二元关系的性质

- 自反性
- 反自反性
- 对称性
- 反对称性
- 传递性

1

自反性与反自反性

定义　设R为A上的关系,

(1) 若$\forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\in R)$, 则称$R$在$A$上是自反的.

(2) 若$\forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\notin R)$, 则称$R$在$A$上是反自反的.

实例:

自反关系：A上的全域关系E_A, 恒等关系I_A

小于等于关系L_A, 整除关系D_A

反自反关系：实数集上的小于关系

幂集上的真包含关系

实例

例1　$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$$R_1 = \{<1,1>,<2,2>\}$$

$$R_2 = \{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>\}$$

$$R_3 = \{<1,3>\}$$

R_2自反,

R_3反自反,

R_1既不是自反也不是反自反的

对称性与反对称性

定义 设R为A上的关系,

(1) 若$\forall x\forall y(x,y\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R\rightarrow\langle y,x\rangle\in R)$，则称$R$为$A$上**对称**的关系.

(2) 若$\forall x\forall y(x,y\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in R\rightarrow x=y)$, 则称$R$为$A$上的**反对称**关系.

实例:

对称关系：A上的全域关系E_A, 恒等关系I_A和空关系$\varnothing$

反对称关系：恒等关系I_A，空关系是A上的反对称关系.

4

实例

例2 设$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3和R_4都是A上的关系，

其中

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$， $R_2=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>\}$

$R_3=\{<1,2>,<1,3>\}$， $R_4=\{<1,2>,<2,1>,<1,3>\}$

R_1 对称、反对称.

R_2 对称，不反对称.

R_3 反对称，不对称.

R_4 不对称、也不反对称.

传递性

定义　设R为A上的关系, 若

$$\forall x\forall y\forall z(x,y,z\in A\land <x,y>\in R\land <y,z>\in R\rightarrow <x,z>\in R),$$

则称R是A上的传递关系.

实例:

A上的全域关系E_A,恒等关系I_A和空关系$\varnothing$

小于等于关系, 小于关系， 整除关系， 包含关系，

真包含关系

实例

例3 设$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$$

$$R_2=\{<1,2>,<2,3>\}$$

$$R_3=\{<1,3>\}$$

R_1 和 R_3 是A上的传递关系

R_2不是A上的传递关系

关系性质的充要条件

设R为A上的关系, 则

(1) R在A上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

(2) R在A上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$

(3) R在A上对称当且仅当 $R = R^{-1}$

(4) R在A上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

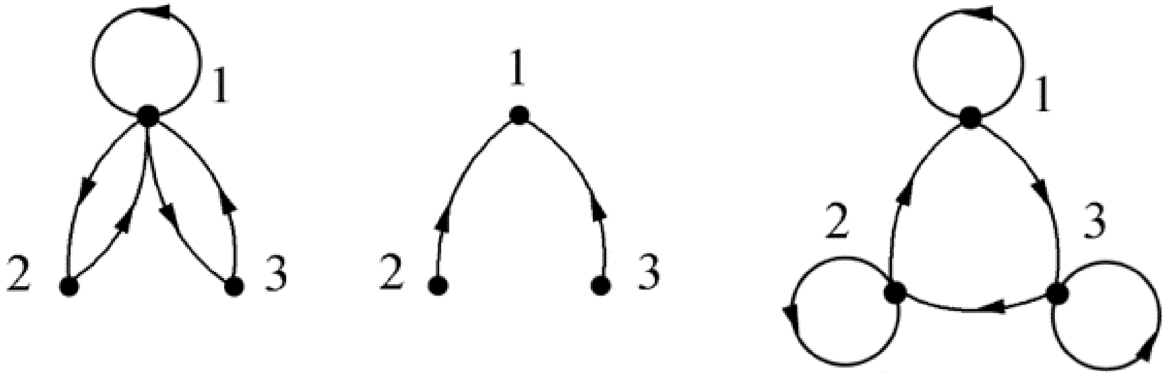
(5) R在A上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

关系性质判别

	自反	反自反	对称	反对称	传递
表达式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若$r_{ij}=1$，且$i \neq j$，则$r_{ji}=0$	对M^2中1所在位置，M中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边，是一对方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边，是一条有向边(无双向边)	如果顶点x_i连通到x_k，则从x_i到x_k有边

实例

例8 判断下图中关系的性质,并说明理由.



(a) (b) (c)

(a)不自反也不反自反；对称,不反对称；不传递.

(b)反自反，不是自反的；反对称，不是对称的；
是传递的.

(c)自反，不反自反；反对称，不是对称；不传递.

自反性证明

证明模式　证明R在A上自反
任取x,
$x \in A \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \langle x,x \rangle \in R$
前提　　推理过程　　结论

例4　证明若 $I_A \subseteq R$，则 R在A上自反.

证　任取x,

$$x \in A \Rightarrow \langle x,x \rangle \in I_A \Rightarrow \langle x,x \rangle \in R$$

因此 R 在 A 上是自反的.

对称性证明

证明模式 证明R在A上对称

任取$<x, y>$

$<x,y>\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow <y,x>\in R$

前提 推理过程 结论

例5 证明若 $R=R^{-1}$，则R在A上对称.

证 任取$<x,y>$

$<x,y>\in R \Rightarrow <y,x>\in R^{-1} \Rightarrow <y,x>\in R$

因此 R 在 A 上是对称的.

12

反对称性证明

证明模式　证明 R 在 A 上反对称

任取 $<x, y>$

$<x, y>\in R \wedge <y, x>\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow x=y$

前提　　　推理过程　　　结论

例6　证明若 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$，则 R 在 A 上反对称.

证　任取 $<x,y>$

$$<x,y>\in R \wedge <y, x>\in R \Rightarrow <x,y>\in R \wedge <x,y>\in R^{-1}$$

$$\Rightarrow <x,y>\in R\cap R^{-1} \Rightarrow <x,y>\in I_A \Rightarrow x=y$$

因此 R 在 A 上是反对称的.

13

传递性证明

证明模式　证明 R 在 A 上传递

任取 $\langle x, y\rangle$，$\langle y, z\rangle$

$\langle x,y\rangle\in R \wedge \langle y, z\rangle\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \langle x,z\rangle\in R$

前提　　推理过程　　结论

例7　证明若 $R\circ R\subseteq R$，则 R 在 A 上传递.

证　任取 $\langle x,y\rangle$，$\langle y, z\rangle$

$$\langle x,y\rangle\in R \wedge \langle y,z\rangle\in R \Rightarrow \langle x,z\rangle\in R\circ R \Rightarrow \langle x,z\rangle\in R$$

因此 R 在 A 上是传递的.

14

运算与性质的关系

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

15

关系的闭包

- 闭包定义
- 闭包的构造方法
  - 集合表示
  - 矩阵表示
  - 图表示
- 闭包的性质

闭包定义

定义 设R是非空集合A上的关系, R的自反（对称或传递）闭包是A上的关系R', 使得R'满足以下条件:

（1）R'是自反的（对称的或传递的）

（2）$R \subseteq R'$

（3）对A上任何包含R的自反（对称或传递）关系 R'' 有 $R' \subseteq R''$.

一般将 R 的自反闭包记作 $r(R)$, 对称闭包记作 $s(R)$, 传递闭包记作 $t(R)$.

定理(不动点) 若$R \subseteq A \times A$，则

① R是自反的iff $r(R)=R$

② R是对称的 iff $s(R)=R$

③ R是传递的iff $t(R)=R$

定理(单调性) 若$R,S\subseteq A\times A$，且$R\subseteq S$则

① $r(R)\subseteq r(S)$

② $s(R)\subseteq s(S)$

③ $t(R)\subseteq t(S)$

闭包的构造方法

定理 设R为A上的关系, 则有

(1) $r(R) = R \cup R^0$

(2) $s(R) = R \cup R^{-1}$

(3) $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

说明:

- 对于有穷集合A ($|A|=n$) 上的关系, (3)中的并最多不超过 R^n.

闭包运算与性质的关系

	自反性	对称性	传递性
r(R)	√（定义）	√（2）	√（3）
s(R)	√（1）	√（定义）	×（反例）
t(R)	√（1）	√（2）	√（定义）

定理 若$R\subseteq A\times A$，则

① $rs(R)=sr(R)$

② $rt(R)=tr(R)$

③ $st(R)\subseteq ts(R)$

例2.10 设A≠∅且R⊆A×A，对R依次求三种闭包，共有6种不同顺序，其中哪些顺序一定导致等价关系？ (说明：tsr(R)=t(s(r(R))))

解 由于 sr(R)=rs(R)，tr(R)=rt(R)，st(R)⊆ts(R)，

所以6种顺序至多产生两种结果：

	tsr(R)=trs(R)=rts(R)	str(R)=srt(R)=rst(R)
自反	√	√
对称	√	√
传递	√	×
等价关系	√(等价闭包)	×

闭包的构造方法（续）

设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系矩阵分别为M, M_r, M_s和M_t, 则

$$M_r = M + E$$

$$M_s = M + M'$$

$$M_t = M + M^2 + M^3 + \ldots$$

E是和M同阶的单位矩阵, M'是M的转置矩阵.

注意在上述等式中矩阵的元素相加时使用逻辑加.

闭包的构造方法（续）

设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图分别记为G, G_r, G_s, G_t, 则G_r, G_s, G_t的顶点集与G的顶点集相等. 除了G的边以外, 以下述方法添加新边:

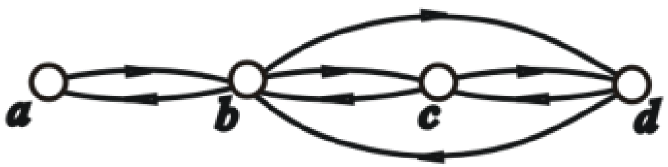
考察G的每个顶点, 如果没有环就加上一个环，最终得到G_r. 考察G的每条边, 如果有一条x_i到x_j的单向边, $i \neq j$, 则在G中加一条x_j到x_i的反方向边，最终得到G_s. 考察G的每个顶点x_i, 找从x_i出发的每一条路径，如果从x_i到路径中任何结点x_j没有边，就加上这条边. 当检查完所有的顶点后就得到图G_t.

实例

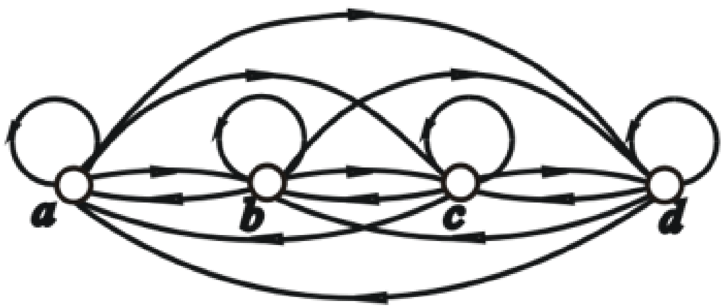
例1 设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,b\rangle\}$, R和 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图如下图所示.

R

$r(R)$



$s(R)$



$t(R)$

传递闭包的计算——Warshall算法

算法思路：

考虑 $n+1$ 个矩阵的序列 $M_0, M_1, \cdots, M_n$, 将矩阵 M_k 的 i 行 j 列的元素记作 $M_k[i,j]$. 对于 $k=0,1,\cdots,n$, $M_k[i,j]=1$ 当且仅当在 R 的关系图中存在一条从 x_i 到 x_j 的路径，并且这条路径除端点外中间只经过 $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ 中的顶点. 不难证明 M_0 就是 R 的关系矩阵，而 M_n 就对应了 R 的传递闭包.

Warshall算法：

从 M_0 开始，顺序计算 $M_1, M_2, \cdots,$ 直到 M_n 为止.

Warshall算法的依据

从 $M_k[i,j]$ 计算 $M_{k+1}[i,j]$: $i,j\in V$.

顶点集 $V_1=\{1,2,\ldots,k\}$, $V_2=\{k+2,\ldots,n\}$, $V=V_1\cup\{k+1\}\cup V_2$,

$M_{k+1}[i,j]=1 \Leftrightarrow$ 存在从 i 到 j 中间只经过 $V_1\cup\{k+1\}$ 中点的路径

这些路径分为两类:

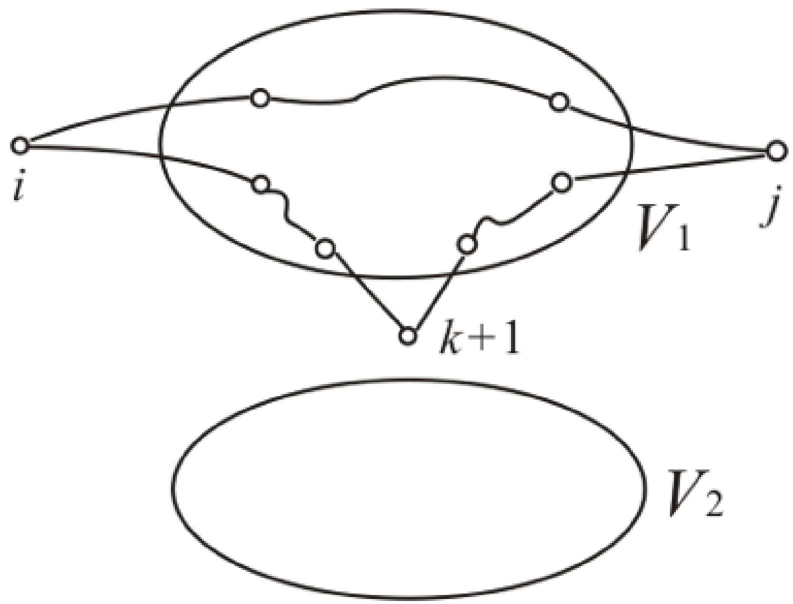
第1类: 只经过 V_1 中点

第2类: 经过 $k+1$ 点

存在第1类路径: $M_k[i,j]=1$

存在第2类路径:

$M_k[i,k+1]=1\wedge M_k[k+1,j]=1$



28

Warshall算法及其效率

算法4.1 Warshall算法

输入：M （R 的关系矩阵）

输出：M_t （$t(R)$的关系矩阵）

1. $M_t \leftarrow M$
2. for $k \leftarrow 1$ to n do
3. for $i \leftarrow 1$ to n do
4. for $j \leftarrow 1$ to n do
5. $M_t[i,j] \leftarrow M_t[i,j] + M_t[i,k] \cdot M_t[k,j]$

时间复杂度 $T(n)=O(n^3)$