

2.2 一阶逻辑公式及解释

- 合式公式(简称公式)
- 个体变项的自由出现和约束出现
- 解释与赋值
- 公式分类
- 永真式, 矛盾式, 可满足式

字母表

定义 字母表包含下述符号:

- (1) 个体常项: $a, b, c, \dots, a_i, b_i, c_i, \dots, i \geq 1$
- (2) 个体变项: $x, y, z, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, i \geq 1$
- (3) 函数符号: $f, g, h, \dots, f_i, g_i, h_i, \dots, i \geq 1$
- (4) 谓词符号: $F, G, H, \dots, F_i, G_i, H_i, \dots, i \geq 1$
- (5) 量词符号: \forall, \exists
- (6) 联结词符号: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- (7) 括号与逗号: $(,), ,$

项

定义 项的定义如下:

- (1) 个体常项和个体变项是项.
- (2) 若 $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是任意的 n 元函数, t_1, t_2, \dots, t_n 是任意的 n 个项, 则 $\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是项.
- (3) 所有的项都是有限次使用 (1), (2) 得到的.

原子公式

定义 设 $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是任意的 n 元谓词, t_1, t_2, \dots, t_n 是任意的 n 个项, 则称 $R(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是**原子公式**.

原子公式是由项组成的 n 元谓词.

例如, $F(x, y), F(f(x_1, x_2), g(x_3, x_4))$ 等均为原子公式

合式公式

定义 合式公式（简称**公式**）定义如下：

- (1) 原子公式是合式公式.
- (2) 若 A 是合式公式, 则 $(\neg A)$ 也是合式公式
- (3) 若 A, B 是合式公式, 则 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式
- (4) 若 A 是合式公式, 则 $\forall xA, \exists xA$ 也是合式公式
- (5) 只有有限次地应用(1)~(4)形成的符号串是合式公式.

如 $x \geq 0, \forall x (F(x) \rightarrow G(x)), \forall x \exists y (x+y=1)$

个体变项的自由出现与约束出现

定义 在公式 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 中, 称 x 为**指导变元**, A 为相应量词的**辖域**. 在 $\forall x$ 和 $\exists x$ 的**辖域**中, x 的所有出现都称为**约束出现**, A 中不是约束出现的其他变项均称为是**自由出现**.

例如, 在公式 $\forall x(F(x,y) \rightarrow G(x,z))$ 中,

$A=(F(x,y) \rightarrow G(x,z))$ 为 $\forall x$ 的辖域,

x 为指导变元, A 中 x 的两次出现均为约束出现,

y 与 z 均为自由出现.

闭式: 不含自由出现的个体变项的公式.

公式的解释与分类

闭式: 不含自由出现的个体变项的公式.

给定闭式 $A = \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

取个体域 \mathbf{N} , $F(x): x > 2$, $G(x): x > 1$

代入得 $A = \forall x(x > 2 \rightarrow x > 1)$ 真命题

给定非闭式 $B = \forall x F(x, y)$

取个体域 \mathbf{N} , $F(x, y): x \geq y$

代入得 $B = \forall x(x \geq y)$ 不是命题

令 $y = 1$, $B = \forall x(x \geq 1)$ 假命题

解释和赋值

例 公式 $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

指定1 个体域: 全总个体域, $F(x)$: x 是人, $G(x)$: x 是黄种人
假命题

指定2 个体域: 实数集, $F(x)$: $x > 10$, $G(x)$: $x > 0$
真命题

例 $\exists x F(x, y)$

指定 个体域: 自然数集, $F(x, y)$: $x = y$
 $y = 0$ 真命题

解释和赋值

定义 解释 I 由下面4部分组成:

- (a) 非空个体域 D_I
- (b) 对每一个个体常项 a 指定一个 $\bar{a} \in D_I$
- (c) 对每一个函数符号 f 指定一个 D_I 上的函数 \bar{f}
- (d) 对每一个谓词符号 F 指定一个 D_I 上的谓词 \bar{F}

赋值 σ : 对每一个命题变项 x 指定一个值 $\sigma(x) \in D_I$

公式 A 在解释 I 和赋值 σ 下的含义: 取个体域 D_I , 并将公式中出现的 a 、 f 、 F 分别解释成 \bar{a} 、 \bar{f} 、 \bar{F} 把自由出现的 x 换成 $\sigma(x)$ 后所得到的命题.

在给定的解释和赋值下, 任何公式都成为命题.

实例

例 给定解释 I 如下:

(a) 个体域 $D=\mathbf{N}$

(b) $\bar{a} = 2$

(c) $\bar{f}(x, y) = x + y, \bar{g}(x, y) = xy$

(d) 谓词 $\bar{F}(x, y): x = y$

以及赋值 σ : $\sigma(x)=0, \sigma(y)=1, \sigma(z)=2$.

说明下列公式在 I 与 σ 下的涵义,并讨论真值

(1) $\forall x F(g(x, a), y)$

$\forall x(2x=1)$ 假命题

例(续)

$$(2) \forall x F(f(x,a),y) \rightarrow \forall y F(x,f(y,a))$$

$$\forall x (x+2=1) \rightarrow \forall y (0=y+2) \quad \text{真命题}$$

$$(3) \exists x F(f(x,y),g(x,z))$$

$$\exists x (x+1=2x) \quad \text{真命题}$$

$$(4) \forall x \forall y \exists z F(f(x,y),z)$$

$$\forall x \forall y \exists z (x+y=z) \quad \text{真命题}$$

$$(5) \exists x \forall y \forall z F(f(y,z),x)$$

$$\exists x \forall y \forall z (y+z=x) \quad \text{假命题}$$

闭式只需要解释, 如(4),(5)

公式的分类

永真式(逻辑有效式):在任何解释和赋值下为真命题

矛盾式(永假式):在任何解释和赋值下为假命题

可满足式: 存在成真的解释和赋值

说明:

永真式为可满足式, 但反之不真

谓词公式的可满足性 (永真性, 永假性) 是不可判定的

代换

定义 设 A_0 是含命题变项 p_1, p_2, \dots, p_n 的命题公式,
 A_1, A_2, \dots, A_n 是 n 个谓词公式, 用 A_i 处处代替 A_0 中的 p_i
($1 \leq i \leq n$), 所得公式 A 称为 A_0 的**代换实例**.

如 $F(x) \rightarrow G(x), \forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y)$ 是 $p \rightarrow q$ 的代换实例

定理 重言式的代换实例都是永真式, 矛盾式的代换实例都是矛盾式.

实例

例 判断下列公式的类型

(1) $\forall xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$;

设 I 为任意的解释, 若 $\forall xF(x)$ 为假, 则
 $\forall xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$ 为真. 若 $\forall xF(x)$ 为真, 则 $\exists xF(x)$ 也为真, 所以 $\forall xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$ 也为真.

是逻辑有效式.

(2) $\forall xF(x) \rightarrow (\forall x\exists yG(x,y) \rightarrow \forall xF(x))$;

重言式 $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ 的代换实例, 是逻辑有效式.

例(续)

$$(3) \forall x F(x) \rightarrow (\forall x F(x) \vee \exists y G(y));$$

重言式 $p \rightarrow (p \vee q)$ 的代换实例，是逻辑有效式。

$$(4) \neg(F(x,y) \rightarrow R(x,y)) \wedge R(x,y);$$

矛盾式 $\neg(p \rightarrow q) \wedge q$ 的代换实例，是矛盾式。

例(续)

(5) $\forall x \exists y F(x,y) \rightarrow \exists x \forall y F(x,y)$.

取解释 I : 个体域 N , $F(x,y)$ 为 $x=y$.

公式被解释为 $\forall x \exists y (x=y) \rightarrow \exists x \forall y (x=y)$, 其值为假.

解释 I' : 个体域 N , $F(x,y)$ 为 $x \leq y$, 得到一个新的 在 I' 下,

公式被解释为 $\forall x \exists y (x \leq y) \rightarrow \exists x \forall y (x \leq y)$, 其值为真.

是非逻辑有效式的可满足式.

例(续)

(6) $\exists x F(x,y)$

取解释 I : 个体域 N , $F(x,y)$ 为 $x < y$. 赋值 σ_1 : $\sigma_1(y)=1$.

在 I 和 σ_1 下, $\exists x(x < 1)$, 真命题.

取解释 I : 个体域 N , $F(x,y)$ 为 $x < y$. 赋值 σ_2 : $\sigma_2(y)=0$.

在 I 和 σ_2 下, $\exists x(x < 0)$, 假命题

是非逻辑有效式的可满足式.