

2021 年全国硕士研究生招生考试

数 学 (一)

(科目代码:301)

一、选择题(1~10 小题,每小题 5 分,共 50 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将所选项前的字母写在题后的括号内.)

(1) 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处().

(A) 连续且取得极大值

(B) 连续且取得极小值

(C) 可导且导数等于零

(D) 可导且导数不为零

(2) 设函数 $f(x, y)$ 可微, 且 $f(x+1, e^x) = x(x+1)^2$, $f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$, 则 $df(1, 1) = ()$.

(A) $dx + dy$

(B) $dx - dy$

(C) dy

(D) $-dy$

(3) 设函数 $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x = 0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax + bx^2 + cx^3$, 则().

(A) $a = 1, b = 0, c = -\frac{7}{6}$

(B) $a = 1, b = 0, c = \frac{7}{6}$

(C) $a = -1, b = -1, c = -\frac{7}{6}$

(D) $a = -1, b = -1, c = \frac{7}{6}$

(4) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 则 $\int_0^1 f(x) dx = ()$.

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{2n}$

(B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$

(D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right) \frac{2}{n}$

(5) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为().

(A) 2, 0

(B) 1, 1

(C) 2, 1

(D) 1, 2

(6) 已知 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - k\beta_1, \beta_3 = \alpha_3 - l_1\beta_1 - l_2\beta_2$, 若 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 两两相交, 则 l_1, l_2 依次为().

(A) $\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$

(B) $-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$

(C) $\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$

(D) $-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$

7) 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为 n 阶实矩阵, 下列结论不成立的是().

$$(A) r \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^T \mathbf{A} \end{pmatrix} = 2r(\mathbf{A})$$

$$(B) r \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{AB} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^T \end{pmatrix} = 2r(\mathbf{A})$$

$$(C) r \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{BA} \\ \mathbf{O} & \mathbf{AA}^T \end{pmatrix} = 2r(\mathbf{A})$$

$$(D) r \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{BA} & \mathbf{A}^T \end{pmatrix} = 2r(\mathbf{A})$$

8) 设 A, B 为随机事件, 且 $0 < P(B) < 1$, 下列命题中为假命题的是().

$$(A) \text{ 若 } P(A|B) = P(A), \text{ 则 } P(A|\bar{B}) = P(A)$$

$$(B) \text{ 若 } P(A|B) > P(A), \text{ 则 } P(\bar{A}|\bar{B}) > P(\bar{A})$$

$$(C) \text{ 若 } P(A|B) > P(A|\bar{B}), \text{ 则 } P(A|B) > P(A)$$

$$(D) \text{ 若 } P(A|A \cup B) > P(\bar{A}|A \cup B), \text{ 则 } P(A) > P(B)$$

9) 设 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ 的简单随机样本,

$$\text{令 } \theta = \mu_1 - \mu_2, \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \hat{\theta} = \bar{X} - \bar{Y}, \text{ 则().}$$

$$(A) \hat{\theta} \text{ 是 } \theta \text{ 的无偏估计, } D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$$

$$(B) \hat{\theta} \text{ 不是 } \theta \text{ 的无偏估计, } D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$$

$$(C) \hat{\theta} \text{ 是 } \theta \text{ 的无偏估计, } D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$$

$$(D) \hat{\theta} \text{ 不是 } \theta \text{ 的无偏估计, } D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$$

10) 设 X_1, X_2, \dots, X_{16} 是来自总体 $N(\mu, 4)$ 的简单随机样本, 考虑假设检验问题: $H_0: \mu \leq 10$,

$H_1: \mu > 10$, $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数, 若该检验问题的拒绝域为 $W = \{\bar{X} \geq 11\}$, 其

中 $\bar{X} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} X_i$, 则 $\mu = 11.5$ 时, 该检验犯第二类错误的概率为().

$$(A) 1 - \Phi(0.5)$$

$$(B) 1 - \Phi(1)$$

$$(C) 1 - \Phi(1.5)$$

$$(D) 1 - \Phi(2)$$

二、填空题(11 ~ 16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 请将答案写在题中的横线上.)

$$11) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$12) \text{ 设函数 } y = y(x) \text{ 由参数方程 } \begin{cases} x = 2e^t + t + 1, \\ y = 4(t-1)e^t + t^2 \end{cases} \text{ 所确定, 则 } \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$13) \text{ 欧拉方程 } x^2 y'' + xy' - 4y = 0 \text{ 满足条件 } y(1) = 1, y'(1) = 2 \text{ 的解为 } y = \underline{\hspace{2cm}}.$$

14) 设 Σ 为空间区域 $\{(x, y, z) | x^2 + 4y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2\}$ 表面的外侧, 则曲面积分

$$\iint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

15) 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 为 3 阶矩阵, A_{ij} 为代数余子式, 若 \mathbf{A} 的每行元素之和均为 2, 且 $|\mathbf{A}| = 3$,

$$\text{则 } A_{11} + A_{21} + A_{31} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

16) 甲、乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球, 先从甲盒中任取一球, 观察颜色后放入乙盒中, 再从乙盒中任取一球, 令 X, Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数, 则 X 与 Y

的相关系数为_____.

三、解答题(17 ~ 22 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17) (本题满分 10 分)

$$\text{求极限} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right).$$

(18) (本题满分 12 分)

设 $u_n(x) = e^{-nx} + \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ ($n = 1, 2, \dots$), 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域及和函数.

(19) (本题满分 12 分)

已知曲线 $C: \begin{cases} x^2 + 2y^2 - z = 6, \\ 4x + 2y + z = 30, \end{cases}$ 求 C 上的点到 xOy 坐标面距离的最大值.

(20) (本题满分 12 分)

设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 是有界单连通闭区域, $I(D) = \iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy$ 取得最大值的积分区域为 D_1 .

(I) 求 $I(D_1)$ 的值;

(II) 计算 $\int_{\partial D_1} \frac{(x e^{x^2+4y^2} + y) dx + (4y e^{x^2+4y^2} - x) dy}{x^2 + 4y^2}$, 其中 ∂D_1 是 D_1 的正向边界.

(21) (本题满分 12 分)

已知 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$.

(I) 求正交矩阵 \mathbf{P} , 使得 $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$ 为对角矩阵;

(II) 求正定矩阵 \mathbf{C} , 使得 $\mathbf{C}^2 = (a + 3)\mathbf{E} - \mathbf{A}$.

(22) (本题满分 12 分)

在区间 $(0, 2)$ 上随机取一点, 将该区间分成两段, 较短一段的长度为 X , 较长一段的长度为 Y , 令 $Z = \frac{Y}{X}$.

(I) 求 X 的概率密度;

(II) 求 Z 的概率密度;

(III) 求 $E\left(\frac{X}{Y}\right)$.