7-3 图的矩阵表示

矩阵是研究图的一种有力工具，特别是利用计算机来处理有关图的算法时，首先遇到的难题是如何识别图？在前面我们也用有向图来表示集合A中元素的关系R，这种图被称为关系图，表示了集合A中元素的邻接关系，只要将集合A中的元素进行编号，这样的邻接关系同样可以用矩阵表示。识别一个图等价于识别一个矩阵。我们要讨论前面的有关图的概念，如何在矩阵中表达出来。

7-3 图的矩阵表示

我们讨论的是简单图，并令图的结点已经编号。

[定义7-3.1] 邻接矩阵

设G=〈V，E〉为简单图，它有n个结点$V=\{v_1,v_2,\cdots v_n\}$，

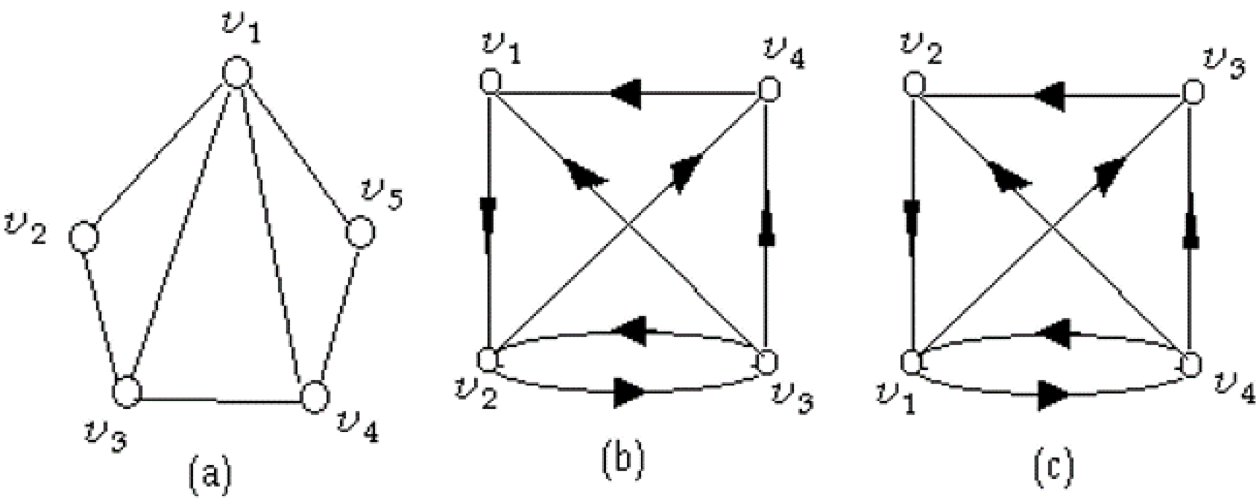
则n阶方阵$A(G)=(a_{ij})$称为G的邻接矩阵。

其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1, v_i \quad adj \quad v_j;\\ 0, v_i \quad nadj \quad v_j, \text{或} i=j.\end{cases}$$

adj 表示邻接，***nadj*** 表示不邻接。

7-3 图的矩阵表示



$$A(G)=\begin{bmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\\1&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$A(G_1)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix},\quad A(G_2)=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&0\\1&1&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

7-3 图的矩阵表示

当给定的简单图是无向图时，邻接矩阵为对称的，

当给定的图是有向图时，邻接矩阵不一定对称。图**G**的邻接矩阵显然与结点标定的次序有关，例如在上页的两个图(b)与图(c)中的结点v_1和v_2的次序对调,那么新的邻接矩阵由原来的邻接矩阵的第一行和第二行对调, 第一列和第二列对调而得到。

7-3 图的矩阵表示

一般地说，我们把一个n阶方阵A的某些列作一置换，再把相应的行作同样的置换，得到一个新的n阶方阵A'，我们称A和A'为置换等价。有向图的结点，按不同次序所写出来的邻接矩阵是彼此置换等价的，今后我们略去这种元素次序的任意性，可取任何一个邻接矩阵作为该图的矩阵表示。

7-3 图的矩阵表示

邻接矩阵A中表示了图的基本概念和许多图的性质。第i行的元素是由结点v_i出发的边所决定的，第i行第j列为1的的元素，表示了在v_i和v_j之间有边相连，即存在(v_i, v_j)；第i行中值为1的元素的数目等于v_i的出度；第j列中值为1的元素的数目等于v_j的入度。

如果给定的图是零图，则其对应的矩阵中所有的元素都为零，它是一个零矩阵，反之亦然，即邻接矩阵为零矩阵的图必是零图。

7-3 图的矩阵表示

设有向图G的结点集$V=\{v_1,v_2,\cdots v_n\}$，它的邻接矩阵为：$A(G)=(a_{ij})_{n\times n}$，现在我们来计算从结点$v_i$到结点$v_j$的长度为2的路的数目。注意到每条从结点$v_i$到结点$v_j$的长度为2的路的中间必经过一个结点$v_k$，即$v_i\to v_k\to v_j(1\leqslant k\leqslant n)$，如果图中有路$v_iv_kv_j$存在，那么$a_{ik}=a_{kj}=1$，即$a_{ik}\cdot a_{kj}=1$，反之如果图$G$中不存在路$v_iv_kv_j$，那么$a_{ik}=0$或$a_{kj}=0$，即$a_{ik}\cdot a_{kj}=0$，于是从结点$v_i$到结点$v_j$的长度为2的路的数目等于：

$$a_{i1}\cdot a_{1j}+a_{i2}\cdot a_{2j}+\cdots+a_{in}\cdot a_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot a_{kj}$$

7-3 图的矩阵表示

按照矩阵的乘法规则，这恰好是矩阵 $(A(G))^2$ 中的第i行，第j列的元素。

$$(a_{ij}^{(2)})_{n\times n}=(A(G))^2=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

7-3 图的矩阵表示

($a_{ij}^{(2)}$)表示从结点v_i到结点v_j的长度为2的路的数目。

($a_{ii}^{(2)}$)表示从结点v_i到结点v_i的长度为2的回路的数目。

从结点v_i到结点v_j的一条长度为3的路，可以看作从结点v_i到结点v_k的长度为1的路，在联结从结点v_k到结点v_j的长度为2的路，故从结点v_i到结点v_j的一条长度为3的路的数目：

$$a_{ij}^{(3)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \bullet a_{kj}^{(2)}$$

7-3 图的矩阵表示

即 $(a_{ij}^{(3)})_{n\times n}=(A(G))^3=(A(G))\bullet(A(G))^2$

一般地有

$$(a_{ij}^{(l)})_{n\times n}=(A(G))^l=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\overbrace{\cdots}^{l-2}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

上述结论对无向图也成立。

7-3 图的矩阵表示

[定理7-3.1] 设$A(G)$为图G的邻接矩阵，则$(A(G))^l$中的i行j列元素等于G中联结v_i与v_j的长度为l的路的数目。

证明 对l施归纳法

当$l=2$时，由上得知是显然成立。

设命题对l成立．由

$$(A(G))^{l+1}=A(G)\bullet(A(G))^l$$

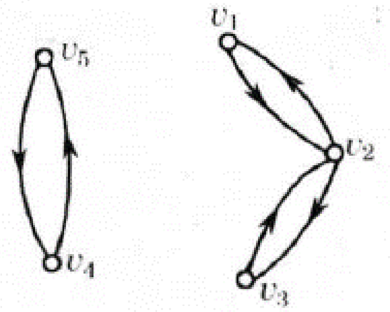
故

$$a_{ij}^{(l+1)}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot a_{kj}^{(l)}$$

根据邻接矩阵的定义a_{ik}表示联结v_i与v_k长度为1的路的数目，而是联结v_k与v_j长度为l的路的数目，上式的每一项表示由v_i经过一条边到v_k，再由v_k经过长度为l的路到v_j的，总长度为l+1的路的数目。对所有的k求和，即是所有从v_i到v的长度为l+1的路的数目，故命题对l+1成立。

7-3 图的矩阵表示

例1 给定一图$G=\langle V, E\rangle$如图所示。



$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},\quad A^2=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&2&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}0&2&0&0&0\\2&0&2&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},\quad A^4=\begin{bmatrix}2&0&2&0&0\\0&4&0&0&0\\2&0&2&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

7-3 图的矩阵表示

从上面的矩阵中我们可以看到一些结论，如v_1与v_2之间有两条长度为3的路，结点v_1与v_3之间有一条长度为2的路，在结点v_2有四条长度为4的回路。

在许多问题中需要**判断有向图的一个结点v_i到另一个结点v_j是否存在路的问题**。如果利用图G的邻接矩阵A，则可计算A，A^2，A^3，…，A^n，…，当发现其中的某个A^l的$a_{ij}^{(l)}\geqslant 1$，就表明结点v_i到v_j可达。但这种计算比较繁琐，且A^l不知计算到何时为止。从前面我们得知，如果有向图G有n个结点$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，v_i到v_j有一条路，则必有一条长度不超过n-1的初级通路，因此只要考察a_{ij}就可以了，其中$(1\leqslant l\leqslant n-1)$。对于有向图G中任意两个结点之间的可达性，亦可用可达矩阵表达。

雨课堂 Rain Classroom

7-3 图的矩阵表示

[定义7-3.2] 可达性矩阵

令$G=\langle V, E\rangle$是一个简单有向图，|V|=n，假定G的结点已编序，即$V=\{v_1,v_2,\cdots v_n\}$，定义一个$n\times n$矩阵 $P=(p_{ij})$ 其中

$$P_{ij}=\begin{cases}1, 从v_i到v_j至少存在一条路\\ 0, 从v_i到v_j不存在路\end{cases}$$

称矩阵P是图G的可达性矩阵。

注意：对角线元素均为1，这是因为结点到自己有一条长度为0的路.

7-3 图的矩阵表示

一般地讲可由图G的邻接矩阵A得到可达性矩阵P。即令$B_n=I+A+A^2+\cdots+A^{n-1}$，再从$B_n$中将不为0的元素改为1，而为零的元素不变，这样改换的矩阵即为可达性矩阵P。

7-3 图的矩阵表示

上述计算可达性矩阵的方法还是比较复杂，因为可达性矩阵是一个元素为0或1的布尔矩阵，由于在每个A^l中，对于两个结点间的路的数目不感兴趣，它所关心的是该两个结点间是否有路存在，因此我们可将矩阵A，A^2，…，A^{n-1}分别改为布尔矩阵A，$A^{(2)}$，…，$A^{(n-1)}$，故$P = I \vee A \vee A^{(2)} \vee \cdots \vee A^{(n-1)}$，其中$A^{(i)}$表示在布尔运算下$A$的$i$次方。

7-3 图的矩阵表示

可以看出，如果把邻接矩阵看作是结点集V上关系R的关系矩阵，则可达性矩阵P即为$I \vee M_R^{+}$，即关系R的自反传递闭包,因此可达矩阵亦可通过**Warshall** 算法计算。

7-3 图的矩阵表示

上述可达性矩阵的概念可以推广到无向图中，只要将无向图的每一条边看成是具有相反方向的两条边，这样，一个无向图就可以看成是有向图。无向图的邻接矩阵是一个对称矩阵，其可达矩阵称为连通矩阵,也是一个对称矩阵。

对于一个无向图G，除了可用邻接矩阵以外，还对应着一个称为图G的关联矩阵，假定图G无自回路，如因某种运算得到自回路，则将它删去。

7-3 图的矩阵表示

[定义7-3.3](完全)关联矩阵

给定无向图G，令$v_1,v_2,\cdots,v_p$和$e_1,e_2,\cdots,e_q$分别记为G的结点和边，则矩阵$M(G)=(m_{ij})$，其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1,\text{若}v_i\text{关联}e_j\\0,\text{若}v_i\text{不关联}e_j\end{cases}$$

称$M(G)$为(完全)关联矩阵。

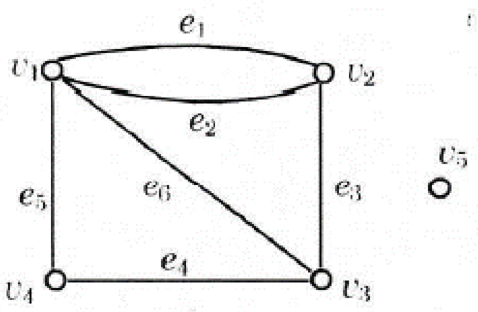


图 7-3.5

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
v_1	1	1	0	0	1	1
v_2	1	1	1	0	0	0
v_3	0	0	1	1	0	1
v_4	0	0	0	1	1	0
v_5	0	0	0	0	0	0

7-3 图的矩阵表示

(1)图中每一边关联两个结点，故$M(G)$的每一列只有两个**1**。

(2)每一行元素的和数对应于结点的度数。

(3)一行中的元素全为**0**，其对应的结点为孤立点。

(4)两个平行边其对应的两列相同。

(5)同一图当结点或边的编序不同，其对应$M(G)$仅有行序、列序的差别。

7-3 图的矩阵表示

当一个图是有向图时，亦可用结点和边的关联矩阵来表示。

定义7-3.4 给定简单有向图

$G=\langle V, E\rangle$, $V=\{v_1,v_2,\cdots v_p\}$, $E=\{e_1,e_2,\cdots e_q\}$, $p\times q$阶矩阵

$M(G)=(m_{ij})$，其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1, 在G中v_i是e_j的起点\\ -1, 在G中v_i是e_j的终点\\ 0, 在G中v_i不关联e_j\end{cases}$$

称$M(G)$为G的关联矩阵。

7-3 图的矩阵表示

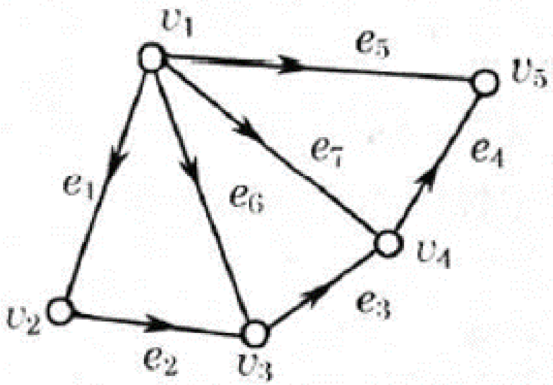


图 7-3.6

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
v_1	1	0	0	0	1	1	1
v_2	−1	1	0	0	0	0	0
v_3	0	−1	1	0	0	−1	0
v_4	0	0	−1	1	0	0	−1
v_5	0	0	0	−1	−1	0	0

对图 G 的完全关联矩阵中两个行相加定义如下：若记 v_i 对应的行为 $\vec{v}_i$，将第 i 行与第 j 行相加，规定为：对有向图是指对应分量的普通加法运算，对无向图是指对应分量的模 2 加法运算，把这种运算记作 $\vec{v}_i \oplus \vec{v}_j = \vec{v}_{ij}$。施行这种运算，实际上就是相应于把 G 的结点 v_i 与 v_j 合并。

设图 G 的结点 v_i 与 v_j 合并得到图 G'，那么 $M(G')$ 是将 $M(G)$ 中 $\vec{v}_i$ 与 $\vec{v}_j$ 相加而得到。因为若有关项中第 r 个对应分量有 $a_{ir} \oplus a_{jr} = \pm 1$，则说明 v_i 和 v_j 两者之中只有一个结点是边 e_r 的端点，且将两个结点合并后的结点 $v_{i,j}$ 仍是 e_r 的端点。

若 $a_{ir} \oplus a_{jr} = 0$，则有两种情况：

(1) v_i，v_j 都不是 e_r 的端点，那么 $v_{i,j}$ 也不是 e_r 的端点。

(2) v_i，v_j 都是 e_r 的端点，那么合并后在 G' 中 e_r 成为 $v_{i,j}$ 的自回路，按规定应删去。

此外，在 $M(G')$ 中若有某些列，其元素全为零，说明由 G 中的一些结点合并后，消失了一些对应边。

23

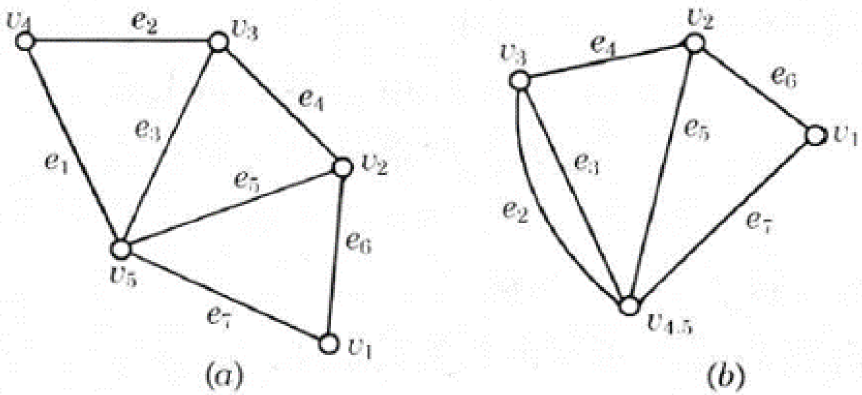


图 7-3.7

例 1 图 7-3.7(*a*) 中使 v_4 与 v_5 合并得到图 7-3.7(*b*)。其关联矩阵 $M(G')$是由 $M(G)$中将第 4 行加到第 5 行而得到。

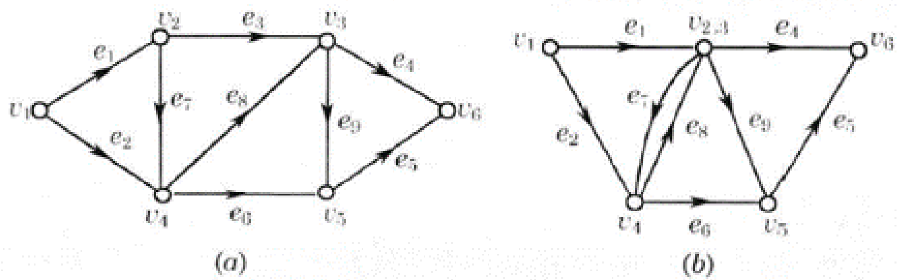
$M(G)$:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
v_1	0	0	0	0	0	1	1
v_2	0	0	0	1	1	1	0
v_3	0	1	1	1	0	0	0
v_4	1	1	0	0	0	0	0
v_5	1	0	1	0	1	0	1

$M(G')$:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
v_1	0	0	0	0	0	1	1
v_2	0	0	0	1	1	1	0
v_3	0	1	1	1	0	0	0
$v_{4,5}$	0	1	1	0	1	0	1

例 2　图 7－3.8(*a*)合并结点 v_2 和 v_3，删去自回路得图 7－3.8(*b*)。其关联矩阵 $M(G')$ 是由 $M(G)$ 中将第 2 行加到第 3 行



而得到。

$M(G)$:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
v_1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
v_2	−1	0	1	0	0	0	1	0	0
v_3	0	0	−1	1	0	0	0	−1	1
v_4	0	−1	0	0	0	1	−1	1	0
v_5	0	0	0	0	1	−1	0	0	−1
v_6	0	0	0	−1	−1	0	0	0	0

$M(G')$:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
v_1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
$v_{2,3}$	−1	0	0	1	0	0	1	−1	1
v_4	0	−1	0	0	0	1	−1	1	0
v_5	0	0	0	0	1	−1	0	0	−1
v_6	0	0	0	−1	−1	0	0	0	0

25

下面应用这种运算，可求关联矩阵的秩。

定理 7-3.2 如果一个连通图 G 有 r 个结点，则其完全关联矩阵 $M(G)$ 的秩为 $r-1$，即 $\text{rank } M(G)=r-1$。

证明 这里对无向图进行证明。

(1) 由于矩阵 $M(G)$ 的每一列恰有两个 1，若把 $M(G)$ 的其余所有行加到最后一行上（模 2 加法），得到矩阵 $\overline{M}(G)$，它的最后一行全为零，因为 $\overline{M}(G)$ 的秩与 $M(G)$ 相同，故 $M(G)$ 的秩应小于行数，即 $\text{rank } M(G)\leqslant r-1$。

(2) 设 $M(G)$ 的第一列对应边 e，且 e 的端点为 v_i 和 v_j，调整行序使第 i 行成为第一行，这时 $M(G)$ 的首列仅在第一行和第 j 行为 1，其余各元素均为 0，再把第一行加到第 j 行上去，则得矩阵 $M'(G)$。

$$M'(G)=\left[\begin{array}{c:ccc} 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & M'(G_1) & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

其中 $M'(G_1)$ 是 $M'(G)$ 删去第一行和第一列所得的矩阵。

雨课堂 Rain Classroom

由于 $M'(G_1)$是 G_1 的完全关联矩阵，而 G_1 系将 G 的两个结点 v_i 和 v_j 合并而得。由于 G 是连通的，故 G_1 也必为连通，$M'(G_1)$也具有连通图的完全关联矩阵的所有性质，故 $M'(G_1)$没有全零的行。如果 $M'(G_1)$的第一列全为零，则可将 $M'(G_1)$中的非零列与第一列对换，而不影响完全关联矩阵的秩数。因此，我们必可通过调整行的次序以及把一行加到另一行上这两种运算，使 $M'(G_1)$的第一列的首项元素为 1，得到：

$$
M''(G)=\left[\begin{array}{c:c:cc}
1 & \cdots & \cdots & \cdots \\
\hdashline
0 & 1 & \cdots & \cdots \\
\hdashline
 & 0 & & \\
\vdots & \vdots & \multicolumn{2}{c}{M'(G_2)} \\
0 & 0 & &
\end{array}\right]
$$

继续进行上述两种运算，并不改变矩阵的秩，经过 $r-1$ 次，最后将 $M(G)$ 变换成

$$M^{(r-1)}(G):=\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

显然 $M^{(r-1)}(G)$ 有一个 $(r-1)$ 阶子阵，其行列式的值不为零，故 $M^{(r-1)}(G)$ 的秩至少为 $r-1$。

由(1)和(2)可知

$$\text{rank} M(G)=r-1 \qquad \square$$

对于有向图的关联矩阵可以仿此证明。

推论　设图 G 有 r 个结点，w 个最大连通子图，则图 G 完全关联矩阵的秩为 $r-w$。

例 3　计算图 7－3.7(a)中其对应的完全关联矩阵的秩数，以验证定理 7－3.2。

设有完全关联矩阵 $M(G)$，以(k)记第 k 行，以$\overset{\frown}{m}$记第 m 列，以$\overset{\frown}{k}\leftrightarrow\overset{\frown}{m}$表示第 k 列与第 m 列对调，$(k)\leftrightarrow(m)$表示第 k 行与第 m 行对调，图 7－3.7(a)的完全关联矩阵为

$M(G)$：

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
v_1	0	0	0	0	0	1	1
v_2	0	0	0	1	1	1	0
v_3	0	1	1	1	0	0	0
v_4	1	1	0	0	0	0	0
v_5	1	0	1	0	1	0	1

$$\xrightarrow{(4)\leftrightarrow(1)}\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1&1&0\\0&1&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&1\\1&0&1&0&1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{(1)\oplus(5)}\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1&1&0\\0&1&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&1\\0&1&1&0&1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2)\leftrightarrow(3)}\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0&0\\0&1&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&1&0\\0&0&0&0&0&1&1\\0&1&1&0&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{(2)\oplus(5)}\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0&0\\0&1&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&1&0\\0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3\leftrightarrow 4}\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0&0\\0&1&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&1&1\\0&0&1&0&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{(3)\oplus(5)}\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0&0\\0&1&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{4\leftrightarrow 6}\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&1&0\\0&0&1&1&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{(4)\oplus(5)}\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&1&0\\0&0&1&1&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

最后一个矩阵其秩为 4，即 rank $M(G)=5-1=4$。