第一次作业命题逻辑 & 谓词逻辑

1 选择填空

1.1 BCD

1.2 (1) 重言式 (2) 矛盾式 (3) 可满足式

1.3 (1)F (2)F (3)F (4)T

1.4 为真的为 (1)(3)(4)，为假的为 (2)(5)(6)(7)

2 简答

2.1

1. 0
2. 1
3. 1

2.2

1. 主析取范式为 $m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_7$，主合取范式为 $M_3 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$，成真赋值为 000，001，010，111，成假赋值为 011，100，101，110.
2. 主析取范式为 $m_0 \vee m_2 \vee m_3$，主合取范式为 M_1，成真赋值为 00，10，11，成假赋值为 01.

3. 主析取范式为 0，主合取范式为 $M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6 \wedge M_7$，无成真赋值，成假赋值为 000，001，010，011，100，101，110，111.

2.3

(1) 令$F(x)$：x 为人.

$G(x)$：x 长着绿色头发.

本命题直接符号化为

$$\neg \exists x(F(x) \wedge G(x)).$$

而

$$
\begin{aligned}
& \neg \exists x(F(x) \wedge G(x)) \\
\Leftrightarrow & \forall x \neg(F(x) \wedge G(x)) && \text{(量词否定等值式)} \\
\Leftrightarrow & \forall x(\neg F(x) \vee \neg G(x)) && \text{(德·摩根律)} \\
\Leftrightarrow & \forall x(F(x) \rightarrow \neg G(x)). && \text{(蕴涵等值式)}
\end{aligned}
$$

最后一步得到的公式满足要求(使用全称量词)，将它翻译成自然语言，即为

"所有的人都不长绿色头发."

这与原来的说法意思相同. 事实上，也可以先把原来的说法换成这个说法，从而可以直接写出这个符号化形式.

(2) 令$F(x)$：x 是北京人.

$G(x)$：x 去过香山.

换一个说法："不是所有的北京人都去过香山."命题可符号化为

$$\neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x)).$$

如果按原来的说法，则应符号化为

$$\exists x(F(x) \wedge \neg G(x)).$$

事实上，两者是等值的：

$$
\begin{aligned}
& \exists x(F(x) \wedge \neg G(x)) \\
\Leftrightarrow & \neg \neg \exists x(F(x) \wedge \neg G(x)) && \text{(双重否定律)} \\
\Leftrightarrow & \neg \forall x \neg(F(x) \wedge \neg G(x)) && \text{(量词否定等值式)} \\
\Leftrightarrow & \neg \forall x(\neg F(x) \vee G(x)) && \text{(德·摩根律)} \\
\Leftrightarrow & \neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x)). && \text{(蕴涵等值式)}
\end{aligned}
$$

2.4

(1) 取解释 I_1 为：个体域 $D=\mathbf{R}$（实数集合），$F(x)$：x 为有理数，$G(x)$：x 能表示成分数.

在 I_1 下，$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 的含义为

"对于任何实数 x，若 x 为有理数，则 x 能表示成分数."

简言之，"有理数都能表示成分数." 在此蕴涵式中，当前件 $F(x)$ 为真时，后件 $G(x)$ 也为真，不会出现前件为真，后件为假的情况，所以在 I_1 下，$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 为真命题.

在 I_1 下，$\forall x(F(x)\wedge G(x))$ 的含义为

"对于任何实数 x，x 都是有理数且能表示成分数."

这显然是假命题.

(2) 取解释 I_2 为：个体域 $D=\mathbf{N}$（自然数集合），$F(x)$：x 为奇数，$G(x)$：x 为偶数.

在 I_2 下，$\exists x(F(x)\wedge G(x))$ 的含义为

"存在自然数 x，x 既为奇数，又为偶数."

显然它为假命题.

在 I_2 下，$\exists x(F(x)\rightarrow G(x))$ 的含义为

"存在自然数 x，如果 x 为奇数，则 x 必为偶数."

取 $x=2$，则 $F(2)$ 为假，于是 $F(2)\rightarrow G(2)$ 为真，这表明 $\exists x(F(x)\rightarrow G(x))$ 为真命题.

分析 本题说明

$$\forall x(F(x)\rightarrow G(x)) \quad \forall x(F(x)\wedge G(x)),$$
$$\exists x(F(x)\wedge G(x)) \quad \exists x(F(x)\rightarrow G(x)).$$

其中，$A \quad B$ 表示 A 与 B 不等值.

2.5

(1) $\forall xF(x)\vee\exists yG(x,y)$

$\Leftrightarrow \forall zF(z)\vee\exists yG(x,y)$

$\Leftrightarrow \forall z\,\exists y(F(z)\vee G(x,y))$.

(2) $\exists x(F(x)\wedge\forall yG(x,y,z))\rightarrow\exists zH(x,y,z)$

$\Leftrightarrow \exists u(F(u)\wedge\forall vG(u,v,z))\rightarrow\exists wH(x,y,w)$

$\Leftrightarrow \exists u\,\forall v(F(u)\wedge G(u,v,z))\rightarrow\exists wH(x,y,w)$

$\Leftrightarrow \forall u\,\exists v\,\exists w((F(u)\wedge G(u,v,z))\rightarrow H(x,y,w))$.

(3) $\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$ (提示：使用量词否定等值式)

(4) $\exists z\forall x(F(z,y)\wedge(G(x)\rightarrow H(x,y)))$ (两个量词的指导变元相同，必须使用换名规则)

2.6 (3) **成真赋值为** 00，10

2.7

1. (1) $p \to ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q))$

$\Leftrightarrow \neg p \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

$\Leftrightarrow \neg p \vee p$ （析取范式）

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge (\neg q \vee q)) \vee (p \wedge (\neg q \vee q))$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$

$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3$ （主析取范式）

因为公式中含 2 个命题变项，共产生 4 个极小项，主析取范式中含全部极小项，所以为重言式.注意，当演算到第二步($\neg p \vee p$)时，已知公式为重言式，因而以下的演算均可省，直接写出 $2^2=4$个极小项即可，即如下演算：

$$p \to ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q))$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee p (\Leftrightarrow 1)$$

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3$$

(2) $(p \vee q) \to (q \to p)$

$\Leftrightarrow \neg (p \vee q) \vee (\neg q \vee p)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \vee \neg q)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee p \vee \neg q$ （析取范式）

$\Leftrightarrow p \vee \neg q$ （吸收律，还是析取范式）

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

$\Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_3$ （排序）

该式为非重言式的可满足式，其成真赋值为 00,10,11.

(3) $\neg (p \to r) \wedge r \wedge q$

$\Leftrightarrow \neg (\neg p \vee r) \wedge r \wedge q$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg r) \wedge r \wedge q$

$\Leftrightarrow p \wedge (\neg r \wedge r) \wedge q$

$\Leftrightarrow 0$

该式为矛盾式.

2.8

1. 由真值表可得成假赋值为 000,010,100, 故主合取范式为 $M_0 \wedge M_2 \wedge M_4$,
2. 由真值表可得成假赋值为 010,100,101,110, 故主合取范式为 $M_2 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$

3 证明

3.1 证明逻辑正确即可，无标准答案

3.2

（1）从左边开始演算

$$
\begin{aligned}
&(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \\
\Leftrightarrow &\neg\neg((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)) \\
\Leftrightarrow &\neg((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)) \\
\Leftrightarrow &\neg((\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee q)) \\
\Leftrightarrow &\neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \\
\Leftrightarrow &\neg(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \\
\Leftrightarrow &\neg(p \leftrightarrow q)
\end{aligned}
$$

（2）从右边开始演算

$$
\begin{aligned}
&(p \wedge q) \rightarrow r \\
\Leftrightarrow &\neg(p \wedge q) \vee r \\
\Leftrightarrow &\neg p \vee \neg q \vee r \\
\Leftrightarrow &\neg q \vee (\neg p \vee r)
\end{aligned}
$$

3.3 将条件表示为:

$$(A \rightarrow \neg B) \wedge ((A \wedge \neg C) \wedge (\neg A \wedge C)) \wedge (C \leftrightarrow D) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (E \rightarrow (B \wedge C \wedge D))$$

将其转化为主析取范式，可以判断是否有可能的方案。可以指派的方案有:

1. A 去
2. CD 去
3. CDE 去
4. BCDE 去
5. BCD 去
6. ACD 去