21．(*G*，)是一个群，如果∀*a*，*b*∈*G*，都有*a*3*b*3＝(*a**b*)3、*a*4*b*4＝(*a**b*)4和*a*5*b*5＝(*a**b*)5，证明(*G*，)是交换群.

答案

证明：∀a，b∈G，

因为*a*3*b*3＝(*a**b*)3，所以a−1a3b3b−1＝a−1(ab)3b−1，即得a2b2＝(ba)2。同理，由*a*4*b*4＝(*a**b*)4可得，a3b3＝(ba)3。由*a*5*b*5＝(*a**b*)5可得，a4b4＝(ba)4。

于是(a3b3)(ba)＝(ba)4＝a4b4，即b4a＝ab4。同理可得，(a2b2)(ba)＝(ba)3＝a3b3，即b3a＝ab3。

由于(ab)b3＝ab4＝b4a＝b(b3a)＝b(ab3)＝(ba)b3，故ab＝ba。

因此，(*G*，)是交换群。

23．设<*S*, \*>是有限的可交换独异点，且对于任意的*a*，*b*，*c*∈*S*，等式*a*\**b*=*a*\**c*蕴含着*b*=*c*，试证明<*S*, \*>是阿贝尔群。

答案

对于任意的*a*∈*S*，考虑集合 。由封闭性可知，又由*S*的有限性，所以 也是有限集。故必有*n*, *k* > 0，使得：即 由给出的条件应有，即有：

可见*a*的逆元。因此<*S*, \*>是阿贝尔群。

25．(*H*，说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps74.png)和(*K*，说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps75.png)是群(*G*，说明: C:\Users\kzs\AppData\Local\Temp\ksohtml21384\wps76.png)的两个*r*阶和*s*阶子群，且*r*和*s*互素，则*H*∩*K*＝{*e*}

答案

由题意可知，H∩K是H的子群，也是K的子群，由拉格朗日定理可知，子群的阶是群的阶的因子，因此|*H*∩*K*|整除r也整除s，从而, |*H*∩*K*|整除r与s的最大公因子，由已知r与s的最大公因子为1，这就得到|*H*∩*K*|=1.

27．考察从蓝、黄、白三种颜色的珠子中选取5粒串成的手镯， 将一只手镯经过顺时针旋转而得到另一只手镯看做是没有区别的手镯，并称这两只手镯是旋转等价的，那么，在考虑旋转等价的条件下，不同手镯的数目是多少？

答案

设*S*是不考虑旋转等价时所有用5粒珠子串成的手镯的集合，显然：

手镯的旋转方式可以有：不旋转，顺时针旋转1粒珠子、2粒珠子、3粒珠子、4粒珠子。旋转5粒珠子看做是没有旋转。

设，构造一个代数系统，其中是幺置换；这个置换是将一只手镯映照为按顺时针旋转1粒珠子而得到的手镯。同理分别为将一只手镯映照为按顺时针旋转2粒、3粒、4粒而得到的手镯。∘ 是置换的复合，因为对运算∘ 是封闭的，所以，代数系统构成*S*的置换群。

我们知道，对于任何手镯，当珠子颜色相同时，任意旋转都是保持不变的。当手镯中珠子粒数是质数时，不可能有不同色的手镯保持旋转不变。本题中5是质数，所以只有全白、全蓝、全黄这三种手镯是旋转不变的，故，另外，。因此，在考虑旋转等价的条件下，不同手镯的数目应该是：

30．设（T，+，\*）是一个代数系统，其中“+”,“\*”为普通数的加法与乘法，T为下列集合：

（1）T={x|x=2n,n∈Z}

（2）T={x|x=2n+1,n∈Z}

（3）T={x|x≥0,且x∈Z}

（4）T={x|x=a+45b,a,b∈R}

问（T，+，\*）是整环吗？为什么？

答案

（1）不是整环，没有乘法单位元

（2）不是整环，对于加法不封闭

（3）不是整环，

（4）是整环

31．证明：如果（R，+，\*）是整环，且R是有限集合，则（R，+，\*）是域。

答案

根据整环的定义，（R−{0}，+，\*）是含幺交换半群，设幺元是e，则只需证明（R−{0}，+，\*）中的每个元素都有逆元即可。对任意的b∈R−{0}，令bR={b\*c|c∈R}，由于R−{0}是有限集合，可得bR=R，因此存在一个元素a∈R，使得：b\*a=e；同理可得存在一个元素c∈R，使得：c\*b=e，即任意元素b都存在左右逆元，则一定存在逆元。综上所述，（R，+，\*）是域。

2．由图7-17所示的偏序集(L，≤)，哪一个格？为什么？



图7-17

2．解：

（1），（4）图所表示的偏序集是格，因为L中任意两元素均有最大下界和最小下界.

（2）图所表示的偏序集不是格，因为与有上界和，但由于与不可比较（），所以与无最小上界，故不是格.

（3）图所表示的偏序集也不是格，因为与没有最大下界.

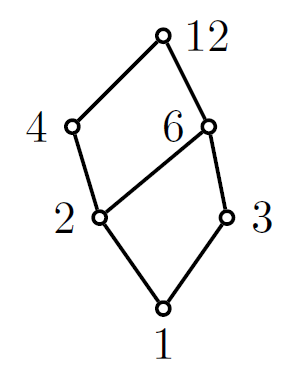
3．集合L={1，2，3，4，6，12},≤为L上的整除关系。

(1) 画出≤的哈斯图；

(2) 求子集B = {2，3，6} 的极大元，极小元，最大元，最小元，上界，下

界，上确界和下确界。

3．答案：哈斯图如下：



子集B = {2，3，6} 的极大元6；极小元2,3；最大元6；最小元无；上界6,12；下界1；上确界6；下确界1.

4．试证明在格中若a≤b≤c，则

(1) a∨b = b∧c;

(2) (a∧b)∨(b∧c)= (a∨b) ∧(b∨c).

4．证明：

（1）因为a≤b，知a∨b = b.

因为b≤c，所以b∧c = b，

因此a∨b = b∧c.

（2）因为a≤b，所以a∧b= a, a∨b= b.又因为b≤c，所以b∧c = b, b∨c= c，

于是(a∧b)∨(b∧c)= a∨b = b；

(a∨b) ∧(b∨c) = b∧c = b；

所以(a∧b)∨(b∧c)= (a∨b) ∧(b∨c).

5．设(L，≤)是一个格任取a,b∈L,a<b (即a≤b/\a≠b),

构造集合:

B={x| x∈A且a≤x≤b},

则（B, ≤）也是格.

5．证明:

显然B是L的非空子集(因为a≤a≤b,a≤b≤b,所以a,b∈B),

只要证明∧和∨在B上封闭即可.

任取x,y∈B,由B的构成得a≤x≤b,a≤y≤b,于是由格的性质得,a≤x∨y≤b a≤x∧y≤b, 于是有

x∨y∈B x∧y∈B,说明∨和∧在B上封闭，

所以（B, ≤）也是格.

6．设a,b是格(L，≤)中的两个元素,证明:

(1) a∧b=b当且仅当a∨b=a.

(2) a∧b<b和a∧b≤a,当且仅当a与b是不可比较的.

6．证明:

(1)充分性:已知a∨b=a

b=b∧(b∨a)= b∧(a∨b)=b∧a=a∧b

必要性:已知a∧b=b，a=a∨(a∧b)=a∨b

(2)充分性:已知a与b是不可比较的.因a∧b≤b, a∧b≤a,

如果a∧b=b,则有b≤a，如果a∧b=a,则有a≤b,

都与a与b是不可比较的矛盾.所以有:

a∧b≤b∧a∧b≠b,于是有a∧b<b

a∧b≤a∧ a∧b≠a,于是有a∧b<a

必要性:已知a∧b<b和a∧b<a,假设a与b是可比较的.则要

么a≤b,要么b≤a.于是要么a∧b=a要么a∧b=b.这与

a∧b<b和a∧b<a矛盾.所以a与b是不可比较的.

7．证明格中成立:

(1) (a∧b)∨(c∧d)≤(a∨c)∧(b∨d)

(2) (a∧b)∨(b∧c)∨(c∧a)≤(a∨b)∧(b∨c)∧(c∨a)

7．证明:

(1)因为 (a∧b)≤a≤(a∨c) 所以(a∧b)≤(a∨c)

因为(c∧d)≤c≤(a∨c) 所以(c∧d)≤(a∨c)

所以(a∧b)∨(c∧d)≤(a∨c)

同理(a∧b)≤(b∨d) (c∧d) ≤(b∨d)

所以 (a∧b)∨(c∧d)≤(b∨d)

所以(a∧b)∨(c∧d)≤(a∨c)∧(b∨d)

(2)因为(a∧b)≤(a∨b), (a∧b)≤(b∨c), (a∧b)≤(c∨a)

所以(a∧b) (a∨b)∧(b∨c)∧(c∨a)

同理有(b∧c) (a∨b)∧(b∨c)∧(c∨a)

(c∧a)≤(a∨b)∧(b∨c)∧(c∨a)

最后得

(a∧b)∨(b∧c)∨(c∧a)≤(a∨b)∧(b∨c)∧(c∨a).

8、如图7-18所示的几个次序图均是格，哪个是分配格？哪个是补格？

****

图7-18

8．解：

这三个格均是有界格。

（1）因为（a）中无补元，故它不是有补格。

又因为；



所以，故（a）也不是分配格.

（2）因为（b）中无补元，故它不是有补格，可以验证，（b）中任意三元素满足分配等式，故是分配格。

（3）（c）中0，1互补，两两互补，故（c）是一有补格。又因为，

，所以，故（c）不是分配格。

9．设有集合A，B和函数定义为，试证明S对于集合的运算和构成格的子格。

9.证明：

对任意的，由的定义和在，存在，使，于是，容易证明，而，所以。

由S的定义知，所以

，

即S关于运算封闭。

又，所以。对任意，有

即存在，使，也就是说，对任意，存在，使。

于是令集合，显然，且，从而。

由上可知，关于、封闭，故是的子代数，因此是的子格。

10．图7-19给出的几个格中，哪些是分配格.

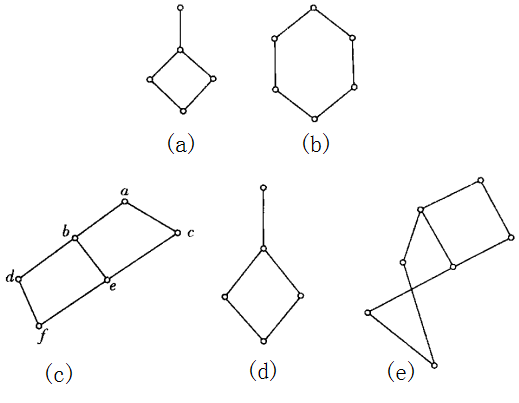
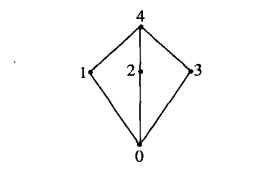


图7-19

1. 除（a）（c）外，都是分配格.

11．举例说明模格不一定是分配格.

1. 可借助哈斯图来求解，如下图所示，



如图所示，该格是模格，但并不是分配格.

12．试根据图7-20中的有界格回答如下问题.

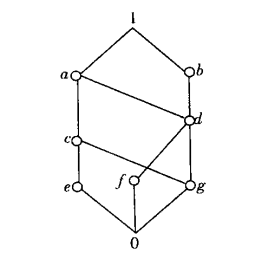


图7-20

（1）*a*和*f*的补元素是哪些？

（2）该有界格是分配格吗？

（3）该有界格是有补格吗？

12.（1）*a*和*f*没有补元素；

（2）不是分配格.因为：*c∧e∨f=c∧a=c，(c∧e)∨(c∧f) =e∨o=e*。所以，*c∧(e∨f) ≠(c∧e) ∨(c∧f)*，即不是分配格；

（3）不是有补格，因为元素0没有补元素.

13．证明：在有界格中0是1的唯一补元，1是0的唯一补元.

13．证明：因为0∨1=1，0∧1=0. 所以0和1互为补元. 若1另有补元0'，则0'∧1=0，0'∨1=0. 但0≤0'≤1则0'∧1=0' 即0'=0故0是1唯一的补元.同样1是0的唯一补元.

14．设(L，<)是一个有界格，对于*x*，*y*∈A，证明：

（1）若*x*∨y=0，则*x*=*y*=0；

（2）若*x*∧*y*=1，则*x*=*y*=1.

14．证明:

（1）若*x*∨*y*=0，则*x*≤0且*y*≤0，由于0是全下界，故不可能*x*<0或*y*<0，故*x*=0且*y*=0.

（2）若*x*∧*y*=1，则1≤*x*且1<*y*，由于1为全上界，故不可能1*<x*或1*<y*，故*x*=1且*y*=1.

2. 试证明：在任何两个或两个以上人的组内，存在两个人在组内有相同个数的朋友.

2. **证明：**把每个人对应成相应的顶点，两个人具有朋友关系当且仅当相应的顶点相邻.显然，这是简单图，设为G.所以，原命题等价于证明在该图中一定存在两个点的度相等.

使用反证法.假设该图中任何一对顶点的度都不相等.设G的顶点数为n，则由图中任何一对顶点的度都不相等知，n个顶点的度数序列只可能为：0，1，…，n-1.

现在我们从图G中删去度为0的点，得到G’， G’点数是n-1，并且存在度为n-1的点，因此，G’不是简单图，因为若是简单图，点数n-1，每个点的度的取值于集合{0，1，…，n-2}，不会存在度为n-1的点.所以，G也不是简单图，产生矛盾.

故原假设不对，在该图中一定存在两个点的度相等.因此，在任何两个或两个以上人的组内，存在两个人在组内有相同个数的朋友.

3. 设图G中各点的度都是3，且点数n与边数m间有如下关系：

2n-3=m.

问：G中点数n和边数m各为多少？

3. **解：**由图G中各点的度都是3知，

=3n，

而

=2m，故，

3n=2m.

再由已知2n-3=m，解得

n=6，m=9.

1. 设无向图G 有12 条边，已知G中度数为3的结点有6个，其余结点的度数均小于3.问G中至少有多少个结点？为什么？

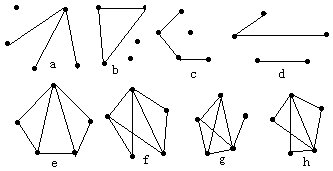
4. 由握手定理可知，G中所有结点的度数之和为24，去掉6个度数为3的结点的度数18后，还有6度.而其余结点的度数均小于3，即其余结点的度数可为0、1、2，若其余结点的度数均为2，则需3个结点来占用6度，所以G 中至少有9个结点.

1. 证明在具有n 个结点的简单无向图G 中(n≥2)，至少有两个结点的度数相同.

5. 证明：n个结点的无向简单图可能出现的结点度数为0，1， 2，…，n-1，但当存在度为0 的结点时，不可能存在度为n-1的结点.反之亦然.因而结点的度数只有两种情况：(1)0，1，2，…， n-2 或(2) 1，2，…， n-1.这两种情况都只有n -1种可能性.由于总共有n个结点，根据鸽笼原理，这两种情况都会存在有两个度数相同的结点.所以结论得证.

1. 画出所有5个结点3条边，以及5个结点7条边的简单图.

6. 解：如下图所示：



可得5结点3边的图：a,b,c,d.5结点7边的图：e,f,g,h.

1. 设无向图G有16条边，有3个4度结点，4个3度结点，其余结点的度数均小于3，问：G中至少有几个结点.

7. 解：设度数小于3的结点有x个，则有：3×4＋4×3＋2x≥2×16

解得：x≥4，所以度数小于3的结点至少有4个.

所以G至少有11个结点.

1. 设无向图G有9个结点，每个结点的度数不是5就是6，证明：G中至少有5个6度结点或至少有6个5度结点.

8. 证明：由题意可知：度数为5的结点数只能是0，2，4，6，8.  
　　　若度数为5的结点数为0，2，4个，则度数为6的结点数为9，7,5个结论成立.  
　　　若度数为5的结点数为6，8个，结论显然成立.  
　　　由上可知，G中至少有5个6度点或至少有6个5度点.

1. 证明：无向简单图的最大度小于结点数.

9. 证明：设简单图有n个结点，某结点的度为最大度，因为简单图任一结点没有平行边，而任一结点的的边必连有另一结点，则其最多有n-1条边与其他结点相连，因此其度数最多只有n-1条，小于结点数n.

12.给完全图的每条边加上方向，构成有向完全图.证明：在任何有向完全图中，所有点输入次数的平方和等于所有点输出次数的平方之和

12. 证明：假设有向完全图G有n个点，m个弧.对任意点vi，如果用dG-(vi)和dG+(vi)分别表示vi的输入次数和输出次数，则由有向完全图是给完全图的每条边加上方向构成的，以及完全图的特点(每一点与所有其它点都相邻)知，

dG-(vi)+dG+(vi) = n-1，

m=.

又因

=2m，

所以，

=n(n-1)，

==.

故

=

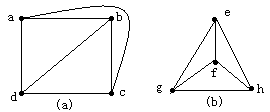
=.

=

= 

=.

16. 证明：下图中的图是同构的.



16. 证明：

在两图中我们可以看到有：a→e,b→h,c→f,d→g

两图中存在结点与边的一一对应关系，并保持关联关系.

1. 若图G是不连通的，试证G的补图G’是连通的.

17.证明：由图G是不连通的，可设图G的连通分支为：G1，G2，…，Gk，k≥2. 由补图的定义知，任意两个连通分支间的所有连线都是图G的补图G’中的边.

任取G中两个点u和v，有如下两种情况：

（1）u和v分别属于G的两个不同的连通分支，则uv是G’中的边，因此，G’中存在点u到点v的路（u，v）.

（2）u和v属于同一个连通分支，则在另一个连通分支中取点w，于是，uw和vw都是G’中的边.故G’中存在点u到点v的路（u，w，v）.

综上，G’是连通的.

20. 设G为无向连通图，有n个结点，那么G中至少有几条边？为什么？对有向图如何？

20. 解：若G为无向连通图，有n个结点，则G中至少有n-1条边.

因为在n个结点的图中，任取一个结点为起始点，若要连通其他每个结点，则其它每个结点至少应有1度,此结点则有n-1度.因此总的度数至少为2n-2度，而度数为边的2倍，可算得边数为n-1.

对于有向图，若是弱连通，则与无向图一样至少为n-1，若是单侧连通也是如此，而强连通边数至少为n.

1. 设图G中的边满足W(G-e)>W(G),称为e为G的割边（桥）.证明：e是割边，当且仅当e不包含在G的任一回路中.

22. 证明：必要性：设e是G某一连通分支的一条边.  
 假设e包含在G的某一回路中，若把e去掉后，显然该连通分支仍是连通的，  
 所以W（G－e）＝W（G）.这和e是G的割边矛盾.  
 充分性：设e是连接vi,vj的一条边，假设e不是割边.则把e去掉后，该连通分支仍是连通的vi到vj必有路，不妨设此路为vi......vj,则必有vi.....vjevi,这和e不包含在G的任一回路中相矛盾，所以e是割边.

23. 证明：三次正则图必有偶数个结点.

23. 证明：由题意可知每个结点度数都是3度，即每个结点均为奇结点，根据有偶数个奇结点可知，三次正则图必有偶数个奇结点.