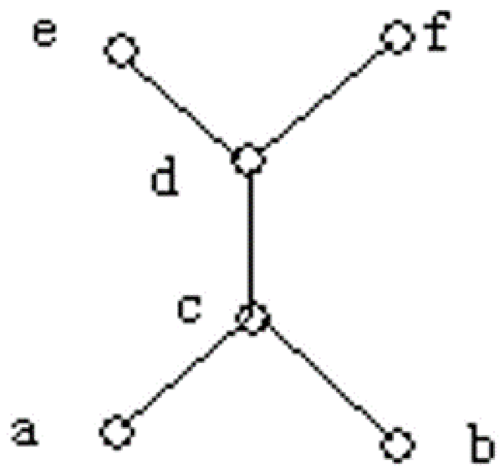
格的概念

第六章　　格和布尔代数

- §1格的概念
- §2分配格
- §3有补格

§6-1 格的概念

偏序集<A, ≼ >



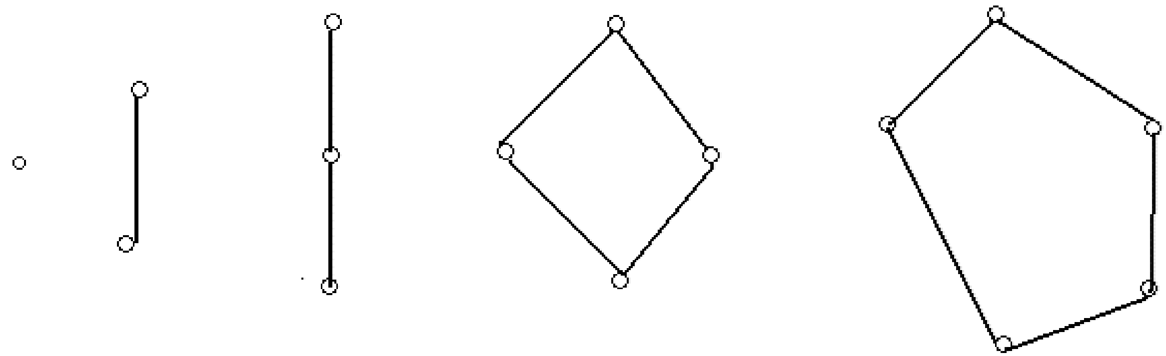
{a, b} 最小上界 c　　**最大下界** 无

{e, f} 最大下界 d　　**最小上界** 无

注意：今后把{a，b}的最小上界（最大下界）称为元素a，b的最小上界（最大下界）。

2

§6-1 格的概念



共同的特性：在这些偏序集中，任何两个元素都有最小上界和最大下界。

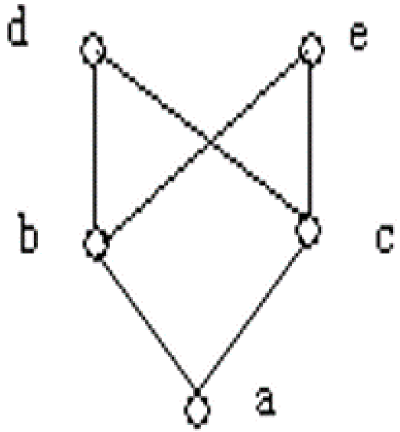
§6-1 格的概念

一、格

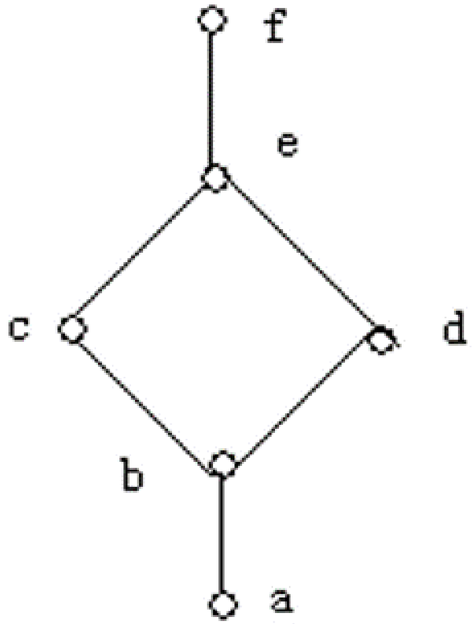
定义1 设<A, ≼>是一个偏序集，如果A中任意两个元素都有最小上界和最大下界，则称<A, ≼>为格。

4

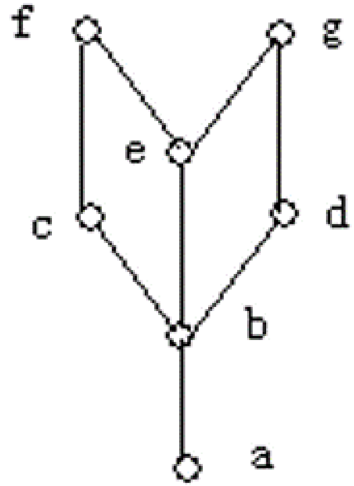
§ 6-1　格的概念



1



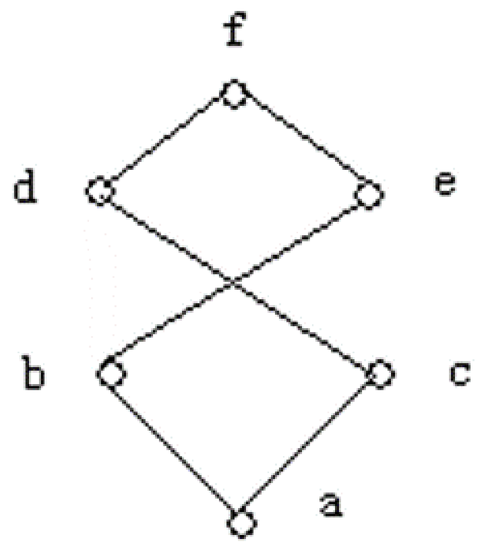
2



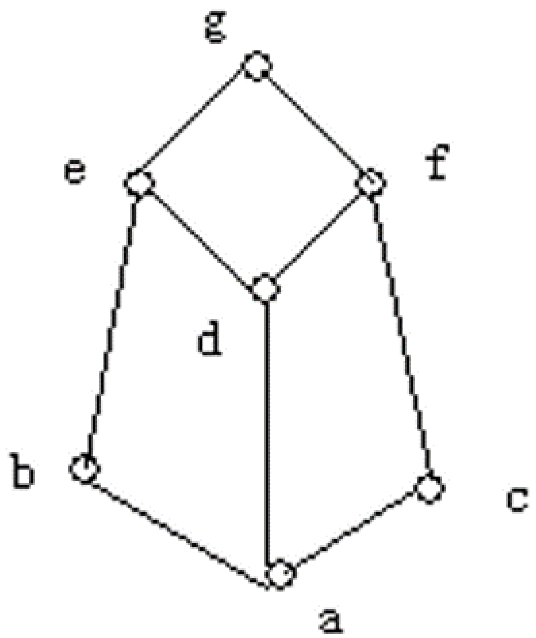
3

5

§ 6-1　格的概念



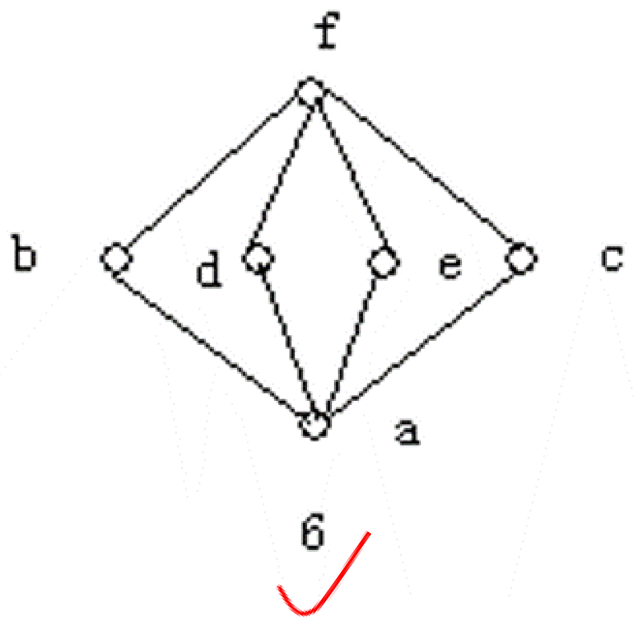
4 ✓

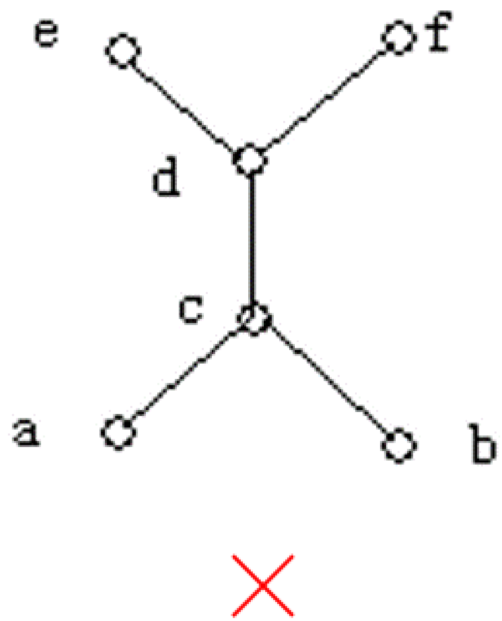


5 ✓

6

§ 6-1　格的概念





§6-1 格的概念

例：$<I_+$，$|>$：a | b当且仅当a整除b 称为正整数格

任意两元素a,b的最小上界：最小公倍数

最大下界：最大公约数

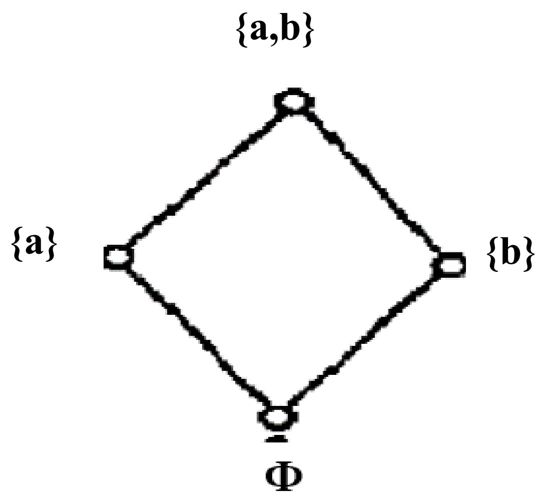
$<P(S)$，$\subseteq>$

任意两元素S1,S2的最小上界：S1∪S2

最大下界：S1 ∩S2

§6-1 格的概念

例： 给定S={a， b}，P(S)={Φ,{a},{b},{a,b}}，
那么，格<P(S)， ⊆>如图所示。



9

§6-1 格的概念

定义2 设$<A, \preccurlyeq>$是一个格，如果在A上定义两个二元运算$\vee$和$\wedge$，使得对于$\forall a,b \in A$，

$a \vee b$等于a和b的最小上界(LUB)，

$a \wedge b$等于a和b的最大下界(GLB)，

则称$<A,\vee,\wedge>$为由格$<A, \preccurlyeq>$所诱导的代数系统。

二元运算$\vee$和$\wedge$分别称为**并运算**和**交运算**。

§6-1 格的概念

例：1. $<I_+,\ |>$

$<I_+,\ \vee,\ \wedge>$ $\vee$：最小公倍数（lcm）

$\wedge$：最大公约数（gcd）

2. $<P(S),\ \subseteq>$

$<P(S),\ \vee,\ \wedge>$ $\vee$：集合的并 $\cup$

$\wedge$：集合的交 $\cap$

3. $<A,\ \leq>$

$<A,\ \vee,\ \wedge>$，A：{1,2,3,4,5}

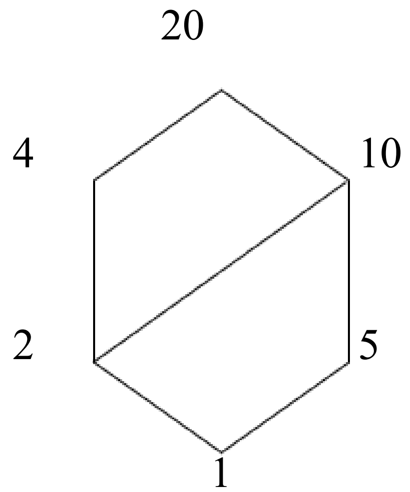
$a \vee b = \max(a,b)$

$a \wedge b = \min(a,b)$

§6-1 格的概念

4. 设$n\in I^+$， $I_n=\{x \mid x\in I^+，(x|n)\}$， $<I_n，|>$为格，

当$n=20$时，$I_{20}=\{1,2,4,5,10,20\}$，$<I_{20}，|>$如图：



$x\vee y=lcm(x,y)$, $x\wedge y=gcd(x,y)$

则$< I_n，\vee，\wedge >$是由格$<I_n,|>$所诱导的代数系统

12

§6-1 格的概念

二、子格

定义3 设<A, ≼>是一个格，由格<A, ≼>所诱导的代数系统为<A, ∨, ∧>，设$B\subseteq A$且$B\neq\varnothing$，如果A中的这两个运算∨和∧关于B是封闭的，则称<B, ≼>是<A, ≼>的子格。

注意：与子群概念的异同

13

§ 6-1 格的概念

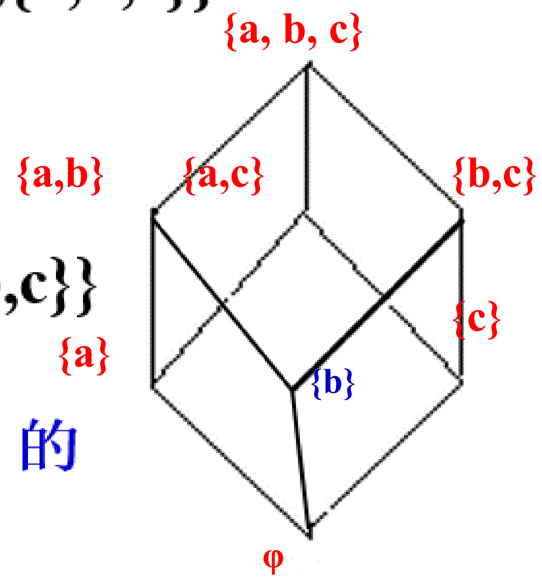
例： A={a,b,c} , $<P(A), \subseteq>$

$P(A)=\{\Phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{c,a\},\{a,b,c\}\}$

$S_1=\{\{a,b,c\}, \{a,b\},\{b,c\}, \{b\}\}$

$S_2=\{\{a,c\}, \{a\}, \{c\}, \Phi\}$

$S_3=\{\{\Phi,\{a\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{c,a\},\{a,b,c\}\}$



$<S_1, \subseteq>$
$<S_2, \subseteq>$ 是格，并且是 $<P(A), \subseteq>$ 的子格

$<S_3, \subseteq>$ 是格，但不是 $<P(A), \subseteq>$ 的子格

因为 $\{a,b\} \wedge \{b,c\}=\{b\} \notin S_3$

§6-1 格的概念

注意：对于格<A, ≼>，设B是A的非空子集，尽管<B, ≼>必定是一个偏序集，然而<B, ≼>不一定是格，即使<B, ≼>是格，也不一定是<A, ≼>的子格。

格的主要性质

格的对偶原理: 设<A, $\preccurlyeq$ >是格， “$\preccurlyeq$” 的逆关系 “$\preccurlyeq_R$” 与 A组成的偏序集<A, $\preccurlyeq_R$ >也是格。两者互为对偶。前者的GLB(最大下界），LUB（最小上界）恰好是后者的LUB，GLB。

如有关于任意格的有效命题P（对任意格都为真），

(1) 将 “$\preccurlyeq$” 换成 “$\geq$”，

(2) “$\wedge$”换成 “$\vee$”，

(3) “$\vee$”换成 “$\wedge$”，

便能得到对偶命题P’,它也是有效命题。

§6-1 格的概念

定理1 在一个格$<A,\preccurlyeq>$中，对于任意的$a, b \in A$，

都有 $a \preccurlyeq a \vee b$ ， $b \preccurlyeq a \vee b$

$a \wedge b \preccurlyeq a$ ， $a \wedge b \preccurlyeq b$

证明：因为$a \vee b$ 是a的一个上界

所以 $a \preccurlyeq a \vee b$

同理 $b \preccurlyeq a \vee b$

由对偶原理得 $a \wedge b \preccurlyeq a$ ， $a \wedge b \preccurlyeq b$

§6-1 格的概念

定理2 在一个格$<A, \preccurlyeq>$中，对于$\forall a, b, c, d \in A$，

如果有$a \preccurlyeq b$，$c \preccurlyeq d$，则：

$a \vee c \preccurlyeq b \vee d$　　　$a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d$

证明：因为$a \wedge c \preccurlyeq a$　$a \wedge c \preccurlyeq c$

而$a \preccurlyeq b$，$c \preccurlyeq d$

所以 $a \wedge c \preccurlyeq b$　$a \wedge c \preccurlyeq d$

所以 $a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d$

类似可证明$a \vee c \preccurlyeq b \vee d$

§6-1 格的概念

推论：(**格的保序性**）在一个格$\langle A, \preccurlyeq \rangle$中，

对于a, b, c∈A，**如果有$b \preccurlyeq c$**，则

$$a \vee b \preccurlyeq a \vee c \qquad a \wedge b \preccurlyeq a \wedge c$$

证明： 因为$a \preccurlyeq a$， $b \preccurlyeq c$

依据定理2可得。

§6-1 格的概念

定理3 设$\langle A, \preccurlyeq\rangle$是一个格，由格$\langle A, \preccurlyeq\rangle$所诱导的代数系统为$\langle A, \vee, \wedge\rangle$，则对于$\forall a, b, c, d \in A$，有：

（1）**交换律** $a \vee b = b \vee a$　　$a \wedge b = b \wedge a$

（2）**结合律** $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

（3）**幂等律** $a \vee a = a$　　$a \wedge a = a$

（4）**吸收律** $a \vee (a \wedge b) = a$

$a \wedge (a \vee b) = a$

20

§6-1 格的概念

结合律（$a \vee b$）$\vee c = a \vee$（$b \vee c$）

证明：∵ 由定理1知 $b \preccurlyeq b \vee c \preccurlyeq a \vee (b \vee c)$

$a \preccurlyeq a \vee (b \vee c)$

∴ $a \vee b \preccurlyeq a \vee (b \vee c)$

又∵ $c \preccurlyeq b \vee c \preccurlyeq a \vee (b \vee c)$

∴ （$a \vee b$）$\vee c \preccurlyeq a \vee$（$b \vee c$）

类似地 $a \vee$（$b \vee c$）$\preccurlyeq$（$a \vee b$）$\vee c$

∴ （$a \vee b$）$\vee c = a \vee$（$b \vee c$）

§6-1 格的概念

幂等律 $a \vee a = a$ $a \wedge a = a$

证明：$\because a \preccurlyeq a \vee a$

由自反性可知 $a \preccurlyeq a$

$\therefore a \vee a \preccurlyeq a$ （$a \vee a$是最小上界）

$\therefore a \vee a = a$

由对偶原理：$a \wedge a = a$

22

§6-1 格的概念

吸收律 $a \vee (a \wedge b) = a$， $a \wedge (a \vee b) = a$

证明：∵由定理1知 $a \preccurlyeq a \vee (a \wedge b)$

又∵ $a \preccurlyeq a$， $a \wedge b \preccurlyeq a$

∴ $a \vee (a \wedge b) \preccurlyeq a$

∴ $a \vee (a \wedge b) = a$

§6-1 格的概念

例：设$<N,\leqslant>$是一个偏序集，N是自然数集，$\leqslant$是“小于等于”关系，定义

$a \vee b = \max\{a,b\}$ （取大运算）

$a \wedge b = \min\{a,b\}$ （取小运算）

则$<N,\leqslant>$是一个格。由此格诱导的代数系统为$<N,\vee,\wedge>$。

则该代数系统的两个运算满足
$$\left\{\begin{array}{l}\text{交换律}\\ \text{结合律}\\ \text{等幂律}\\ \text{吸收律}\end{array}\right.$$

§6-1 格的概念

1. 交换性：任意两个数a和b的最大值（最小值）与b和a的最大值（最小值）是相等的。

2. 结合性：

max(max(a,b),c) =max(a,max(b,c)) 都是三个数a,b,c中的最大值，所以∨是可结合的，

min(min(a,b),c)=min(a, min(b,c))，说明∧是可结合的。

3. 幂等性：max(a,a)=min(a,a)=a

4. 吸收性：max(a,min(a,b)) =a

min(a, max(a,b))=a

§6-1 格的概念

引理：设<A,∨,∧>是一个代数系统，其中∨,∧都是二元运算且满足吸收性，则∨和∧都满足幂等性。

即要证，已知对于$\forall$ a, b$\in$A 有a∨(a∧b)=a和a∧(a∨b)=a

则：a∨a=a　　a∧a=a

证明: ∵ a∨（a∧b）=a　（吸收律）

用（a∨b）代替b，得:

a∨（a∧（a∨b））= a

又∵ a∧（a∨b）=a

∴ a∨a=a

同理可证a∧a=a

§6-1 格的概念

定理4 设<A,∨,∧>是一个代数系统，其中∨,∧都是二元运算且满足交换性，结合性和吸收性，则A上存在偏序关系≼，使<A, ≼>是一个格。

证明思路：分四部分内容来证明：

(1) 定义二元关系≼： $a \preccurlyeq b$当且仅当 $(a \wedge b)=a$

(2) 证明是偏序关系（证自反、反对称和传递）；

(3) 证明$a \wedge b$是a和b的最大下界（下确界）；

(4) 根据∨、∧满足交换律和吸收律，证明$a \vee b$是a和b的最小上界（上确界）。

证明：在A上定义二元关系≼为：

对于$\forall a, b \in A$，$a \preccurlyeq b$当且仅当$(a \wedge b) = a$

首先证明 ≼是偏序关系

（1）∵ $\wedge, \vee$满足吸收律 ∴ $\wedge$满足幂等性(根据引理)

即 $a \wedge a = a$ ∴ $a \preccurlyeq a$ 自反性

（2）设$a \preccurlyeq b$，则$a \wedge b = a$

再设$b \preccurlyeq a$，则$b \wedge a = b$

∵ $\wedge$满足交换律 ∴ $a = b$ 反对称性

（3）设$a \preccurlyeq b$，$b \preccurlyeq c$，则$a \wedge b = a$，$b \wedge c = b$

∵ $a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c$

$= a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a$

∴ $a \preccurlyeq c$ 传递性 即≼是偏序关系

§6-1 格的概念

其次证明$a\wedge b$是a和b的最大下界 $a\preccurlyeq b$当且仅当$a\wedge b=a$

由于 $(\underline{a\wedge b})\wedge a=\underline{a\wedge b}$

$(\underline{a\wedge b})\wedge b=\underline{a\wedge b}$

所以 $a\wedge b\preccurlyeq a$， $a\wedge b\preccurlyeq b$

即 $a\wedge b$是a和b的下界

设$c\in A$，是a和b的任一下界，即：$c\preccurlyeq a$，$c\preccurlyeq b$

$c\wedge a=c \quad c\wedge b=c$

$\because c\wedge(a\wedge b)=(c\wedge a)\wedge b=c\wedge b=c$

$\therefore c\preccurlyeq a\wedge b$

$\therefore a\wedge b$是a和b的最大下界

29

§6-1 格的概念

最后，根据交换性和吸收性，由$a\wedge b=a$ 得

$(a\wedge b)\vee b=a\vee b$

即 $b=a\vee b$

反之由 $a\vee b=b$ 得

$a\wedge(a\vee b)=a\wedge b$

$a=a\wedge b$

$\therefore$ $a=a\wedge b \Leftrightarrow b=a\vee b$

在A上定义二元关系≼为：
对于$\forall a, b\in A$,
$a\preccurlyeq b$当且仅当$a\wedge b=a$

$\therefore$ ≼即为：对于$\forall a, b\in A$，$a\preccurlyeq b$当且仅当 $a\vee b=b$

类似的可证明 $a\vee b$是 a和 b的最小上界

因此，$<A, \preccurlyeq>$是一个格

§ 6-1　格的概念

定理5 设<A, ≼>是一个格，则对于∀a, b, c∈A，有：

$$a\vee(b\wedge c)\preccurlyeq(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

$$(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\preccurlyeq a\wedge(b\vee c)$$

（分配不等式）

31

§6-1　格的概念

$a\vee(b\wedge c) \preccurlyeq (a\vee b)\wedge(a\vee c)$

证明：$\because a \preccurlyeq a\vee b$

$a \preccurlyeq a\vee c$

$\therefore a=a\wedge a \preccurlyeq (a\vee b)\wedge(a\vee c)$　　（1）

又$\because b\wedge c \preccurlyeq b \preccurlyeq a\vee b$

$b\wedge c \preccurlyeq c \preccurlyeq a\vee c$

$\therefore b\wedge c = (b\wedge c)\wedge(b\wedge c) \preccurlyeq (a\vee b)\wedge(a\vee c)$　（2）

$\therefore a\vee(b\wedge c) \preccurlyeq (a\vee b)\wedge(a\vee c)$

利用对偶原理$(a\wedge b)\vee(a\wedge c) \preccurlyeq a\wedge(b\vee c)$

§6-1 格的概念

定理6 设$<A, \preccurlyeq>$是一个格，则对于$\forall a, b \in A$，有

$$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$$

证明：先证$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$

（1）$\because a \preccurlyeq b,\ a \preccurlyeq a,\ \therefore a \preccurlyeq a \wedge b$

又$\because a \wedge b \preccurlyeq a$，则 $a \wedge b = a$

（2）反之，假定 $a \wedge b = a$ 则 $a = a \wedge b \preccurlyeq b$

$\therefore a \preccurlyeq b$

$\therefore a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$

同理：$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \vee b = b$

§6-1 格的概念

定理7 设<A, ≼>是一个格，对于$\forall a, b, c\in A$，有

$$a \preccurlyeq c \Leftrightarrow a\vee(b\wedge c) \preccurlyeq (a\vee b)\wedge c$$ （模不等式）

证明：由定理6　$a \preccurlyeq c \Leftrightarrow a\vee c=c$

由定理5　$a\vee(b\wedge c) \preccurlyeq (a\vee b)\wedge(a\vee c)$

用c代替$a\vee c$　$a\vee(b\wedge c)\preccurlyeq (a\vee b)\wedge c$

$\therefore\ a \preccurlyeq c \Rightarrow a\vee(b\wedge c) \preccurlyeq (a\vee b)\wedge c$

若　$a\vee(b\wedge c) \preccurlyeq (a\vee b)\wedge c$

则　$a \preccurlyeq a\vee (b\wedge c) \preccurlyeq (a\vee b)\wedge c\preccurlyeq c$　即 $a \preccurlyeq c$

$\therefore\ a\vee(b\wedge c) \preccurlyeq (a\vee b)\wedge c \Rightarrow a\preccurlyeq c$

$\therefore\ a\preccurlyeq c\Leftrightarrow a\vee(b\wedge c) \preccurlyeq (a\vee b)\wedge c$

§ 6-1　格的概念

推论： 在格<A, ≼>中，则对于∀ a, b, c∈A，必有：

$$(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\preccurlyeq a\wedge(b\vee(a\wedge c))$$

$$a\vee(b\wedge(a\vee c))\preccurlyeq(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

证明：$\because (a\wedge b)\vee(a\wedge c)\preccurlyeq(a\vee(a\wedge c))\wedge(b\vee(a\wedge c))$

$\therefore (a\wedge b)\vee(a\wedge c)\preccurlyeq a\wedge(b\vee(a\wedge c))$

$\because a\vee(b\wedge(a\vee c))\preccurlyeq(a\vee b)\wedge(a\vee(a\vee c))$

$\therefore a\vee(b\wedge(a\vee c))\preccurlyeq(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

35

§6-1 格的概念

定义: 设$<A_1, \preccurlyeq_1>$和$<A_2, \preccurlyeq_2>$是两个格，由它们分别诱导的代数系统为$<A_1,\vee_1,\wedge_1>$和$<A_2,\vee_2,\wedge_2>$，若存在着一个从A_1到A_2的映射f，使得对于$\forall a,b\in A_1$，有

$$f(a \vee_1 b) = f(a) \vee_2 f(b)$$

$$f(a \wedge_1 b) = f(a) \wedge_2 f(b)$$

则称f为从$<A_1,\vee_1,\wedge_1>$到$<A_2,\vee_2,\wedge_2>$ 的**格同态**。

称$<f(A_1), \preccurlyeq_2>$是$<A_1, \preccurlyeq_1>$的**格同态象**。

当f**是双射**时，称f为从$<A_1,\vee_1,\wedge_1>$到$<A_2,\vee_2,\wedge_2>$的**格同构**。

36

§6-1 格的概念

定理8：(格同态的保序性)

设f是$\langle A_1,\preccurlyeq_1\rangle$和$\langle A_2,\preccurlyeq_2\rangle$的格同态，则对$\forall x, y\in A_1$，如果$x\preccurlyeq_1 y$，必有$f(x)\preccurlyeq_2 f(y)$

证明：$\because x\preccurlyeq_1 y$

$\therefore x\wedge_1 y = x$

$f(x\wedge_1 y) = f(x) = f(x)\wedge_2 f(y)$（同态公式）

$\therefore f(x)\preccurlyeq_2 f(y)$

注意：定理8的逆命题是不一定成立的

格同态是保序的，但是保序的不一定是格同态

§ 6-1　格的概念

例：设$<S, \preccurlyeq>$是一个格，其中$S=\{a,b,c,d,e\}$，如图

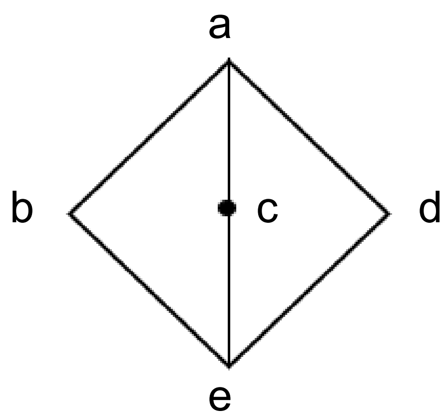
则$< P(S), \subseteq >$也是一个格。

作f：$S \rightarrow P(S)$，对$\forall x \in S$，

使得$f(x)=\{ y \mid y \in S，\ y \preccurlyeq x\}$

有$f(a)=S$，$f(b)=\{b,e\}$，$f(c)=\{c,e\}$，

$f\{d\}=\{d,e\}$，$f(e)=\{e\}$



当$x, y \in S$ 且 $x \preccurlyeq y$ 时，有$f(x) \subseteq f(y)$　$\therefore f$是保序的

但是，对于$b, d \in S$，有$b \vee d=a$

$$f(b \vee d) = f(a) = S \quad f(b) \cup f(d) = \{b, d, e\}$$

$$\therefore f(b \vee d) \neq f(b) \cup f(d)$$

38

§6-1 格的概念

定理9： 设两个格$<A_1, \preccurlyeq_1>$和$<A_2, \preccurlyeq_2>$，f是从A_1到A_2的双射，则f是$<A_1, \preccurlyeq_1>$到$<A_2, \preccurlyeq_2>$的格同构，当且仅当对$\forall a, b \in A_1$，$a \preccurlyeq_1 b \Leftrightarrow f(a) \preccurlyeq_2 f(b)$。

证明：设f是$<A_1, \preccurlyeq_1>$到$<A_2, \preccurlyeq_2>$的格同构。

由定理8知对$\forall a, b \in A_1$，若$a \preccurlyeq_1 b$，必有$f(a) \preccurlyeq_2 f(b)$

反之，设$f(a) \preccurlyeq_2 f(b)$，

则$f(a) \wedge_2 f(b) = f(a \wedge_1 b) = f(a)$

$\because$ f是双射

$\therefore$ $a \wedge_1 b = a$　　故$a \preccurlyeq_1 b$

§ 6-1　格的概念

设对$\forall a, b \in A_1$，$a \preccurlyeq_1 b \Leftrightarrow f(a) \preccurlyeq_2 f(b)$

设$a \wedge_1 b = c$，则$c \preccurlyeq_1 a$，$c \preccurlyeq_1 b$，有

$f(a \wedge_1 b) = f(c)$，$f(c) \preccurlyeq_2 f(a)$，$f(c) \preccurlyeq_2 f(b)$

$\therefore f(c) \preccurlyeq_2 f(a) \wedge_2 f(b)$

设$f(a) \wedge_2 f(b) = f(d)$，则

$f(c) \preccurlyeq_2 f(d)$，$f(d) \preccurlyeq_2 f(a)$，$f(d) \preccurlyeq_2 f(b)$

$\therefore d \preccurlyeq_1 a$，$d \preccurlyeq_1 b$

$\therefore d \preccurlyeq_1 a \wedge_1 b$ 即$d \preccurlyeq_1 c$，$f(d) \preccurlyeq_2 f(c)$

$\therefore f(c) = f(d)$

即$f(a \wedge_1 b) = f(a) \wedge_2 f(b)$

类似地可证$f(a \vee_1 b) = f(a) \vee_2 f(b)$

因此，f是$<A_1, \preccurlyeq_1>$到$<A_2, \preccurlyeq_2>$的格同构

40