离散数学

真值函数、联结词功能完备集、命题逻辑推理理论

计算机系

真值函数

问题：含n个命题变项的所有公式共产生多少个互不相同的真值表？

定义 称定义域为{00…0, 00…1, …, 11…1}，值域为{0,1}的函数是n元真值函数，定义域中的元素是长为n的0,1串. 常用$F:\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ 表示F是n元真值函数.

共有2^{2^n}个n元真值函数.

例如 $F:\{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$，且$F(00)=F(01)=F(11)=0$，$F(01)=1$，则$F$为一个确定的2元真值函数.

命题公式与真值函数

对于任何一个含n个命题变项的命题公式A，都存在惟一的一个n元真值函数F为A的真值表.

等值的公式对应的真值函数相同.

下表给出所有2元真值函数对应的真值表, 每一个含2个命题变项的公式的真值表都可以在下表中找到.

例如：$p\to q$, $\neg p\vee q$, $(\neg p\vee q)\vee(\neg(p\to q)\wedge q)$ 等都对应表中的$F_{13}^{(2)}$

2元真值函数对应的真值表

p	q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

p	q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

联结词的全功能集

定义 设S是一个联结词集合，如果任何$n(n\geq 1)$元真值函数都可以由仅含S中的联结词构成的公式表示，则称S是**联结词全功能集**.

说明：若S是联结词全功能集，则任何命题公式都可用S中的联结词表示.

设S_1, S_2是两个联结词集合，且$S_1\subseteq S_2$. 若S_1是全功能集，则S_2也是全功能集. 反之，若S_2不是全功能集，则S_1也不是全功能集.

联结词全功能集实例

定理 $\{\neg, \wedge, \vee\}$、$\{\neg, \wedge\}$、$\{\neg, \vee\}$、$\{\neg, \to\}$都是联结词全功能集.

证明 每一个真值函数都可以用一个主析取范式表示，故$\{\neg, \wedge, \vee\}$是联结词全功能集.

$p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$，故$\{\neg, \wedge\}$是全功能集.

$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$，故$\{\neg, \vee\}$是全功能集.

$p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$，故$\{\neg, \to\}$也是全功能集.

其它联结词

与非式：$p\uparrow q \Leftrightarrow \neg(p\wedge q)$

或非式：$p\downarrow q \Leftrightarrow \neg(p\vee q)$

$\uparrow$和$\downarrow$与$\neg$, $\wedge$, $\vee$有下述关系:

$\neg p \Leftrightarrow \neg(p\wedge p) \Leftrightarrow p\uparrow p$

$p\wedge q \Leftrightarrow \neg\neg(p\wedge q) \Leftrightarrow \neg(p\uparrow q) \Leftrightarrow (p\uparrow q)\uparrow(p\uparrow q)$

$p\vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p\wedge \neg q) \Leftrightarrow (\neg p)\uparrow(\neg q) \Leftrightarrow (p\uparrow p)\uparrow(q\uparrow q)$

其它联结词(续)

$$\neg p \Leftrightarrow p \downarrow p$$

$$p \wedge q \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$$

$$p \vee q \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$$

定理 $\{\uparrow\}$, $\{\downarrow\}$是联结词全功能集.

可以证明: $\{\wedge, \vee\}$不是全功能集, 从而$\{\wedge\}$, $\{\vee\}$也不是全功能集.

例

将公式$p\wedge\neg q$化成只含下列各联结词集中的联结词的等值的公式.

(1) $\{\neg,\ \vee\}$; (2) $\{\neg,\ \rightarrow\}$; (3) $\{\uparrow\}$; (4) $\{\downarrow\}$.

解 (1) $p\wedge\neg q\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)$.

(2) $p\wedge\neg q\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)\Leftrightarrow\neg(p\rightarrow q)$.

(3) $p\wedge\neg q\Leftrightarrow p\wedge(q\uparrow q)\Leftrightarrow\neg(\neg(p\wedge(q\uparrow q)))$

$\Leftrightarrow\neg(p\uparrow(q\uparrow q))\Leftrightarrow(p\uparrow(q\uparrow q))\uparrow(p\uparrow(q\uparrow q))$.

(4) $p\wedge\neg q\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)\Leftrightarrow(\neg p)\downarrow q\Leftrightarrow(p\downarrow p)\downarrow q$.

逻辑蕴涵关系

定义 设A和B为两个命题公式，若A→B是一个重言式，则称A（逻辑）蕴涵B，或称A永真蕴涵B，记作A⇒B. 即：若A→B⇔1，则称A⇒B.

说明

- **定义中**，A, B, ⇒**都是元语言符号**。
- **注意符号“→”和“⇒”之间的区别和联系.**
- **区别：“→”是命题联结词，它作用于两个命题A和B上，并构造复合命题A→B；而“⇒”表示两个公式间的蕴涵关系，A⇒B表示A蕴涵B.**
- **联系：A⇒B成立的充要条件是A→B⇔1.**

例题

例 证明 $(P\wedge Q)\Rightarrow P$.

证明　由于

$(P\wedge Q)\rightarrow P$

$\Leftrightarrow\neg(P\wedge Q)\vee P$

$\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q\vee P$

$\Leftrightarrow\neg P\vee P\vee\neg Q$

$\Leftrightarrow 1\vee\neg Q$

$\Leftrightarrow 1$

$\therefore\ (P\wedge Q)\rightarrow P\Leftrightarrow 1$,

由蕴涵定义得出：$(P\wedge Q)\Rightarrow P$.

蕴涵关系的性质

（1）自反性：即对任意的公式A，有$A \Rightarrow A$.

（2）反对称性：对任意的公式A和B，若$A \Rightarrow B$，且$B \Rightarrow A$，则有$A \Leftrightarrow B$.

（3）传递性：对任意的公式A、B和C，若$A \Rightarrow B$，且$B \Rightarrow C$，则$A \Rightarrow C$.

例 证明蕴涵关系的传递性.

证明 由已知$A \Rightarrow B$，且$B \Rightarrow C$，

$\therefore$ $A \to B \Leftrightarrow 1$，$B \to C \Leftrightarrow 1$，

又由于：$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$，$B \to C \Leftrightarrow \neg B \vee C$，

$\therefore$ $\neg A \vee B \Leftrightarrow 1$，$\neg B \vee C \Leftrightarrow 1$，

而 $A \to C \Leftrightarrow \neg A \vee C \Leftrightarrow (\neg A \vee C) \vee (\neg B \wedge B)$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee C \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee C \vee B)$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee (\neg B \vee C)) \wedge ((\neg A \vee B) \vee C)$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee 1) \wedge (1 \vee C) \Leftrightarrow 1$

$\therefore$ $A \Rightarrow C$.

蕴涵关系的判断

前真导后真法

分析：要证明$A \Rightarrow C$，即证$A \rightarrow C \Leftrightarrow 1$.

根据联结词→的定义，对于$A \rightarrow C$来说，当且仅当A取1，C取0时，$A \rightarrow C$为0；否则$A \rightarrow C$为1.

因此，要证明$A \Rightarrow C$，只需证明$A \rightarrow C$为重言式，故只要假设前件A为1时，由此推导出后件C亦为1，则$A \rightarrow C \Leftrightarrow 1$.

后假导前假法

即设$A \rightarrow C$的后件为0，若能导出前件也为0，则$A \rightarrow C$为重言式，即$A \Rightarrow C$成立.

分析：如果后件C为0，若由此推导出A的真值亦为0，即可推出$\neg C \rightarrow \neg A \Leftrightarrow 1$，故$A \rightarrow C \Leftrightarrow 1$

蕴涵关系的证明

例 证 $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$

证法1（前真导后真法）

设 $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$ 为T，则由“∧”的定义得出以下结论：

$\neg Q$为T，$P \rightarrow Q$为T，

∴ Q为F.

∴ P为F，∴ $\neg P$为T. （∵ $P \rightarrow Q$为T，Q为F）.

可得出：$\neg P$为T.

∴ $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow \neg P$为T

∴ $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$

证法2（后假导前假法）

设$\neg P$为F，∴ P为T，则在此条件下Q为两种情况：

若Q为T，∴ $\neg Q$为F，∴ $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$ 为F；

若Q为F，而此时P为T

∴ $(P \rightarrow Q)$ 为F，∴ $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$ 为F；

∴ $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$

基本蕴涵关系

(1) $A\wedge B\Rightarrow A$

(2) $B\wedge A\Rightarrow B$

(3) $A\Rightarrow A\vee B$

(4) $\neg A\Rightarrow A\rightarrow B$

(5) $B\Rightarrow A\rightarrow B$

(6) $\neg(A\rightarrow B)\Rightarrow A$

(7) $\neg(A\rightarrow B)\Rightarrow\neg B$

(8) $A\wedge(A\rightarrow B)\Rightarrow B$

(9) $\neg B\wedge(A\rightarrow B)\Rightarrow\neg A$

(10) $\neg A\wedge(A\vee B)\Rightarrow B$

(11) $(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C)\Rightarrow(A\rightarrow C)$

(12) $(A\vee B)\wedge(A\rightarrow C)\wedge(B\rightarrow C)\Rightarrow C$

(13) $(A\rightarrow B)\wedge(D\rightarrow C)\Rightarrow(A\wedge D)\rightarrow(B\wedge C)$

(14) $(A\leftrightarrow B)\wedge(B\leftrightarrow C)\Rightarrow(A\leftrightarrow C)$

推理的形式结构

定义 若对于每组赋值，或者$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$为假，或者当$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$为真时，$B$也为真，则称由$A_1, A_2, \cdots, A_k$推$B$的推理正确，否则推理不正确（错误）.

"$A_1, A_2, \cdots, A_k$ 推B" 的推理正确

当且仅当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \to B$为重言式.

推理的形式结构: $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \to B$ 或

前提： $A_1, A_2, \cdots, A_k$

结论： B

上述推理正确等价于：$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow B$.

判断推理是否正确的方法

- 真值表法
- 等值演算法　　判断推理是否正确
- 主析取范式法
- 构造证明法　　证明推理正确

说明：用前3个方法时采用形式结构

"$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \rightarrow B$" .

用构造证明时, 采用

"前提: $A_1, A_2, \cdots, A_k$, 结论: B" .

实例

例 判断下面推理是否正确

(1) 若今天是1号，则明天是5号. 今天是1号. 所以明天是5号.

解 设 p：今天是1号，q：明天是5号.

推理的形式结构为：$(p\to q)\wedge p\to q$

证明（用等值演算法）

$$(p\to q)\wedge p\to q$$

$$\Leftrightarrow \neg((\neg p\vee q)\wedge p)\vee q$$

$$\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee q \Leftrightarrow 1$$

得证推理正确

实例（续）

(2) 若今天是1号，则明天是5号. 明天是5号. 所以今天是1号.

解 设p：今天是1号，q：明天是5号.

推理的形式结构为：$(p\to q)\wedge q\to p$

证明（用主析取范式法）

$$(p\to q)\wedge q\to p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge q\to p$$

$$\Leftrightarrow \neg\,((\neg p\vee q)\wedge q)\vee p$$

$$\Leftrightarrow \neg q\vee p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$$

$$\Leftrightarrow m_0\vee m_2\vee m_3$$

结果不含m_1，故01是成假赋值，所以推理不正确.

推理定律——重言蕴涵式

重要的推理定律

$A \Rightarrow (A \vee B)$	附加律
$(A \wedge B) \Rightarrow A$	化简律
$(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$	假言推理
$(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$	拒取式
$(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$	析取三段论
$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$	假言三段论
$(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$	等价三段论
$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$	构造性二难

推理定律 (续)

$(A\rightarrow B)\wedge(\neg A\rightarrow B) \Rightarrow B$　构造性二难（特殊形式）

$(A\rightarrow B)\wedge(C\rightarrow D)\wedge(\neg B\vee\neg D) \Rightarrow (\neg A\vee\neg C)$

破坏性二难

证明：描述推理过程的命题公式序列，其中每个命题公式或者是已知的前提，或者是由前面的命题公式应用推理规则得到的结论.

推理规则

(1) 前提引入规则P

(2) 结论引入规则T

(3) 置换规则

(4) 假言推理规则

$$\begin{array}{l} A\to B \\ A \\ \hline \therefore B \end{array}$$

(5) 附加规则

$$\begin{array}{l} A \\ \hline \therefore A\lor B \end{array}$$

(6) 化简规则

$$\begin{array}{l} A\land B \\ \hline \therefore A \end{array}$$

(7) 拒取式规则

$$\begin{array}{l} A\to B \\ \neg B \\ \hline \therefore \neg A \end{array}$$

(8) 假言三段论规则

$$\begin{array}{l} A\to B \\ B\to C \\ \hline \therefore A\to C \end{array}$$

推理规则（续）

(9) 析取三段论规则

$$\frac{\begin{array}{l} A \vee B \\ \neg B \end{array}}{\therefore A}$$

(10)构造性二难推理规则

$$\frac{\begin{array}{l} A \to B \\ C \to D \\ A \vee C \end{array}}{\therefore B \vee D}$$

(11) 破坏性二难推理规则

$$\frac{\begin{array}{l} A \to B \\ C \to D \\ \neg B \vee \neg D \end{array}}{\therefore \neg A \vee \neg C}$$

(12) 合取引入规则

$$\frac{\begin{array}{l} A \\ B \end{array}}{\therefore A \wedge B}$$

直接证明法

例 构造下面推理的证明：

若明天是星期一或星期三，我就有课. 若有课，今天必备课. 我今天没备课. 所以，明天不是星期一和星期三.

解 设 p：明天是星期一，q：明天是星期三，

r：我有课，s：我备课

推理的形式结构为

前提：$(p\vee q)\to r$，$r\to s$，$\neg s$

结论：$\neg p\wedge\neg q$

直接证明法（续）

证明

① $r \to s$ P前提引入

② $\neg s$ P前提引入

③ $\neg r$ T①②拒取式

④ $(p \vee q) \to r$ P前提引入

⑤ $\neg(p \vee q)$ T③④拒取式

⑥ $\neg p \wedge \neg q$ T⑤置换

附加前提证明法（CP规则）

欲证明

前提：$A_1, A_2, \cdots, A_k$

结论：$C \to B$

等价地证明

前提：$A_1, A_2, \cdots, A_k, C$

结论：B

理由：

$$(A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_k) \to (C \to B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_k) \lor (\neg C \lor B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_k \land C) \lor B$$

$$\Leftrightarrow (A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_k \land C) \to B$$

附加前提证明法 (续)

例 构造下面推理的证明:

2是素数或合数. 若2是素数，则 $\sqrt{2}$是无理数. 若 $\sqrt{2}$是无理数，则4不是素数. 所以，如果4是素数，则2是合数.

用附加前提证明法构造证明

解 设 p: 2是素数，q: 2是合数，

r: $\sqrt{2}$是无理数，s: 4是素数

推理的形式结构

前提: $p \lor q$, $p \to r$, $r \to \neg s$

结论: $s \to q$

附加前提证明法 (续)

证明

① s	P(附加前提引入)
② $p\to r$	P 前提引入
③ $r\to\neg s$	P前提引入
④ $p\to\neg s$	T②③假言三段论
⑤ $\neg p$	T①④拒取式
⑥ $p\vee q$	P前提引入
⑦ q	T⑤⑥析取三段论
⑧$s\to q$	CP ① ⑦

请用直接证明法证明之

归谬法(反证法)

欲证明

前提：$A_1, A_2, \cdots, A_k$

结论：B

将$\neg B$加入前提，若推出矛盾，则得证推理正确.

理由:

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \rightarrow B$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \vee B$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B)$$

括号内部为矛盾式当且仅当 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \rightarrow B)$为

重言式

归谬法（续）

例 构造下面推理的证明

前提：$\neg(p\wedge q)\vee r$，$r\rightarrow s$，$\neg s$，p

结论：$\neg q$

证明（用归缪法）

① q P结论否定作为前提引入

② $r\rightarrow s$ P前提引入

③ $\neg s$ P前提引入

④ $\neg r$ T②③拒取式

归谬法（续）

⑤ $\neg(p\wedge q)\vee r$ P前提引入

⑥ $\neg(p\wedge q)$ T④⑤析取三段论

⑦ $\neg p\vee\neg q$ T⑥置换

⑧ $\neg p$ T①⑦析取三段论

⑨ p P前提引入

⑩ $\neg p\wedge p$ T⑧⑨合取

所以可知推理正确

请用直接证明法证明之

例 $(P\vee Q)\wedge(P\to R)\wedge(Q\to S)\Rightarrow S\vee R$

证明

编号	各步公式	规则	根据
①	$P\vee Q$	P	（直接引入命题）
②	$\neg\neg P\vee Q$	T①	$\neg\neg P\Leftrightarrow P$
③	$\neg P\to Q$	T②	$\neg P\to Q\Leftrightarrow\neg\neg P\vee Q$
④	$Q\to S$	P	
⑤	$\neg P\to S$	T③④	$P\to Q$，$Q\to S\Leftrightarrow P\to S$
⑥	$\neg S\to P$	T⑤	$P\to Q\Leftrightarrow\neg Q\to\neg P$
⑦	$P\to R$	P	
⑧	$\neg S\to R$	T⑥⑦	$P\to Q$，$Q\to S\Leftrightarrow P\to S$
⑨	$S\vee R$	T⑧	$\neg S\to R\Leftrightarrow S\vee R$

截图(Alt + A)

例

如果 A 去野营，B 或 C 去野营；如果 B 去野营，A 不去野营；如果 D 去野营，C 不去野营；所以如果 A 去野营，D 不去野营.

【解】 设 A 为 A 去野营，B 为 B 去野营，C 为 C 去野营，D 为 D 去野营.

根据题意分析，要证明的前提分别是：

“如果 A 去野营，B 或 C 去野营”符号化为 $A \to (B \vee C)$.

“如果 B 去野营，A 不去野营”符号化为 $B \to \neg A$.

“如果 D 去野营，C 不去野营”符号化为 $D \to \neg C$.

结论为“如果 A 去野营，D 不去野营”，将其符号化为 $A \to \neg D$.

所以题目要证明的是

$$A \to (B \vee C),\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \Rightarrow A \to \neg D$$

例 $A \to (B \vee C)$，$B \to \neg A$，$D \to \neg C \Rightarrow A \to \neg D$

证明

编号	各步公式	规则	根据
①	$D \to \neg C$	P	
②	$C \to \neg D$	T①	$P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$
③	$B \to \neg A$	P	
④	$A \to \neg B$	T③	同上
⑤	A	CP（附加前提）	
⑥	$\neg B$	T④⑤	P，$(P \to Q) \Rightarrow Q$
⑦	$A \to (B \vee C)$	P	
⑧	$B \vee C$	T⑤⑦	同上
⑨	C	T⑥⑧	$\neg B$，$B \vee C \Rightarrow C$
⑩	$\neg D$	T②⑨	P，$(P \to Q) \Rightarrow Q$
⑪	$A \to \neg D$	T⑤⑩	$P \wedge R \Rightarrow S \therefore P \Rightarrow R \to S$

例 求证$\neg(R\wedge S)$是$\neg R\wedge\neg S$的有效结论.

证明

编号	各步公式	规则	根据
①	$\neg\neg(R\wedge S)$	P	(结论的否定做附加前提)
②	$R\wedge S$	T	$\neg\neg P\Leftrightarrow P$
③	R	T②	$R\wedge S\Rightarrow R$
④	$\neg R\wedge\neg S$	P	
⑤	$\neg R$	T④	$R\wedge S\Rightarrow R$
⑥	$R\wedge\neg R$	T③⑤	P，$Q\Rightarrow P\wedge Q$
⑦	F		

$\therefore\neg R\wedge\neg S$可逻辑推出$\neg(R\wedge S)$.