一、选择题:1–10 小题,每小题 5 分,共 50 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是最符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 函数 $f(x)=|x|^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}}$ 的第一类间断点的个数是(　　)

(A) 3　　(B) 2

(C) 1　　(D) 0

【答案】(C)

【解析】无定义的点为 1, 2, 0

$\lim\limits_{x\to1}|x|^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}}=e,\lim\limits_{x\to2^-}|x|^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}}=+\infty,\lim\limits_{x\to0^+}|x|^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}}=+\infty,$

所以第一类间断点的个数是 1 个，故选 C.

(2) 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=1+t^3\\ y=e^{t^2}\end{cases}$ 确定，则

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[f(2+\dfrac{2}{x})-f(2)\right]=$(　　)

(A) $2e$　　(B) $\dfrac{4e}{3}$　　(C) $\dfrac{2e}{3}$　　(D) $\dfrac{e}{3}$

【答案】(B)

【解析】容易看出函数 $f(x)$ 可导，且 $f'(x)=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{\mathrm{e}^{t^2}2t}{3t^2}$，

当 $x=2,t=1$ 时，$f'(2)=\left.\dfrac{\mathrm{e}^{t^2}2t}{3t^2}\right|_{t=1}=\dfrac{2}{3}\mathrm{e}$，所以，

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(f\left(2+\frac{2}{x}\right)-f(2)\right)=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(f\left(2+\frac{2}{x}\right)-f(2)\right)}{\frac{2}{x}}=2f'(2)=\frac{4}{3}e.$$

故选 B.

(3) 设函数 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t^3dt$， $g(x)=\int_0^x f(t)dt$，则(　　)

(A) $f(x)$是奇函数，$g(x)$是奇函数

(B) $f(x)$是奇函数，$g(x)$是偶函数

(C) $f(x)$是偶函数，$g(x)$是偶函数

(D) $f(x)$是偶函数，$g(x)$是奇函数

【答案】(D)

【解析】令 $h(x)=\int_0^x\sin t^3dt$，此时 $h(x)$是一个偶函数，所以，

$f(x)=h(\sin x)$为偶函数，从而$g(x)$为奇函数，故选 D.

(4) 已知数列$\{a_n\}(a_n\neq0)$，若$\{a_n\}$发散，则(　　)

(A) $\{a_n+\frac{1}{a_n}\}$发散　　(B) $\{a_n-\frac{1}{a_n}\}$发散

(C) $\{e^{a_n}+\frac{1}{e^{a_n}}\}$发散　　(D) $\{e^{a_n}-\frac{1}{e^{a_n}}\}$发散

【答案】(D)

【解析】

对于 A 选项，令 $a_n=2,\frac{1}{2},2\cdots$， $u_n=a_n+\frac{1}{a_n}=\frac{5}{2}$，所以$\left\{a_n+\frac{1}{a_n}\right\}$收敛

对于B选项，令$a_n=(-1)^{n-1}$，此时$u_n=a_n-\frac{1}{a_n}=0$，所以$\left\{a_n-\frac{1}{a_n}\right\}$收敛，

对于C选项，令$a_n=(-1)^n$，$u_n=e^{a_n}+e^{-a_n}=e+e^{-1}$收敛．故选D.

(5) 已知函数$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}, & xy\neq0\\ 0, & xy=0\end{cases}$，则在点$(0,0)$处(　　)

(A) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$连续，$f(x,y)$可微

(B) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$连续，$f(x,y)$不可微

(C) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$不连续，$f(x,y)$可微

(D) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$不连续，$f(x,y)$不可微

【答案】(C)

【解析】$(0,0)$点处，$f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{0-0}{x}=0$，同理$f_y'(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}$，$x\neq0$时，$f_x'(x,y)=2x\sin\frac{1}{xy}-\frac{x^2+y^2}{x^2y}\cos\frac{1}{xy}$；因$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{xy}=0$，故$f(x,y)$在$(0,0)$点处可微，排除B和C；当$(x,y)\to(0,0)$时，$f_x'(x,y)$极限不存在，故$f_x'(x,y)$在$(0,0)$点处不连续，故选C.

(6) 设$f(x,y)$是连续函数，则$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy=$(　　)

(A) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y}f(x,y)dx$　　(B) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}f(x,y)dx$

(C) $\int_{0}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y}f(x,y)dx$　　(D) $\int_{0}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}f(x,y)dx$

【答案】(A)

【解析】积分区域为D：$\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2}$，$\sin x\le y\le 1$，故交换积分次序

得$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y}f(x,y)dx$，故选 A.

(7) 设非负函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，给出以下三个命题:

①若$\int_0^{+\infty}f^2(x)$收敛，则$\int_0^{+\infty}f(x)$收敛.

②若存在$p>1$，使得$\lim\limits_{x\to+\infty}x^pf(x)$存在，则$\int_0^{+\infty}f(x)$收敛.

③若$\int_0^{+\infty}f(x)$收敛，则存在$p>1$，使得$\lim\limits_{x\to+\infty}x^pf(x)$存在.

其中真命题个数为(　　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

【答案】(B)

【解析】若$f(x)=\frac{1}{x+1}$，$\int_0^{+\infty}f^2(x)dx=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x}\right)^2dx$收敛，但

$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)\Big|_0^{+\infty}=+\infty$，故①错误.

当$p>1$时，$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$收敛，由于$\lim\limits_{x\to+\infty}x^pf(x)$存在，故根据比较判别法，

可知$\int_0^{+\infty} f(x)dx$收敛，故②正确.

若$f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$，$p=4$时，则$\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)$不存在，故③错误.

(8) 设A为3阶矩阵，$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，若$P^TAP^2=\begin{pmatrix}a+2c&0&c\\0&b&0\\2c&0&c\end{pmatrix}$，

则$A=$(　　)

(A) $\begin{pmatrix}c&0&0\\0&a&0\\0&0&b\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}b&0&0\\0&c&0\\0&0&a\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}c&0&0\\0&b&0\\0&0&a\end{pmatrix}$

【答案】(C)

【解析】由$P^TAP^2=\begin{pmatrix}a+2c&0&c\\0&b&0\\2c&0&c\end{pmatrix}$，

则$A=(P^T)^{-1}\begin{pmatrix}a+2c&0&c\\0&b&0\\2c&0&c\end{pmatrix}(P^2)^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a+2c&0&c\\0&b&0\\2c&0&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}.$$

故选(C).

(9) 设A为4阶矩阵，A^*为A的伴随矩阵，若$A(A-A^*)=0$，且$A\neq A^*$，

则$r(A)$取值为(　　)

(A) 0 或 1　　(B) 1 或 3

(C) 2 或 3　　(D) 1 或 2

【答案】(D)

【解析】由题设知$r(A)+r(A-A^*)\le 4$、$A^2=AA^*=|A|E$，又因为$r(A-A^*)\ge 1$，则$1\le r(A)\le 3$，则$A^2=O$，故$r(A)+r(A)\le 4$，即$r(A)\le 2$，综上$1\le r(A)\le 2$. 故选(D).

(10) 设A，B为 2 阶矩阵，且$AB=BA$，则“A有两个不相等的特征值”是“B可对角化”的(　　)

(A) 充分必要条件　　(B) 充分不必要条件

(C) 必要不充分条件　　(D) 既不充分也不必要条件

【答案】(B)

【解析】设$A\alpha=\lambda\alpha$，同左乘B得$BA\alpha=\lambda B\alpha$，即$AB\alpha=\lambda B\alpha$

①若$B\alpha\ne 0$，则$B\alpha$为A对应于λ的特征向量，则$B\alpha=k\alpha(k\ne 0)$, 则α为B对应于$\lambda=k$的特征向量

②若$B\alpha=0$，则$B\alpha=0\cdot\alpha$，则α为B对应于$\lambda=0$的特征向量

综上：α必为B的特征向量，即A的特征向量都是B的特征向量，同理B的特征向量都是A的特征向量. 故选(A)

二、填空题：11～16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(11) 曲线$y^2=x$在点$(0,0)$处的曲率圆方程为______.

【答案】$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$或$x^2-x+y^2=0$.

【解析】曲线的参数方程为$\begin{cases}x=y^2,\\y=y.\end{cases}$

由曲率公式$K=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{\left[x'^2(t)+y'^2(t)\right]^{\frac{3}{2}}}$得:在$(0,0)$处的曲率$K=2$，则$(0,0)$处的曲率半径$R=\frac{1}{2}$，又曲线在$(0,0)$处的切线为$y$轴，则曲率中心为$\left(\frac{1}{2},0\right)$，故曲率圆的方程为$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$，即$x^2-x+y^2=0$.

(12) 函数$f(x,y)=2x^3-9x^2-6y^4+12x+24y$的极值点是______.

【答案】$(1,1)$

【解析】由$\begin{cases}f'_x(x,y)=6x^2-18x+12=0\\f'_y(x,y)=-24y^3+24=0\end{cases}$ 得：驻点$(1,1)$和$(2,1)$

$f''_{xx}(x,y)=12x-18$，$f''_{yy}(x,y)=-72y^2$，$f''_{xy}(x,y)=0$

(1)对于驻点$(1,1)$：$A=-6$，$B=0$，$C=-72$，

由$AC-B^2>0$且$A<0$可知，驻点$(1,1)$是$f(x,y)$的极小值点

(2)对于驻点$(2,1)$：$A=6$，$B=0$，$C=-72$，

由$AC-B^2<0$可知，驻点$(2,1)$不是$f(x,y)$的极值点.

(13) 微分方程$y'=\frac{1}{(x+y)^2}$满足条件$y(1)=0$的解为______.

【答案】$y-\arctan(x+y)=-\frac{\pi}{4}$

【解析】令$x+y=u$，等式两边同时对x求导，得到$u'=1+y'$，代入原式可得$u'-1=\dfrac{1}{u^2}$，整理得$\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1+u^2}{u^2}$，即$\int\dfrac{u^2}{u^2+1}du=\int dx$，

求得$u-\arctan u=x+c$，即$y-\arctan(x+y)=c$，

把初始条件带入可得$c=-\dfrac{\pi}{4}$，故解为：$y-\arctan\left(x+y\right)=-\dfrac{\pi}{4}$.

(14) 已知函数$f(x)=(e^x+1)x^2$，则$f^{(5)}(1)=$_______.

【答案】$31e$

【解析】由莱布尼兹公式可得

$f^{(5)}(x)=C_5^0(e^x+1)^{(5)}x^2+C_5^1(e^x+1)^{(4)}2x+C_5^2(e^x+1)^{(3)}2$，

即$f^{(5)}(1)=31e$

(15) 某物体以速度$v(t)=t+k\sin\pi t$做直线运动，若它是从$t=0$到$t=3$的时间段内平均速度为$\dfrac{5}{2}$，则$k=$_______.

【答案】$\dfrac{3\pi}{2}$

【解析】由函数的平均值公式可得$\dfrac{\int_0^3 t+k\sin\pi t dt}{3}=\dfrac{5}{2}$，解得$k=\dfrac{3\pi}{2}$

(16) 设向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\b\\a\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\\1\end{pmatrix}$，若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，

且其中任意两个向量均线性无关，则$ab=$_______.

【答案】-4

【解析】

$$(\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -1 & b & -1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & b+1 & a-1 \\ 0 & a-1 & 1-a \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & b+1 & a-1 \\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) \end{pmatrix}$$

由于任意两向量线性无关，则$a\neq 1$

$$则(\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3)\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & b+1 & a-1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a+2 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，则$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)<3$，则$a=-2.b=2$，故$ab=-4$.

三、解答题：17－22 小题，共 70 分. 请将解答写在答题纸指定位置上.

解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本题满分 10 分)

设平面有界区域D位于第一象限，由曲线$xy=\frac{1}{3},xy=3$与直线$y=\frac{1}{3}x,y=3x$围成，计算$\iint\limits_D(1+x-y)dxdy$.

【解析】积分区域的图像关于$y=x$对称，由轮换对称性可得，$\iint\limits_D(1+x-y)dxdy=\iint\limits_D(1+y-x)dxdy$，故

$$\iint\limits_D(1+x-y)dxdy=\frac{1}{2}(\iint\limits_D(1+x-y)dxdy+\iint\limits_D(1+y-x)dxdy)=\iint\limits_D 1dxdy$$

$$\iint\limits_D 1dxdy=\int_{\frac{1}{3}}^{1}(3x-\frac{1}{3x})dx+\int_{1}^{3}(\frac{3}{x}-\frac{x}{3})dx$$
$$=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\ln 3+3\ln 3-\frac{4}{3}$$
$$=\frac{8}{3}\ln 3.$$

(18) (本题满分 12 分)

设 $y(x)$ 为微分方程 $x^2y''+xy'-9y=0$ 满足条件 $y|_{x=1}=2, y'|_{x=1}=6$ 的解.

(1) 利用变换 $x=e^t$ 将上述方程化为常系数线性方程，并求 $y(x)$;

(2) 计算 $\int_1^2 y(x)\sqrt{4-x^2}dx$.

【解析】(1)对于 $x=e^t$，有 $t=\ln x$，

得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{x}$,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right),$$

从而原方程化为 $x^2\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)+x\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{x}-9y=0$，

即 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-9y=0$，

得通解 $y=C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}=C_1x^3+C_2x^{-3}$，

代入 $y|_{x=1}=2, y'|_{x=1}=6$，解得 $C_1=2, C_2=0$，

故 $y(x)=2x^3$.

(2) $\int_1^2 y(x)\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=\int_1^2 2x^3\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=\int_1^2 x^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x^2$

$$\underline{\underline{t=4-x^2}}\int_0^3 (4-t)\sqrt{t}\mathrm{d}t = 4\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\Big|_0^3 = \frac{22}{5}\sqrt{3}.$$

(19) (本题满分 12 分)

设$t>0$，平面有界区域D由曲线$y=\sqrt{x}e^{-x}$与直线$x=t,x=2t$及x轴围成,D绕x轴旋转一周所成旋转体的体积为$V(t)$,求$V(t)$的最大值.

【解析】$V(t)=\int_t^{2t}\pi xe^{-2x}dx=-\frac{\pi}{2}\left[(2t+\frac{1}{2})e^{-4t}-(t+\frac{1}{2})e^{-2t}\right]$

则$V'(t)=-\pi te^{-2t}(1-4e^{-2t})$，令$V'(t)=0\Rightarrow t=\ln 2$，

$\because t\in(\ln 2-\delta,\ln 2)$有$V'(t)>0$，$t\in(\ln 2,\ln 2+\delta)$有$V'(t)<0$，

$\therefore t=\ln 2$为$V(t)$的极大值点即最大值点，

故最大值为$V(\ln 2)=\frac{\pi}{16}(\ln 2+\frac{3}{4})$.

(20) (本题满分 12 分)

已知函数$f(u,v)$具有 2 阶连续偏导数，且函数

$g(x,y)=f(2x+y,3x-y)$满足$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}-6\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1$.

(1) 求$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}$;

(2) 若$\frac{\partial f(u,0)}{\partial u}=ue^{-u}$，$f(0,v)=\frac{1}{50}v^2-1$，求$f(u,v)$的表达式.

【解析】

（1）$\frac{\partial g}{\partial x}=f_1'\cdot 2+f_2'\cdot 3$　　$\frac{\partial g}{\partial y}=f_1'-f_2'$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=4f''_{11}+12f''_{12}+9f''_{22}\ ，\ \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=2f''_{11}+f''_{12}-3f''_{22}\ ，$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=f''_{11}-2f''_{12}+f''_{22},$$

代入原方程：$25f''_{12}=1\Rightarrow\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=\dfrac{1}{25}$

（2）$\because\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=\dfrac{1}{25}\Rightarrow f'_u=\dfrac{1}{25}v+c(u)$

又$\because f'_u(u,0)=ue^{-u}\Rightarrow c(u)=ue^{-u}\Rightarrow f'_u(u,v)=\dfrac{1}{25}v+ue^{-u}$

$\therefore f(u,v)=\dfrac{1}{25}uv-e^{-u}(u+1)+c(v),\because f(0,v)=\dfrac{1}{50}v^2-1\Rightarrow c(v)=\dfrac{1}{50}v^2$

$\therefore f(u,v)=\dfrac{1}{25}uv-e^{-u}(u+1)+\dfrac{1}{50}v^2$

(21) (本题满分 12 分)

设函数$f(x)$具有 2 阶导数，且$f'(0)=f'(1)$，$|f''(x)|\le 1$，证明：

(1) 当$x\in(0,1)$时，$\left|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\right|\le\dfrac{x(1-x)}{2}$;

(2) $\left|\int_0^1 f(x)dx-\dfrac{f(0)+f(1)}{2}\right|\le\dfrac{1}{12}$.

【解析】(1)证明：令$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$

令$F(x)=f(x)-g(x)-\dfrac{x(1-x)}{2}$，$x\in(0,1)$

$\because F(0)=0,F(1)=0$

$\because F''(x)=f''(x)+1\geq 0,\left(\left|f''(x)\right|\leq 1\right)$

$\therefore F(x)$为凹函数. $\therefore F(x)\leq 0$.

$\therefore f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\leq \dfrac{x(1-x)}{2}$

令$F(x)=f(x)-g(x)+\dfrac{x(1-x)}{2}$，$x\in(0,1)$

$\because F(0)=0,F(1)=0$

$\because F''(x)=f''(x)-1\leq 0,\left(\left|f''(x)\right|\leq 1\right)$

$\therefore F(x)$为凸函数. $\therefore F(x)\geq 0$.

$\therefore f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\geq -\dfrac{x(1-x)}{2}$

综上：$\left|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\right|\leq \dfrac{x(1-x)}{2}$

（2）由（1）中$f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\leq \dfrac{x(1-x)}{2}$

$\Rightarrow \int_0^1\left[f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\right]dx\leq \int_0^1\dfrac{x(1-x)}{2}dx$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx-\dfrac{f(0)+f(1)}{2}\leq \dfrac{1}{12}$

由第（1）中$f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\geq -\dfrac{x(1-x)}{2}$

$\Rightarrow \int_0^1\left[f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\right]dx\geq \int_0^1-\dfrac{x(1-x)}{2}dx$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx-\dfrac{f(0)+f(1)}{2}\geq -\dfrac{1}{12}$

综上：$\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|\leq\frac{1}{12}$

(22) (本题满分 12 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&a\\1&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\b&2\end{pmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TBAx$.

已知方程组 $Ax=0$ 的解均是 $B^Tx=0$ 的解，但这两个方程组不同解.

(1) 求 a,b 的值;

(2) 求正交变换 $x=Qy$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形.

【解析】(1) 由题知 $Ax=0$ 与 $\begin{pmatrix}A\\B^T\end{pmatrix}x=0$ 同解，故 $r\begin{pmatrix}A\\B^T\end{pmatrix}=r(A)=2$.

又由 $\begin{pmatrix}A\\B^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&a\\1&0&1\\1&1&b\\1&1&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&a\\0&0&b-a-1\\0&0&1-a\end{pmatrix}$，故 $a=1,b=2$，

(2) 由（1）知 $BA=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&2\\2&2&4\end{pmatrix}$，故二次型矩阵为

$C=BA=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&2\\2&2&4\end{pmatrix}$，由 $|\lambda E-C|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-2\\-1&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=0$，得

$\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=6$，

当$\lambda_1=\lambda_2=0$时，$Cx=0$，得基础解系为$\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

当$\lambda_3=6$时，$(6E-C)x=0$，得基础解系为$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

可知η_1,η_2,η_3为正交向量组，将其单位化如下

$$\gamma_1=\frac{\eta_1}{\|\eta_1\|}=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\gamma_2=\frac{\eta_2}{\|\eta_2\|}=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\gamma_3=\frac{\eta_3}{\|\eta_3\|}=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

故正交矩阵为$Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}\\0&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$，

此时二次型经正交变换$x=Qy$可化为标准形为$f=6y_3^2$