

数理逻辑简介

1

什么是数理逻辑

- 逻辑学是探索、阐述和确立有效推理原则的学科，最早由古希腊学者亚里士多德创立。
- 亚里士多德在逻辑学上最重要的工作是提出三段论学说。
- 只要符合三段论的推理就是正确的。
- 一个三段论就是一个包括有大前提、小前提和结论三个部分的论证。

什么是数理逻辑

- 三段论有许多不同种类，其中最著名的例子：
 - ① 凡是人都会死（大前提）
 - ② 苏格拉底是人（小前提）
 - ③ 所以：苏格拉底会死（结论）
- 逻辑学还是以自然语言来表述，可能会因为自然语言的模糊性损害其准确和权威。
- 用数学的方法研究关于推理、证明等问题的学科就叫做数理逻辑（也叫做符号逻辑）。

逻辑推理

- 由前提推出结论（可推导性关系）
- 决定可推导关系的是前提和结论的逻辑形式

- 例子一

- 所有**3**的倍数的数字之和是**3**的倍数。（前提）
- 10^{10} 的数字之和不是**3**的倍数。（前提）
- 10^{10} 不是**3**的倍数。（结论）

- 例子二

- 所有中学生打网球。（前提）
- 王军不打网球。（前提）
- 王军不是中学生。（结论）

共同的逻辑形式

- S**中的所有元有**R**性质。（前提）
- a**没有**R**性质。（前提）
- a**不是**S**中的元。（结论）

形式语言

- 描述前提和结论需要使用语言，但自然语言有时会造成误会

- 例子一

- ☐ **X**认识**Y**。（前提）
- ☐ **Y**是足球队长。（前提）
- ☐ **X**认识足球队长。（结论）

- 例子二

- ☐ **X**认识**A**班某学生。（前提）
- ☐ **A**班某学生是足球队长。（前提）
- ☐ **X**认识足球队长。（结论）

- 所以需要引入形式语言

- ☐ 人工构造的符号语言
- ☐ 语义涉及符号和符号表达式的涵义
- ☐ 语法涉及符号表达式的形式结构

数理逻辑的萌芽

- 利用**计算**的方法来**代替**人们思维中的逻辑**推理过程**，这种想法早在十七世纪就有人提出过。
- 莱布尼茨（**Leibniz**）就曾经设想能不能创造一种“**通用的科学语言**”，可以把推理过程象数学一样利用公式来进行计算，从而得出正确的结论。
- 由于当时的社会条件，他的想法并没有实现。
- 但是他的思想却是现代数理逻辑部分内容的**萌芽**，从这个意义上讲，莱布尼茨的思想可以说是数理逻辑的先驱。

数理逻辑的开创

- **1847年**，英国数学家布尔**G.Boole**发表了《逻辑的数学分析》，建立了“**布尔代数**”。
- 布尔创造了一套符号系统，利用**符号**来表示逻辑中的各种概念。
- 还建立了一系列的运算法则，利用**代数**的方法研究逻辑问题，初步奠定了**数理逻辑**的基础

数理逻辑的大发展

- 1884年，德国数学家弗雷格**Frege**出版了《数论的基础》一书，在书中引入量词的符号，使得数理逻辑的符号系统更加完备。
- 美国人皮尔斯**Peirce**，他也在著作中引入了更多逻辑符号。
- 从而使现代数理逻辑最基本的理论基础逐步形成，成为一门独立的学科。
- 怀特海、罗素、策梅洛、希尔伯特、哥德尔、冯·诺依曼、.....

数理逻辑的四大分支

- 数学史上的第三次大危机是由于发现了集合论的**逻辑悖论**引起的。
- 悖论的提出，促使许多数学家去研究集合论的无矛盾性问题，从而产生了数理逻辑的一个重要分支—**公理集合论**。
- 为了研究数学系统的无矛盾性问题，需要以数学理论体系的概念、命题、证明等作为研究对象，研究数学系统的逻辑结构和证明的规律，这样又产生了另一个分支—**证明论**。
- **递归论**主要研究可计算性的理论，它和计算机的发展和应用有密切的关系。
- **模型论**主要是研究形式系统和数学模型之间的关系。

本课程讲授内容

- 我们课程中介绍的是数理逻辑各个分支的共同基础部分：命题演算与谓词演算
- 这些都属于经典（一阶）逻辑的内容，此外，还有非经典逻辑
 - 一类与经典逻辑持有不同观点，如构造性逻辑和多值逻辑等
 - 一类是经典逻辑的扩充，如模态逻辑和时序逻辑

主要参考教材



<https://item.jd.com/10035669384304.html>

其它参考教材



<https://item.jd.com/11633329.html>

进一步学习的参考资料

