

# 2023-2024 沪上插班生数学 12 月阶段测试卷

姓名: 本科院校

注: 满分: 150 分; 时间 120 分钟

一、选择题, 每题 5 分, 共 50 分

(1) 当  $x \rightarrow 0$  时,  $e^x \sin x - ax(1+x)$  与  $x^n$  是同阶无穷小, 则 ( )

A.  $a = \frac{1}{2}, n = 3.$

B.  $a = \frac{1}{2}, n = 2.$

C.  $a = 1, n = 3.$

D.  $a = 1, n = 2.$

(2) 设  $f(x) = |\ln|x||$ , 则下列选项正确的是 ( )

A.  $f'(1) = 1.$

B.  $f'(-1) = -1.$

C. 当  $|x| > 1$  时,  $f'(x) = -\frac{1}{x}.$

D. 当  $0 < |x| < 1$  时,  $f'(x) = -\frac{1}{x}.$

(3) 设  $f(x)$  为连续函数, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x [1+x+f(x)]$  存在, 则曲线  $y=f(x)$  有斜渐近线 ( )

A.  $y = x.$

B.  $y = -x.$

C.  $y = x+1.$

D.  $y = -x-1.$

(4) 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上二阶可导,  $f(0)=0$ ,  $f''(x) > 0$ , 当  $0 < a < x < b$  时, 有 ( )

A.  $af(x) < xf(a).$

B.  $bf(x) < xf(b).$

C.  $xf(x) < bf(b).$

D.  $xf(x) > af(a).$

(5) 若  $I = \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{a}{x+2} \right) dx$  收敛, 则 ( )

A.  $a = 1, I = \ln 4.$

B.  $a > 1, I = \ln 2.$

C.  $a = 1, I = \ln 2.$

D.  $a < 1, I = \ln 4.$

(6) 设  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上有二次连续导数, 且满足  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2}{n^2+1} (n=1,2,\cdots)$ , 则  $f(x)$  在  $x=0$  处的二次泰勒多项式为 ( )

- A.  $1-2x^2$ .                      B.  $x-2x^2$ .                      C.  $1-x^2$ .                      D.  $1+x-x^2$ .

(7) 函数  $f(x,y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{|x|}{y}}$  在  $(0,1)$  处 ( )

- A.  $f'_x(0,1) = f'_y(0,1) = 1$ .                      B.  $df|_{(0,1)} = dy$ .  
C.  $df|_{(0,1)} = dx$ .                      D.  $df|_{(0,1)}$  不存在.

(8) 微分方程  $y'^2 - yy'' = 0$  的通解为 ( )

- A.  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ .                      B.  $y = c_1 + c_2 e^x$ .  
C.  $y = c_2 e^{c_1 x}$ .                      D.  $y = c_2 x e^{c_1 x}$ .

(9) 当  $x \rightarrow 0$  时,  $2\arctan x - \ln \frac{1+x}{1-x}$  是关于  $x$  的  $n$  阶无穷小, 则  $n =$  ( )

- A.1.                      B.2.                      C.3.                      D.4.

(10) 设  $f(x) = \ln\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right) - x^{\frac{2}{3}}$ , 则 ( )

- A.  $f'(0)$  不存在,  $f''(0)$  不存在.                      B.  $f'(0)$  存在,  $f''(0)$  不存在.  
C.  $f'(0)$  存在,  $f''(0)$  存在.                      D. 无法确定  $f''(0)$  是否存在.

## 二、填空题, 每题 5 分, 共 30 分

(11) 曲线  $y = \int_0^x n\sqrt{\sin t} dt$  ( $0 \leq x \leq n\pi$ ,  $n$  为正整数) 的全长为\_\_\_\_\_.

(12) 曲线  $y = e^{-x}\sqrt{\sin x} (x \geq 0)$  绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积为\_\_\_\_\_.

(13) 设曲线  $y = k(x^2 - 3)^2$  ( $k > 0$ ), 若曲线在拐点的法线通过原点, 则  $k =$ \_\_\_\_\_.

(14)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} =$ \_\_\_\_\_.

(15) 设曲线  $y = f(x)$  由  $\begin{cases} x = \int_0^t e^{-u^2} du \\ y = \int_0^t \sin(t-u) du \end{cases}$  确定, 则曲线在  $t = 0$  对应点处的曲率为\_\_\_\_\_.

(16) 设质点以速度  $\sqrt{t}e^{-\sqrt{t}}$  ( $t \geq 0$ ) m/s 作直线运动, 则质点从开始运动到停止运动经过的路程为\_\_\_\_\_m.

### 三、解答题, 共 70 分

(17) (本题满分 10 分)

计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 - \sin x - \cos x}{1 + x} \right)^{\frac{1}{2 \sin x}}$ .

(18) (本题满分 12 分)

计算  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} \cdot \frac{a^x - 1}{a - 1} \right)^{\frac{1}{x}}$  ( $a > 0, a \neq 1$ ).

(19) (本题满分 12 分) 设函数  $f(x) = x^2 \ln ax$  ( $a > 0, x > 0$ ).

(I) 求  $f(x)$  的极值;

(II) 当  $a$  变动时, 求曲线  $y = f(x)$  拐点的轨迹方程  $y = y(x)$  与  $x = 1$  及  $x$  轴所围图形绕  $y$  轴转一周所得旋转体的体积  $V$ .

(20) (本题满分 12 分)

设曲线  $y = y(x)$  ( $y > 0$ ) 上任一点  $M(x, y)$  处的切线与  $x$  轴交于点  $N$ , 且

$$|OM| = |ON|, \quad y(0) = 1, \quad y'(x) > 0,$$

求  $y = y(x)$ .

(21) (本题满分 12 分) 设不恒为零的函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上有二阶连续导数, 且  $f(0)=f(1)=0$ . 记

$M = \max_{x \in [0,1]} \{|f(x)|\}$ . 证明:

(I) 至少存在一点  $\xi \in (0,1)$ , 使得  $|f'(\xi)| \geq 2M$ ;

(II)  $\left| \int_0^1 x(x-1)f''(x)dx \right| \leq 2M$ .

(22) (本题满分 12 分) 设  $f(x)$  在  $[0,a](a>0)$  上有二阶连续导数, 且  $f(x) \geq 0$ ,  $f(0)=0$ ,

$f''(x) > 0$ , 证明:  $\int_0^a xf(x)dx > \frac{2}{3}a \int_0^a f(x)dx$ .