集合论

1

集合论概念

- 集合论是以集合概念为基础，研究集合的一般性质的数学分支学科。
  - “集合”是比“数”更简单的概念
  - 集合论试图从研究集合出发，定义“数”和数的“运算”，进而发展到整个数学，是研究数学基础的学科
- 集合是简单而又基本的不作定义的初始概念
  - 一般来说，集合是一些确定的、相异的事物的总体
- 按照集合中事物数目是否有限，可以分为有限集合和无限集合
  - 无限集合是集合论研究的主要对象，也是集合论建立的关键和难点

2

集合论与无限

- 集合论的全部历史都是围绕无限概念展开的
  - 人们把康托尔（**G.Cantor，1845-1918**）于**1873**年**12**月**7**日给戴德金（**R.Dedekind，1831-1916**）的信中最早提出集合论思想的那一天定为集合论诞生日。
- 康托尔对无限集合的研究使集合论成为数学中最富创造性的伟大成果之一
- 人们对于无限的研究可以追溯到两千多年以前

康托尔对无限集合的贡献

- **1874**年，在《克列尔杂志》上发表了《论所有实代数数集合的一个性质》，较全面阐述了无限集合思想
- 康托尔以异于常识的思考定义了无限集合，还区分了两种不同的无限集合：可数集和具有连续统的势的集合
  - 和自然数构成一一对应关系的可数集
  - 和实数区间**[0,1]**构成一一对应的具有连续统的势的集

康托尔对无限集合的贡献

- 康托尔进一步证明了一条直线上的点和整个**n**维空间中的点具有一一对应的关系
- 又引入了基数、序数、超限基数、超限序数等概念，并规定了它们的运算
  - 基数（势）的引入描述了集合中元素数量的一种刻画，并规定和区分了不同层次无限集合的基数
- 集合论需要严格运用纯理性的论证，其结论不是人的直观和常识所能够掌握的
- 康托尔的朴素集合论成为整个数学的基础

公理化集合论

- 但罗素悖论的发现，产生了第三次数学危机
- 为了在朴素集合论中消除悖论，人们想了各种办法来限制“病态集合”的产生
  - 罗素的“类型论”，限制集合和元素之间的缠绕
- 最成功的是采用希尔伯特公理化思想对朴素集合论进行公理化
  - 通过一系列公理描述集合的性质，并避免产生悖论。
- 公理化集合论产生发展以后，普遍认为它给数学提供了一个可靠的基础。

3.1 集合的基本概念

- 集合的定义与表示
- 集合与元素
- 集合之间的关系
- 空集
- 全集
- 幂集

集合定义与表示

集合 没有精确的数学定义

理解：一些离散个体组成的全体

组成集合的个体称为它的元素或成员

集合的表示

列元素法 $A=\{a, b, c, d\}$

谓词表示法 $B=\{x \mid P(x)\}$

B 由使得 $P(x)$ 为真的 x 构成

常用数集

N, Z, Q, R, C 分别表示自然数、整数、有理数、实数和复数集合，注意 0 是自然数.

集合与元素

元素与集合的关系：隶属关系

属于$\in$，不属于 $\notin$

实例

$A=\{\, x \mid x\in \mathrm{R} \wedge x^2-1=0 \,\}$，$A=\{-1,1\}$

$1\in A$，$2\notin A$

注意：对于任何集合 A 和元素 x (可以是集合)，

$x\in A$和 $x\notin A$ 两者成立其一，且仅成立其一.

隶属关系的层次结构

例 3.1

$A=\{ a, \{b,c\}, d, \{\{d\}\} \}$

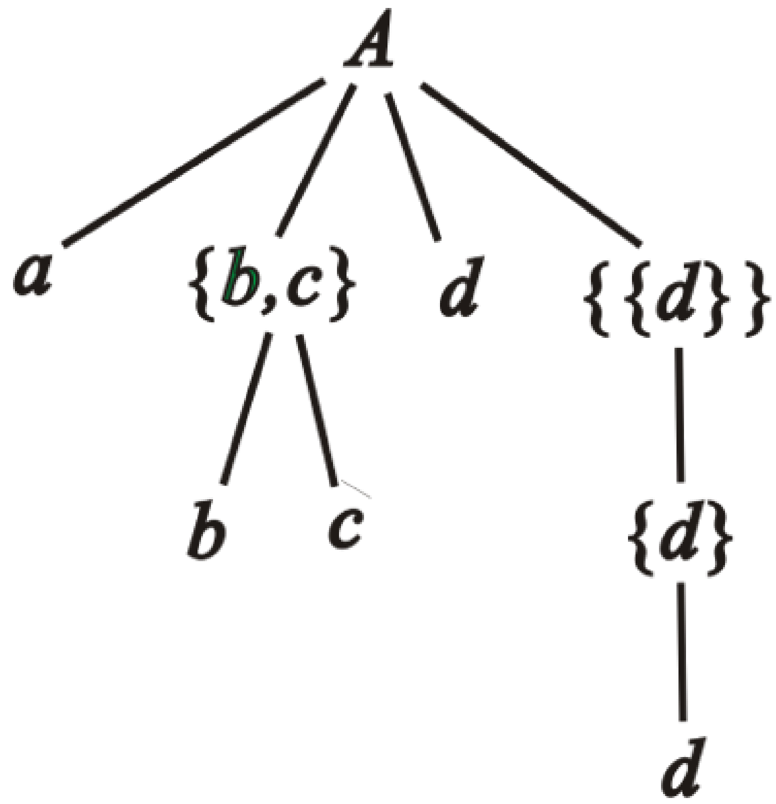
$\{b,c\}\in A$

$b\notin A$

$\{\{d\}\}\in A$

$\{d\}\notin A$

$d\in A$



雨课堂 Rain Classroom

集合之间的关系

包含（子集） $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$

不包含 $A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge x \notin B)$

相等 $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

不相等 $A \neq B$

真包含 $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

不真包含 $A \not\subset B$

思考： $\neq$ 和 $\not\subset$ 的定义

注意 $\in$ 和 $\subseteq$ 是不同层次的问题

空集与全集

空集 $\varnothing$ 不含任何元素的集合

实例 $\{x \mid x^2+1=0 \wedge x \in \mathbf{R}\}$ 就是空集

定理 空集是任何集合的子集

$$\varnothing \subseteq A \Leftrightarrow \forall x\,(x \in \varnothing \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow T$$

推论 空集是惟一的.

证 假设存在$\varnothing_1$和$\varnothing_2$，则$\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$ 且$\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$，因此$\varnothing_1 = \varnothing_2$

全集 E

相对性

在给定问题中，全集包含任何集合，即$\forall A\,(A \subseteq E)$

幂集

定义 $P(A) = \{ x \mid x \subseteq A \}$

实例

$P(\varnothing) = \{\varnothing\}$,

$P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

$P(\{1,\{2,3\}\})=\{\varnothing,\{1\},\{\{2,3\}\},\{1,\{2,3\}\}\}$

计数

如果 $|A| = n$，则 $|P(A)| = 2^n$

3.2 集合的基本运算

- 集合基本运算的定义

  $\cup \quad \cap \quad - \quad \sim \quad \oplus$

- 文氏图（John Venn）
- 集合运算的算律
- 集合包含或恒等式的证明

集合基本运算的定义

并 $A\cup B = \{\, x \mid x\in A \vee x\in B \,\}$

交 $A\cap B = \{\, x \mid x\in A \wedge x\in B \,\}$

相对补 $A-B = \{\, x \mid x\in A \wedge x\notin B \,\}$

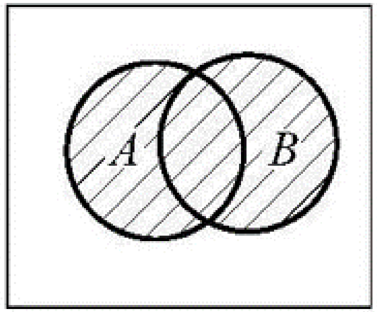
对称差 $A\oplus B = (A-B)\cup(B-A)$

$= (A\cup B)-(A\cap B)$

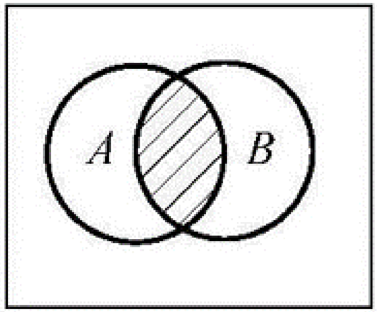
绝对补 $\sim A = E-A$

雨课堂 Rain Classroom

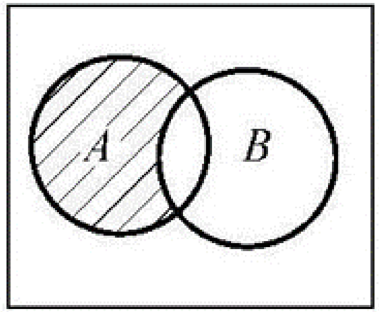
文氏图表示



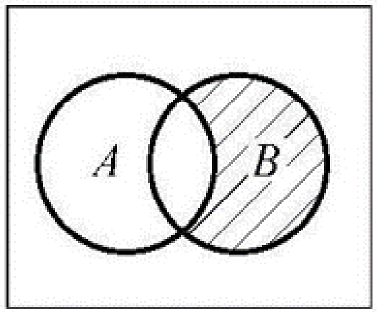
$A \cup B$



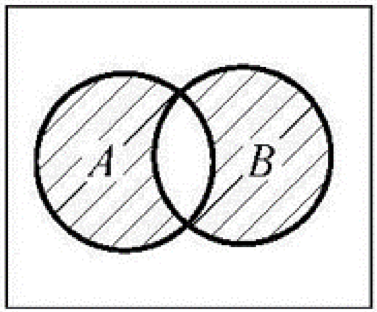
$A \cap B$



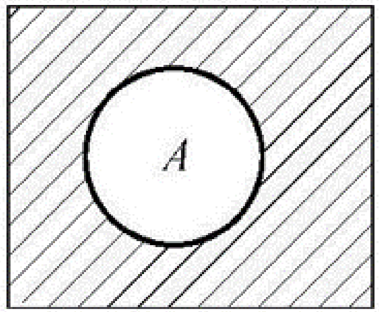
$A - B$



$B - A$



$A \oplus B$



$\sim A$

关于运算的说明

- 运算顺序：~和幂集优先，其他由括号确定
- 并和交运算可以推广到有穷个集合上，即

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n\}$$

- 某些重要结果

$$\varnothing \subseteq A-B \subseteq A$$

$A \subseteq B \Leftrightarrow A-B=\varnothing$（后面证明）

$$A \cap B=\varnothing \Leftrightarrow A-B=A$$

例1

F:一年级大学生的集合　　**S**：二年级大学生的集合

R：计算机系学生的集合　　**M**：数学系学生的集合

T：选修离散数学的学生的集合

L：爱好文学学生的集合　　**P**：爱好体育运动学生的集合

所有计算机系二年级学生都选修离散数学	$T\subseteq(M\cup R)\cap S$
数学系一年级的学生都没有选修离散数学	$R\cap S\subseteq T$
数学系学生或爱好文学或爱好体育运动	$(M\cap F)\cap T=\varnothing$
只有一、二年级的学生才爱好体育运动	$M\subseteq L\cup P$
除去数学和计算机系二年级学生外都不选修离散数学	$P\subseteq F\cup S$
	$S-(M\cup R)\subseteq P$

18

例2

分别对条件(1)到(5)，确定 X 集合与下述哪些集合相等。

$S_1 = \{ 1, 2, \cdots, 8, 9 \}$, $S_2 = \{ 2, 4, 6, 8 \}$, $S_3 = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$,

$S_4 = \{ 3, 4, 5 \}$, $S_5 = \{ 3, 5 \}$

(1) 若 $X \cap S_3 = \varnothing$, 则 X $= S_2$

(2) 若 $X \subseteq S_4, X \cap S_2 = \varnothing$, 则 X $= S_5$

(3) 若 $X \subseteq S_1$, $X \nsubseteq S_3$, 则 X $= S_1, S_2, S_4$

(4) 若 $X - S_3 = \varnothing$, 则 X $= S_3, S_5$

(5) 若 $X \subseteq S_3$, $X \nsubseteq S_1$, 则 X 与 $S_1, \ldots, S_5$ 都不等

集合运算的算律

	$\cup$	$\cap$	$\oplus$
交换	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	$A\oplus B=B\oplus A$
结合	$(A\cup B)\cup C=$ $A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=$ $A\cap(B\cap C)$	$(A\oplus B)\oplus C=$ $A\oplus(B\oplus C)$
幂等	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$	

	$\cup$与$\cap$	$\cap$与$\oplus$
分配	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
吸收	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	

吸收律的前提：$\cup$、$\cap$可交换

20

集合运算的算律（续）

	$-$	$\sim$
$D.M$ 律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双重否定		$\sim\sim A=A$

	$\varnothing$	E
补元律	$A\cap\sim A=\varnothing$	$A\cup\sim A=E$
零律	$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
否定	$\sim\varnothing=E$	$\sim E=\varnothing$

集合包含或相等的证明方法

- 证明 $X \subseteq Y$
  - 命题演算法
  - 包含传递法
  - 等价条件法
  - 反证法
  - 并交运算法
- 证明 $X=Y$
  - 命题演算法
  - 等式代入法
  - 反证法
  - 运算法

以上的 X, Y 代表集合公式

命题演算法证 $X \subseteq Y$

任取 x，

$$x \in X \Rightarrow \ldots \Rightarrow x \in Y$$

例3 证明 $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$

任取 x

$$x \in P(A) \Rightarrow x \subseteq A \Rightarrow x \subseteq B \Rightarrow x \in P(B)$$

任取 x

$$x \in A \Rightarrow \{x\} \subseteq A \Rightarrow \{x\} \in P(A) \Rightarrow \{x\} \in P(B)$$

$$\Rightarrow \{x\} \subseteq B \Rightarrow x \in B$$

包含传递法证 $X \subseteq Y$

找到集合T满足 $X \subseteq T$ 且 $T \subseteq Y$，从而有$X \subseteq Y$

例4 $A-B \subseteq A \cup B$

证 $A-B \subseteq A$

$A \subseteq A \cup B$

所以 $A-B \subseteq A \cup B$

利用包含的等价条件证 $X \subseteq Y$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \phi$$

例5 $A \subseteq C \land B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

证 $A \subseteq C \Rightarrow A \cup C = C$

$B \subseteq C \Rightarrow B \cup C = C$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup C = C$

$(A \cup B) \cup C = C \Leftrightarrow A \cup B \subseteq C$

命题得证

反证法证 $X \subseteq Y$

欲证$X \subseteq Y$, 假设命题不成立，必存在 x 使得 $x \in X$ 且 $x \notin Y$. 然后推出矛盾.

例6 证明 $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

证 假设 $A \cup B \subseteq C$ 不成立，

则 $\exists x\,(x \in A \cup B \wedge x \notin C)$

因此 $x \in A$ 或 $x \in B$， 且 $x \notin C$

若 $x \in A$, 则与 $A \subseteq C$ 矛盾；

若 $x \in B$, 则与 $B \subseteq C$ 矛盾.

利用已知包含式并交运算

由已知包含式通过运算产生新的包含式

$$X \subseteq Y \Rightarrow X \cap Z \subseteq Y \cap Z,\ X \cup Z \subseteq Y \cup Z$$

例7 证明 $A \cap C \subseteq B \cap C \wedge A - C \subseteq B - C \Rightarrow A \subseteq B$

证 $A \cap C \subseteq B \cap C$，$A - C \subseteq B - C$

上式两边求并，得

$(A \cap C) \cup (A - C) \subseteq (B \cap C) \cup (B - C)$

$\Rightarrow (A \cap C) \cup (A \cap \sim C) \subseteq (B \cap C) \cup (B \cap \sim C)$

$\Rightarrow A \cap (C \cup \sim C) \subseteq B \cap (C \cup \sim C)$

$\Rightarrow A \cap E \subseteq B \cap E$

$\Rightarrow A \subseteq B$

命题演算法证明$X=Y$

任取 x，

$x \in X \Rightarrow \ldots \Rightarrow x \in Y$

$x \in Y \Rightarrow \ldots \Rightarrow x \in X$

或者

$x \in X \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x \in Y$

例8 证明 $A \cup (A \cap B) = A$ （吸收律）

证 任取x,

$x \in A \cup (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \cap B$

$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in A$

28

等式替换证明$X=Y$

不断进行代入化简，最终得到两边相等

例9 证明$A\cup(A\cap B)=A$ （吸收律）

证 (假设交换律、分配律、同一律、零律成立)

$A\cup(A\cap B)$	
$=(A\cap E)\cup(A\cap B)$	同一律
$=A\cap(E\cup B)$	分配律
$=A\cap(B\cup E)$	交换律
$=A\cap E$	零律
$=A$	同一律

29

反证法证明$X=Y$

假设 $X=Y$ 不成立，则存在 x 使得 $x\in X$且$x\notin Y$，或者存在 x 使得 $x\in Y$且$x\notin X$，然后推出矛盾.

例10 证明以下等价条件

$$\underset{(1)}{A\subseteq B} \Leftrightarrow \underset{(2)}{A\cup B=B} \Leftrightarrow \underset{(3)}{A\cap B=A} \Leftrightarrow \underset{(4)}{A-B=\varnothing}$$

证明顺序：

$$(1) \Rightarrow (2),\ (2) \Rightarrow (3),\ (3) \Rightarrow (4),\ (4) \Rightarrow (1)$$

(1) $\Rightarrow$(2)

显然$B\subseteq A\cup B$， 下面证明$A\cup B\subseteq B$.

任取x,

$$x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A\vee x\in B \Rightarrow x\in B\vee x\in B \Leftrightarrow x\in B$$

因此有$A\cup B\subseteq B$. 综合上述（2）得证.

(2) $\Rightarrow$(3)

$$A=A\cap(A\cup B) \Rightarrow A=A\cap B$$

（将$A\cup B$用B代入)

(3) $\Rightarrow$(4)

假设$A-B\neq\varnothing$, 即$\exists x\in A-B$，那么$x\in A$且$x\notin B$. 而

$$x\notin B \Rightarrow x\notin A\cap B.$$

从而与$A\cap B=A$矛盾.

(4) $\Rightarrow$(1)

假设$A\subseteq B$不成立，那么

$$\exists x\ (x\in A \land x\notin B) \Rightarrow x\in A-B \Rightarrow A-B\neq\varnothing$$

与条件（4）矛盾.

集合运算法证明$X=Y$

由已知等式通过运算产生新的等式

$X=Y \Rightarrow X\cap Z=Y\cap Z,\ X\cup Z=Y\cup Z$，$X-Z=Y-Z$

例11 证明$A\cap C=B\cap C \wedge A\cup C=B\cup C \Rightarrow A=B$

证 由 $A\cap C=B\cap C$ 和 $A\cup C=B\cup C$ 得到

$$(A\cup C)-(A\cap C)=(B\cup C)-(B\cap C)$$

从而有 $A\oplus C=B\oplus C$

因此

$$A\oplus C=B\oplus C \Rightarrow (A\oplus C)\oplus C=(B\oplus C)\oplus C$$

$$\Rightarrow A\oplus(C\oplus C)=B\oplus(C\oplus C) \Rightarrow A\oplus\varnothing=B\oplus\varnothing \Rightarrow A=B$$

3.3 集合中元素的计数

- 集合的基数与有穷集合
- 包含排斥原理

- 有穷集的计数

雨课堂 Rain Classroom

集合的基数与有穷集合

集合 A 的基数：集合A中的元素数，记作 card$A$

有穷集 A： card$A$=$|A|$=n， n为自然数.

有穷集的实例：

$A=\{a,b,c\}$, card$A$=$|A|=3$；

$B=\{x \mid x^2+1=0, x\in R\}$, card$B$=$|B|=0$

无穷集的实例：

N, Z, Q, R, C 等

35

包含排斥原理（容斥原理）

定理 设 S 为有穷集，$P_1, P_2, \cdots, P_m$ 是 m 种性质，A_i 是 S 中具有性质 P_i 的元素构成的子集，$i=1, 2, \cdots, m$.则 S 中不具有性质 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 的元素数为

$$
\begin{aligned}
&|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_m}| \\
&=|S|-\sum_{i=1}^{m}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le m}|A_i \cap A_j|-\sum_{1\le i<j<k\le m}|A_i \cap A_j \cap A_k|+\ldots \\
&+(-1)^m|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|
\end{aligned}
$$

证明

证明要点：任何元素 x，如果不具有任何性质，

则对等式右边计数贡献为 1， 否则为 0

证 设 x不具有性质 $P_1, P_2, \ldots, P_m$,

$$x \notin A_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x \notin A_i \cap A_j,\ 1 \le i < j \le m$$

$$\ldots$$

$$x \notin A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m,$$

x 对右边计数贡献为

$$1 - 0 + 0 - 0 + \ldots + (-1)^m \cdot 0 = 1$$

证明（续）

设 x 具有 n 条性质，$1 \le n \le m$

x 对 $|S|$ 贡献为 1

x 对 $\sum_{i=1}^{m} |A_i|$ 贡献为 C_n^1

x 对 $\sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j|$ 贡献为 C_n^2

....

x 对 $|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$ 贡献为 C_n^m

x 对右边计数贡献为

$$1 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^m C_n^m = \sum_{i=0}^{n} C_n^i = 0$$

推论

S中至少具有一条性质的元素数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m|$$

$$= \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots$$

$$+ (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

证明 $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m|$

$$= |S| - |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m}|$$

$$= |S| - |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_m}|$$

将上述定理结论代入即可

应用

例1 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被 5 和6 整除，也不能被 8 整除的数有多少个？

解：$S=\{x \mid x\in Z, 1\le x\le 1000\}$，

如下定义 S 的 3 个子集 A, B, C：

$A=\{x \mid x\in S, 5 \mid x\}$，

$B=\{x \mid x\in S, 6 \mid x\}$，

$C=\{x \mid x\in S, 8 \mid x\}$

例1（续）

对上述子集计数：

$|S|=1000,$

$|A|=\lfloor 1000/5 \rfloor=200,\quad |B|=\lfloor 1000/6 \rfloor=133,$

$|C|=\lfloor 1000/8 \rfloor=125,$

$|A\cap B|=\lfloor 1000/30 \rfloor=33,\quad |B\cap C|=\lfloor 1000/40 \rfloor=25,$

$|B\cap C|=\lfloor 1000/24 \rfloor=41,$

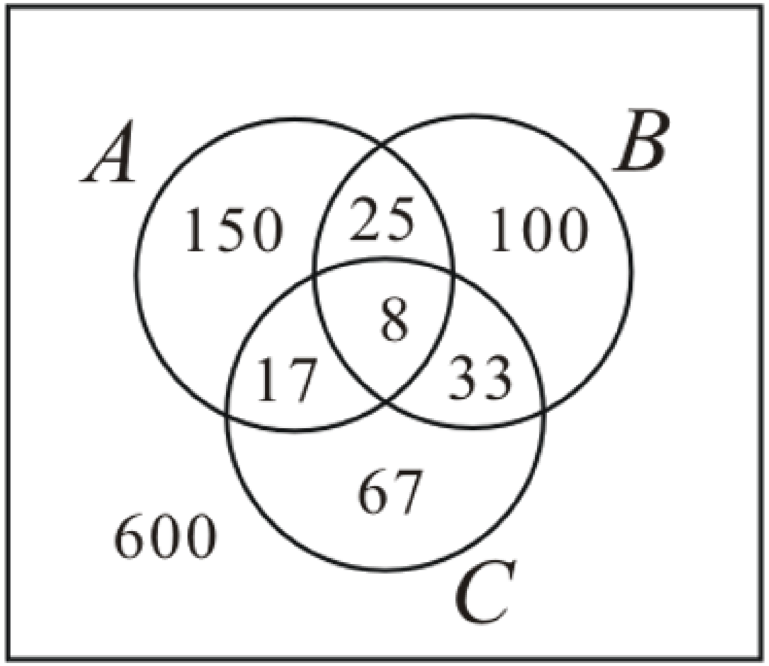
$|A\cap B\cap C|=\lfloor 1000/120 \rfloor=8,$

代入公式

$N=1000-(200+133+125)+(33+25+41)-8=600$

文氏图法

求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被 5 和6 整除，也不能被 8 整除的数有多少个？



例2

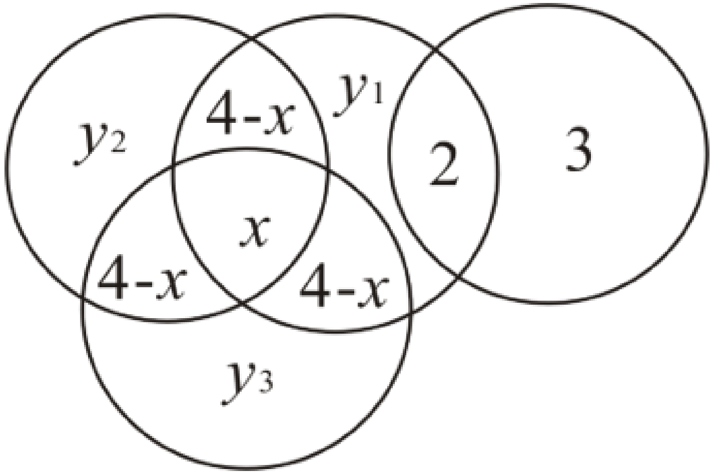
24名科技人员，每人至少会英、法、德、日四门外语中的1门外语.

英语：13； 日语：5； 德语：10； 法语：9

英日：2; 英德：4; 英法：4; 法德：4

会日语的不会法语、德语

求：只会1种语言人数，会3种语言人数



$x+2(4-x)+y_1+2=13$

$x+2(4-x)+y_2=10$

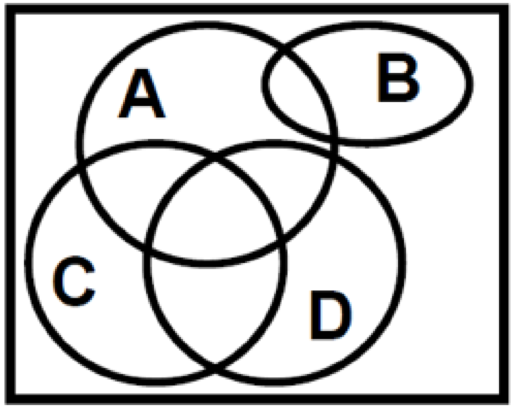
$x+2(4-x)+y_3=9$

$x+3(4-x)+y_1+y_2+y_3=19$

$x=1, y_1=4, y_2=3, y_3=2$

用包含排斥原理解

设A、B、C、D分别为会说英、日、德、法语的集合。



由已知条件可知，$|A|=13$，$|B|=5$，$|C|=10$，$|D|=9$，$|A\cap B|=2$，

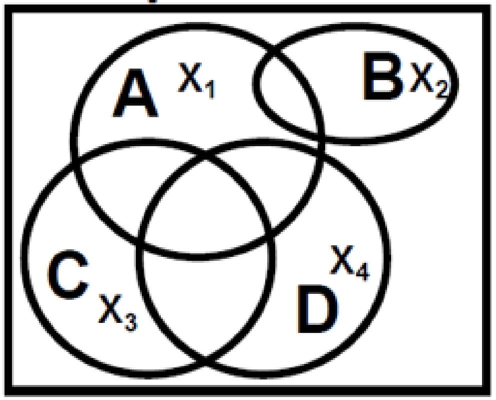
而 $|A\cap C|=|A\cap D|=|C\cap D|=4$，

$|B\cap C|=|B\cap D|=|A\cap B\cap C|=|A\cap B\cap D|=|A\cap B\cap C\cap D|=0$，$|A\cup B\cup C\cup D|=24$。

44

用包含排斥原理解

对集合A、B、C、D应用容斥原理，并代入已知条件得方程 $24=37-14+|A\cap C\cap D|$，于是，$|A\cap C\cap D|=1$，即同时会说英、法、德语只有1人。



设只会说英、日、法、德语的人数为 x_1、x_2、x_3、x_4，则

$x_1=|A|-|(B\cup C\cup D)\cap A|=|A|-|(B\cap A)\cup(C\cap A)\cup(D\cap A)|$，对 $B\cap A$、$C\cap A$、$D\cap A$用容斥原理，得$x_1=4$，类似可求出$x_2=3$，$x_3=3$，$x_4=2$。□

例3 求欧拉函数的值

欧拉函数：$\phi(n)$, 这里取$n>1$

表示小于等于n的自然数中与n互素的数的个数.

$\phi(12)=4$，与12互素的数有1, 5, 7, 11.

解：n 的素因子分解式

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$$

$A_i=\{ x \mid x$为小于等于n的自然数且 p_i 整除 $x \}$

$$\phi(n) = | \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_k} |$$

$$|A_i| = \frac{n}{p_i}, \quad i = 1,2,\ldots,k$$

$$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}, \quad 1 \le i < j \le n$$

$$\ldots$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k| = \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k}$$

$$\phi(n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_k}|$$

$$= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \ldots + \frac{n}{p_k}\right) + \left(\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \ldots + \frac{n}{p_{k-1} p_k}\right)$$

$$- \ldots + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k}$$

$$= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

实例

小于等于60且与60互素的正整数有 16 个：

1，7，11，13，17，19，23，29，

31，37，41，43，47，49，53，59.

$$\phi(60)=60(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})$$

$$=60\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=16$$

48