一、选择题：1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是最符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1. 设 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}=1$，则（　　）.

A. $f(1)=0$　　B. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$　　C. $f'(1)=1$　　D. $\lim\limits_{x\to 1}f'(x)=1$

2. 设 $f(u)$ 可导，$z=xyf(\dfrac{y}{x})$，若 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy(\ln y-\ln x)$，则(　　)

A. $f(1)=\dfrac{1}{2},f'(1)=0$　　B. $f(1)=0,f'(1)=\dfrac{1}{2}$

C. $f(1)=1,f'(1)=0$　　D. $f(1)=0,f'(1)=\dfrac{1}{2}$

3. 设 $-\dfrac{\pi}{2}\le x_n\le\dfrac{\pi}{2}$，则（　　）

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

B. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

C. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不一定存在.

D. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在且 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不一定存在.

4. $I_1=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{2(1+\cos x)}dx$，$I_2=\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}dx$，$I_3=\displaystyle\int_0^1\frac{2x}{1+\sin x}dx$，则

A. $I_1<I_2<I_3$.　　B. $I_3<I_1<I_2$.

C. $I_2<I_1<I_3$.　　D. $I_2<I_1<I_3$.

5. 下列是 $A_{3\times 3}$ 可对角化的充分而非必要条件是（　　）

A. A 有 3 个不同特征值

B. A 有 3 个无关的特征向量

C. A 有 3 个两两无关的特征向量

D. A 不同特征值对应的特征向量正交

6. 设矩阵 A,B 均为 n 阶方阵，若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则（　　）.

A. $\begin{pmatrix} A & O \\ E & B \end{pmatrix}x=0$ 仅有零解

B. $\begin{pmatrix} AB & B \\ O & A \end{pmatrix}x=0$ 仅有零解

C. $\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix}x=0$ 与 $\begin{pmatrix} B & A \\ O & A \end{pmatrix}x=0$ 同解

D. $\begin{pmatrix} AB & B \\ O & A \end{pmatrix}x=0$ 与 $\begin{pmatrix} BA & A \\ O & B \end{pmatrix}x=0$ 同解

7. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 等价，则 $\lambda\in$（　　）.

A. $\{\lambda\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\}$　　　　B. $\{\lambda\,|\,\lambda\in\mathbb{R},\lambda\neq-1\}$

C. $\{\lambda\,|\,\lambda\in\mathbb{R},\lambda\neq-1,\lambda\neq-2\}$　　　　D. $\{\lambda\,|\,\lambda\in\mathbb{R},\lambda\neq-2\}$

8. 设 $X\sim U(0,3),Y\sim P(2),\mathrm{Cov}(X,Y)=-1$，求 $D(2X-Y+1)=$（　　）.

(A) 10　　(B) 9　　(C) 1　　(D) 0

9. 设 $X_1,X_2\ldots X_n$ 独立同分布，$E(X_i^k)=\mu_k$，用切比雪夫不等式估计 $P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\mu_1\right|\geq\varepsilon\right\}\leq ?$

A. $\dfrac{M_4-M_2^2}{n\varepsilon^2}$　　　　B. $\dfrac{M_4-M_2^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$

C. $\dfrac{M_2-M_1^2}{n\varepsilon^2}$　　　　D. $\dfrac{M_2-M_1^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$

10. 设 $X\sim N(0,1)$，在 $X=x$ 的条件下，$Y\sim N(x,1)$，则 X 与 Y 的相关系数为（　　）.

A. 1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题：11~16 小题，每小题 5 分，共 30 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

11．$f(x,y)=x^2+2y^2$ 在 $(0,1)$ 处最大的方向导数为__________.

12. $\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=$__________.

13. 设 $x\geq 0,y\geq 0$, 满足 $x^2+y^2\leq ke^{x+y}$，则 k 的最小值为__________.

14. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}e^{-nx}$ 的收敛域为 $(a,+\infty)$，则 $a=$__________.

15. 设 $A,A-E$ 可逆，若 B 满足 $(E-(A-E)^{-1})B=A$，则 $B-A=$__________。

16. 设 A,B,C 满足 A,B 互不相容，A,C 互不相容，B,C 相互独立，

$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P[(B\cup C)|(A\cup B\cup C)]=$__________.

三、解答题：17~22 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本题满分 10 分）

设 $y=y(x)$ 满足 $y'+\frac{1}{2\sqrt{x}}y=2+\sqrt{x},y(1)=3$, 求 $y(x)$ 渐近线.

18.（本题满分 12 分）

设 $D=\left\{(x,y)|-2+y\le x\le \sqrt{4-y^2},0\le y\le 2\right\}$, 求二重积分 $I=\iint\limits_D\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dxdy$.

19.（本题满分 12 分）

设 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=1,x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0$ 的上侧，Σ 的边界 L 的方向与 Σ 的侧符合右手法则，求 $\int_L(yz^2-\cos z)dz+2xy^2dy+(2xyz+x\sin z)dz$.

20.（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有二阶连续导数，证明：$f''(x)\geq 0$ 的充要条件是对任意的实数 a,b，有 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

21.（本题满分 12 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}ijx_ix_j$.

(1) 求二次型矩阵

(2) 求正交矩阵 Q，使得二次型经正交变换 $x = Qy$ 化为标准形

(3) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解

22.（本题满分 12 分）

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自期望为 θ 的指数分布的简单随机样本，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 是来自期望为 2θ 的指数分布的简单随机样本，且 $X_1, X_2, \cdots, X_n, Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 相互独立，求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$，及 $D(\hat{\theta})$.