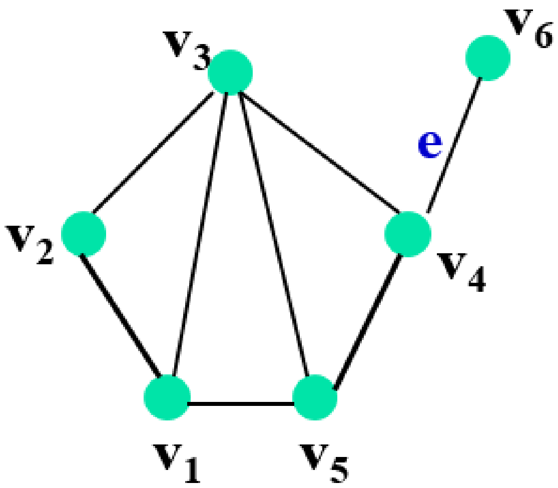
具有三个连同分支的连通图

7-2 路与回路

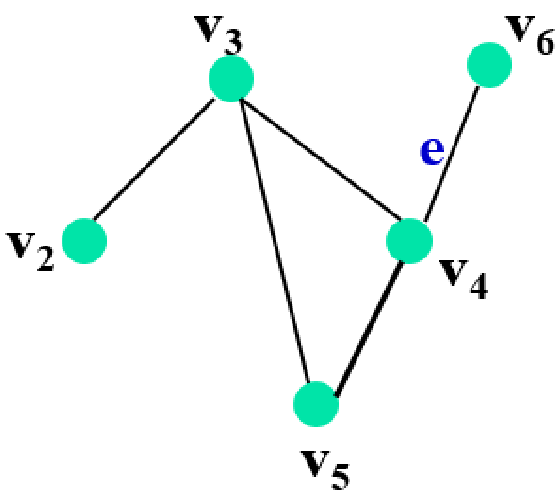
对于连通图，常常由于删除了图中的点或边，而影响了图的连通性。

删除结点：即是把v以及与v关联的边都删除。

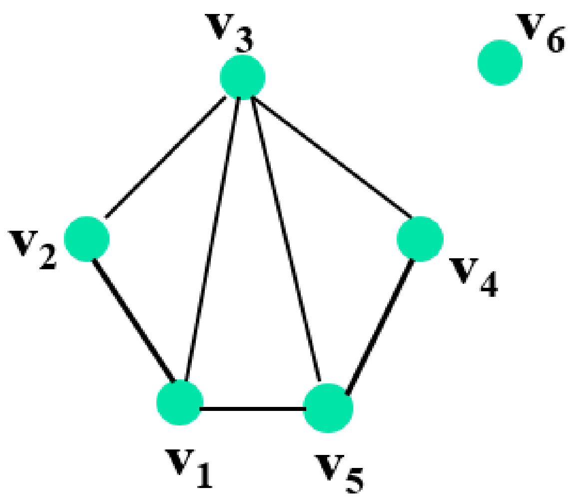
删除边：即是把该边删除。



(a)



(b) 删除v1

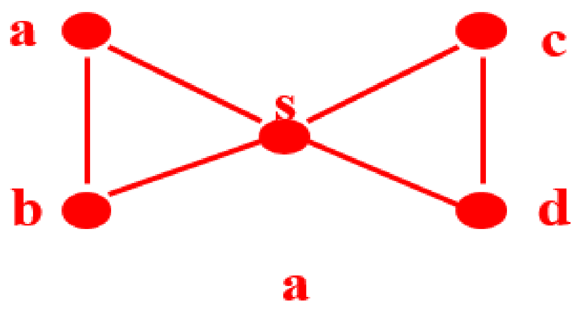


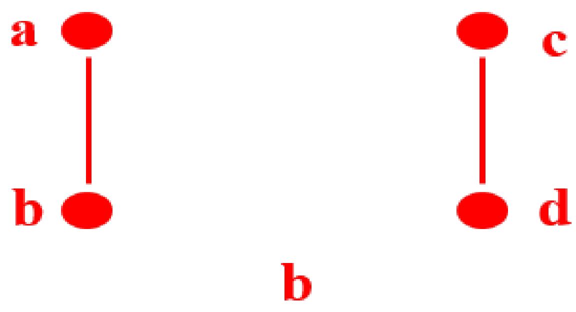
(c)删除e

7-2 路与回路

定义7-2.4 设无向图$G=\langle V,E\rangle$是连通图，若有结点集$V_1\subset V$，使图G中删除了V_1的所有结点后，所得到的子图是不连通图，而删除了V_1的任何真子集后，所得到的子图仍是连通图，则称V_1是G的一个**点割集**。若某一个点构成一个点割集，则称该点为**割点**。

例：如图点s就是割点。





41

7-2 路与回路

点连通度：是为了产生一个不连通图需要删去的点的最少数目，也称为连通度，记为k(G)。

即$k(G)=\min\{|V_1| \mid V_1$是G的点割集$\}$称为图G的**点连通度。(此处假设G不是完全图，或者说不含完全图为生成子图)**

注释：

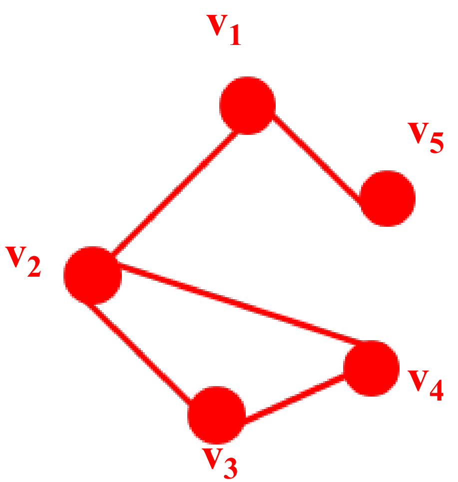
(1) 非连通图的连通度$k(G)=0$

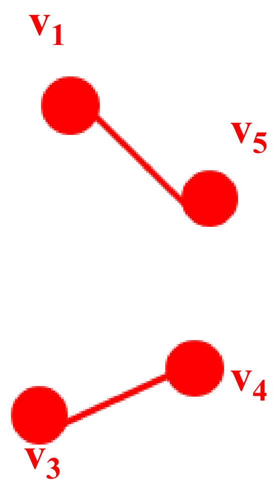
(2)若图存在割点，则$k(G)=1$

(3) 完全图K_n，定义 $k(K_n)=n-1$

7-2　路与回路

例：**k(G)=1**





43

7-2 路与回路

定义7-2.5 设无向图G =<V,E>是连通图，若有边集$E_1 \subset E$，使图 G中删除了E_1的所有边后，所得到的子图是不连通图，而删除了E_1的任何真子集后，所得到的子图仍是连通图，则称E_1是G的一个边割集。若某一条边就构成一个边割集，则称该边为割边或桥。

割边e使图G满足$W(G-e)>W(G)$ 。

44

边连通度：边连通度λ (G)是为了产生一个不连通图需要删去的边的最少数目。

非平凡图的边连通度为

$$\lambda(G)=\min\{\,|E_1|\mid E_1\text{是}G\text{的边割集}\}$$

注释：

(1)若G是平凡图，则$E_1=\Phi$，规定$\lambda(G)=0$

(2)若G存在割边，则$\lambda(G)=1$，

(3)非连通图的边连通度为$\lambda(G)=0$

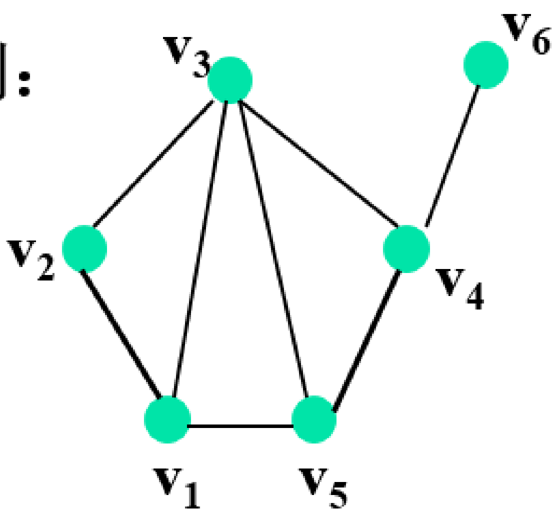
7-2 路与回路

点连通度k(G)、边连通度λ(G)和图的最小度δ(G)之间的关系。

图的最小度：$\delta(G)=\min\{\deg(v) \mid v\in V\}$

定理7-2.2 对于任何一个图G，有$k(G)\le\lambda(G)\le\delta(G)$。

例：



$k(G)=1$，$\lambda(G)=1$，$\delta(G)=1$

定理7-2.2证明

证明：若G不连通，则$k(G)=\lambda(G)=0$，故上式成立。

若G连通，可分两步证明上式也成立：

1)先证明$\lambda(G)\le\delta(G)$：

如果G是平凡图，则$\lambda(G)=0\le\delta(G)$，

若G是非平凡图，则因每一结点的所有关联边必含一个边割集，(因$\delta(G)=\min\{\deg(v)|v\in V\}$，设$u\in V$使的$\deg(u)=\delta(G)$，与u相关联的δ条边必包含一个边割集，至少这δ条边删除使图不连通。)

故$\lambda(G)\le\delta(G)$。

定理7-2.2证明

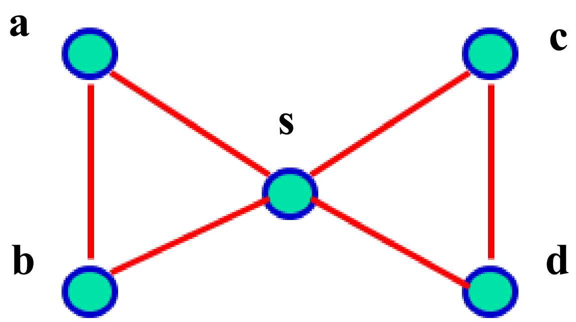
2)再证$k(G)\le\lambda(G)$:

(a)设$\lambda(G)=1$，即G有一割边，显然这时$k(G)=1$，上式成立。

(b)设$\lambda(G)\ge 2$，则必可删去某$\lambda(G)$条边，使G不连通，而删去其中$\lambda(G)-1$条边，它仍是连通的，且有一条桥$e=(u，v)$。对$\lambda(G)-1$条边中的每一条边都选取一个不同于u，v的端点，把这些端点删去则必至少删去$\lambda(G)-1$条边。若这样产生的图是不连通的，则$k(G)\le\lambda(G)-1<\lambda(G)$，若这样产生的图是连通的，则e仍是桥，此时再删去u或v就必产生一个不连通图，故$k(G)\le\lambda(G)$。由1)和2)得$k(G)\le\lambda(G)\le\delta(G)$。

7-2　路与回路

例：$k(G)=1$，$\lambda(G)=2$，$\delta(G)=2$



定理7-2.3　一个连通无向图G的结点v是割点的充分必要条件是存在两个结点u和w，使得结点u和w的每一条路都通过v 。

定理7-2.3证明

证明思路：

1）先证：v是割点⇒存在结点u和w的每条路都通过v

若v是连通图G=<V,E>割点，设删去v得到的子图G'，则G'至少包含两个连通分支$G_1=<V_1,E_1>$和$G_2=<V_2,E_2>$。任取$u\in V_1$，$w\in V_2$，因为G是连通的，故在G中必有一条连结u和w的路C，但u和w在G'中属于两个不同的连通分支，故u和w必不连通，因此C必须通过v，故u和w之间的任意一条路都通过v。

2）再证：存在结点u和w的每条路都通过v ⇒v是割点

若连通图G中的某两个结点的每一条路都通过v，则删去v得到子图G'，在G'中这两个结点必然不连通，故v是图G的割点。

7-2 路与回路

有向图的连通性

有向图的可达性：对于任何一个有向图**G=<V,E>**, 从结点**u**到结点**v**有一条路，称为从**u**可达**v**。

注意：

可达性是有向图结点集上的二元关系，它是自反的和传递的，但是一般来说不是对称的。故可达性不是等价关系。

51

7-2 路与回路

如果u可达v，它们之间可能不止一条路，在所有这些路中，最短路的长度称为u和v之间的距离（或短程线），记作d<u,v>，它满足下列性质：

$d\langle u,v\rangle \geqslant 0$

$d\langle u,u\rangle = 0$

$d\langle u,v\rangle + d\langle v,w\rangle \geqslant d\langle u,w\rangle$

如果从u到v是不可达的，则通常写成 $d\langle u,v\rangle = \infty$

注意：

当u可达v且v也可达u时， d<u,v> 不一定等于d< v, u > 。

7-2　路与回路

有关距离的概念对无向图也适用，

今后把 $D=\max d\langle u,v\rangle$,　$u,v\in V$，称作图的直径。

7-2 路与回路

定义7-2.6 在简单有向图G中，

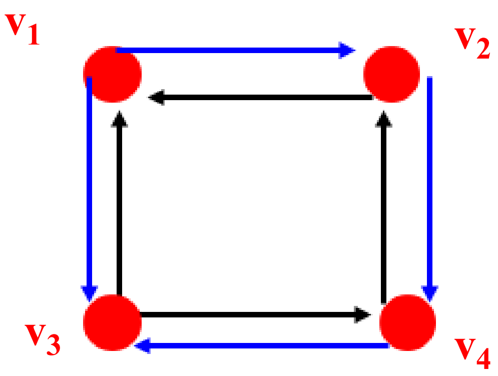
任何一对结点间，至少有一个结点到另一个结点是可达的，则称这个图是单侧连通的 。

如果对于图G中的任何一对结点两者之间是相互可达的，则称这个图是强连通的。

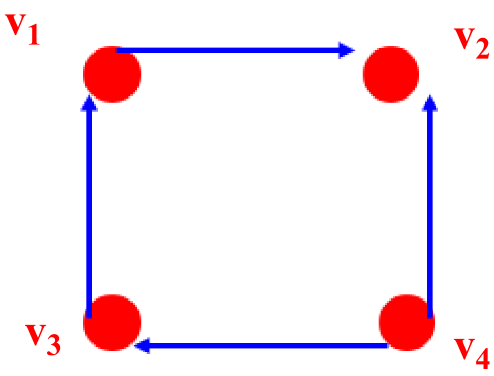
如果在图G中略去边的方向，将它看成无向图后，图是连通的，则称该图为弱连通的。

显然，强连通图→单侧连通图→弱连通图。而逆推均不成立。

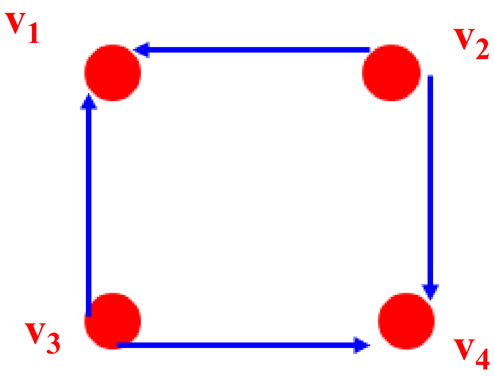
7-2 路与回路



(a)强连通



(b)单侧连通



(c)弱连通

定理7-2.4：一个有向图是强连通的充分必要条件是G有一个回路，它至少包含每个结点一次。

定理7-2.4证明

充分性：如G中有一条有向回路，经过每一点至少一次，则G中任意两点u，v∈V，u可以沿着该有向回路的一部分的而到达v，则G是强连通图。

必要性：任取u，v∈V，图G是强连通图，则u→v有有向路，v→u也有有向路，则u→v→u构成了一个有向回路，如果该有向回路没有包含w，而u→w，w→u均有有向路，则u→v→u→w→u又是一个有向回路，一直下去可以将图中所有的点均包含进去。

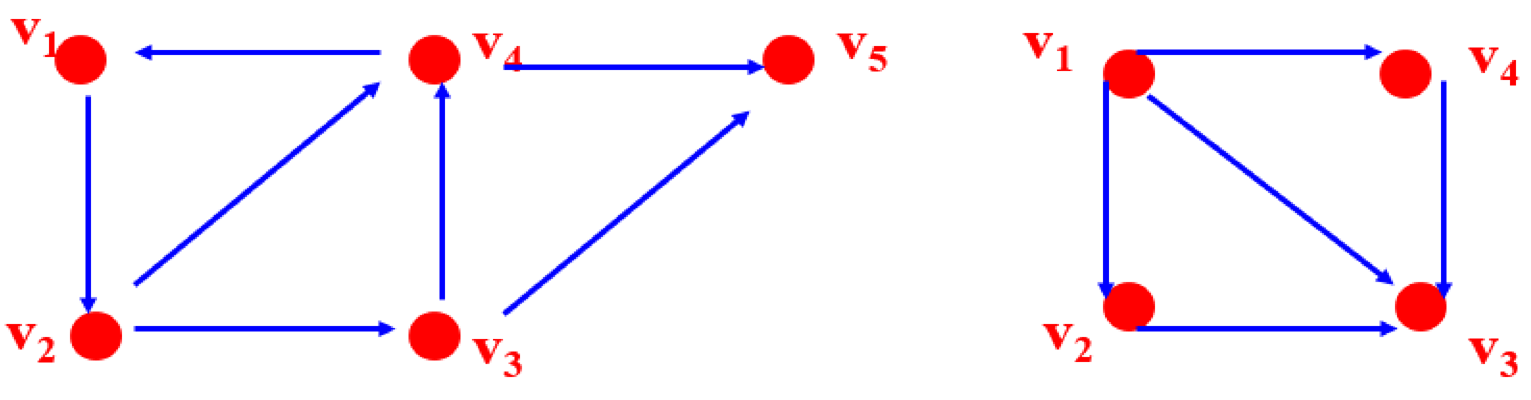
7-2 路与回路

定义7-2.7：在简单有向图中，

具有强连通性质的最大子图，称为强分图；

具有单侧连通性质的最大子图，称为单侧分图；

具有弱连通性质的最大子图，称为弱分图。



(a) (b)

57

7-2 路与回路

定理7-2.5 在有向图$G=<V,E>$中，它的每一个结点位于且只位于一个强分图中。

这是因为：

顶点之间的相互可达关系是等价关系．而等价类对应的导出子图即为强分图.

练习

若无向图G中恰有两个奇数度的结点，则这两个结点之间必有一条路。

证明：设无向图G中两个奇数度的结点为u和v。

从u开始构造一条简单通路，即从u出发经关联于结点u的边e1到达结点u1，若deg(u1)为偶数，则必可由u1再经关联于结点u1的边e2到达结点u2，如此继续下去，每边只取一次，直到另一个奇数度结点停止，由于图G中只有两个奇数度结点，故该结点或是u或是v。如果是v，那么从u到v的一条路就构造好了。如果仍是结点u，此路是简单回路。

闭迹上每个结点都是关联偶数条边，而**deg(u)**为奇数，所以至少还有一条关联于结点**u**的边不在此简单回路上。继续从**u**出发，沿着该边到达另一个结点**u1’**，依次下去直到另一个奇数度结点停下。这样经过有限次后必可到达结点**v**，这就是一条从**u**到**v**的路。

思考题

若图G是不连通的，则G的补图$\overline{G}$是连通的。

练习

当且仅当G的一条边e不包含在G的回路中时，e才是G的割边。

证明：必要性：

设e是连通图G的割边，e关联的两个结点是u和v。如果e包含在G的一个回路中，那么除边e=(u,v)外还有另一条分别以u和v为端点的路，所以删去边e后，G仍为连通图，这与e是割边相矛盾。

充分性：

如果边e不包含在G的任一条回路中，那么连接结点u和v的边只有e，而不会有其它连接u和v的任何路。因为如果连接u和v还有不同于边e的路，此路与边e就组成一条包含边e的回路，从而导致矛盾。所以删去边e后，u和v就不连通，故边e是割边。