



第二章 谓词逻辑

- § 1 谓词的概念与表示法
- § 2 命题函数与量词
- § 3 谓词公式与翻译
- § 4 变元的约束
- § 5 谓词演算的等价式与蕴含式
- § 6 前束范式
- § 7 谓词演算的推理理论



§1 谓词的概念与表示法

1. 谓词的提出

在研究命题逻辑中，原子命题是命题演算中最基本的单位，不再对原子命题进行分解，这样会产生两大缺点：

- (1) 不能研究命题的**结构、成分和内部逻辑**的特征；
- (2) 也不可能表达二个原子命题所具有的**共同特征**，甚至在命题逻辑中无法处理一些简单又常见的推理过程。



§ 1 谓词的概念与表示法

命题逻辑的局限：

1. 命题作为最小的基本单元。

例 **P:** 王红是个大学生。

Q: 黎明是个大学生。

2. 命题逻辑在推证中的局限。



§ 1 谓词的概念与表示法

例：苏格拉底论证是正确的，但不能用命题逻辑的推理规则推导出来。

所有的人都是要死的，P

苏格拉底是人，Q

所以苏格拉底是要死的。R

则有 $P, Q \Rightarrow R$

然而， $(P \wedge Q) \rightarrow R$ 并不是永真式，故上述推理形式是错误的。



§ 1 谓词的概念与表示法

2. 谓词的概念

在命题逻辑中，命题是具有真假意义的陈述句。从语法上分析，一个陈述句由主语和谓语两部分组成。

在谓词逻辑中，为揭示命题内部结构及其不同命题的内部结构关系，对命题进行分析，并且把主语称为个体或客体，把谓语称为谓词。

定义：在反映判断的句子中，用以刻画客体的性质或关系的即是谓词。



§ 1 谓词的概念与表示法

客体，是指可以独立存在的事物，它可以是具体的，也可以是抽象的，如张明，计算机，精神等。

表示特定的个体，称为**客体常元**，以 $a, b, c \cdots$ 或带下标的 $a_i, b_i, c_i \cdots$ 表示；

表示不确定的个体，称为**客体变元**，以 $x, y, z \cdots$ 或 $x_i, y_i, z_i \cdots$ 表示。



§ 1 谓词的概念与表示法

谓词，当与一个个体相联系时，它刻划了个体性质；当与两个或两个以上客体相联系时，它刻划了客体之间的关系。

表示特定谓词，称为**谓词常元**，

表示不确定的谓词，称为**谓词变元**，都用大写英文字母，如P, Q, R, …, 或带下标来表示。



§ 1 谓词的概念与表示法

他是三好学生。

7是质数。

每天早晨锻炼是好习惯。

} 谓词指明客体性质

5大于3。

哥白尼指出地球绕着太阳转。

} 谓词指明两客体之间的关系。



§ 1 谓词的概念与表示法

3.谓词的表示

用大写字母表示谓词。

用大写字母右侧括号内的小写字母表示客体。

例： A： …是个大学生。

b： 张三。 e： 李四。

A(c)： 张三是个大学生。

A(e)： 李四是个大学生。

注意：用谓词表达命题，必须包括客体 and 谓词字母两部分。



§ 1 谓词的概念与表示法

例：武汉位于北京和广州之间。

武汉、北京和广州是三个个体，而“…位于…
和…之间”是谓词，它刻划了武汉、北京和广州之
间的关系。

设 P ：…位于…和…之间，

a ：武汉， b ：北京， c ：广州，

则 $P(a, b, c)$ ：武汉位于北京和广州之间。



§ 1 谓词的概念与表示法

注意：

1. 若谓词字母联系着一个客体，则称作**一元谓词**；若谓词字母联系着二个客体，则称作**二元谓词**；若谓词字母联系着n个客体，则称作**n元谓词**。

一元谓词表达客体的性质，多元谓词表达客体间关系。

2. 客体的次序必须是有规定的。

例：河南省北接河北省。

n L b

写成二元谓词为： **$L(n,b)$** ，但不能写成 **$L(b,n)$** 。



§ 1 谓词的概念与表示法

3. 单独一个谓词，不是完整的命题。把谓词字母后填以客体所得的式子称为谓词填式。如 $H(a, b)$
4. 谓词中通常只写客体变元，因此不是命题，仅当所有客体变元做出具体指定时，谓词才成为命题，才有真值。



第二章 谓词逻辑

§ 1 谓词的概念与表示法

 § 2 命题函数与量词

§ 3 谓词公式与翻译

§ 4 变元的约束

§ 5 谓词演算的等价式与蕴含式

§ 6 前束范式

§ 7 谓词演算的推理理论



§ 2 命题函数与量词

1. 命题函数

客体在谓词表达式中可以是任意的名词。

例：C— “…总是要死的。”

j：张三； t：老虎； e：桌子。

则 $C(j)$ ， $C(t)$ ， $C(e)$ 均表达了命题。

在上面的例子中，C：表示 “…总是要死的”；
x：表示变元（客体变元），则 $C(x)$ 表示 “x总是要死的”，则称 $C(x)$ 为命题函数。



§ 2 命题函数与量词

定义1: 由一个谓词和一些客体变元组成的表达式,
称为**简单命题函数**。

n 元谓词, 就是有 n 个客体变元的命题函数。

定义2: 由一个或 n 个简单命题函数以及逻辑联结词
组成的表达式, 称为**复合命题函数**。(谓词
表达式)



§ 2 命题函数与量词

例: $S(x)$: x 学习很好。

$W(x)$: x 工作很好。

谓词表达式:

$\neg S(x)$: x 学习不是很好。

$S(x) \wedge W(x)$: x 的学习和工作都很好。

$S(x) \rightarrow W(x)$: 若 x 学习很好, 则 x 的工作很好。



§ 2 命题函数与量词

讨论：

- (a) 当简单命题函数仅有一个客体变元时，称为一元简单命题函数；
- (b) 若用任何客体去取代客体变元之后，则命题函数就变为命题；
- (c) 命题函数中客体变元的取值范围对是否成为命题及命题的真值有影响。



§ 2 命题函数与量词

例: $Q(x, y)$: x 比 y 重。

当 x, y 指人或物时, 是一个命题。

当 x, y 指实数时, 不是一个命题。

例: $R(x)$: x 是大学生。

个体域: 在命题函数中, 客体变元的取值范围
(讨论范围) 叫个体域或论述域。

全总个体域: 把各种个体域综合在一起作为论述
范围的域。



§ 2 命题函数与量词

个体域的给定形式有二种：

- (1) 具体给定。如：南开大学在校学生
- (2) 全总个体域。

例： $P(x)$ 表示 x 是质数。这是一个命题函数。其值取决于个体域。

将命题函数转化为命题，有两种方法：

- (1) 将 x 取定一个值。如： $P(4)$, $P(5)$
- (2) 将谓词量化。如： $(\forall x)P(x)$, $(\exists x)P(x)$

2.量词

(1) 全称量词

符号： \forall

读作：“所有的”，“任一个”，“对一切”，
“每一个”。

例：“所有的都是苹果”

可写成： $\forall x A(x)$ 或 $(\forall x)A(x)$



§ 2 命题函数与量词

几种形式的读法：

$(\forall x)P(x)$: “对所有的 x , x 是...”;

$(\forall x)\neg P(x)$: “对所有 x , x 不是...”;

$\neg(\forall x)P(x)$: “并不是对所有的 x , x 是...”;

$\neg(\forall x)\neg P(x)$: “并不是所有的 x , x 不是...”。



§ 2 命题函数与量词

例：所有的人都是要呼吸的。

设 $M(x)$ ： x 是人。 $H(x)$ ： x 要呼吸。

$$(\forall x) (M(x) \rightarrow H(x))$$

例：每个学生都要参加考试。

设 $P(x)$ ： x 是学生。 $Q(x)$ ： x 要参加考试。

$$(\forall x) (P(x) \rightarrow Q(x))$$

例：任何整数或是正的或是负的。

设 $I(x)$ ： x 是整数。

$R(x)$ ： x 是正数。 $N(x)$ ： x 是负数。

$$(\forall x) (I(x) \rightarrow R(x) \vee N(x))$$



§ 2 命题函数与量词

例：将“对于所有的x和任何的y，如果x高于y，那么y不高于x”写成命题表达形式。

解： $G(x, y)$: x高于y
 $(\forall x) (\forall y) (G(x, y) \rightarrow \neg G(y, x))$

(2) 存在量词

符号： \exists

读作：“存在一个”，“对于一些”，“对于某些”，“至少存在一个”，“这里存在着这样的”等等。

几种形式的读法：

$(\exists x) A(x)$ ：存在一个 x ，使 x 是...；

$(\exists x) \neg A(x)$ ：存在一个 x ，使 x 不是...；

$\neg(\exists x) A(x)$ ：不存在一个 x ，使 x 是...；

$\neg(\exists x) \neg A(x)$ ：不存在一个 x ，使 x 不是...。



§ 2 命题函数与量词

例：存在一个人。

设 $M(x)$ ： x 是人；

$(\exists x) M(x)$

例：存在很聪明的人。

设 $C(x)$ ： x 很聪明；

$(\exists x) (M(x) \wedge C(x))$

例：某些实数是有理数。

设 $R_1(x)$ ： x 是实数

$(\exists x)(R_1(x) \wedge R_2(x))$

$R_2(x)$ ： x 是有理数。



§ 2 命题函数与量词

(3) 存在唯一量词

符号： $\exists!$

表示：“恰有一个”，“存在唯一一个”等。



§ 2 命题函数与量词

注意：

- (1) 论述域不同，由量词确定的表达式也不同。
- (2) 在命题函数中，个体域可以限定，也可不限制。
不限制即使用全总个体域。
- (3) 采用全总个体域时，谓词表达式中用**特性谓词**来限定客体变元的取值范围。

特性谓词：在全总个体域中，将每个客体变元的变化范围加以限制的谓词。



§ 2 命题函数与量词

例：所有的人都是会死的。

设 $M(x)$ ： x 是人。 $S(x)$ ： x 是会死的。

个体域约定为{人类}： $(\forall x) (S(x))$

全总个体域： $(\forall x) (M(x) \rightarrow S(x))$

例：有一些人是不怕死的。

设 $M(x)$ ： x 是人。 $F(x)$ ： x 是不怕死的。

个体域约定为{人类}： $(\exists x) (F(x))$

全总个体域： $(\exists x) (M(x) \wedge F(x))$

用法：对全称量词，特性谓词作前件；


对存在量词，特性谓词作合取项。



第二章 谓词逻辑

§ 1 谓词的概念与表示法

§ 2 命题函数与量词

 § 3 谓词公式与翻译

§ 4 变元的约束

§ 5 谓词演算的等价式与蕴含式

§ 6 前束范式

§ 7 谓词演算的推理理论



§ 3 谓词公式与翻译

1. 谓词公式

原子谓词公式：

不出现命题联结词和量词的谓词表达式称为原子谓词公式，并用 $P(x_1 \cdots x_n)$ 来表示。

其中： P 称为 n 元谓词， $x_1 \cdots x_n$ 称为客体变元，当 $n=0$ 时称为零元谓词公式。

定义2-3.1: (谓词公式的归纳法定义)

- (1) 原子谓词公式是谓词公式;
- (2) 若A是谓词公式, 则 $(\neg A)$ 也是谓词公式;
- (3) 若A, B都是谓词公式, 则 $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ 都是谓词公式;
- (4) 若A是谓词公式, x是任何变元, 则 $(\forall x)A$, $(\exists x)A$ 也都是谓词公式;
- (5) 只有按(1)-(4)所求得的那些公式才是谓词公式
(谓词公式又简称“公式”)。



§ 3 谓词公式与翻译

例1：并非每个实数都是有理数。

设 $R(x)$ ： x 是实数。 $Q(x)$ ： x 是有理数。

符号化： $\neg (\forall x) (R(x) \rightarrow Q(x))$

或： $(\exists x) (R(x) \wedge \neg Q(x))$

例2：没有不犯错误的人。

设 $M(x)$ ： x 是人。 $F(x)$ ： x 犯错。

描述：只要是人，必然犯错。 $(\forall x) (M(x) \rightarrow F(x))$

或：存在不犯错误的人是不可能的。

$\neg (\exists x) (M(x) \wedge \neg F(x))$



§ 3 谓词公式与翻译

例3：尽管有人聪明，但未必一切人都聪明。

设 $M(x)$ ： x 是人。 $P(x)$ ： x 聪明。

$$(\exists x) (M(x) \wedge P(x)) \wedge \neg(\forall x) (M(x) \rightarrow P(x))$$

例4：某些人对某些食物过敏。

设 $F(x,y)$ ： x 对 y 过敏。

$M(x)$ ： x 是人。

$G(y)$ ： y 是食物。

$$(\exists x) (\exists y) (M(x) \wedge G(y) \wedge F(x,y))$$



§ 3 谓词公式与翻译

例5：凡是实数不是大于0，就是等于0或者小于0。

设 $R(x)$ ：x是实数。 $P(x,0)$ ：x大于0。

$Q(x,0)$ ：x等于0。 $S(x,0)$ ：x小于0。

$(\forall x) (R(x) \rightarrow (P(x,0) \vee Q(x,0) \vee S(x,0)))$

例6：发光的不都是金子。

设 $L(x)$ ：x是发光的。 $G(x)$ ：x是金子。

$(\exists x) (L(x) \wedge \neg G(x))$

或 $\neg (\forall x) (L(x) \rightarrow G(x))$



§ 3 谓词公式与翻译

例7：试将苏格拉底论证符号化：“所有的人总是要死的。因为苏格拉底是人，所以苏格拉底是要死的。”

解：设 $M(x)$ ：x是人；

$D(x)$ ：x是要死的；

s：苏格拉底

写成符号形式： $(\forall x) (M(x) \rightarrow D(x)), M(s) \Rightarrow D(s)$





§ 3 谓词公式与翻译

例8：用谓词公式写出下式。

任给小正数 ε ，则存在一个正数 δ ，使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时有 $|f(x)-b| < \varepsilon$ 。此时即称 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ 。

解：设 $P(x,y)$ ： x 大于 y

$Q(x,y)$ ： x 小于 y

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ 可表示为：



§ 3 谓词公式与翻译

2. 由于对个体描述性质的刻画深度不同，可翻译成不同形式的谓词公式。

例：这只大红书柜摆满了那些古书。

法1：设 $F(x,y)$ ：x摆满了y。 $R(x)$ ：x是大红书柜。

$Q(y)$ ：y是古书。 a ：这只 b ：那些

$$R(a) \wedge Q(b) \wedge F(a,b)$$

法2： $A(x)$ ：x是书柜。 $B(x)$ ：x是大的。 $C(x)$ ：x是红的。

$D(y)$ ：y是古老的。 $E(y)$ ：y是图书。

$F(x,y)$ ：x摆满了y。 a ：这只 b ：那些

$$A(a) \wedge B(a) \wedge C(a) \wedge D(b) \wedge E(b) \wedge F(a,b)$$




第二章 谓词逻辑

§ 1 谓词的概念与表示法

§ 2 命题函数与量词

§ 3 谓词公式与翻译



§ 4 变元的约束

§ 5 谓词演算的等价式与蕴含式

§ 6 前束范式

§ 7 谓词演算的推理理论



§ 4 变元的约束

一、概念

1. 指导变元：给定 x 为一个谓词公式，其中一部分公式形式为 $(\forall x)P(x)$ 或 $(\exists x)P(x)$ ，这里的 \forall ， \exists 后面所跟的 x 称为相应的量词的指导变元。

2. 辖域： $P(x)$ 称为相应量词的作用域或辖域。（紧接在量词后面括号内的谓词公式。）

例： $(\forall x) P(x)$, $(\exists x) (P(x) \wedge Q(x))$

若量词后括号内为原子谓词公式，则括号可以省去。



§ 4 变元的约束

3. 约束变元：在量词的辖域内，且与量词下标相同的变元。（在作用域中的 x ）

4. 自由变元：除去约束变元以外所出现的变元称作自由变元。（不受量词的约束的变元）。

§ 4 变元的约束

例：指出下式作用域及约束变元、自由变元的情况。

1) $(\forall x) (P(x) \rightarrow Q(x))$ x 是约束变元

2) $(\forall x) (P(x) \rightarrow (\exists y) R(x,y))$ x, y 都是约束变元

3) $(\forall x) (\forall y) (P(x,y) \wedge Q(y,z)) \wedge (\exists x) P(x,y)$
 x, y 是约束变元, z 是自由变元
 x 是约束变元
 y 是自由变元

4) $(\forall x) (P(x) \wedge (\exists x) Q(x,z) \rightarrow (\exists y) R(x,y)) \vee Q(x,y)$
 x, y 是约束变元, z 是自由变元
 x, y 都是自由变元



§ 4 变元的约束

说明:

$P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 n 元谓词, 有 n 个相互独立的自由变元, 若对其 k 个变元进行约束, 则成为 $n-k$ 元谓词。

例: $(\forall x) P(x, y, z)$ 二元谓词

$(\exists y)(\forall x) P(x, y, z)$ 是一元谓词

区别是命题还是命题函数的方法

(a) 若在谓词公式中出现有自由变元, 则该公式为命题函数;

(b) 若在谓词公式中的变元均为约束出现, 即无自由变元, 则该公式为命题。



§ 4 变元的约束

二、约束变元的换名

认为 $(\forall x) P(x,y)$ 和 $(\forall z) P(z,y)$ 是等价的谓词公式。
任何谓词公式对约束变元可以换名。

换名规则：

(a) 换名的范围：量词中的**指导变元**以及该量词**作用域中所出现的该变元**；（指导变元及其约束的变元）

(b) 换名时要改为作用域中没有出现的变元名称。

§ 4 变元的约束

例：对 $(\forall x) P(x) \rightarrow (\exists y) R(x,y)$ 换名

解：换名为 $(\forall x) P(x) \rightarrow (\exists z) R(x,z)$ ✓

$(\forall x) P(x) \rightarrow (\exists x) R(x,x)$ ✗

因为 $(\exists x) R(x,x)$ 中前面的 x 原为自由变元，现在变为约束变元了。

例：对 $(\forall x) (P(x) \rightarrow R(x,y)) \wedge Q(x,y)$ 换名

解： $(\forall z) (P(z) \rightarrow R(x,y)) \wedge Q(x,y)$ ✗

$(\forall z) (P(z) \rightarrow R(z,y)) \wedge Q(x,y)$ ✓

$(\forall y) (P(y) \rightarrow R(y,y)) \wedge Q(x,y)$ ✗



§ 4 变元的约束

三、自由变元的代入

对公式中的自由变元的更改叫做代入。

规则：

- (a)对公式中出现该自由变元的每一处进行代入。
- (b)用以代入的变元与原公式中所有变元的名称不能相同。



§ 4 变元的约束

例：对 $(\exists x) (P(y) \rightarrow R(x,y))$ 代入。

解： $(\exists x) (P(\mathbf{z}) \rightarrow R(x,\mathbf{z}))$

例：对 $(\forall x) P(x) \rightarrow (\exists y) R(x,y)$ 代入。

解： $(\forall x) P(x) \rightarrow (\exists y) R(\mathbf{z},y)$

四、量化命题的真值

(1) 当个体域的**元素有限时**，客体变元的所有可能的取代是可枚举的。

设给定个体域： $\{a_1, a_2 \dots a_n\}$

则： $(\forall x)P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)$

$(\exists x)Q(x) \Leftrightarrow Q(a_1) \vee Q(a_2) \vee \dots \vee Q(a_n)$



§ 4 变元的约束

例：若论域集合是 $\{a,b,c\}$ ，试消去公式中的量词。

a) $(\exists x)P(x) \Leftrightarrow P(a) \vee P(b) \vee P(c)$

b) $(\forall x) (P(x) \rightarrow Q(x))$

$$\Leftrightarrow (P(a) \rightarrow Q(a)) \wedge (P(b) \rightarrow Q(b)) \wedge (P(c) \rightarrow Q(c))$$

c) $(\forall x)R(x) \wedge (\exists x) S(x)$

$$\Leftrightarrow (R(a) \wedge R(b) \wedge R(c)) \wedge (S(a) \vee S(b) \vee S(c))$$

例：个体域 $\{0, 1\}$

$$(\forall x) (\forall y) F(x,y)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x) (F(x,0) \wedge F(x,1))$$

$$\Leftrightarrow (F(0,0) \wedge F(0,1)) \wedge (F(1,0) \wedge F(1,1))$$



§ 4 变元的约束

例：设个体域为：{白猫，黄猫， α ， β }，

令 $C(x)$ ：x是猫（特性谓词）。

$A(x)$ ：x是动物。 $B(x)$ ：x是黑色的。

(a) 描述命题：“所有的猫都是动物。”

符号化： $(\forall x)(C(x) \rightarrow A(x))$ (T) （真命题）

$$\because (\forall x)(C(x) \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow T \wedge T \wedge T \wedge T \Leftrightarrow T$$

若写成： $(\forall x)(C(x) \wedge A(x))$ (F)

$$(\forall x)(C(x) \wedge A(x)) \Leftrightarrow T \wedge T \wedge F \wedge F \Leftrightarrow F$$



§ 4 变元的约束

(b) 描述命题：“一些猫是黑色的”。

$$(\exists x)(C(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow F \vee F \vee F \vee F \Leftrightarrow F$$

$$\text{而 } (\exists x)(C(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow F \vee F \vee T \vee T \Leftrightarrow T$$



§ 4 变元的约束

(2)量词对变元的约束，往往与量词的次序有关。

约定： 多个量词时的读出顺序为**从左到右，不能颠倒。**

例：

$(\forall y)(\exists x)(x < (y-2))$ ：对于任何 y 均存在 x ，使得 $x < y-2$ 。

$(\exists y)(\exists x)(x < (y-2))$ ：对于某些 y 存在 x ，使得 $x < y-2$ 。




第二章 谓词逻辑

§ 1 谓词的概念与表示法

§ 2 命题函数与量词

§ 3 谓词公式与翻译

§ 4 变元的约束

 § 5 谓词演算的等价式与蕴含式

§ 6 前束范式

§ 7 谓词演算的推理理论



§5 谓词演算的等价式与蕴含式

一、概念

赋值：在谓词公式中，当客体变元由确定的客体所取代，**谓词变元用确定的谓词所取代**时，就称对谓词公式赋值。

定义1：给定两个谓词公式wff A和wff B，E为它们共同个体域，若对A和B的任一组变元进行赋值，使得A和B的值相同，则称谓词公式A和B在E上是互为**等价的**，记为 $A \Leftrightarrow B$.



§5 谓词演算的等价式与蕴含式

定义2: 给定任意wff A , E 是 A 的个体域。若给 A 中客体变元指派 E 中的每一个客体, wff A 值均为真, 则称 A 在 E 中是 **有效的 (永真的)**。

定义3: 一个wff A , 若在所有赋值下均为“F”, 则称该wff A 为**不可满足的**。

定义4: 给定wff A , E 是 A 的个体域。若至少一种赋值下为真, 则称 A 是**可满足的**。



§5 谓词演算的等价式与蕴含式

二、谓词演算的一些等价式与蕴含式

1. 命题公式的推广

谓词演算中的公式代替命题演算中的永真公式的变元时，所得的谓词公式即为永真式。

在第一章中永真蕴含式和等价公式均可变成谓词演算中的永真式。



§5 谓词演算的等价式与蕴含式

命题逻辑

$$\neg\neg P \Leftrightarrow P$$

$$P \vee P \Leftrightarrow P$$

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$$

$$P \Rightarrow P \vee Q$$

$$P \wedge Q \Rightarrow P$$

$$H \wedge \neg H \Leftrightarrow F$$

...

谓词逻辑

$$\neg\neg P(x) \Leftrightarrow P(x)$$

$$P(x) \vee P(x) \Leftrightarrow P(x)$$

$$P(x) \rightarrow Q(x) \Leftrightarrow \neg Q(x) \rightarrow \neg P(x)$$

$$P(x) \Rightarrow P(x) \vee Q(x)$$

$$P(x) \wedge Q(x) \Rightarrow P(x)$$

$$H(x,y) \wedge \neg H(x,y) \Leftrightarrow F$$

...



§5 谓词演算的等价式与蕴含式

$$(\forall x) (P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x) (\neg P(x) \vee Q(x))$$

$$(\exists x) H(x,y) \wedge \neg (\exists x) H(x,y) \Leftrightarrow F$$

$$(\forall x) P(x) \vee (\exists y) R(x,y) \Leftrightarrow \neg(\neg (\forall x) P(x) \wedge \neg(\exists y) R(x,y))$$



§5 谓词演算的等价式与蕴含式

2. 量词转换律（量词与 \neg 之间的关系）

例： $P(x)$ ： x 来了。

“不是所有的人今天都来” \Leftrightarrow “有一些人今天没来”

$$\neg(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x)$$

例： “并非有人今天来” \Leftrightarrow “所有的人今天都没来”

$$\neg(\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x)$$

结论： 出现在量词之前的否定，不是否定该量词，而是否定被量化了的整个命题。



§5 谓词演算的等价式与蕴含式

证明：设个体域为： $S=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$$\neg(\exists x) P(x) \Leftrightarrow \neg(P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n))$$

$$\Leftrightarrow \neg P(a_1) \wedge \neg P(a_2) \wedge \dots \wedge \neg P(a_n)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x) \neg P(x)$$



§5 谓词演算的等价式与蕴含式

量化命题和非量化命题的差别:否定形式不同

例：否定下列命题：

(a) 上海是一个小城镇 $A(s)$

(b) 每一个自然数都是偶数 $(\forall x)(N(x) \rightarrow E(x))$

二命题的否定为：

(a) 上海不是一个城镇 $\neg A(s)$

(b) 有一些自然数不是偶数

$$\begin{aligned}\neg(\forall x)(N(x) \rightarrow E(x)) &\Leftrightarrow (\exists x)\neg(N(x) \rightarrow E(x)) \\ &\Leftrightarrow (\exists x)\neg(\neg N(x) \vee E(x)) \\ &\Leftrightarrow (\exists x)(N(x) \wedge \neg E(x))\end{aligned}$$



§5 谓词演算的等价式与蕴含式

3. 量词辖域的扩张及其收缩律

第1组

$$(\forall x)A(x) \vee B \Leftrightarrow (\forall x) (A(x) \vee B)$$

$$(\forall x)A(x) \wedge B \Leftrightarrow (\forall x) (A(x) \wedge B)$$

$$(\exists x)A(x) \wedge B \Leftrightarrow (\exists x) (A(x) \wedge B)$$

$$(\exists x)A(x) \vee B \Leftrightarrow (\exists x) (A(x) \vee B)$$

B为不含有变元x的任何谓词公式



§5 谓词演算的等价式与蕴含式

证明 $(\forall x)A(x) \vee B \Leftrightarrow (\forall x) (A(x) \vee B)$

证明：设个体域为 $S=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$$(\forall x)A(x) \vee B$$

$$\Leftrightarrow (A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n)) \vee B$$

$$\Leftrightarrow (A(a_1) \vee B) \wedge (A(a_2) \vee B) \wedge \dots \wedge (A(a_n) \vee B)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x) (A(x) \vee B)$$



§5 谓词演算的等价式与蕴含式

第2组

$$(\forall x) A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow (\exists x) (A(x) \rightarrow B)$$

$$(\exists x) A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow (\forall x) (A(x) \rightarrow B)$$

$$A \rightarrow (\forall x) B(x) \Leftrightarrow (\forall x) (A \rightarrow B(x))$$

$$A \rightarrow (\exists x) B(x) \Leftrightarrow (\exists x) (A \rightarrow B(x))$$



§5 谓词演算的等价式与蕴含式

证明 $(\forall x) A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow (\exists x) (A(x) \rightarrow B)$

$A \rightarrow (\forall x) B(x) \Leftrightarrow (\forall x) (A \rightarrow B(x))$

证明: $(\forall x) A(x) \rightarrow B$

$$\Leftrightarrow \neg (\forall x) A(x) \vee B$$

$$\Leftrightarrow (\exists x) \neg A(x) \vee B$$

$$\Leftrightarrow (\exists x) (\neg A(x) \vee B)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x) (A(x) \rightarrow B)$$

$A \rightarrow (\forall x) B(x)$

$$\Leftrightarrow \neg A \vee (\forall x) B(x)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x) (\neg A \vee B(x))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x) (A \rightarrow B(x))$$



§5 谓词演算的等价式与蕴含式

4. 量词与命题联结词之间的一些等价式

例：“所有的人既上学又工作。”

\Leftrightarrow “所有的人都上学并且所有的人都工作。”

$A(x)$: x 上学;

$B(x)$: x 工作。

$$(\forall x) (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x) A(x) \wedge (\forall x) B(x)$$



§5 谓词演算的等价式与蕴含式

证明 $(\forall x) (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)$

证明：设个体域为 $S=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$$\begin{aligned} & (\forall x) (A(x) \wedge B(x)) \\ \Leftrightarrow & (A(a_1) \wedge B(a_1)) \wedge \dots \wedge (A(a_n) \wedge B(a_n)) \\ \Leftrightarrow & (A(a_1) \wedge \dots \wedge A(a_n)) \wedge (B(a_1) \wedge \dots \wedge B(a_n)) \\ \Leftrightarrow & (\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x) \end{aligned}$$



§5 谓词演算的等价式与蕴含式

例：“有一些人或到科室或到车间工作。”

\Leftrightarrow “或者一些人到科室或者一些人到车间工作。”

$A(x)$: x 到车间工作;

$B(x)$: x 到科室工作。

$$(\exists x) (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x) A(x) \vee (\exists x) B(x)$$



§5 谓词演算的等价式与蕴含式

5. 量词与命题联结词之间的一些蕴含式

例：“这些学生都聪明或这些学生都努力。”

\Rightarrow “这些学生都聪明或努力。”

$A(x)$: x 聪明。

$B(x)$: x 努力。

$$(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \vee B(x))$$



§5 谓词演算的等价式与蕴含式

$$\therefore (\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x) (A(x) \vee B(x))$$

$$\therefore (\forall x)\neg A(x) \vee (\forall x)\neg B(x) \Rightarrow (\forall x) (\neg A(x) \vee \neg B(x))$$

$$\neg(\exists x)A(x) \vee \neg(\exists x)B(x) \Rightarrow (\forall x) \neg(A(x) \wedge B(x))$$

$$\neg((\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)) \Rightarrow \neg(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$$

$$(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$$

类似的:

$$(\forall x) (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow (\forall x) A(x) \rightarrow (\forall x) B(x)$$

$$(\forall x) (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow (\exists x) A(x) \rightarrow (\exists x) B(x)$$



§5 谓词演算的等价式与蕴含式

证明 $(\exists x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x) (A(x) \rightarrow B(x))$

$$(\exists x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\exists x)A(x) \vee (\forall x)B(x)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x) \neg A(x) \vee (\forall x)B(x)$$

$$\Rightarrow (\forall x) (\neg A(x) \vee B(x))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x) (A(x) \rightarrow B(x))$$



§5 谓词演算的等价式与蕴含式

6. 多个量词的使用

(a) 量词出现的次序直接关系到命题的含义

“ $\forall x \exists y$ ”表示：“无论选定一个什么样的x值总能找到一个y能使x和y...”

“ $\exists y \forall x$ ”表示：“只选取某个y值，以致无论怎样选定一个x，能够使y和x...”

例：x,y的个体域{鞋子}， $P(x,y)$:x和y配成一双鞋子。

$$(\forall x)(\exists y)P(x,y) \Leftrightarrow T$$

$$(\exists y)(\forall x)P(x,y) \Leftrightarrow F$$



§5 谓词演算的等价式与蕴含式

下面列出对应的表达式可以看出其不同处：

设 x 的个体域为 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, y 的个体域为 $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$,
则：

$$\forall x \exists y P(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \exists y P(a_1, y) \wedge \dots \wedge \exists y P(a_n, y)$$

$$\Leftrightarrow (P(a_1, b_1) \vee \dots \vee P(a_1, b_n)) \wedge \dots \wedge (P(a_n, b_1) \vee \dots \vee P(a_n, b_n))$$

$$\exists y \forall x P(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x, b_1) \vee \dots \vee \forall x P(x, b_n)$$

$$\Leftrightarrow (P(a_1, b_1) \wedge \dots \wedge P(a_n, b_1)) \vee \dots \vee (P(a_1, b_n) \wedge \dots \wedge P(a_n, b_n))$$

§5 谓词演算的等价式与蕴含式

(b) 在含有多个量词的谓词公式中, $\forall x \forall y, \exists x \exists y$ 的位置是可以改变的, 且不影响命题的真值。

例: x, y 的个体域为 $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, 则

$$\begin{aligned}\forall x \forall y P(x, y) &\Leftrightarrow \forall y P(0, y) \wedge \dots \wedge \forall y P(i, y) \wedge \dots \\ &\Leftrightarrow (P(0, 0) \wedge P(0, 1) \wedge \dots \wedge P(0, j) \wedge \dots) \wedge \dots \wedge \\ &\quad (P(i, 0) \wedge P(i, 1) \wedge \dots \wedge P(i, j) \wedge \dots) \wedge \dots \\ &\Leftrightarrow (P(0, 0) \wedge P(1, 0) \wedge \dots \wedge P(i, 0) \wedge \dots) \wedge \\ &\quad (P(0, 1) \wedge P(1, 1) \wedge \dots \wedge P(i, 1) \wedge \dots) \wedge \dots \\ &\Leftrightarrow \forall x P(x, 0) \wedge \forall x P(x, 1) \wedge \dots \wedge \forall x P(x, j) \wedge \dots \\ &\Leftrightarrow \forall y \forall x P(x, y)\end{aligned}$$

$$\text{同样: } \exists x \exists y P(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x P(x, y)$$



§5 谓词演算的等价式与蕴含式

(c) 量词转换律的推广应用:把 \neg 深入到谓词公式前面去的方法。

$$\begin{aligned}\neg\forall x\exists y\forall zP(x,y,z) &\Leftrightarrow \exists x\neg\exists y\forall zP(x,y,z) \\ &\Leftrightarrow \exists x\forall y\neg\forall zP(x,y,z) \\ &\Leftrightarrow \exists x\forall y\exists z\neg P(x,y,z)\end{aligned}$$



§5 谓词演算的等价式与蕴含式

(d) 两个量词 \exists, \forall 所组成的谓词公式的等价式和永真蕴含式 (8个)

$$(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x,y)$$

$$(\exists x)(\exists y)P(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$$

$$(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)P(x,y)$$

$$(\forall y)(\forall x)P(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x,y)$$

$$(\exists y)(\forall x)P(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x,y)$$

$$(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y)$$

$$(\forall x)(\exists y)P(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$$

$$(\forall y)(\exists x)P(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)P(x,y)$$



第二章 谓词逻辑

§ 1 谓词的概念与表示法

§ 2 命题函数与量词

§ 3 谓词公式与翻译

§ 4 变元的约束

§ 5 谓词演算的等价式与蕴含式

§ 6 前束范式

§ 7 谓词演算的推理理论



§ 6 前束范式

一、前束范式

1. 定义

一个公式，如果量词均**非否定地**在全式的**开头**，它们的作用域延伸到整个公式的末尾，则称此公式叫**前束范式**。

形式： $(\Box v_1)(\Box v_2)\dots(\Box v_n) A$

其中： \Box 是量词 \forall 或 \exists

v_i ($i=1, 2, 3\dots, n$) 是客体变元

A 是无量词的谓词公式

例： $\forall x \exists y \forall z (\neg Q(x,y) \vee R(z))$ (前束范式)



§ 6 前束范式

2. 定理

任何一个谓词公式均和一个前束范式等价。

证明：①利用量词转换把~~¬~~深入到原子谓词公式前。

②利用约束变元的改名规则。

③利用量词辖域的扩张收缩律,把量词移到全式的最前面，这样一定可得到等价的前束范式。

3. 化前束范式的步骤

- (1) 否定深入（量词转化式）
- (2) 量词前提（必要时需换名）

例1：把下式转化为前束范式。

$$(\forall x)P(x) \vee R(x)$$

$$\Leftrightarrow (\forall y)P(y) \vee R(x)$$

$$\Leftrightarrow (\forall y)(P(y) \vee R(x))$$



§ 6 前束范式

例2：把 $(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$ 变成前束范式。

解： $(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x) Q(x)$

$$\Leftrightarrow \neg(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\neg P(x) \vee Q(x))$$



§ 6 前束范式

例3：把 $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(P(x,z) \wedge P(y,z)) \rightarrow (\exists u)Q(x,y,u)$
变成前束范式。

解：原式

$$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\neg(\exists z)(P(x,z) \wedge P(y,z)) \vee (\exists u)Q(x,y,u))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((\forall z) (\neg P(x,z) \vee \neg P(y,z)) \vee (\exists u)Q(x,y,u))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z) (\exists u)(\neg P(x,z) \vee \neg P(y,z) \vee Q(x,y,u))$$

§ 6 前束范式

例4:

$$\neg(\forall x)\{(\exists y)A(x,y) \rightarrow (\exists x)(\forall y)[B(x,y) \wedge (\forall y)(A(y,x) \rightarrow B(x,y))]\}$$

$$\Leftrightarrow (\exists x) \neg \{ \neg(\exists y)A(x,y) \vee (\exists x)(\forall y)[B(x,y) \wedge (\forall y)(A(y,x) \rightarrow B(x,y))] \}$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)\{(\exists y)A(x,y) \wedge \neg(\exists x)(\forall y)[B(x,y) \wedge (\forall y)(A(y,x) \rightarrow B(x,y))]\}$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)\{(\exists y)A(x,y) \wedge (\forall x)(\exists y)[\neg B(x,y) \vee (\exists y)\neg(A(y,x) \rightarrow B(x,y))]\}$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)\{(\exists y)A(x,y) \wedge (\forall u)(\exists v)[\neg B(u,v) \vee (\exists w)\neg(A(w,u) \rightarrow B(u,w))]\}$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(\forall u)(\exists v)(\exists w) \{A(x,y) \wedge [\neg B(u,v) \vee \neg(A(w,u) \rightarrow B(u,w))]\}$$



§ 6 前束范式

例5：写出 $(\forall x)(\underline{F(x) \rightarrow G(x)}) \rightarrow ((\exists x)F(x) \rightarrow (\exists x)G(x))$ 的前束范式。

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &\Leftrightarrow (\forall x)(\neg F(x) \vee G(x)) \rightarrow (\neg(\exists x)F(x) \vee (\exists x)G(x)) \\ &\Leftrightarrow \neg(\forall x)(\neg F(x) \vee G(x)) \vee (\neg(\exists x)F(x) \vee (\exists x)G(x)) \\ &\Leftrightarrow (\exists x)((F(x) \wedge \neg G(x)) \vee (\forall x)\neg F(x) \vee (\exists x)G(x)) \\ &\Leftrightarrow (\exists x)((F(x) \wedge \neg G(x)) \vee (\exists x)G(x) \vee (\forall x)\neg F(x)) \\ &\Leftrightarrow (\exists x)((F(x) \wedge \neg G(x)) \vee G(x)) \vee (\forall x)\neg F(x) \\ &\Leftrightarrow (\exists x)((F(x) \vee G(x)) \vee (\forall x)\neg F(x)) \\ &\Leftrightarrow (\exists x)((F(x) \vee G(x)) \vee (\forall y)\neg F(y)) \\ &\Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(F(x) \vee G(x) \vee \neg F(y)) \end{aligned}$$

二 前束合取范式

1. 定义

一个谓词公式若具有如下形式称为**前束合取范式**。

$$(\Box v_1)(\Box v_2)\dots(\Box v_n) [(A_{11} \vee A_{12} \vee \dots \vee A_{1n}) \wedge (A_{21} \vee A_{22} \vee \dots \vee A_{2n}) \wedge \dots \wedge (A_{m1} \vee A_{m2} \vee \dots \vee A_{mn})]$$

其中： \Box 是量词 \forall 或 \exists ；

v_i ($i=1, 2, 3, \dots, n$) 是客体变元；

A_{ij} 是原子公式或其否定。

2. 定理

每一个谓词公式都可以转化为与其等价的前束合取范式。

3. 化前束合取范式的步骤

- (1) 消多余量词
- (2) 换名
- (3) 消去条件联结词
- (4) 将 \neg 深入
- (5) 将量词提出



§ 6 前束范式

例：将 $D=(\forall x)[(\forall y)P(x) \vee (\forall z)Q(z,y) \rightarrow \neg(\forall y)R(x,y)]$ 转化为与其等价的前束合取范式。

$$\begin{aligned}\text{解： } D &\Leftrightarrow (\forall x)[P(x) \vee (\forall z)Q(z,y) \rightarrow \neg(\forall y)R(x,y)] \\ &\Leftrightarrow (\forall x)[P(x) \vee (\forall z)Q(z,y) \rightarrow \neg(\forall w)R(x,w)] \\ &\Leftrightarrow (\forall x)[\neg(P(x) \vee (\forall z)Q(z,y)) \vee \neg(\forall w)R(x,w)] \\ &\Leftrightarrow (\forall x)[(\neg P(x) \wedge (\exists z)\neg Q(z,y)) \vee (\exists w)\neg R(x,w)] \\ &\Leftrightarrow (\forall x)(\exists z)(\exists w)[(\neg P(x) \wedge \neg Q(z,y)) \vee \neg R(x,w)] \\ &\Leftrightarrow (\forall x)(\exists z)(\exists w)[(\neg P(x) \vee \neg R(x,w)) \wedge (\neg Q(z,y) \vee \neg R(x,w))]\end{aligned}$$



§ 6 前束范式

三、前束析取范式

定义：一个谓词公式具有如下形式称为前束析取范式。

$$(\Box v_1)(\Box v_2) \dots (\Box v_n) [(A_{11} \wedge A_{12} \wedge \dots \wedge A_{1n}) \vee (A_{21} \wedge A_{22} \wedge \dots \wedge A_{2n}) \vee \dots \vee (A_{m1} \wedge A_{m2} \wedge \dots \wedge A_{mn})]$$

其中： \Box 是量词 \forall 或 \exists ，

v_i ($i=1, 2, 3, \dots, n$) 是客体变元，

A_{ij} 是原子公式或其否定。

定理：每一个谓词公式都可以转化为与其等价的前束析取范式。



第二章 谓词逻辑

§ 1 谓词的概念与表示法

§ 2 命题函数与量词

§ 3 谓词公式与翻译

§ 4 变元的约束

§ 5 谓词演算的等价式与蕴含式

§ 6 前束范式

§ 7 谓词演算的推理理论



§7 谓词演算的推理理论

1. 四个推理规则

(1) 全称指定规则 (US规则)

如果对个体域中所有客体 x , $P(x)$ 成立, 则对个体域中某个任意客体 u , $P(u)$ 成立。

该规则表示成: $(\forall x)P(x) \Rightarrow P(u)$

(2) 全称推广规则 (UG规则)

如果能够证明对个体域中每一个客体 u , 命题 $P(u)$ 都成立, 则可得到结论 $(\forall x)P(x)$ 成立。

该规则表示成: $P(u) \Rightarrow (\forall x)P(x)$

(3) 存在指定规则 (ES规则)

如果对于个体域中某些客体 $P(x)$ 成立, 则必有某个特定的客体 c , 使 $P(c)$ 成立。

该规则表示成: $(\exists x)P(x) \Rightarrow P(c)$

(4) 存在推广规则 (EG规则)

如果对个体域中某个特定客体 c , 有 $P(c)$ 成立, 则在个体域中, 必存在 x , 使 $P(x)$ 成立。

该规则表示成: $P(c) \Rightarrow (\exists x) P(x)$



§ 7 谓词演算的推理理论

2 推论规则及使用说明

命题逻辑中的P, T, CP规则和间接证明法, 都可引用到谓词逻辑的推论规则中来, 但要注意对量词做适当处理。

方法: 用US, ES在推导中去掉量词;

用UG, EG使结论量化。



§ 7 谓词演算的推理理论

规则使用说明:

- (1) 在使用ES、US时, 量词一定在最前面。
- (2) 推导中连续使用US规则, 可用相同变元。

$$(\forall x)P(x) \Rightarrow P(a)$$

$$(\forall x)Q(x) \Rightarrow Q(a)$$

- (3) 推导中既用ES又用US时, **必须先用ES后用US**, 方可取相同变元, 反之不行。

$$(\exists x) P(x) \Rightarrow P(a)$$

$$(\forall x) Q(x) \Rightarrow Q(a)$$

- (4) 推导中连续使用ES时, 使用一次更改一个变元。



§ 7 谓词演算的推理理论

例：证明苏格拉底论证“所有的人总是要死的。因为苏格拉底是人，所以苏格拉底是要死的。”

证明：设 $M(x)$ ： x 是人； $D(x)$ ： x 是要死的；

s ：苏格拉底

$$(\forall x) (M(x) \rightarrow D(x)) \wedge M(s) \Rightarrow D(s)$$

$$(1) (\forall x) (M(x) \rightarrow D(x)) \quad P$$

$$(2) M(s) \rightarrow D(s) \quad US(1)$$

$$(3) M(s) \quad P$$

$$(4) D(s) \quad T(2)(3),I$$



§ 7 谓词演算的推理理论

例：证明 $(\forall x)(H(x) \rightarrow M(x)) , (\exists x)H(x) \Rightarrow (\exists x)M(x)$

证明：

(1)	$(\exists x)H(x)$	P
(2)	$H(c)$	ES(1)
(3)	$(\forall x)(H(x) \rightarrow M(x))$	P
(4)	$H(c) \rightarrow M(c)$	US(3)
(5)	$M(c)$	T(2)(4),I
(6)	$(\exists x) M(x)$	EG(5)

§ 7 谓词演算的推理理论

例：证明 $(\forall x) (C(x) \rightarrow W(x) \wedge R(x)) , (\exists x) (C(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)(Q(x) \wedge R(x))$

证明：

(1)	$(\forall x) (C(x) \rightarrow W(x) \wedge R(x))$	P
(2)	$C(a) \rightarrow W(a) \wedge R(a)$	US(1)
(3)	$(\exists x) (C(x) \wedge Q(x))$	P
(4)	$C(a) \wedge Q(a)$	ES(3)
(5)	$C(a)$	T(2), I
(6)	$W(a) \wedge R(a)$	T(4) (5), I
(7)	$R(a)$	T(6), I
(8)	$Q(a)$	T(2), I
(9)	$Q(a) \wedge R(a)$	T(7)(8), I
(10)	$(\exists x)(Q(x) \wedge R(x))$	EG(9)

?



§ 7 谓词演算的推理理论

例：证明 $(\exists x) (P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x) P(x) \rightarrow (\exists x) Q(x)$

证明：(1) $(\forall x) P(x)$	P附加前提
(2) $(\exists x) (P(x) \rightarrow Q(x))$	P
(3) $P(c) \rightarrow Q(c)$	ES(2)
(4) $P(c)$	US(1)
(5) $Q(c)$	T(3)(4),I
(6) $(\exists x) Q(x)$	EG(5)
(7) $(\forall x) P(x) \rightarrow (\exists x) Q(x)$	CP

§ 7 谓词演算的推理理论

例：证明 $\neg(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)), (\forall x)P(x) \Rightarrow \neg(\forall x)Q(x)$

证明：(1)	$\neg(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$	P
(2)	$(\exists x)\neg(P(x) \wedge Q(x))$	T(1),E
(3)	$\neg(P(c) \wedge Q(c))$	ES(2)
(4)	$\neg\neg(\forall x)Q(x)$	P附加前提
(5)	$(\forall x)Q(x)$	T(4),E
(6)	$Q(c)$	US(5)
(7)	$(\forall x)P(x)$	P
(8)	$P(c)$	US(7)
(9)	$P(c) \wedge Q(c)$	T(6)(8),I
(10)	$(P(c) \wedge Q(c)) \wedge \neg(P(c) \wedge Q(c))$ 矛盾	T(3)(9),I



§ 7 谓词演算的推理理论

例：任何人违反交通规则，则要受到罚款，**因此**，如果没有罚款，则没有人违反交通规则。

设：

$S(x,y)$ ：x违反y。

x的论域：人；y的论域：泛指各种规则。

$M(y)$ ：y是交通规则。

$R(x,z)$ ：x受到z处罚。z的论域：各种处罚方式。

$P(z)$ ：z是罚款。

§ 7 谓词演算的推理理论

1. 人违反了一种规则，这规则是交通规则。

$$(\exists y) (S(x,y) \wedge M(y))$$

2. 人受到一种处罚，这种处罚是罚款。

$$(\exists z)(P(z) \wedge R(x,z))$$

任何人违反交通规则，则要受到罚款。

$$\forall x(\exists y(S(x,y) \wedge M(y)) \rightarrow \exists z(P(z) \wedge R(x,z)))$$

3. 一次罚款都没有。 $\neg(\exists z)P(z)$

4. 无论什么人违法了什么规则，那些规则都不是交通规则。

$$(\forall x)(\forall y)(S(x,y) \rightarrow \neg M(y))$$

如果没有罚款，则没有人违反交通规则。 $3 \rightarrow 4$

$$\neg(\exists z)P(z) \rightarrow (\forall x)(\forall y)(S(x,y) \rightarrow \neg M(y))$$

§ 7 谓词演算的推理理论

$$\forall x(\exists y(S(x,y) \wedge M(y)) \rightarrow \exists z(P(z) \wedge R(x,z)))$$

$$\Rightarrow \neg(\exists z)P(z) \rightarrow (\forall x)(\forall y)(S(x,y) \rightarrow \neg M(y))$$

证明:

- | | |
|---|--------|
| (1) $\forall x(\exists y(S(x,y) \wedge M(y)) \rightarrow \exists z(P(z) \wedge R(x,z)))$ | P |
| (2) $\exists y(S(\mathbf{b},y) \wedge M(y)) \rightarrow \exists z(P(z) \wedge R(\mathbf{b},z))$ | US(1) |
| (3) $\neg(\exists z)P(z)$ | P附加前提 |
| (4) $\forall z(\neg P(z))$ | T(3),E |
| (5) $\neg P(\mathbf{a})$ | US(4) |
| (6) $\neg P(\mathbf{a}) \vee \neg R(\mathbf{b},\mathbf{a})$ | T(5),I |
| (7) $\neg(P(\mathbf{a}) \wedge R(\mathbf{b},\mathbf{a}))$ | T(6),E |
| (8) $\forall \mathbf{z} \neg(P(\mathbf{z}) \wedge R(\mathbf{b},\mathbf{z}))$ | UG(7) |
| (9) $\neg \exists \mathbf{z}(P(\mathbf{z}) \wedge R(\mathbf{b},\mathbf{z}))$ | T(8),E |

100

§ 7 谓词演算的推理理论

(10) $\neg \exists y(S(b,y) \wedge M(y))$	T(2)(9),I
(11) $\forall y \neg (S(b,y) \wedge M(y))$	T(10),E
(12) $\neg(S(b,c) \wedge M(c))$	US(11)
(13) $\neg S(b,c) \vee \neg M(c)$	T(12),E
(14) $S(b,c) \rightarrow \neg M(c)$	T(13),E
(15) $\forall y(S(b,y) \rightarrow \neg M(y))$	UG(14)
(16) $\forall x \forall y(S(x,y) \rightarrow \neg M(y))$	UG(15)
(17) $\neg(\exists z)P(z) \rightarrow \forall x \forall y(S(x,y) \rightarrow \neg M(y))$	CP(3)(16)

注意：在推理中，不能在量词后面的辖域范围内进行蕴含推证或等价变换。必须消去量词后，才能对谓词公式进行蕴含或等价推证。





§ 7 谓词演算的推理理论

例：所有的哺乳动物都是脊椎动物，并非所有的哺乳动物都是胎生动物。故有些脊椎动物不是胎生。

证明：设 $P(x)$ ： x 是哺乳动物。

$Q(x)$ ： x 是脊椎动物。

$R(x)$ ： x 是胎生动物。

题目符号化为：

$$\begin{aligned} & (\forall x) (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \neg(\forall x) (P(x) \rightarrow R(x)) \\ \Rightarrow & (\exists x) (Q(x) \wedge \neg R(x)) \end{aligned}$$

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \neg(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x)) \Rightarrow (\exists x)(Q(x) \wedge \neg R(x))$$

(1)	$\neg(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$	P
(2)	$(\exists x) \neg(P(x) \rightarrow R(x))$	T(1),E
(3)	$\neg(P(a) \rightarrow R(a))$	ES(2)
(4)	$\neg(\neg P(a) \vee R(a))$	T(3),E
(5)	$P(a) \wedge \neg R(a)$	T(4),E
(6)	$P(a)$	T(5),I
(7)	$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$	P
(8)	$P(a) \rightarrow Q(a)$	US(7)
(9)	$Q(a)$	T(6)(8),I
(10)	$\neg R(a)$	T(5),E
(11)	$Q(a) \wedge \neg R(a)$	T(9)(10),I
(12)	$(\exists x)(Q(x) \wedge \neg P(x))$	EG(11)

§ 7 谓词演算的推理理论

例：下列结论能否从前提中推出：

$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \neg Q(a) \Rightarrow \forall x \neg P(x)$, a 为 x 个体域中一个元素

- | | | |
|-----|-------------------------------------|-----------|
| (1) | $\neg Q(a)$ | P |
| (2) | $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ | P |
| (3) | $P(a) \rightarrow Q(a)$ | US |
| (4) | $\neg P(a)$ | T(1)(3),I |
| (5) | $\forall x \neg P(x)$ | UG |

在使用US,ES,UG,EG这四条规则时,要注意严格按照它们的规定去使用。

学习第二章要注意以下几点：

(1) 同一个命题在不同个体域内可能有不同的符号化形式，同时也可能有不同的真值，因而在将一个命题符号化之前，必须弄清个体域。

(2) 在将命题符号化时，要特别注意量词与联结词的搭配。经常的情况是全称量词 \forall 与蕴含词 \rightarrow 搭配，存在量词 \exists 与合取词 \wedge 搭配。因此有下面两种形式的公式：

$$\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \quad ① \qquad \forall x(A(x) \wedge B(x)) \quad ③$$

$$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \quad ② \qquad \exists x(A(x) \rightarrow B(x)) \quad ④$$

③与①，④与②的含义完全不同。



第二章小结

- (3) 记住主要的等价式。会用约束变元换名规则进行等价演算，求出给定公式的前束范式。
- (4) 在谓词演算的推理证明中，要特别注意 **US**，**UG**，**ES**，**EG** 规则成立的条件。