等价关系与偏序关系

- 等价关系的定义与实例
- 等价类及其性质
- 商集与集合的划分
- 等价关系与划分的一一对应
- 偏序关系
- 偏序集与哈斯图
- 偏序集中的特定元素

等价关系的定义与实例

定义 设 R 为非空集合上的关系. 如果 R 是自反的、对称的和传递的, 则称 R 为 A 上的等价关系. 设 R 是一个等价关系, 若 $<x,y>\in R$, 称 x 等价于 y, 记做 $x\sim y$.

实例 设 $A=\{1,2,\ldots,8\}$, 如下定义 A 上的关系 R:

$$R = \{ <x,y> \mid x,y\in A \wedge x\equiv y(\text{mod } 3) \}$$

其中 $x\equiv y(\text{mod } 3)$ 叫做 x 与 y 模3相等, 即 x 除以3的余数与 y 除以3的余数相等.

2

等价关系的验证

验证模 3 相等关系 R 为 A 上的等价关系, 因为

$\forall x \in A$, 有 $x \equiv x(\mathrm{mod}\ 3)$

$\forall x, y \in A$, 若 $x \equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$, 则有 $y \equiv x(\mathrm{mod}\ 3)$

$\forall x, y, z \in A$, 若 $x \equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$, $y \equiv z(\mathrm{mod}\ 3)$,

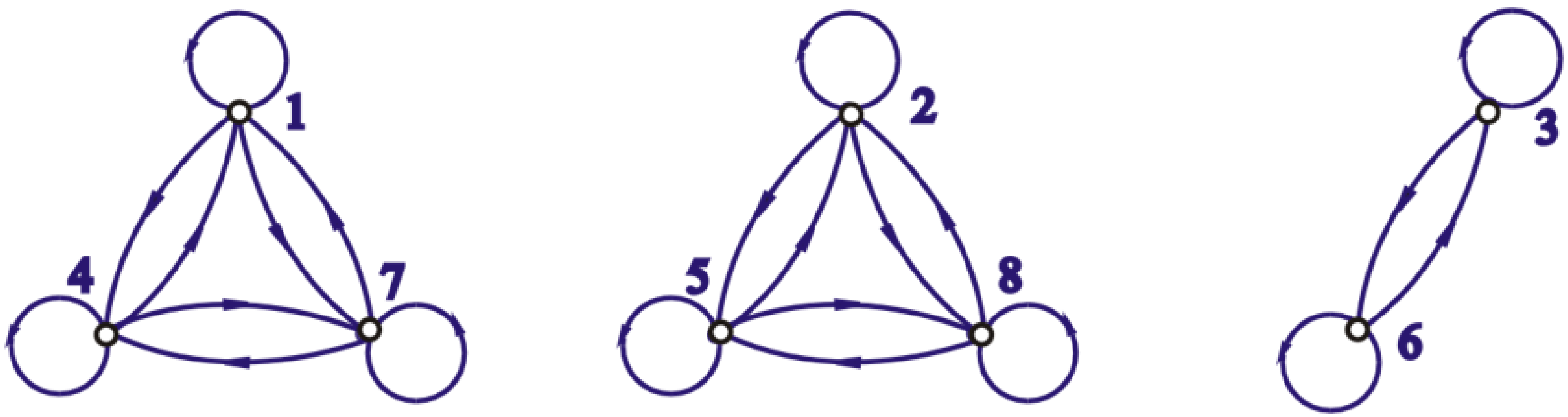
则有 $x \equiv z(\mathrm{mod}\ 3)$

自反性、对称性、传递性得到验证

A上模3等价关系的关系图

设 $A=\{1,2,\cdots,8\}$,

$R=\{ \langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge x\equiv y \pmod 3) \}$



等价类

定义 设R为非空集合A上的等价关系, $\forall x \in A$, 令

$$[x]_R = \{ y \mid y \in A \wedge xRy \}$$

称 $[x]_R$ 为 x 关于R 的**等价类**, 简称为 x 的等价类, 简记为$[x]$.

实例 A={ 1, 2, ⋯ , 8 }上模 3 等价关系的等价类:

[1]=[4]=[7]={1,4,7}

[2]=[5]=[8]={2,5,8}

[3]=[6]={3,6}

等价类的性质

定理1 设R是非空集合A上的等价关系, 则

(1) $\forall x \in A$, $[x]$ 是A的非空子集.

(2) $\forall x, y \in A$, 如果 $x\,R\,y$, 则 $[x]=[y]$.

(3) $\forall x, y \in A$, 如果 $x \not R\, y$, 则 $[x]$与$[y]$不交.

(4) $\cup\{\,[x] \mid x \in A\}=A$，即所有等价类的并集就是$A$.

实例

A={ 1, 2, … , 8 }上模 3 等价关系的等价类：

$[1]=[4]=[7]=\{1,4,7\}$，

$[2]=[5]=[8]=\{2,5,8\}$，

$[3]=[6]=\{3,6\}$

以上3 类两两不交，

$\{1,4,7\}\cup\{2,5,8\}\cup\{3,6\} = \{1,2, \dots ,8\}$

商集

定义　设R为非空集合A上的等价关系, 以R的所有等价类作为元素的集合称为A关于R的商集, 记做 A/R, $A/R = \{\ [x]_R \mid x \in A\ \}$

实例　$A=\{1,2,\cdots,8\}$,A关于模3等价关系R的商集为

$$A/R = \{\ \{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6\}\ \}$$

A关于恒等关系和全域关系的商集为:

$$A/I_A = \{\ \{1\},\{2\}, \cdots ,\{8\}\}$$

$$A/E_A = \{\ \{1, 2, \cdots ,8\}\ \}$$

集合的划分

定义　设A为非空集合，若A的子集族$\pi(\pi\subseteq P(A))$满足下面条件：

(1) $\varnothing\notin\pi$

(2) $\forall x\forall y\,(x,y\in\pi\wedge x\neq y\rightarrow x\cap y=\varnothing)$

(3) $\cup\pi=A$

则称π是A的一个划分，称π中的元素为A的划分块.

例题

例1 设$A=\{a, b, c, d\}$,

给定$\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6$如下:

$\pi_1=\{\{a, b, c\}, \{d\}\}$, $\pi_2=\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$

$\pi_3=\{\{a\}, \{a, b, c, d\}\}$, $\pi_4=\{\{a, b\}, \{c\}\}$

$\pi_5=\{\varnothing, \{a, b\}, \{c, d\}\}$, $\pi_6=\{\{a, \{a\}\}, \{b, c, d\}\}$

则π_1和π_2 是A的划分, 其他都不是 A 的划分.

为什么?

等价关系与划分的一一对应

商集 A/R 就是 A 的一个划分

不同的商集对应于不同的划分

任给 A 的一个划分π, 如下定义 A 上的关系 R:

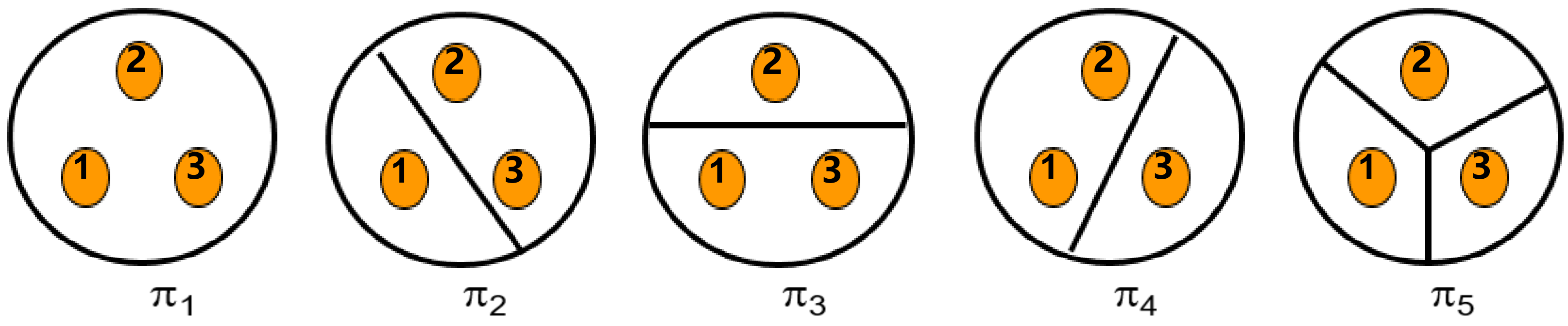
$R = \{<x,y> \mid x,y \in A \wedge x$ 与 y 在π的同一划分块中$\}$

则 R 为 A上的等价关系, 且该等价关系确定的商集就是π.

例2 给出$A=\{1,2,3\}$上所有的等价关系

求解思路：先做出A的所有划分, 然后根据划分写出对应的等价关系.

等价关系与划分之间的对应



π_1对应于全域关系 E_A， π_5 对应于恒等关系 I_A

π_2,π_3和π_4分别对应等价关系 R_2, R_3 和 R_4.

$R_2=\{<2,3>,<3,2>\}\cup I_A$， $R_3=\{<1,3>,<3,1>\}\cup I_A$

$R_4=\{<1,2>,<2,1>\}\cup I_A$

12

等价关系的计数

A 上的等价关系计数

$$\sum_{m=1}^{n}\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix}$$

这里m表示分成m个等价类. $|A|=n$.

第二类Stirling数的定义

定义　n 个不同的球恰好放到 r 个相同的盒子里的方法数称为第二类 Stirling 数，记作$\left\{\begin{matrix} n \\ r \end{matrix}\right\}$

实例，

$$\left\{\begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}\right\} = 7$$

具体方案如下：

a,b,c | d　　a,c,d | b　　a,b,d | c　　b,c,d | a

a,b | c,d　　a,c | b,d　　a,d | b,c

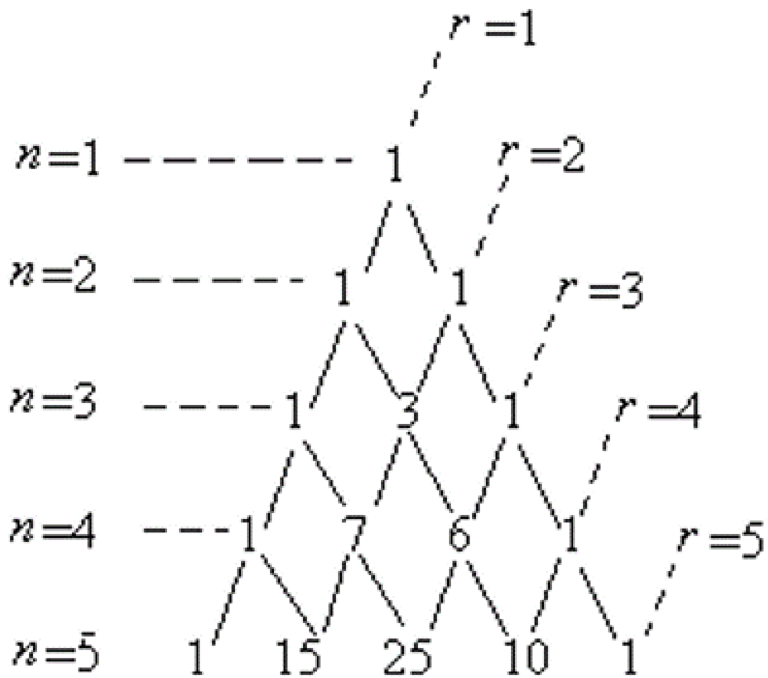
14

第二类Stirling数的递推方程

递推方程

$$\begin{Bmatrix} n \\ r \end{Bmatrix} = r\begin{Bmatrix} n-1 \\ r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} n \\ 0 \end{Bmatrix} = 0, \quad \begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} = 1$$



证明：取球 a_1，

a_1 单独放一个盒子，$\begin{Bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{Bmatrix}$

a_1 不单独放一个盒子，$r\begin{Bmatrix} n-1 \\ r \end{Bmatrix}$

先放 n–1 个球到 r 个盒子里，插入 a_1 有 r 种方法

两个恒等式

1. $\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1$

a_1 先放在一个盒子里，

剩下的 n–1 个球每个有 2 种选择，

但是全落入 a_1 的盒子的方法不符合要求.

2. $\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{2}$

n 个球放到 n–1 个盒子，必有一个盒子含 2 个球，

其余每个盒子 1 个球. 选择两个球有 $C(n,2)$种方法.

16

实例

例3 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，在 $A\times A$ 上定义二元关系 R:

$$<<x,y>,<u,v>>\in R \Leftrightarrow x+y = u+v,$$

求 R 导出的划分.

解 $A\times A=\{<1,1>, <1,2>, <1,3>, <1,4>, <2,1>, <2,2>, <2,3>,<2,4>,<3,1>, <3,2>, <3,3>, <3,4>, <4,1>, <4,2>, <4,3>, <4,4>\}$

实例（续）

根据 $<x,y>$ 的 $x+y=2,3,4,5,6,7,8$ 将$A\times A$划分成7个等价类:

$$
\begin{aligned}
(A\times A)/R=\{ & \{<1,1>\}, \{<1,2>,<2,1>\}, \\
& \{<1,3>, <2,2>, <3,1>\}, \\
& \{<1,4>, <2,3>, <3,2>, <4,1>\}, \\
& \{<2,4>, <3,3>, <4,2>\}, \\
& \{<3,4>, <4,3>\}, \{<4,4>\} \}
\end{aligned}
$$

偏序关系

定义　非空集合A上的自反、反对称和传递的关系，称为A上的偏序关系，记作≼. 设≼为偏序关系, 如果$<x, y>\in\preccurlyeq$, 则记作 $x\preccurlyeq y$, 读作 x “小于或等于” y.

实例

集合A上的恒等关系 I_A 是A上的偏序关系.

小于或等于关系, 整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系.

相关概念

*x*与 *y* 可比：设*R*为非空集合*A*上的偏序关系，

$$x,y\in A,\ x\text{与}y\text{可比} \Leftrightarrow x\preccurlyeq y \vee y\preccurlyeq x.$$

结论：任取两个元素*x*和*y*, 可能有下述情况：

$$x\prec y,\ y\prec x,\ x=y,\ x\text{与}y\text{不是可比的}.$$

这里$x\prec y$表示$x\preccurlyeq y$且$x\neq y$.

全序关系：

*R*为非空集合*A*上的偏序, $\forall x,y\in A$, *x*与 *y* 都是可比的，则称 *R* 为全序（或 线序）

实例：数集上的小于或等于关系是全序关系

整除关系不是正整数集合上的全序关系

相关概念（续）

覆盖：设R为非空集合A上的偏序关系, $x, y \in A$, 如果 $x \prec y$且不存在 $z \in A$ 使得 $x \prec z \prec y$, 则称 y 覆盖 x.

实例：{ 1, 2, 4, 6 }集合上的整除关系,

2 覆盖 1,

4 和 6 覆盖 2.

4 不覆盖 1.

偏序集与哈斯图

定义 集合A和A上的偏序关系$\preccurlyeq$一起叫做偏序集，记作 $<A,\preccurlyeq>$.

实例：整数集和小于等于关系构成偏序集$<Z,\leq>$，幂集$P(A)$和包含关系构成偏序集$<P(A),R_{\subseteq}>$.

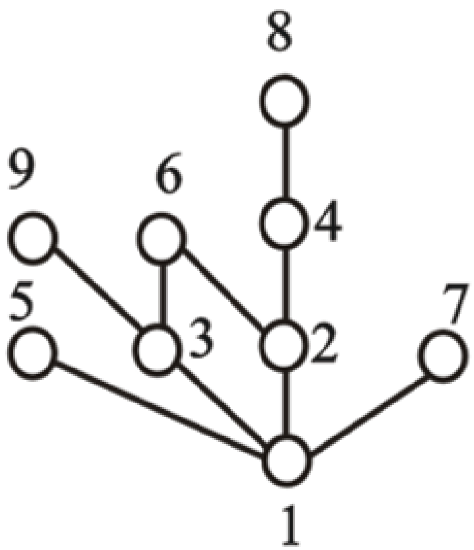
哈斯图：利用偏序自反、反对称、传递性简化的关系图

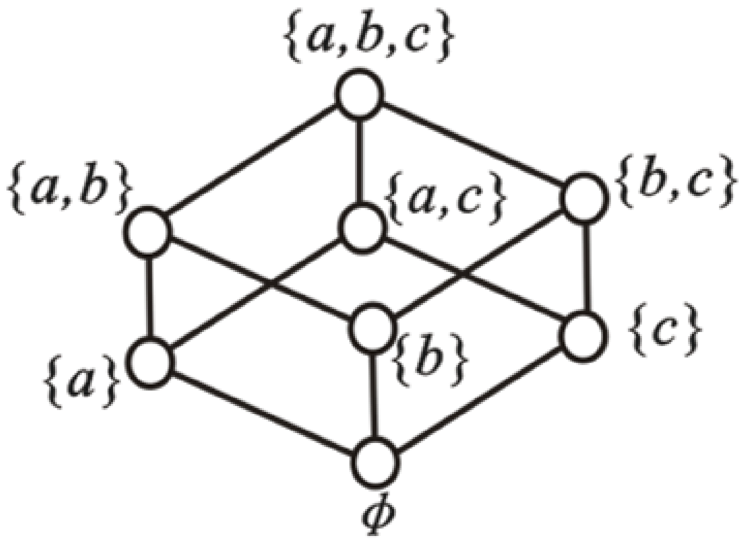
特点：每个结点没有环，两个连通的结点之间的序关系通过结点位置的高低表示，位置低的元素的顺序在前，具有覆盖关系的两个结点之间连边

哈斯图实例

例4 $<\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}, R_{\text{整除}}>$

$<P(\{a, b, c\}), R_{\subseteq}>$





23

哈斯图实例（续）

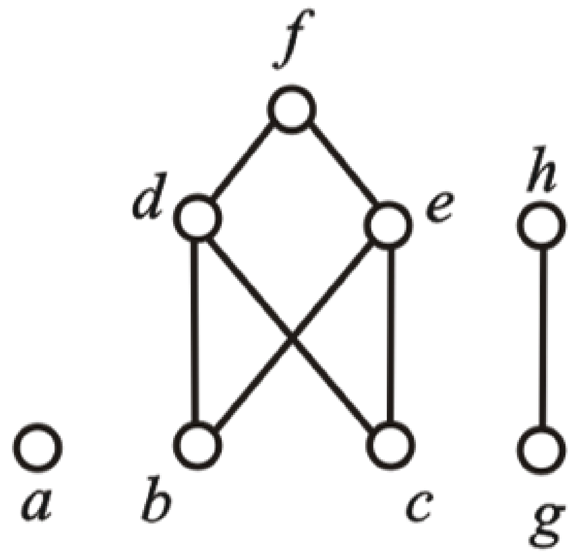
例5

已知偏序集$<A,R>$

的哈斯图如右图所示,

试求出集合A和关系

R的表达式.



$A=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$R=\{<b,d>,<b,e>,<b,f>,<c,d>,$

$<c,e>,<c,f>,<d,f>,<e,f>,<g,h>\} \cup I_A$

偏序集的特定元素

定义　设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$.

(1) 若$\forall x(x\in B\to y\preccurlyeq x)$ 成立, 则称 y 为 B 的最小元.

(2) 若$\forall x(x\in B\to x\preccurlyeq y)$ 成立, 则称 y 为 B 的最大元.

(3) 若$\neg\exists x\ (x\in B\wedge x\prec y)$ 成立, 则称 y 为B的极小元.

(4) 若$\neg\exists x\ (x\in B\wedge y\prec x)$ 成立, 则称 y 为B的极大元.

特殊元素的性质

- 对于有穷集，极小元和极大元必存在，可能存在多个.
- 最小元和最大元不一定存在，如果存在一定惟一.
- 最小元一定是极小元；最大元一定是极大元.
- 孤立结点既是极小元，也是极大元.

偏序集的特定元素(续)

定义 设$<A, \preccurlyeq>$为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in A$.

(1) 若$\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$ 成立, 则称 y 为B的上界.

(2) 若$\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$ 成立, 则称 y 为B的下界.

(3) 令$C = \{y \mid y$为B的上界$\}$, 则称C的最小元为B的最小上界 或 上确界.

(4) 令$D = \{y \mid y$为B的下界$\}$, 则称D的最大元为B的最大下界 或 下确界.

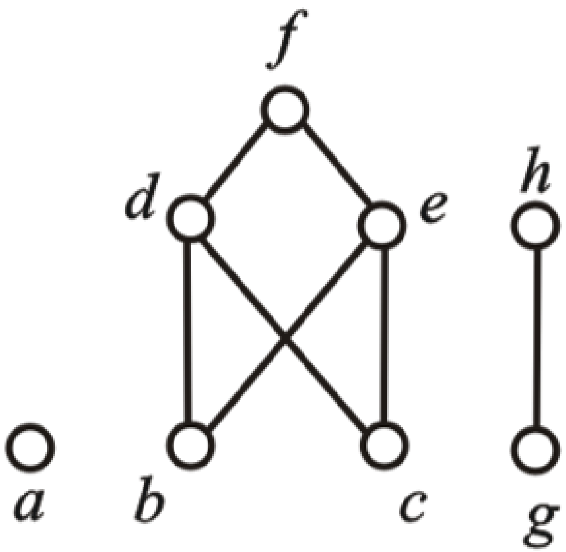
27

特殊元素的性质

- 下界、上界、下确界、上确界不一定存在
- 下界、上界存在不一定惟一
- 下确界、上确界如果存在，则惟一
- 集合的最小元就是它的下确界，最大元就是它的上确界；反之不对.

实例

例6 设偏序集$<A,\preccurlyeq>$如下图所示，求 A 的极小元、最小元、极大元、最大元. 设 $B=\{b,c,d\}$, 求 B 的下界、上界、下确界、上确界.



极小元：a, b, c, g；

极大元：a, f, h；

没有最小元与最大元.

B的下界和最大下界都不存在, 上界有d 和 f, 最小上界为 d.

偏序集的特殊子集

定义4.30 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$.

(1) 如果$\forall x,y\in B$，x与y都是可比的，则称B是A中的一条**链**，B中的元素个数称为**链的长度**;

(2) 如果$\forall x,y\in B$，$x\neq y$，x与y都是不可比的，则称B是A中的一条**反链**，B中的元素个数称为**反链的长度**.

实例：在偏序集$<\{1,2,\ldots,9\},|>$中，$\{1,2,4,8\}$是长为4的链，$\{1,4\}$是长为2的链，$\{2,3\}$是长为2的反链. 对于单元集$\{2\}$，它的长度是1，既是链也是反链.

30

分解为反链

定理 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集，如果A中最长的链长度为n, 则A中存在极大元，且该偏序集可以分解为 n 条不相交的反链.

算法4.2 偏序集反链分解算法
输入：偏序集A
输出：A中的反链$B_1, B_2, \ldots$
1．$i \leftarrow 1$
2．$B_i \leftarrow A$ 的所有极大元的集合（显然B_i是一条反链）
3．令$A \leftarrow A - B_i$
4．if $A \neq \varnothing$
5． $i \leftarrow i+1$
6． 转2

定理 设$<A,\preccurlyeq>$为含mn+1个元素的偏序集，则A中存在长度为m+1的反链, 或长度为n+1的链.

拟序关系

定义2.23 设$A \neq \varnothing$，$R \subseteq A \times A$。若R是反自反、传递的，则称R为A上的**拟序关系**，常用$\prec$表示拟序关系，称$<A, \prec>$为拟序集。

说明：反自反性与传递性蕴涵反对称性

(反证) $x \prec y \land y \prec x \Rightarrow x \prec x$, 矛盾!

32

拟序关系例子

- 设$\varnothing \neq A \subseteq R$ (实数集), $<A, < >, <A, > >$

- $\varnothing \neq B \subseteq Z_+$ (正整数集), $<B, |'>$,

  $|' = \{ <x,y> \mid x,y \in B \wedge x | y \wedge x \neq y \}$

- $<\mathcal{A}, \subset >$

33

拟序和偏序

定理2.29 设 $\preccurlyeq$ 是非空集合 A 上偏序关系， $\prec$ 是 A 上拟序关系，则

(1) $\prec$ 是反对称的；

(2) $\preccurlyeq - I_A$ 是A上拟序关系；

(3) $\prec \cup I_A$ 是A上偏序关系。 #

三歧性、拟线序

定义2.24 设 $A\neq\varnothing$，$\prec$ 是 A 上拟序关系，若

$$x\prec y,\ x=y,\ y\prec x$$

中有且仅有一式成立，则称 $\prec$ 具有**三歧性**，同时称 $\prec$ 为 A 上的**拟线序关系（拟全序关系）**，称 $\langle A,\prec\rangle$ 为**拟线序集**。

35

良序关系

说明 设$\langle A,\prec\rangle$为拟序集，$B\subseteq A$，可类似地定义B的最小(大)元、极小(极大)元、上(下)界、上(下)确界，以及链和反链的概念.

定义2. 28 设$\langle A,\prec\rangle$为(拟)全序集，若 A 的任何非空子集 B 均有最小元，则称 $\prec$ 为 A 上的良序关系，称 $\langle A,\prec\rangle$ 为良序集 。

例: $\langle N,<\rangle$是良序集，$\langle Z,<\rangle$不是良序集