11．如果<S,\*>是半群， 且\*是可交换的.

证明:如果S中有元素a,b,使得a\*a=a和b\*b=b，则(a\*b)\*(a\*b)=a\*b.

答案

(a\*b)\*(a\*b)

= a\*(b\*a)\*b 结合律

= a\*( a\*b)\*b 交换律

= (a\* a)\*(b\*b)

= a\*b.

12． 设R是实数集，R上的二元运算×定义为（·表示通常数的乘法运算），问R与运算×能否构成半群？

答案

对于任意的，有

，，

所以

故是一个半群

13．设<R, \*>是一个代数系统，\*是R上的一个二元运算，使得对于R中的任意元素a,b都有a\*b=a+b+a⋅b

证明0是幺元，且<R, \*>是独异点。

答案

对于任意的a∈R，0\*a=0+a+0⋅a=0, a\*0=a+0+a⋅0=a,所以0\*a=a\*0=a，故0是幺元。

对于任意的a,b∈R，由于+和⋅ 在R上封闭，所以，a\*b=a+b+a⋅b∈R，即\*在R上封闭。

对于任意的a,b,c∈R，有

(a\*b)\*c=(a+b+a⋅b)\*c

=a+b+a⋅b+c+(a+b+a⋅b)⋅c

=a+b+c+a⋅b+a⋅c+b⋅c+a⋅b⋅c

a\*(b\*c)=a\*(b+c+b⋅c)

=a+b+c+b⋅c+a⋅(b+c+b⋅c)

=a+b+c+a⋅b+a⋅c+b⋅c+a⋅b⋅c

所以,(a\*b)\*c=a\*(b\*c)，故\*是可结合的。因此<R,\*>是独异点。

14．设<G，\*>是群，a∈G.

现定义一种新的二元运算说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps20.png: x说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps20.pngy=x\*a\*y， ∀x,y∈G.

证明: <G， 说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps20.png>也是群

答案

证明:显然说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps20.png是G上的一个二元运算。

∀x,y,z∈G，(x说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps20.pngy) 说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps20.pngz=(x说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps20.pngy)\*a\*z =(x\*a\*y)\*a\*z

=x\*a\*(y\*a\*z)=x\*a\*(y说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps20.pngz)

=x说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps20.png(y说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps20.pngz).

故运算说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps20.png满足结合律.

∀x∈G，x说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps20.pnga-l=x\*a\*a-l-=x\*e=x， a-l说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps20.pngx=a-l\*a\*x=e\*x=x， 故a-1 是幺元.

∀x∈G, x说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps20.png( a-l \*x-1\* a-l)=x\*a\*( a-l \* x-1\* a-l)= x\*e\*( x-1\* a-l)= a-l.

(a-l \* x-1\* a-l)说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps20.pngx= (a-l \* x-1\* a-l)\*a\*x=( a-l \* x-1)\*e\*x= a-l.

故a-l \*x-1\* a-l是x关于说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps20.png的逆元.

综上所述<G, 说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps20.png>是群.

15．设(*G*，\*)是群，对任意a∈G，令H={ y | y\*a=a\*y，y∈G }，试证明(*H*，\*)是(*G*，\*)的子群.

答案

证明：易知H⊆G且运算\*在H中显然满足结合性.

对于任意的x，y∈H，及任意的a∈G，因为(x\*y) \*a=x\*y\*a=x\*a\*y=a\*x\*y=a(x\*y)，所以， x\*y∈H，这说明\*关于H是封闭的. 对于群(*G*，\*)的幺元e，因为e\*a=a\*e，所以e∈H.对于任意的x ∈H，由于x\*a=a\*x，所以，

x -1\* (x\*a) \*x-1=x-1\* (a\*x) \*x-1⇒(x-1\*x) \*a\*x-1=x-1\*a\* (x\*x-1)

即得a\*x-1\*a，这表明x-1∈H，综上所述，(*H*，\*)是(*G*，\*)的子群.

16．(*H*，说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps19.png)是群(*G*，说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps20.png)的子群，设*N*＝{*x*|*x*∈*G*，*xHx*－1＝*H*}，证明：(*N*，说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps21.png)是群(*G*，说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps22.png)的子群.

答案

由定义可知：N⊆G，则对于任意a，b∈N，有a说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps23.pngH说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps24.pnga-1=H，b说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps25.pngH说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps26.pngb-1=H，由b说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps27.pngH说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps28.pngb-1=H可得H=b-1说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps29.pngH说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps30.pngb

(a说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps31.pngb-1) 说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps32.pngH说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps33.png (a说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps34.pngb-1)-1=a说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps35.png (b-1说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps36.pngH说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps37.png (b-1)-1) 说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps38.pnga-1

=a说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps39.pngH说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps40.pnga-l=H

所以，a说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps41.pngb∈N,所以(*N*，说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps42.png)是群(*G*，说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps43.png)的子群.

17．设和是群的两个正规子群，证明：也是的正规子群，这里

答案

证明：对于任意的，有：

这里，，使得。所以，也是的子群。

对于任意的和任意的，因为和都是正规子群，故有：，所以：

因此，也是的正规子群。

18．(*A*，)是一个群，|*A*|＝2*n*，*n*是正整数，证明：∃*a*∈*A*，使*a*≠*e*且*a**a*＝*e*.

答案

证明：*a**a=e即表明存在元素a*≠e以自身为逆元，除去幺元e以外，余下任一元素都不以自身为逆元，则余下的元素数目必须为偶数才能互相配对，因为|*A*|＝2*n，除去幺元外，还有2n-1个元素，不可能出现互相配对，故其中至少有一个元素必须以自身为逆元，即*∃*a*∈*A*，使*a*≠*e*且*a**a*＝*e*。

19．如果(G，\*)是群，且对于任意a∈G，都有a2=e，证明：(G，\*)是可交换群。

答案

已知(G，\*)是群，要证明(G，\*)是可交换群，只需证明运算\*满足交换律。

证明：对于任意a，b∈G，由于(G，\*)是群，所以a\*b∈G。由已知可得，a\*a=e，b\*b=e，(a\*b) \* (a\*b)=e。由单位元的性质可知，(a\*b) \* (a\*b)=e=e\*e=(a\*a) \*（b\*b）。由于(G，\*)是群,所以运算\*满足结合律。因此，a\* (b\*a) \*b=a\* (a\*b) \*b，即a\*b=b\*a，所以运算\*满足交换律,则(G，\*)是可交换群。