第二章

16 （3）

17．符号化下列命题并推证其结论.

a）所有有理数是实数，某些有理数是整数，因此某些实数是整数.

b）每个大学生不是文科学生就是理工科学生，有的大学生是优等生，小张不是理工科学生，但他是优等生，因而如果小张是大学生，他就是文科学生.

答案：

1. 设P(x)：x是有理数，Q(x)：x是实数，R(x)：x是整数。则符号化后的命题为：(∀*x*)((*P*(*x*)→*Q*(*x*))，(∃*x*)(*P*(*x*)∧*R*(*x*))⇒ (∃*x*) (*Q*(*x*)∧*R*(*x*)).

证明：

（1）(∃*x*)(*P*(*x*)∧*R*(*x*)) P

（2）(*P*(*a*)∧*R*(*a*) ES（1）

（3）*P*(*a*) T（2）I

（4）*R*(*a*) T（2）I

（5）(∀*x*)((*P*(*x*)→*Q*(*x*)) P

（6）*P*(*a*)→*Q*(*a*) US（5）

（7）*Q*(*a*) T（3）（6）I

（8）*Q*(*a*) ∧*R*(*a*) T（4）（7）I

（9）(∃*x*) (*Q*(*x*)∧*R*(*x*)) EG（8）

b) 设P(x)：x是大学生，Q(x)：x是文科生，R(x)：x是理工科生，S(x)：x是优等生，a表示小张。则符号化的命题为：(∀x) (P(x)→（（Q(x) ∧¬R(x)）∨（¬ Q(x) ∧R(x)））)，(∃x) （P(x) ∧S(x)），¬R(a) ∧S(a)⇒ P(a) →Q(a).

证明：

（1）(∀x) (P(x)→（（Q(x) ∧¬R(x)）∨（¬ Q(x) ∧R(x)））) P

（2）P(a)→（（Q(a) ∧¬R(a)）∨（¬ Q(a) ∧R(a)）） US（1）

（3）P(a) P（附加条件）

（4）（Q(a) ∧¬R(a)）∨（¬ Q(a) ∧R(a)） T（2）（3）I

（5）¬R(a) ∧S(a) P

（6）¬R(a) T（5）I

（7）Q(a) T（4）（6）I

（8）P(a) →Q(a) T（3）（7）I

第三章

2

因为P(P(∅))={∅,{∅}}，则：P(P(P(∅)))={∅,{∅},{{∅}},{∅,{∅}}}

4. 设A、B、C是集合,在什么条件下，下列命题是真的?

c)(A- B)∩(A-C) =∅;

c)(A-B)∩(A~C) =(A∩~B)∩(A∩~C)

=A∩~ (B∪C)

=A- (B∪C)

所以当A⊆B∪C时,A-(B∪C) =∅成立。

即A⊆B∪C时，(A-B)∩(A-C) =∅;

5．证明对于任意集合*A*，*B*和*C*，有(*A*∩*B*)∪*C*＝*A*∩(*B*∪*C*)当且仅当*C*⊆*A*.

答案：充分性：当(*A*∩*B*)∪*C=*(*A*∪*C)*∩(*B*∪*C*) = *A*∩(*B*∪*C*),即*A*∪*C = A，推出C*⊆*A。*

必要性：当*C*⊆*A时，则A*∪*C = A，A*∩(*B*∪*C*)*=*(*A*∪*C)*∩(*B*∪*C*) =(*A*∩*B*)∪*C，即*(*A*∩*B*)∪*C*＝*A*∩(*B*∪*C*)，证毕。

6．*A*，*B*为两个集合，证明*A*－*B*＝*A*当且仅当*A*∩*B*＝∅.

答案：充分性：A-B = A⇔ A∩~B=A

⇒ A∩~B∩B =A∩B

⇒ A∩B=∅

必要性：*A*∩*B*＝∅

⇒ (A∩B)∪~B =~B

⇒ A∪~B =~B

⇒ A∩(A∪~B) = A∩~B

⇒ A∪(A∩~B) = A-B

⇒ A = A-B

证毕。

7．判别下列各结论是否成立，并证明你的答案：

（3）若*A*－*B*＝*A*－*C*，是否必有*B*＝*C*？

c)不一定，例如A ={a,b},B = {a,d},C = {a,c},则有A－B＝A－C，但是B≠C

8．证明下列各公式

（1）(*A*－*B*)－*C*＝(*A*－*C*)－(*B*－*C*)

（4）(A∩B) ⊕ (A∩C) =A∩(B⊕C)

证明：

（1）对任意x∈(A-B) -C⇔x∈(A-B) ∧x∉C

⇔x∈A∧x∉ B∧x∉C

⇔x∈A∧x∉ (B∪C)

⇔x∈A∧x∉ ((B∪C)∩(C∪~C))

⇔x∈A∧x∉ (C∪(B∩~C))

⇔x∈A∧x∉ (C∪(B-C))

⇔x∉ A∧x∉ C∧x∉ (B- C)

⇔x∈(A-C)∧x∉ (B-C)

所以(A-B) -C=(A-C) -(B - C)得证.

（4）(A∩B) ⊕ (A∩C)

⇔ ((A∩B)∩~ (A∩C)) ∪((A∩C)∩~(A∩B))

⇔ ((A∩B)∩( ~A∪ ~C)) ∪((A∩C) ∩( ~A∪~B))

⇔ (A∩B∩~A) ∪(A∩B∩~C) ∪(A∩C∩ ~A) ∪(A∩C∩~B)

⇔ (A∩B∩~C) ∪(A∩C∩~B)

⇔A∩((B∩~C) ∪(C∩~B))

⇔A∩(B⊕C);

9．证明如下命题.

（2）若*A*⊕*B*＝∅，则*A*＝*B*

证明： (2)*若A⊕B =∅，有A⊕A =∅，所以A⊕B = A⊕A，可推得A=B*

11．设*A*，*B*，*C*是3个集合，若*A*∩*B=A*∩*C且*~A∩*B=*~A∩*C，证明B=C.*

*证明：由A*∩*B=A*∩*C且*~A∩*B=*~A∩*C有：*

*（A*∩*B）*∪*（*~A∩*B）=（A*∩*C）*∪*（*~A∩*C）*

*从而 （A*∪~A*）*∩*B=（A*∪~A*）*∩*C*

*由A*∪~A=E，B∩E=B，*C*∩E= *C就得到B=C.*

12．假定*A*和*B*是*E*的子集，证明下列各对关系的等价性.

（4）A∩B=∅, A⊆ ~B, B⊆ ~A;

证明：

*（4）(A∩B=∅ ) ⇔ (∀ x)(x∈A → x∉B) ⇔ (∀ x) x∈A → x∈ ~B) ⇔( A ⊆ ~B) ⇔( B ⊆ ~A)*

13．*A*，*B*，*C*是3个集合，

（1）证明(*A*－*B*)－*C*⊆*A*－(*B*－*C*)，

（2）在什么条件下，（1）式等号成立.

解：（1）A-(B-C)=A-B+C=(A-B)+C=(A-B)UC

A-(B-C)=(A-B)UC={x|x*∈*A-B 或x*∈*C}

(*A*－*B*)－*C=*{x|x*∈*A-B 且x*∉*C}

故 (*A*－*B*)－*C*⊆*A*－(*B*－*C*)

（2）C=∅

15.A和B是两个集合，证明以下命题：

（2）ρ(A)∪ρ (B)⊆ ρ (A∪B)

答案：

（2）证明：任取x可得，x∈ρ(A)∪ρ (B) ⇔ x∈ρ(A) ∨ x∈ρ(B) ⇔ x⊆A ∨ x⊆B⇒ x⊆A∪B⇔ x∈ρ (A∪B)

18. 试求在1到10000之间（包含1和10000），不能被4，5和6整除的整数个数.

答案：设是1到10000之间能被*i*除尽的整数的集合，则有：

||=[] = 2500

||=[] = 2000

||=[] = 1666

||=[] = 500

||=[] = 833

||=[] = 333

||=[] = 166

根据容斥原理

|||=10000-(2500+2000+1666)+(500+833+333)-166=5334

所以满足题意的个数为5334。