一、选择题：第1~10小题，每小题5分，共50分.下列每小题给出的四个选项中，只有一个选项是最符合题目要求的.

1. 已知函数 $f(x)=\int_0^x e^{\cos t}dt$， $g(x)=\int_0^{\sin x} e^{t^2}dt$，则(　　)

A. $f(x)$是奇函数，$g(x)$是偶函数

B. $f(x)$是偶函数，$g(x)$是奇函数

C. $f(x)$与$g(x)$均为奇函数

D. $f(x)$与$g(x)$均为周期函数

【答案】C

【解析】由于e^{cost}是偶函数，所以$f(x)=\int_0^x e^{cost}dt$是奇函数，

又$g'(x)=e^{(sinx)^2}cosx$是偶函数，所以$g(x)$是奇函数.

故选C.

2. 设 $P=P(x,y,z)$， $Q=Q(x,y,z)$ 均为连续函数，Σ 为曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ $(x\le 0, y\ge 0)$的上侧，则$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx=($　　$)$

A. $\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x}{z}P+\frac{y}{z}Q\right)dxdy$　　B. $\iint\limits_{\Sigma}\left(-\frac{x}{z}P+\frac{y}{z}Q\right)dxdy$

C. $\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x}{z}P-\frac{y}{z}Q\right)dxdy$　　D. $\iint\limits_{\Sigma}\left(-\frac{x}{z}P-\frac{y}{z}Q\right)dxdy$

【答案】A

【解析】转换投影法，$z=\sqrt{1-x^2-y^2},\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$

$$\iint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx=\iint_{\Sigma}(\frac{x}{z}P+\frac{y}{z}Q)dxdy$$

故选A.

3. 已知幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的和函数为$\ln(2+x)$，则$\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_{2n}=($　　$)$

A. $-\dfrac{1}{6}$　　　　B. $-\dfrac{1}{3}$

C. $\dfrac{1}{6}$　　　　D. $\dfrac{1}{3}$

【答案】A

【解析】方法 1：$\ln(2+x)=\ln 2\left(1+\dfrac{1}{2}x\right)=\ln 2+\ln\left(1+\dfrac{1}{2}x\right)$

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{n}$$

所以，$a_n=\begin{cases}\ln 2, & n=0\\ (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n2^n}, & n>0\end{cases}$

当$n>0$，$a_{2n}=-\dfrac{1}{2n\cdot 2^{2n}}$，

所以，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(-\dfrac{1}{2n\cdot 2^{2n}}\right)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{2n+1}}=-\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\frac{1}{4}}=-\dfrac{1}{6}$

故选 A.

方法 2：

$$[\ln(2+x)]'=\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n,$$

$$\ln(2+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+1}}{n+1}+C=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n}}{n}+C$$

$S(0)=C=\ln(2+0)=\ln 2$

所以，$a_n=\begin{cases}\ln 2, & n=0\\ (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n2^n}, & n>0\end{cases}$

所以，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(-\dfrac{1}{2n\cdot 2^{2n}}\right)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{2n+1}}=-\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\frac{1}{4}}=-\dfrac{1}{6}$

故选 A.

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，则(　　)

A. 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=m$ 时，$f'(0)=m$

B. 当 $f'(0)=m$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=m$

C. 当 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=m$ 时，$f'(0)=m$

D. 当 $f'(0)=m$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=m$

【答案】B

【解析】因为 $f'(0)=m$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，

从而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=m$，

故选 B.

对于 A 选项，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=m$，推不出来 $f'(0)=m$；

对于 C 选项，$f'(x)$ 在 $x=0$ 处不一定连续；

对于 D 选项，$f'(x)$ 在 $x=0$ 处极限未必存在.

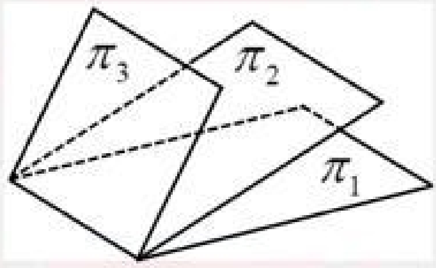
5. 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，三张平面

$\pi_i: a_i x + b_i y + c_i z = d_i (i=1,2,3)$ 的位置关系如图所示，

记 $\alpha_i=(a_i,b_i,c_i)$, $\beta_i=(a_i,b_i,c_i,d_i)$, 若 $r\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=m$，$r\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}=n$，则(　　)

A. $m=1,n=2$　　　　B. $m=n=2$

C. $m=2,n=3$　　　　D. $m=n=3$



【答案】B

【解析】由题意知 $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\\ d_3\end{pmatrix}$ 有无穷多解，故 $r\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}<3$

又由存在两平面的法向量不共线即线性无关，故 $r\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}\geq 2$，则

$r\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}=2$，故 $m=n=2$，故选 B.

6. 设向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\b\\a\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\\1\end{pmatrix}$，若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，且其中任意两个向量均线性无关，则(　　)

A. $a=1,b\neq-1$　　B. $a=1,b=-1$

C. $a\neq-2,b=2$　　D. $a=-2,b=2$

【答案】D

【解析】由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，故$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)<3$，故$\begin{vmatrix}a&1&1\\1&1&a\\1&a&1\end{vmatrix}=0$，

得$a=1$或-2，当$a=1$时，α_1,α_3线性相关，与题意矛盾，故$a=-2$，

又由$\begin{vmatrix}a&1&1\\1&1&a\\-1&b&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&1&1\\1&1&-2\\-1&b&-1\end{vmatrix}=0$，得$b=2$，故选D.

7. 设A是秩为2的3阶矩阵，α是满足$A\alpha=0$的非零向量，若对满足$\beta^T\alpha=0$的3维列向量β，均有$A\beta=\beta$，则(　　)

A. A^3的迹为2　　B. A^3的迹为5

C. A^2的迹为8　　D. A^2的迹为9

【答案】A

【解析】由$A\alpha=0$且$\alpha\neq0$，故$\lambda_1=0$，设非零向量β_1,β_2线性无关（因为与α垂直的平面中一定存在两个线性无关的向量）且满足$\beta_1^T\alpha=\beta_2^T\alpha=0$，则$A\beta_1=\beta_1,A\beta_2=\beta_2$，又由$\beta_1,\beta_2$线性无关，故$\lambda=1$

至少为二重根，故$\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=1$，故$A^3$的特征值为$0,1,1$，

故$tr(A^3)=0+1+1=2$，故选A.

8. 设随机变量X,Y相互独立，且X服从正态分布$N(0,2)$，Y服从正态分布$N(-2,2)$，若$P\{2X+Y<a\}=P\{X>Y\}$，则$a=($　　$)$

A. $-2-\sqrt{10}$　　B. $-2+\sqrt{10}$

C. $-2-\sqrt{6}$　　D. $-2+\sqrt{6}$

【答案】B

【解析】$2X+Y\sim N(-2,10)$，$Y-X\sim N(-2,2^2)$,

所以$P\{2X+Y<a\}=\Phi(\frac{a+2}{\sqrt{10}})=P\{Y-X<0\}=\Phi(\frac{0+2}{2})$,

于是$\frac{a+2}{\sqrt{10}}=\frac{0+2}{2}$，$a=-2+\sqrt{10}$.

故选B.

9. 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}2(1-x), & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$，在$X=X(0<x<1)$的条件下，随机变量$Y$服从区间$(x,1)$上的均匀分布，则$Cov(X,Y)=($　　$)$

A. $-\frac{1}{36}$　　B. $-\frac{1}{72}$

C. $\frac{1}{72}$　　D. $\frac{1}{36}$

【答案】D

【解析】当$0<x<1$时，$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}, x<y<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$

$$f(x,y)=\begin{cases}2, x<y<1, 0<x<1\\0, \quad 其他\end{cases}$$

$$EXY=\iint\limits_{\substack{-\infty<x<+\infty\\-\infty<y<+\infty}} xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y 2xydx=\frac{1}{4}$$

$$EX=\int_0^1 x2(1-x)dx=\frac{1}{3}$$

$$EY=\iint\limits_{\substack{-\infty<x<+\infty\\-\infty<y<+\infty}} yf(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y 2ydx=\frac{2}{3}$$

$Cov(X,Y)=EXY-EXEY=\frac{1}{36}$.故选 D.

10. 设随机变量X,Y相互独立，且均服从参数为λ的指数分布，令$Z=|X-Y|$，则下列随机变量与Z同分布的是(　　)

A. $X+Y$　　　　B. $\frac{X+Y}{2}$

C. $2X$　　　　D. X

【答案】D

【解析】令$Z=|X-Y|$，则$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{|X-Y|\le z\}$

当$z<0$时，$F_Z(z)=0$；

当$z\ge 0$时，$F_Z(z)=\iint\limits_{|x-y|\le z} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{|x-y|\le z}\lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda y}dxdy$

$$=2\int_0^{+\infty}dy\int_y^{y+z}\lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda y}dx=1-e^{-\lambda z}.$$

所以$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\1-e^{-\lambda z}, & z\ge 0\end{cases}$.显然$Z=|X-Y|$与$X$同分布.

故选 D.

二、填空题：第 11~16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax^2)^{\sin x}-1}{x^3}=6$，则$a=$______

【答案】6

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax^2)^{\sin x}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x\cdot\ln(1+ax^2)}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot\ln(1+ax^2)}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^3}{x^3}=6$，故$a=6$.

12. 设函数$f(u,v)$具有 2 阶连续偏导数，且$df\,|_{(1,1)}=3du+4dv$，令

$y=f(\cos x,1+x^2)$，则$\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}=$______

【答案】5.

【解析】由$\mathrm{d}f|_{(1,1)}=3\mathrm{d}u+4\mathrm{d}v$知，$f_u'(1,1)=3$，$f_v'(1,1)=4$.

又$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f_u'\cdot(-\sin x)+f_v'\cdot 2x$，则

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left[f_{uu}''\cdot(-\sin x)+f_{uv}''\cdot 2x\right](-\sin x)+f_u'\cdot(-\cos x)$$

$$+\left[f_{vu}''\cdot(-\sin x)+f_{vv}''\cdot 2x\right](2x)+2f_v',$$

则$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}=f_u'(1,1)\cdot(-1)+2f_v'(1,1)=-3+8=5$.

13. 已知函数$f(x)=x+1$，若$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,x\in[0,\pi]$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\sin a_{2n-1}=$______

【答案】$-\dfrac{1}{\pi}$

【解析】由题意可得将$f(x)$在$[0,\pi]$展为余弦级数，由公式可得

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[(x+1)\frac{1}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=-\frac{4}{n^2\pi},n=2k-1$$

$$\lim_{n\to\infty}n^2\sin a_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{4}{(2n-1)^2\pi}n^2\right]=-\frac{1}{\pi}$$

14. 微分方程 $y'=\frac{1}{(x+y)^2}$ 满足条件 $y(1)=0$ 的解为__________

【答案】$x=\tan\left(y+\frac{\pi}{4}\right)-y$

【解析】令 $x+y=u$，等式两边同时对 x 求导，得到 $u'=1+y'$，代入原式可得 $u'-1=\frac{1}{u^2}$，整理得 $\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{u^2}$，即 $\int\frac{u^2}{u^2+1}du=\int dx$，

求得 $u-\arctan u=x+c$，即 $y-\arctan(x+y)=c$，

把初始条件代入可得 $c=-\frac{\pi}{4}$,解得 $x=\tan\left(y+\frac{\pi}{4}\right)-y.$

15. 设实矩阵 $A=\begin{pmatrix}a+1 & a\\ a & a\end{pmatrix}$，若对任意实向量 $\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$，$\left(\alpha^TA\beta\right)^2\le\alpha^TA\alpha\cdot\beta^TA\beta$ 都成立，则 a 的取值范围是__________

【答案】$[0,+\infty)$

【解析】由题意知：$\alpha^TA(\beta\alpha^T-\alpha\beta^T)A\beta\le0$ 恒成立，

设函数 $f\left(x_1,x_2,y_1,y_2\right)=\alpha^TA(\beta\alpha^T-\alpha\beta^T)A\beta.$

由 $\beta\alpha^T-\alpha\beta^T=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1 & y_2\end{pmatrix}=(x_1y_2-x_2y_1)\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$

则 $A(\beta\alpha^T-\alpha\beta^T)A=(x_1y_2-x_2y_1)\begin{pmatrix}a+1&a\\a&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a+1&a\\a&a\end{pmatrix}$

$=(x_1y_2-x_2y_1)\begin{pmatrix}0&-a\\a&0\end{pmatrix}$，

故 $f\left(x_1,x_2,y_1,y_2\right)=(x_1y_2-x_2y_1)\alpha^T\begin{pmatrix}0&-a\\a&0\end{pmatrix}\beta=-a(x_1y_2-x_2y_1)^2\le 0$，

可得 $a\ge 0$.

16. 设随机试验每次成功的概率为 P，现进行 3 次独立重复试验，在至少成功 1 次的条件下，3 次试验全部成功的概率为 $\frac{4}{13}$，则 $P=$

____

【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】设随机变量 X 表示三次试验中成功的次数，则 $X\sim B(3,p)$，所以

$$P\{X=3\mid X\ge 1\}=\frac{P\{X=3,X\ge 1\}}{P\{X\ge 1\}}=\frac{P\{X=3\}}{P\{X\ge 1\}}=\frac{C_3^3p^3}{1-C_3^0(1-p)^3}=\frac{4}{13}$$

故 $p=\frac{2}{3}$.

三、解答题：第 17－22 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

已知平面区域$D=\left\{(x,y)\mid\sqrt{1-y^2}\le x\le 1,-1\le y\le 1\right\}$，计算

$$\iint\limits_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

【解析】由于积分区域关于x轴对称，被积函数关于y为偶函数，故

$$\iint\limits_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=2\iint\limits_{D_1} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=2\int_0^1 dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx$$

$$=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}d(x^2+y^2)$$

$$=2\int_0^1\sqrt{1+y^2}dy-2=[y\sqrt{1+y^2}+\ln(y+\sqrt{1+y^2})]\Big|_0^1-2$$

$$=\sqrt{2}-2+\ln(1+\sqrt{2})$$

18. (本题满分 12 分)

已知函数$f(x,y)=x^3+y^3-(x+y)^2+3$，设T是曲面$z=f(x,y)$在点$(1,1,1)$处的切平面，D为T与坐标平面所围成的有界区域在xOy平面上的投影.

(1) 求T的方程

(2) 求$f(x,y)$在D上的最大值和最小值

【解析】(1) 对于$z=f(x,y)=x^3+y^3-(x+y)^2+3$，

有$z'_x(1,1)=-1, z'_y(1,1)=-1,$

从而曲面在点$(1,1,1)$处的一个法向量为$n=(-z'_x,-z'_y,1)=(1,1,1)$，

得该点处曲面的切平面方程为$x+y+z=3$.

(2)在xoy平面中，区域$D: x+y\le 3, x\ge 0, y\ge 0$，

在 D 内部求驻点，解方程组 $\begin{cases} f_x' = 3x^2 - 2(x+y) = 0 \\ f_y' = 3y^2 - 2(x+y) = 0 \end{cases}$，得 $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right)$，有 $f\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{17}{27}$；

在边界 $y=0, 0<x<3$ 上，对于 $f(x,0) = x^3 - x^2 + 3$，解得其驻点 $\left(\dfrac{2}{3},0\right)$，有 $f\left(\dfrac{2}{3},0\right) = \dfrac{77}{27}$；

在边界 $x=0, 0<y<3$ 上，对于 $f(0,y) = y^3 - y^2 + 3$，解得其驻点 $\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$，有 $f\left(0,\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{77}{27}$；

在边界 $x+y=3, 0<x<3$ 上，对于 $f(x,3-x) = x^3 + (3-x)^3 - 6$，解得其驻点 $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，有 $f\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$；

在边界顶点，有 $f(0,0)=3, f(3,0)=f(0,3)=21$；

综上，得 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为 $f(3,0)=f(0,3)=21$，最小值为 $f\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{17}{27}$.

19. (本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数，且 $f'(0)=f'(1), |f''(x)| \le 1$，证明:

(1) 当 $x \in (0,1)$ 时，$|f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| \le \dfrac{x(1-x)}{2}$

(2) $\left| \int_0^1 f(x)dx - \dfrac{f(0)+f(1)}{2} \right| \le \dfrac{1}{12}$

【解析】(1) 证明：令 $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$

令$F(x)=f(x)-g(x)-\dfrac{x(1-x)}{2}$，$x\in(0,1)$

$\because F(0)=0,F(1)=0$

$\because F''(x)=f''(x)+1\ge 0,(|f''(x)|\le 1)$

$\therefore F(x)$为凹函数. $\therefore F(x)\ge 0$.

$\therefore f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\le \dfrac{x(1-x)}{2}$

令$F(x)=f(x)-g(x)+\dfrac{x(1-x)}{2}$，$x\in(0,1)$

$\because F(0)=0,F(1)=0$

$\because F''(x)=f''(x)-1\le 0,(|f''(x)|\le 1)$

$\therefore F(x)$为凸函数. $\therefore F(x)\ge 0$.

$\therefore f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\ge -\dfrac{x(1-x)}{2}$

综上：$|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x|\le \dfrac{x(1-x)}{2}$

(2) 由(1) 中 $f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\le \dfrac{x(1-x)}{2}$

$\Rightarrow \int_0^1[f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x]dx\le \int_0^1\dfrac{x(1-x)}{2}dx$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx-\dfrac{f(0)+f(1)}{2}\le \dfrac{1}{12}$

由第(1) 中 $f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\ge -\dfrac{x(1-x)}{2}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left[f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\right]dx \geq \int_0^1 -\frac{x(1-x)}{2}dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx-\frac{f(0)+f(1)}{2} \geq -\frac{1}{12}$$

综上：$\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right| \leq \frac{1}{12}$

20. (本题满分 12 分)

已知有向曲线L的球面$x^2+y^2+z^2=2x$与平面$2x-z-1=0$的交线，从z轴正向往z轴负向看去为逆时针方向，计算曲线积分$\int_L (6xyz-yz^2)dx+2x^2zdy+xyzdz$

【解析】$I=\oint_L (6xyz-yz^2)dx+2x^2zdy+xyzdz$

$$=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 6xyz-yz^2 & 2x^2z & xyz \end{vmatrix}$$ 其中$\Sigma: z=2x-1$，取上侧

$$=\iint_\Sigma (xz-2x^2)dydz+(6xy-3yz)dzdx+(z^2-2xz)dxdy$$

$$=\iint_\Sigma [(xz-2x^2)(-2)+(6xy-3yz)\cdot 0+(z^2-2xz)]dxdy$$

$$=\iint_\Sigma (4x^2-4xz+z^2)dxdy$$

$$=\iint_D \left[4x^2-4x(2x-1)+(2x-1)^2\right]dxdy \text{ 其中 } D: \frac{(x-\frac{3}{5})^2}{(\frac{2}{5})^2}+\frac{y^2}{(\frac{2}{\sqrt{5}})^2} \leq 1$$

$$=\iint_D 1dxdy$$

$$=\frac{4\sqrt{5}\pi}{25}$$

21.(本题满分 12 分)

已知数列$\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$满足$x_0=-1,y_0=0,z_0=2$，且

$$\begin{cases} x_n=-2x_{n-1}+2z_{n-1} \\ y_n=-2y_{n-1}-2z_{n-1} \\ z_n=-6x_{n-1}-3y_{n-1}+3z_{n-1} \end{cases}$$，记$\alpha_n=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$，写出满足$\alpha_n=A\alpha_{n-1}$的矩阵$A$，并求$A^n$及$x_n,y_n,z_n$.

【解析】由题设得$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix}$，即$a_n=Aa_{n-1}$，

故$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

由$|\lambda E-A|=0$，即$\begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda+2 & 2 \\ 6 & 3 & \lambda-3 \end{vmatrix}=0$，得$\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=-2$，

当$\lambda_1=0$时，$Ax=0$，得基础解系为$\eta_1=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}^T$，

当$\lambda_2=1$时，$(E-A)x=0$，得基础解系为$\eta_2=\begin{pmatrix}2 & -2 & 3\end{pmatrix}^T$，

当$\lambda_3=-2$时，$(-2E-A)x=0$，得基础解系为$\eta_3=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\end{pmatrix}^T$，

故存在可逆矩阵$P=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$，

使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}$，即 $A=P\Lambda P^{-1}$，

则 $A^n=P\Lambda^nP^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&-2&2\\1&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&-2&2\\1&3&0\end{pmatrix}^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}-4+(-1)^{n+1}\cdot 2^n & -2+(-1)^{n+1}\cdot 2^n & 2\\ 4+(-1)^n\cdot 2^{n+1} & 2+(-1)^n\cdot 2^{n+1} & -2\\ -6 & -3 & 3\end{pmatrix}.$$

由 $\alpha_n=A\alpha_{n-1}$，得

$$\alpha_n=A^n\alpha_0=\begin{pmatrix}-4+(-1)^{n+1}\cdot 2^n & -2+(-1)^{n+1}\cdot 2^n & 2\\ 4+(-1)^n\cdot 2^{n+1} & 2+(-1)^n\cdot 2^{n+1} & -2\\ -6 & -3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}8+(-2)^n\\-8+(-2)^{n+1}\\12\end{pmatrix}.$$

则 $x_n=8+(-2)^n$，$y_n=-8+(-2)^{n+1}$，$z_n=12$.

22. (本题满分 12 分)

设总体 X 服从 $[0,\theta]$ 上的均匀分布，其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，记

$$X(n)=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\},\quad T_c=cX(n).$$

（1）求 c，使得 T_c 是 θ 的无偏估计;

（2）记 $h(c)=E(T_c-\theta)^2$，求 c 使得 $h(c)$ 最小.

【解析】(1) X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta},0<x<\theta\\ 0,其它\end{cases}$，

X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0,x<0\\ \dfrac{1}{\theta}x,0\le x<\theta\\ 1,x\ge\theta\end{cases}$.

$X_{(n)}$ 的分布函数为：

$F_{X_{(n)}}(x)=P\{\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\le x\}$

$=P\{X_1\le x,X_2\le x,\cdots,X_n\le x\}$

$=P\{X_1\le x\}\cdot P\{X_2\le x\}\cdot\cdots\cdot P\{X_n\le x\}=F^n(x)$，

$X_{(n)}$ 概率密度为 $f_{X_{(n)}}(x)=nF^{n-1}(x)\cdot f(x)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta^n}x^{n-1},0<x<\theta\\ 0,其它\end{cases}$.

$E(T_c)=cE(X_{(n)})=c\int_0^\theta x\cdot\dfrac{n}{\theta^n}x^{n-1}dx=\dfrac{cn}{n+1}\theta$，令 $E(T_c)=\dfrac{cn}{n+1}\theta=\theta$，

得 $c=\dfrac{n+1}{n}$.

(2) $E(T_c^2)=c^2E(X_{(n)}^2)=c^2\int_0^\theta x^2\cdot\dfrac{n}{\theta^n}x^{n-1}dx=\dfrac{c^2n}{n+2}\theta^2$

$h(c)=E(T_c-\theta)^2$

$=E(T_c^2-2\theta T_c+\theta^2)$

$=E(T_c^2)-2\theta E(T_c)+\theta^2$

$=\dfrac{c^2n}{n+2}\theta^2-\dfrac{2cn}{n+1}\theta^2+\theta^2$.

$h'(c)=\dfrac{2cn}{n+2}\theta^2-\dfrac{2n}{n+1}\theta^2$，令 $h'(c)=0$ 得 $c=\dfrac{n+2}{n+1}$. $h''(c)=\dfrac{2n}{n+2}\theta^2>0$，