函数的定义与性质

- 函数的定义
  - 函数定义
  - 从A到B的函数
  - 函数的像
- 函数的性质
  - 函数的单射、满射、双射性
  - 构造双射函数

函数定义

定义 设 F 为二元关系, 若 $\forall x \in \mathrm{dom}F$ 都存在唯一的 $y \in \mathrm{ran}F$ 使 xFy 成立, 则称 F 为**函数**.
对于函数F, 如果有 xFy, 则记作 $y=F(x)$, 并称 y 为 F 在 x 的**值**.

例1 $F_1=\{<x_1,y_1>,<x_2,y_2>,<x_3,y_2>\}$

$F_2=\{<x_1,y_1>,<x_1,y_2>\}$

F_1是函数, F_2不是函数

2

函数相等

定义 设F, G为函数, 则

$$F = G \Leftrightarrow F \subseteq G \land G \subseteq F$$

如果两个函数 F 和 G 相等, 一定满足下面两个条件:

(1) $\mathrm{dom}F = \mathrm{dom}G$

(2) $\forall x \in \mathrm{dom}F = \mathrm{dom}G$ 都有 $F(x) = G(x)$

实例 函数

$$F(x)=(x^2-1)/(x+1),\ G(x)=x-1$$

不相等, 因为 $\mathrm{dom}F \subset \mathrm{dom}G$.

从 A 到 B 的函数

定义 设 A, B 为集合, 如果

f 为函数

$\text{dom} f = A$

$\text{ran} f \subseteq B$,

则称 f 为从 A 到 B 的函数, 记作 $f: A \to B$.

实例

$f: N \to N$, $f(x)=2x$ 是从 N 到 N 的函数

$g: N \to N$, $g(x)=2$ 也是从 N 到 N 的函数

B上A

定义 所有从 A 到 B 的函数的集合记作 B^A，读作"B上A"，符号化表示为

$$B^A=\{f \mid f: A\to B\}$$

计数：

$|A|=m$, $|B|=n$, 且$m, n>0$, $|B^A|=n^m$.

$A=\varnothing$, 则 $B^A=B^{\varnothing}=\{\varnothing\}$.

$A\neq\varnothing$且$B=\varnothing$, 则 $B^A=\varnothing^A=\varnothing$.

实例

例2 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, 求B^A.

解 $B^A = \{f_0, f_1, \dots, f_7\}$, 其中

$f_0=\{<1,a>,<2,a>,<3,a>\}$, $f_1=\{<1,a>,<2,a>,<3,b>\}$

$f_2=\{<1,a>,<2,b>,<3,a>\}$, $f_3=\{<1,a>,<2,b>,<3,b>\}$

$f_4=\{<1,b>,<2,a>,<3,a>\}$, $f_5=\{<1,b>,<2,a>,<3,b>\}$

$f_6=\{<1,b>,<2,b>,<3,a>\}$, $f_7=\{<1,b>,<2,b>,<3,b>\}$

函数的像

定义　设函数 $f: A \to B$, $A_1 \subseteq A$.

A_1 在 f 下的像：$f(A_1) = \{ f(x) \mid x \in A_1 \}$

函数的像 $f(A)$

注意：函数值 $f(x) \in B$, 而像 $f(A_1) \subseteq B$.

例3　设 $f: N \to N$, 且 $f(x) = \begin{cases} x/2 & 若x为偶数 \\ x+1 & 若x为奇数 \end{cases}$

令 $A=\{0,1\}$, $B=\{2\}$, 那么有

$$f(A) = f(\{0,1\}) = \{ f(0), f(1) \} = \{0, 2\}$$

函数的性质

定义 设 $f: A \to B$,

（1）若 $\mathrm{ran}f = B$, 则称 $f: A \to B$ 是满射的.

（2）若 $\forall y \in \mathrm{ran}f$ 都存在唯一的 $x \in A$ 使得 $f(x)=y$, 则称 $f: A \to B$ 是单射的.

（3）若 $f: A \to B$ 既是满射又是单射的, 则称 $f: A \to B$ 是双射的

f 满射意味着：$\forall y \in B$, 都存在 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$.

f 单射意味着：$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

8

实例

例4

判断下面函数是否为单射, 满射, 双射的, 为什么?

(1) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -x^2+2x-1$

(2) f: $\mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln x$, $\mathbf{Z}^+$为正整数集

(3) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{Z}$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$

(4) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x+1$

(5) f: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $f(x)=(x^2+1)/x$, 其中$\mathbf{R}^+$为正实数集.

实例（续）

解 (1) f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=-x^2+2x-1$

在x=1取得极大值0. 既不单射也不满射.

(2) f: $\mathbf{Z}^+\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln x$

单调上升, 是单射. 但不满射, ran$f$={ln1, ln2, …}.

(3) f: $\mathbf{R}\to\mathbf{Z}$, $f(x)=\lfloor x\rfloor$

满射, 但不单射, 例如 $f(1.5)=f(1.2)=1$.

(4) f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=2x+1$

满射、单射、双射.

(5) f: $\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$, $f(x)=(x^2+1)/x$

有极小值$f(1)=2$. 该函数既不单射也不满射.

构造从A到B的双射函数

有穷集之间的构造

例5　$A=P(\{1,2,3\})$, $B=\{0,1\}^{\{1,2,3\}}$

解　$A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

$B=\{f_0,f_1,\ldots,f_7\}$, 其中

$f_0=\{<1,0>,<2,0>,<3,0>\}$, $f_1=\{<1,0>,<2,0>,<3,1>\}$,

$f_2=\{<1,0>,<2,1>,<3,0>\}$, $f_3=\{<1,0>,<2,1>,<3,1>\}$,

$f_4=\{<1,1>,<2,0>,<3,0>\}$, $f_5=\{<1,1>,<2,0>,<3,1>\}$,

$f_6=\{<1,1>,<2,1>,<3,0>\}$, $f_7=\{<1,1>,<2,1>,<3,1>\}$.

令　$f: A\to B$,

$f(\varnothing)=f_0$, $f(\{1\})=f_1$, $f(\{2\})=f_2$, $f(\{3\})=f_3$,

$f(\{1,2\})=f_4$, $f(\{1,3\})=f_5$, $f(\{2,3\})=f_6$, $f(\{1,2,3\})=f_7$

构造从A到B的双射函数（续）

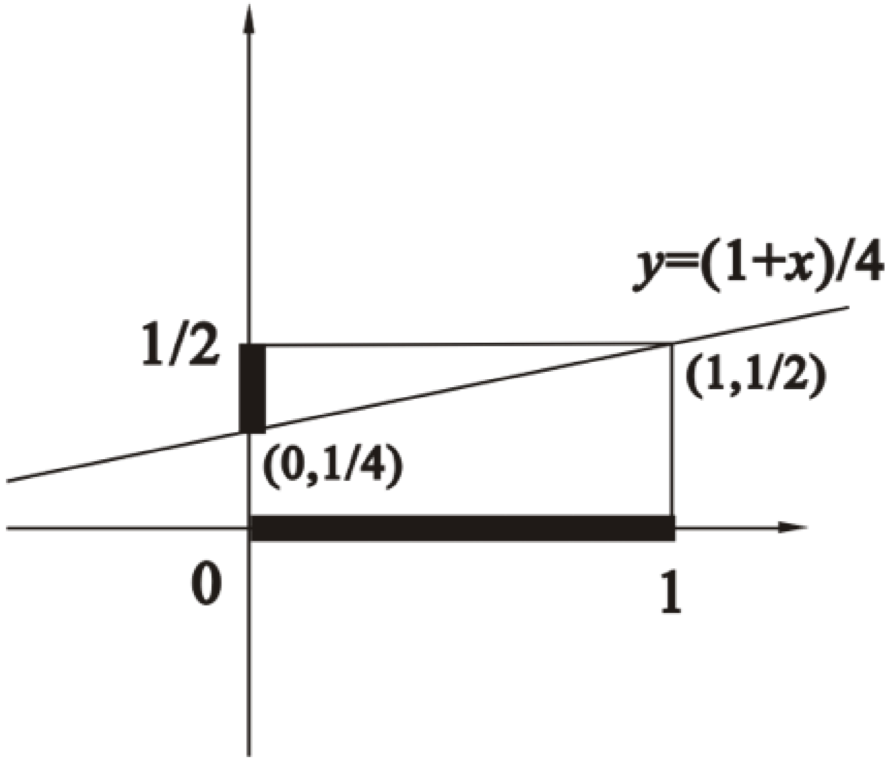
实数区间之间构造双射

构造方法：直线方程

例6 $A=[0,1]$

$B=[1/4,1/2]$

构造双射 $f:A\to B$



解

令 f: $[0,1]\to[1/4,1/2]$

$f(x)=(x+1)/4$

构造从*A*到*B*的双射函数（续）

A 与自然数集合之间构造双射

方法：将A中元素排成有序图形，然后从第一个元素开始按照次序与自然数对应

例7　A=Z, *B*=N，构造双射 *f*: *A*→*B*

将Z中元素以下列顺序排列并与N中元素对应：

$$
\begin{array}{cccccccc}
Z: & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3\ldots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
N: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\ldots
\end{array}
$$

则这种对应所表示的函数是：

$$f: \mathrm{Z} \to \mathrm{N}, f(x) = \begin{cases} 2x & \geq 0 \\ -2x-1 & x < 0 \end{cases}$$

常函数、恒等函数、单调函数

1. 设f：$A\to B$, 若存在 $c\in B$ 使得 $\forall x\in A$ 都有 $f(x)=c$, 则称 f：$A\to B$是常函数.
2. 称 A 上的恒等关系 I_A为 A 上的恒等函数, 对所有的 $x\in A$ 都有 $I_A(x)=x$.
3. 设 f：$R\to R$，如果对任意的 $x_1, x_2\in R$，$x_1<x_2$, 就有 $f(x_1)\leq f(x_2)$, 则称 f 为单调递增的；如果对任意的 $x_1, x_2\in A$, $x_1< x_2$, 就有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 f 为 严格单调递增 的.

类似可以定义单调递减 和严格单调递减 的函数.

集合的特征函数

4. 设 A 为集合, $\forall A' \subseteq A$, A' 的 特征函数 $\chi_{A'}$: $A \to \{0,1\}$ 定义为

$$\chi_{A'}(a) = \begin{cases} 1, & a \in A' \\ 0, & a \in A - A' \end{cases}$$

实例 集合: $X = \{$ A, B, C, D, E, F, G, H $\}$,

子集: $T = \{$ A, C, F, G, H $\}$

T 的特征函数χ_T:

x	A	B	C	D	E	F	G	H
$\chi_T(x)$	1	0	1	0	0	1	1	1

15

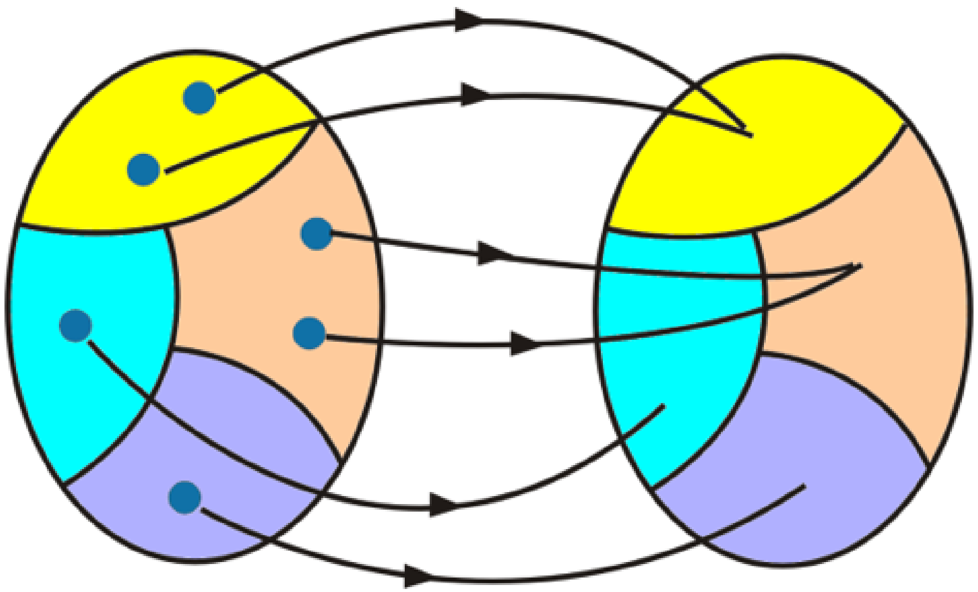
自然映射

5. 设 R 是 A 上的等价关系，令

$$g: A \to A/R$$

$$g(a) = [a], \forall a \in A$$

称 g 是从 A 到商集 A/R 的**自然映射**.



16

实例

例8 (1) A的每一个子集A'都对应于一个特征函数, 不同的子集对应于不同的特征函数. 例如 $A=\{a, b, c\}$, 则有

$$\chi_{\varnothing} = \{ <a,0>, <b,0>, <c,0> \},$$

$$\chi_{\{a,b\}} = \{ <a,1>, <b,1>, <c,0>\}$$

(2) 给定集合 A， A 上不同的等价关系确定不同的自然映射, 其中恒等关系确定的自然映射是双射, 其他的自然映射一般来说是满射. 例如

$$A=\{1, 2, 3\},\ R=\{<1,2>,<2,1>\}\cup I_A$$

$$g(1) = g(2) = \{1,2\},\ g(3) = \{3\}$$

17

函数的复合与反函数

- 函数的复合
  - 函数复合的定理
  - 函数复合的性质
- 反函数
  - 反函数存在的条件
  - 反函数的性质

函数复合的定理

注意 本课件和教材采用右复合，与关系的合成运算保持一致，不同于一般数学教材中采用的左复合.

定理 设F, G是函数, 则$F\circ G$也是函数, 且满足

(1) $\mathrm{dom}(F\circ G)=\{\, x \mid x\in \mathrm{dom}F \wedge F(x)\in \mathrm{dom}G\}$

(2) $\forall x\in \mathrm{dom}(F\circ G)$ 有 $F\circ G(x) = G(F(x))$

推论1 设F, G, H为函数, 则 $(F\circ G)\circ H$ 和 $F\circ(G\circ H)$ 都是函数, 且 $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

推论2 设 f: $A\to B$, g: $B\to C$, 则 $f\circ g$: $A\to C$, 且 $\forall x\in A$ 都有 $f\circ g(x) = g(f(x))$.

函数复合运算的性质

定理 设 $f: A\to B$, $g: B\to C$.

(1) 如果 $f: A\to B, g: B\to C$ 都是满射的, 则 $f\circ g: A\to C$也是满射的.

(2) 如果 $f: A\to B, g: B\to C$ 都是单射的, 则 $f\circ g: A\to C$也是单射的.

(3) 如果 $f: A\to B, g: B\to C$ 都是双射的, 则 $f\circ g: A\to C$也是双射的.

证 (1) $\forall c\in C$, 由 $g: B\to C$ 的满射性, $\exists b\in B$ 使得 $g(b)=c$. 对这个b, 由 $f: A\to B$ 的满射性，$\exists a\in A$ 使得 $f(a)=b$. 由合成定理有 $f\circ g(a)=g(f(a))=g(b)=c$ 从而证明了 $f\circ g: A\to C$是满射的.

20

函数复合运算的性质

(2) 假设存在 $x_1, x_2 \in A$ 使得 $f \circ g(x_1) = f \circ g(x_2)$

由合成定理有 $g(f(x_1))=g(f(x_2))$.

因为 g： $B \to C$ 是单射的, 故 $f(x_1)=f(x_2)$. 又由于 f: $A \to B$ 也是单射的, 所以 $x_1=x_2$. 从而证明 $f \circ g$： $A \to C$ 是单射的.

(3) 由 (1) 和 (2) 得证.

定理 设 f: $A \to B$， 则

$$f = f \circ I_B = I_A \circ f$$

21

反函数存在的条件

任给函数 F, 它的逆F^{-1}不一定是函数, 是二元关系.

实例：$F=\{<a,b>,<c,b>\}$， $F^{-1}=\{<b,a>,<b,c>\}$

任给单射函数 f：$A\to B$, 则 f^{-1}是函数, 且是从 $\mathrm{ran}f$ 到 A的双射函数，但不一定是从 B 到 A 的双射函数.

实例：$f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(x) = 2x$,

$f^{-1} : \mathrm{ran}f \to \mathbf{N}$, $f^{-1}(x) = x/2$

反函数

定理 设 $f: A \to B$ 是双射的, 则 $f^{-1}: B \to A$ 也是双射的.

证 因为 f 是函数, 所以 f^{-1} 是关系, 且

$$\mathrm{dom}\, f^{-1} = \mathrm{ran} f = B\,, \qquad \mathrm{ran}\, f^{-1} = \mathrm{dom} f = A,$$

对于任意的 $y \in B = \mathrm{dom}\, f^{-1}$, 假设有 $x_1, x_2 \in A$ 使得

$$<y,x_1> \in f^{-1} \wedge <y,x_2> \in f^{-1}$$

成立, 则由逆的定义有

$$<x_1,y> \in f \wedge <x_2,y> \in f$$

根据 f 的单射性可得 $x_1 = x_2$, 从而证明了 f^{-1} 是函数， 且是满射的. 下面证明 f^{-1} 的单射性.

若存在 $y_1, y_2 \in B$ 使得 $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x$, 从而有

$$<y_1,x> \in f^{-1} \wedge <y_2,x> \in f^{-1}$$

$$\Rightarrow <x,y_1> \in f \wedge <x,y_2> \in f \Rightarrow y_1 = y_2$$

反函数的定义及性质

对于双射函数f：$A\to B$, 称f^{-1}：$B\to A$是它的反函数.

反函数的性质

定理　设f：$A\to B$是双射的, 则

$$f^{-1}\circ f=I_B,\quad f\circ f^{-1}=I_A$$

对于双射函数f：$A\to A$, 有

$$f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=I_A$$

函数复合的结论

定理　设 $f: A\to B$, $g: B\to C$,

(1) 如果$f\circ g$是满射的，则g是满射的.

(2) 如果$f\circ g$是单射的，则f是单射的.

(3) 如果$f\circ g$是双射的，则g是满射的, f是单射的.

左逆、右逆

定义　设 $f: A\to B$, $g: B\to A$, 若 $f\circ g=I_A$, 则称 g 为 f 的右逆函数, f 为 g 的左逆函数.

定理　设 $f: A\to B$,

(1) f 有右逆函数，当且仅当 f 是单射的.

(2) f 有左逆函数，当且仅当 f 是满射的.

(3) f 有左逆和右逆函数，当且仅当 f 是双射的.

(4) 如果 f 是双射函数，则 f 的左逆和右逆函数相等.