

# 2020 年全国硕士研究生招生考试

## 数 学 (一)

(科目代码:301)

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将所选项前的字母写在题后的括号内.)

(1) 当  $x \rightarrow 0^+$  时,下列无穷小量中最高阶的是( ).

(A)  $\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt$

(B)  $\int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3}) dt$

(C)  $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$

(D)  $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt$

(2) 设函数  $f(x)$  在区间  $(-1, 1)$  内有定义,且  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , 则( ).

(A) 当  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$  时,  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导

(B) 当  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$  时,  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导

(C) 当  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导时,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$

(D) 当  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导时,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$

(3) 设函数  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处可微,  $f(0, 0) = 0$ ,  $\mathbf{n} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right) \Big|_{(0,0)}$ , 非零向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{n}$  垂直, 则( ).

(A)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\mathbf{n} \cdot (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  存在

(B)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\mathbf{n} \times (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  存在

(C)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\mathbf{a} \cdot (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  存在

(D)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\mathbf{a} \times (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  存在

4) 设  $R$  为幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径,  $r$  是实数, 则( ).

(A) 当  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$  发散时,  $|r| \geq R$

(B) 当  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$  收敛时,  $|r| \leq R$

(C) 当  $|r| \geq R$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$  发散

(D) 当  $|r| \leq R$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$  收敛

5) 若矩阵  $A$  经过初等列变换化成  $B$ , 则( ).

(A) 存在矩阵  $P$ , 使得  $PA = B$

(B) 存在矩阵  $P$ , 使得  $BP = A$

(C) 存在矩阵  $P$ , 使得  $PB = A$

(D) 方程组  $AX = 0$  与  $BX = 0$  同解

6) 已知直线  $L_1: \frac{x-a_1}{a_1} = \frac{y-b_1}{b_1} = \frac{z-c_1}{c_1}$  与直线  $L_2: \frac{x-a_2}{a_2} = \frac{y-b_2}{b_2} = \frac{z-c_2}{c_2}$  相交于一点,

记向量  $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3$ , 则( ).

(A)  $\alpha_1$  可由  $\alpha_2, \alpha_3$  线性表示

(B)  $\alpha_2$  可由  $\alpha_1, \alpha_3$  线性表示

(C)  $\alpha_3$  可由  $\alpha_1, \alpha_2$  线性表示

(D)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关

7) 设  $A, B, C$  为三个随机事件, 且  $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = 0,$

$P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$ , 则  $A, B, C$  中恰有一个事件发生的概率为( ).

(A)  $\frac{3}{4}$

(B)  $\frac{2}{3}$

(C)  $\frac{1}{2}$

(D)  $\frac{5}{12}$

8) 设  $X_1, X_2, \dots, X_{100}$  为来自总体  $X$  的简单随机样本, 其中  $P\{X=0\} = P\{X=1\} = \frac{1}{2}, \Phi(x)$

表示标准正态分布函数, 利用中心极限定理可得  $P\{\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 55\}$  的近似值为( ).

(A)  $1 - \Phi(1)$

(B)  $\Phi(1)$

(C)  $1 - \Phi(0.2)$

(D)  $\Phi(0.2)$

二、填空题(9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在题中的横线上.)

9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$

10) 设  $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1}, \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}), \end{cases}$  则  $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

11) 设函数  $f(x)$  满足  $f''(x) + af'(x) + f(x) = 0 (a > 0)$ , 且  $f(0) = m, f'(0) = n$ , 则

$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

12) 设函数  $f(x, y) = \int_0^{xy} e^{xt^2} dt$ , 则  $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(13) 行列式  $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(14) 设  $X$  服从区间  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  上的均匀分布,  $Y = \sin X$ , 则  $\text{Cov}(X, Y) = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题(15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求函数  $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - xy$  的极值.

(16) (本题满分 10 分)

计算曲线积分  $I = \int_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2} dy$ , 其中  $L$  是  $x^2 + y^2 = 2$ , 方向为逆时针方向.

(17) (本题满分 10 分)

设数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_1 = 1, (n+1)a_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right)a_n$ , 证明: 当  $|x| < 1$  时, 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  收敛, 并求其和函数.

(18) (本题满分 10 分)

设  $\Sigma$  为曲面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ ) 的下侧,  $f(x)$  是连续函数, 计算

$$I = \iint_{\Sigma} [xf(xy) + 2x - y] dy dz + [yf(xy) + 2y + x] dz dx + [zf(xy) + z] dx dy.$$

(19) (本题满分 10 分)

设函数  $f(x)$  在区间  $[0, 2]$  上具有连续导数,  $f(0) = f(2) = 0, M = \max_{x \in [0, 2]} \{ |f(x)| \}$ , 证明:

(I) 存在  $\xi \in (0, 2)$ , 使得  $|f'(\xi)| \geq M$ ;

(II) 若对任意的  $x \in (0, 2)$ ,  $|f'(x)| \leq M$ , 则  $M = 0$ .

(20) (本题满分 11 分)

设二次型  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$  经正交变换  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  化为二次型

$g(y_1, y_2) = ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2$ , 其中  $a \geq b$ .

(I) 求  $a, b$  的值;

(II) 求正交矩阵  $Q$ .

(21) (本题满分 11 分)

设  $A$  为 2 阶矩阵,  $P = (\alpha, A\alpha)$ , 其中  $\alpha$  是非零向量且不是  $A$  的特征向量.

(I) 证明  $P$  为可逆矩阵;

(II) 若  $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$ , 求  $P^{-1}AP$ , 并判断  $A$  是否相似于对角矩阵.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量  $X_1, X_2, X_3$  相互独立, 其中  $X_1$  与  $X_2$  均服从标准正态分布,  $X_3$  的概率分布为

$$P\{X_3 = 0\} = P\{X_3 = 1\} = \frac{1}{2}, Y = X_3X_1 + (1 - X_3)X_2.$$

(I) 求二维随机变量  $(X_1, Y)$  的分布函数, 结果用标准正态分布函数  $\Phi(x)$  表示;

(II) 证明随机变量  $Y$  服从标准正态分布.

(23) (本题满分 11 分)

设某元件的使用寿命  $T$  的分布函数为

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t \geq 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中  $\theta, m$  为参数且大于零.

(I) 求概率  $P\{T > t\}$  与  $P\{T > s + t \mid T > s\}$ , 其中  $s > 0, t > 0$ ;

(II) 任取  $n$  个这种元件做寿命试验, 测得它们的寿命分别为  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , 若  $m$  已知, 求  $\theta$  的最大似然估计值  $\hat{\theta}$ .