Programmation linéaire

Alain Haït

ISAE SUPAÉRO
Département d'Ingénierie des Systèmes Complexes

Septembre 2016

Plan du cours

Programmation linéaire

- Problèmes d'optimisation sous contraintes :

$$\min_x \text{ ou } \max_x \quad z = J(x) \quad \text{sous les contraintes}$$

$$\begin{cases} C_i(x) & = 0 \quad \forall i \in I^0 \\ C_i(x) & \geq 0 \quad \forall i \in I^+ \\ C_i(x) & \leq 0 \quad \forall i \in I^- \\ \quad x & \in (\mathbb{R}_+)^n \quad \text{qu'on notera } x \geq 0 \end{cases}$$

  J est une fonction **linéaire**
  C_i, $i \in I^0 \cup I^+ \cup I^-$, sont des fonctions **affines** des variables x.

- Intérêt de l'étude de la programmation linéaire
  - Cas particulier du problème d'optimisation sous contraintes
  - Nombreuses applications
  - Méthodes de résolution performantes
  - Analyse de sensibilité des solutions

Exemple : problème de dosage

- 3 produits de base P_1, P_2, P_3.

Capacité
- P_1 : 3000 litres
- P_2 : 2000 litres
- P_3 : 1000 litres

Prix d'achat
- P_1 : 12 euros/litre
- P_2 : 24 euros/litre
- P_3 : 20 euros/litre

- 2 mélanges M_1, M_2 à réaliser.

Prix de vente
- M_1 : 18 Euros/litre
- M_2 : 22 Euros/litre

Exemple : problème de dosage

- Contraintes de dosage

Mélange M_1

- Pas plus de 50 % de P_1
- Pas moins de 10 % de P_2
- Pas de P_3

Mélange M_2

- Pas plus de 30 % de P_1
- Pas moins de 40 % de P_2
- Pas moins de 50 % de P_3

Objectif

Trouver la composition des mélanges permettant d'optimiser le revenu, compte tenu des contraintes de capacité et de dosage.

Exemple : problème de dosage

- Variables de décision : v_{ij} volume de produit P_i dans le mélange M_j $(v_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j)$.
- Contraintes de capacité :

$$(v_{11} + v_{12}) \leq 3000 \qquad (v_{21} + v_{22}) \leq 2000 \qquad (v_{31} + v_{32}) \leq 1000$$

- Contraintes de dosage :

$$\begin{array}{cc} \text{Mélange } M_1 & \text{Mélange } M_2 \\ v_{11} \leq 0,5(v_{11} + v_{21} + v_{31}) & v_{12} \leq 0,3(v_{12} + v_{22} + v_{32}) \\ v_{21} \geq 0,1(v_{11} + v_{21} + v_{31}) & v_{22} \geq 0,4(v_{12} + v_{22} + v_{32}) \\ v_{31} = 0 & v_{32} \geq 0,5(v_{12} + v_{22} + v_{32}) \end{array}$$

- Fonction objectif :

$$\begin{aligned} \max z =& 18(v_{11} + v_{21} + v_{31}) + 22(v_{12} + v_{22} + v_{32}) \\ & - 12(v_{11} + v_{12}) - 24(v_{21} + v_{22}) - 20(v_{31} + v_{32}) \end{aligned}$$

Autres exemples

- Problèmes de mélange (raffineries)
- Problèmes de transport
- Planification des horaires de personnel
- Problèmes d'ordonnancement
- Problèmes d'investissement et de financement
- *etc.*

Notations

Pour une matrice $A(m \times p)$, un vecteur $b(m \times 1)$ et un vecteur $x(p \times 1)$:

- Transposée de la matrice A : A^T
- Ligne i de la matrice A : A_i
- Colonne j de la matrice A : A^j
- Élement ij de la matrice A : a_{ij}
- Élement du vecteur x : x_j
- Système de m équations à p inconnues : $Ax = b$
- Non-négativité des éléments de x : $x \geq 0$

Forme standard

- Problème avec contraintes égalité :

$$\min \text{ ou } \max z = c^T x$$

Sous les contraintes

$$\begin{cases} Ax & = b \\ x & \geq 0 \end{cases}$$

- x est le vecteur des variables de décision (dimension p)
- c est le vecteur des coûts du problème (dimension p)
- A matrice $m \times p$ des m contraintes

Tout problème linéaire peut être mis sous forme standard.

Forme canonique

- Problème avec contraintes inégalité :

$$\max z = c'^T x'$$

Sous les contraintes

$$\begin{cases} A'x' & \leq b \\ x' & \geq 0 \end{cases}$$

$$\min -z = -c'^T x'$$

Sous les contraintes

$$\begin{cases} -A'x' & \geq -b \\ x' & \geq 0 \end{cases}$$

- x' est le vecteur des variables de décision (dimension n)
- c' est le vecteur des coûts du problème (dimension n)
- A' matrice $m \times n$ des contraintes

Bilan

- Un programme (ou problème) linéaire est défini par :
  - Ses variables
  - Ses contraintes
  - Sa fonction objectif
- Une **solution** x est admissible (ou réalisable) si elle satisfait toutes les contraintes.
- Une **solution optimale** x^* est une solution admissible qui minimise (ou maximise) le critère z.

Éléments de résolution

- Minimiser (ou maximiser) sur $\mathbb{R}^p$ l'objectif $z = J(x)$ linéaire : pas de sens !
- $J(x)$ linéaire n'a pas de minimum (maximum) sur un ouvert car $\nabla J(x) = \text{Cste } (\neq 0)$
- Une fonction continue sur un ensemble compact (fermé borné) atteint ses extrémums
- Il faut donc chercher l'optimum à la frontière du domaine admissible.

Éléments de résolution

- Problème sous forme standard

$$\max z = c^T x$$

$$\text{Sous} \begin{cases} Ax & = b \quad (A \text{ matrice } m \times p) \\ x & \geq 0 \end{cases}$$

- Lagrangien :

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = -c^T x + \lambda^T (Ax - b) - \mu^T x$$

$\lambda \in \mathbb{R}^m$ vecteur des paramètres de Lagrange
$\mu \in (\mathbb{R}_+)^p$ vecteur des paramètres de Kuhn et Tucker

- Conditions de qualification : contraintes linéaires

Éléments de résolution

Conditions d'optimalité du premier ordre

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x^*, \lambda, \mu)}{\partial x} = -c^T + \lambda^T A - \mu^T = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}(x^*, \lambda, \mu)}{\partial \lambda} = Ax^* - b = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}(x^*, \lambda, \mu)}{\partial \mu} = -x^* \leq 0$$
$$\mu^T x^* = 0 \quad \text{et} \quad \mu \geq 0$$

Soit, en éliminant μ :

$$A^T \lambda - c \geq 0$$
$$(A^T \lambda - c)^T x^* = 0$$
$$\text{et} \quad Ax^* = b, \quad x^* \geq 0$$

Ces conditions d'optimalité ne permettent cependant pas de calculer explicitement x^*.

Notions de base

- Un ensemble S est **convexe** si et seulement si toute combinaison convexe de points de S appartient à S.

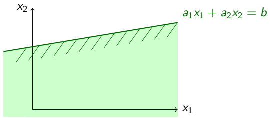
$$\text{Soient } x^k \in S,\ \alpha_k \in [0, 1],\ k = 1, \ldots, K,$$

$$\text{Si } S \text{ convexe, alors } \sum_{k=1}^{K} \alpha_k x^k \in S \text{ avec } \sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1$$

- L'intersection finie de plusieurs ensembles convexes est un ensemble convexe.
- Un **point extrême** d'un ensemble convexe S est un point qui n'est situé à l'intérieur d'aucun segment joignant deux points de S.

Notions de base

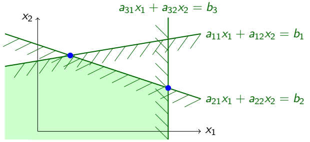
- Hyperplan de $\mathbb{R}^n$: sous-espace affine de dimension $n - 1$.
- Demi-espace de $\mathbb{R}^n$: partie de $\mathbb{R}^n$ délimitée par un hyperplan.
- Tout demi-espace (ouvert ou fermé) de $\mathbb{R}^n$ est convexe.



- Sous forme canonique, une contrainte inégalité **large** d'un programme linéaire définit donc un demi-espace **fermé** de $\mathbb{R}^n$.

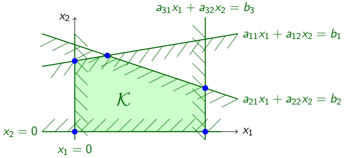
Polyèdres

- L'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés est un ensemble convexe appelé **polyèdre**.
- Un point extrême ou sommet d'un polyèdre de $\mathbb{R}^n$ est un point du polyèdre situé à l'intersection de n hyperplans, parmi ceux qui définissent le polyèdre.



Ensemble des solutions admissibles

- L'ensemble des solutions admissibles d'un programme linéaire est un polyèdre convexe $\mathcal{K}$ (en vert sur la figure).



- Tout point de l'ensemble des solutions admissibles peut donc être défini par une combinaison convexe des points extrêmes du polyèdre.

Fonctions convexes

- Une fonction f est convexe si pour tout $x^1, x^2 \in \mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$

$$f(x^\alpha) = f(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) \leq \alpha f(x^1) + (1-\alpha) f(x^2) \quad \forall \alpha \in [0,1].$$

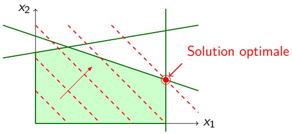
- le maximum d'une fonction convexe sur un ensemble convexe est atteint en un point extrême de cet ensemble.
- Par définition, la fonction objectif d'un programme linéaire est à la fois concave et convexe.

Résultat fondamental

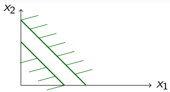
L'optimum de la fonction objectif sur un polyèdre convexe, s'il existe, est atteint en **au moins un sommet** du polyèdre.

Résolution graphique

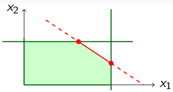
- On trace les droites isocritères $z = c^T x = C^{ste}$ en balayant l'ensemble des solutions admissibles



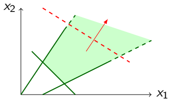
Configurations particulières



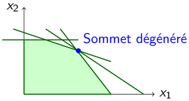
Pas de solution



Infinité de solutions



Solution non bornée



Dégénerescence

Forme canonique → forme standard

- Transformation :

Canonique

$\max z = c'^T x'$

Sous les contraintes

$$\begin{cases} A'x' & \leq b \\ x' & \geq 0 \end{cases}$$

$A'(m \times n)$

$\longrightarrow$

Standard

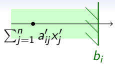
$\max z = c^T x$

Sous les contraintes

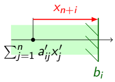
$$\begin{cases} Ax & = b \\ x & \geq 0 \end{cases}$$

$A(m \times p)$

Forme canonique → forme standard



$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a'_{ij}x'_j & \leq b_i & i = 1, \dots, m \\ x'_j & \geq 0 & j = 1, \dots, n \end{cases}$$



$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a'_{ij}x'_j + x_{n+i} & = b_i & i = 1, \dots, m \\ x_j & \geq 0 & j = 1, \dots, n+m \end{cases}$$

- Au total, m variables d'écart sont ajoutées : A' $(m \times n)$ devient sous forme standard $A = [A' | \mathbb{I}_{m \times m}]$ $(m \times p)$ avec $p = n + m$.
- Lorsqu'une contrainte est saturée, la variable d'écart correspondante est nulle.
- En un sommet du polyèdre, n variables d'écart s'annulent.

Exemple

Enoncé du problème :

$$\max z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

Sous les contraintes

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 8 \end{aligned}$$

$$\text{et } x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Exemple

Mise sous forme standard :

$$\max z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

Sous les contraintes

$$\begin{array}{lllllll} 2x_1 + 3x_2 + x_3 & +x_4 & & & = & 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 & & +x_5 & & = & 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 & & & +x_6 & = & 8 \end{array}$$

$$\text{et } x_1, \ldots, x_6 \geq 0$$

Propriétés

Résolution de systèmes d'équations linéaires $Ax = b$ avec A matrice $m \times p$.

- Deux systèmes sont **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions
$$\{x|Ax = b\} = \{x|\tilde{A}x = \tilde{b}\}$$
- Théorème : étant donnés un système $Ax = b$ et une matrice $\Delta(m \times m)$ inversible, le système $\Delta Ax = \Delta b$ est équivalent au système initial.
- Une équation $\alpha x = \beta$ est **redondante** si

$$\{x|Ax = b, \alpha x = \beta\} = \{x|Ax = b\}$$

Caractérisation

Résolution de systèmes d'équations linéaires $Ax = b$ avec A matrice $m \times p$.

Si $m = p$: règle de Cramer

- $\det(A) \neq 0$: le système a une solution unique $x = A^{-1}b$
- $\det(A) = 0$: le système n'a aucune ou a une infinité de solutions

Si $m < p$: théorème de Rouché-Fontené

Soit $[A|b]$ la matrice augmentée, de dimension $m \times (p+1)$

- $\text{rang}([A|b]) > \text{rang}(A)$: le système est incompatible
- **$\text{rang}([A|b]) = \text{rang}(A) = m$: le système a au moins une solution**
- $\text{rang}([A|b]) = \text{rang}(A) = r < m$: le système a au moins une solution, mais il est redondant

Base de la matrice A

Soit la matrice A $(m \times p)$ telle que $\text{rang}(A) = m$ avec $m < p$ (cas sous-déterminé de rang plein).

On peut extraire de A une ou plusieurs sous-matrices carrées $m \times m$ inversibles.

Soit B une telle matrice. Les m vecteurs colonnes de B constituent une base de $\mathbb{R}^m$.

Par extension, on dira que cette sous-matrice B extraite de A est une **base de A**.

Forme simpliciale

- Soit $B(m \times m)$ une base de A. En réorganisant les colonnes de A sous la forme $[B|N]$, ainsi que les lignes de x, le système s'écrit :

$$Ax = Bx_B + Nx_N = b$$

x_B : **variables de base** ; x_N : **variables hors base**

- Ce système est équivalent au système suivant :

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

Le système est alors sous la **forme simpliciale**.

- La solution $(x_B, x_N) = (B^{-1}b, 0)$ est appelée **solution de base** associée à B.

Solutions de base admissibles

- Toute solution de $Ax = b$ telle que $x \geq 0$ est une **solution admissible** du problème.
- Une solution de base telle que $x_B \geq 0$ est une **solution de base admissible**. Elle comporte au plus m variables de valeur strictement positive (les variables de base x_B) et au moins n variables nulles (les variables hors base x_N).

Sommets

Une solution de base admissible est un sommet du polyèdre des solutions admissibles du problème.

Valeur du critère

- Expression du critère sous la forme simpliciale :

$$z = c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N$$

En remplaçant x_B par sa valeur en fonction des variables hors base :

$$z = c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$

Qu'on note également

$$z = z_0 + \bar{c}_N^T x_N$$

Les $\bar{c}_N$ sont appelés **coûts réduits** relatifs aux variables hors base.

Conditions d'optimalité

- Conditions du premier ordre :

$$A^T\lambda - c \geq 0$$
$$(A^T\lambda - c)^T x^* = 0$$
$$Ax^* = b \text{ et } x^* \geq 0$$

- En une solution de base admissible, $(A^T\lambda - c)_j = 0$ pour $x_j^* \neq 0$ variable de base, et $(A^T\lambda - c)_j \geq 0$ pour $x_j^* = 0$ hors base.
Sous forme simpliciale :

$$B^T\lambda - c_B = 0$$
$$N^T\lambda - c_N \geq 0$$

On en déduit :

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \leq 0$$

Une solution de base admissible est optimale ssi les coûts réduits des variables hors base sont tous négatifs ou nuls (maximisation).

Résolution du problème

En une solution de base admissible :

- Si les coûts réduits des variables hors base $\bar{c_N}$ sont tous négatifs ou nuls, cette solution est optimale.
- S'il existe une variable hors base de coût réduit strictement positif, alors :
  - soit on peut augmenter z indéfiniment (solution non bornée),
  - soit il existe une autre solution de base avec une meilleure valeur du critère z.

Résolution : recherche d'une solution de base admissible qui soit optimale

- Nombre maximal de solutions de base : coefficients du binôme C_p^m ou $\binom{p}{m}$

Historique

- Fourier 1826
- Kantorovitch 1939
- Dantzig 1947
- Kachian 1979
- Karmarkar 1984

Exemple

Enoncé du problème :

$$\max z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

Sous les contraintes

$$\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_6 = 8 \end{array}$$

$$\text{et } x_1, \ldots, x_6 \geq 0$$

Format tableau simple

Utilisé pour regrouper toutes les données du problème mis sous forme simpliciale.

$\max z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$

Sous les contraintes

$$\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_6 = 8 \end{array}$$

		x_1	x_2	x_3
x_4	5	-2	-3	-1
x_5	11	-4	-1	-2
x_6	8	-3	-4	-2
z	0	5	4	3

- Les variables de base x_4, x_5, x_6 et le critère z sont donnés en fonction des variables hors base x_1, x_2, x_3.
- A la solution de base, les variables hors base sont mises à 0.

Changement de base : pivot

- Variable qui entre dans la base : celle qui a le plus grand coût réduit.

		x_1	x_2	x_3	
x_4	5	-2	-3	-1	5/2
x_5	11	-4	-1	-2	11/4
x_6	8	-3	-4	-2	8/3
z	0	5	4	3	

- Variable qui sort de la base : la première qui s'annule lorsqu'on augmente x_1 (avec $x_2 = x_3 = 0$).
- Les nouvelles variables de base sont donc x_1, x_5, x_6.

Nouvelle forme simpliciale

- Pour écrire le système dans la nouvelle base, on exprime la variable qui entre dans la base à l'aide des variables hors base :

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$$

- puis on remplace x_1 par cette expression dans les autres équations.

		x_4	x_2	x_3
x_1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_5	1	2	5	0
x_6	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
z	$\frac{25}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$

- La solution de base associée n'est pas optimale car le coût réduit de x_3 est supérieur à 0.

Changement de base

- Lorsque x_3 entre dans la base, x_6 en sort. On écrit donc x_3 en fonction de x_4, x_2 et x_6 :

$$x_3 = 1 + 3x_4 + x_2 - 2x_6$$

- puis on remplace x_3 par cette expression dans les autres équations.

		x_4	x_2	x_6
x_1	2	-2	-2	1
x_5	1	2	5	0
x_3	1	3	1	-2
z	13	-1	-3	-1

- Tous les coûts réduits sont négatifs. On a atteint la solution optimale.

Algorithme du simplexe

Algorithme 1 : Simplexe

Mise sous forme standard;
Recherche d'un sommet de départ;
Mise sous forme simpliciale;
tant que Sommet non optimal **faire**
    Pivot vers le sommet suivant;

Algorithme du simplexe

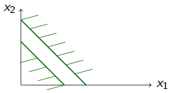
- Mise du problème sous forme standard
  - Toujours possible
- Recherche d'une solution de base admissible de départ
  - Immédiat si le problème est sous forme canonique : base formée par les variables d'écart.
  - Peut nécessiter un traitement particulier
  - Pas de base de départ = pas de solution
- Test d'optimalité
  - Optimum atteint si tous les coûts réduits des variables hors base sont négatifs (maximisation) ou positifs (minimisation).

Algorithme du simplexe

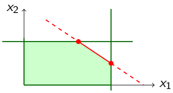
Opération de pivot

- Variable qui entre dans la base : heuristique de choix parmi les variables hors base dont le coût réduit est positif (maximisation) ou négatif (minimisation) :
  - celle dont le coût réduit est le plus élevé (resp. le plus faible)
  - celle qui mène au sommet ayant la plus grande valeur du critère (resp. la plus petite valeur).
  - autre...
- Variable qui sort de la base : la première qui s'annule lorsqu'on augmente la valeur de celle qui entre dans la base.

Configurations particulières



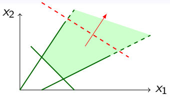
Pas de solution



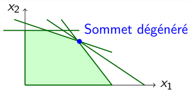
Infinité de solutions

- Pas de solution : pas de sommet de départ (système incompatible).
- Infinité de solutions : à l'optimum, le coût réduit d'une variable hors base est nul.

Configurations particulières



Solution non bornée



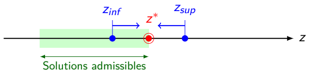
Dégénerescence

- Solution non bornée : aucune contrainte ne limite l'augmentation de la variable qui entre dans la base.
- Dégénérescence : plusieurs variables sont candidates à la sortie de la base (elles s'annulent pour la même valeur de la variable qui entre). On en choisit une, les autres restent dans la base mais leur valeur passe à zéro.

Introduction

Caractérisation de la solution optimale z^* d'une maximisation par un intervalle $[z_{inf}\,; z_{sup}]$.

- Borne inférieure : toute solution admissible constitue une borne inférieure de z^*.
- Borne supérieure : déterminer une valeur z_{sup} telle que $z^* \leq z_{sup}$.



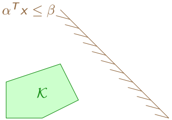
Recherche de l'intervalle $[z_{inf}\,; z_{sup}]$ le plus petit possible pour situer l'optimum.

Inégalités valides

Soit $\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ un polyèdre de $\mathbb{R}^n$.

Une inégalité $\alpha^T x \leq \beta$ est dite **valide** pour $\mathcal{K}$ si elle est satisfaite pour tout x appartenant à $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha^T x \leq \beta\}$$



Inégalités valides

Toute combinaison linéaire, à coefficients y_i positifs, d'inégalités du même type définissant $\mathcal{K}$ donne une inégalité valide pour $\mathcal{K}$:

$$y^T Ax = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^{m} y_i b_i = y^T b$$

est valide pour $\mathcal{K}$ si $y \geq 0$.

Exemple

Problème sous forme canonique

$$(\mathcal{P}) \quad \max z = 4x_1 + 3x_2$$

Sous les contraintes

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &\leq 8 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 15 \\ 2x_1 + \ x_2 &\leq 18 \\ x_j &\geq 0 \qquad j = 1, 2. \end{aligned}$$

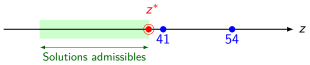
La solution optimale est $x_1^* = 7$, $x_2^* = 4$ et $z^* = 40$.

Exemple

- IDÉE : Faire des combinaisons valides des contraintes permettant de borner la fonction objectif.

$$\begin{array}{rcrcr l}
x_1 & & & \leq & 8 & \times 0 \\
x_1 & + & 2x_2 & \leq & 15 & \times 0 \\
2x_1 & + & x_2 & \leq & 18 & \times 3 \\
\hline
6x_1 & + & 3x_2 & \leq & 54 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcrcr l}
x_1 & & & \leq & 8 & \times 1 \\
x_1 & + & 2x_2 & \leq & 15 & \times 1 \\
2x_1 & + & x_2 & \leq & 18 & \times 1 \\
\hline
4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 41 &
\end{array}$$

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 + 3x_2 \\ &\leq 6x_1 + 3x_2 \leq 54 \\ &\forall x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}
\qquad
\begin{aligned} z &= 4x_1 + 3x_2 \leq 41 \\ &\forall x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Généralisation

Trouver des multiplicateurs $y_1 \geq 0, \dots, y_m \geq 0$ afin d'obtenir une nouvelle inégalité valide bornant la fonction objectif.

$$\begin{array}{ccccccc l}
a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 & \times y_1 \\
\dots & + & \dots & + & \dots & & \dots & \dots \\
a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m & \times y_m \\
\hline
\sum_{i=1}^m (y_i a_{i1}) x_1 & + & \dots & + & \sum_{i=1}^m (y_i a_{in}) x_n & \leq & \sum_{i=1}^m y_i b_i &
\end{array}$$

Généralisation

Pour des valeurs $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$, on aura

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m (y_i a_{i1}) x_1 + \dots + \sum_{i=1}^m (y_i a_{in}) x_n \leq \sum_{i=1}^m y_i b_i$$

si on vérifie

$$\begin{cases} c_1 \leq \sum_{i=1}^m y_i a_{i1} \\ \quad \vdots \\ c_n \leq \sum_{i=1}^m y_i a_{in}. \end{cases}$$

Pour trouver la meilleure borne supérieure (la plus petite), il faut minimiser $\sum_{i=1}^m y_i b_i$ c'est-à-dire ...

Généralisation

... résoudre le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{lccc}
\min t = & \sum_{i=1}^m y_i b_i & & \\
\textit{sous} & \sum_{i=1}^m y_i a_{i1} & \geq & c_1 \\
& \dots & & \dots \\
& \sum_{i=1}^m y_i a_{in} & \geq & c_n \\
& y_1, \dots, y_m & \geq & 0
\end{array}$$

Ce problème est appelé **problème dual** du problème canonique de départ.

Problème dual (forme canonique)

Primal

$\max z = c^T x$

Sous

$$Ax \le b$$
$$x \ge 0$$

c et x vecteurs $n \times 1$
A matrice $m \times n$
b vecteur $m \times 1$

Dual

$\min t = b^T y$

Sous

$$A^T y \ge c$$
$$y \ge 0$$

b et y vecteurs $m \times 1$
A^T matrice $n \times m$
c vecteur $n \times 1$

Remarque : le problème dual du dual est le problème primal.

Exemple

Primal

$\max z = 4x_1 + 3x_2$

Sous

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad &\le 8 \\ x_1 + 2x_2 &\le 15 \\ 2x_1 + \quad x_2 &\le 18 \\ x &\ge 0 \end{aligned}$$

Dual

$\min t = 8y_1 + 15y_2 + 18y_3$

Sous

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + 2y_3 &\ge 4 \\ 2y_2 + \quad y_3 &\ge 3 \\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

Exemple

Primal

$\max z = 4x_1 + 3x_2$

Sous

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad + x_3 &= 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 15 \\ 2x_1 + \quad x_2 + x_5 &= 18 \\ x &\ge 0 \end{aligned}$$

Dual

$\min t = 8y_1 + 15y_2 + 18y_3$

Sous

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + 2y_3 - y_4 &= 4 \\ 2y_2 + \quad y_3 - y_5 &= 3 \\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

Exemple

A une solution de base (admissible ou non) du primal correspond une solution de base (admissible ou non) du dual.

Primal

		x_1	x_2
x_3	8	-1	0
x_4	15	-1	-2
x_5	18	-2	-1
z	0	4	3

Admissible

Dual

		y_1	y_2	y_3
y_4	-4	1	1	2
y_5	-3	0	2	1
t	0	8	15	18

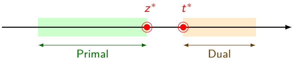
Non admissible

Dualité faible

- Quel que soient x et y solutions admissibles respectivement du primal et du dual, on a

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = t$$

En particulier, $z^* \leq t^*$.



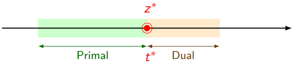
Corollaire 1 : s'il existe x et y admissibles et telles que $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$, alors ces solutions sont optimales.

Théorème de la dualité (Gale, Kuhn, Tucker, 1951)

Théorème de la dualité

Si le problème primal a une solution optimale, alors le problème dual a une solution optimale telle que

$$z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = t^*$$



Théorème de la dualité : démonstration (1)

Problème primal : $\max z = c^T x$ sous $Ax \leq b$ et $x \geq 0$

On passe en forme standard en ajoutant m variables d'écart.

- Base de départ : les variables d'écart sont en base

$$z = 0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

- Dans une base optimale B :

$$z = c_B^T B^{-1} b + \underbrace{(c_N^T - c_B^T B^{-1} N)}_{\bar{c}_N^T \leq 0} x_N$$

$$z = z^* + \bar{c}_N^T x_N + \underbrace{\bar{c}_B^T}_{=0} x_B$$

$$z = z^* + \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j + \sum_{j=n+1}^{n+m} \bar{c}_j x_j$$

Théorème de la dualité : démonstration (2)

- Montrons qu'une solution optimale du problème dual est donnée par

$$y_i^* := -\bar{c}_{n+i} \quad i = 1, \ldots, m$$

- En remplaçant $\bar{c}_{n+i}$ par $-y_i^*$:

$$z = z^* + \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j - \sum_{i=1}^{m} y_i^* x_{n+i} \quad \text{avec } x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

D'où

$$z = \left(z^* - \textstyle\sum_{i=1}^{m} y_i^* b_i\right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\bar{c}_j + \textstyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*\right) x_j \quad \text{Base optimale}$$

Or

$$z = 0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \text{Base initiale}$$

Théorème de la dualité : démonstration (3)

Les variables $x_1, \ldots, x_n$ étant indépendantes, on en déduit par identification :

$$\begin{cases} z^* = \sum_{i=1}^{m} y_i^* b_i \\ \bar{c}_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \quad j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Théorème de la dualité : démonstration (4)

Vérification :

- Dans la base optimale, $\bar{c}_j \leq 0 \quad j = 1, \ldots, n+m$

$$\begin{cases} \bar{c}_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \leq 0 & \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq c_j & j = 1, \ldots, n \\ \bar{c}_{n+i} \leq 0 & \Rightarrow y_i^* \geq 0 & i = 1, \ldots, m \end{cases}$$

  Les y_i^* constituent donc une **solution admissible** du problème dual.

- De plus, $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = z^*$, d'où par le corollaire 1 de la dualité faible, les y_i^* constituent bien une **solution optimale** du problème dual.

Exemple

Primal

$\max z = 4x_1 + 3x_2$ sous

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 8 & \rightarrow y_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 15 & \rightarrow y_2 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 &= 18 & \rightarrow y_3 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Tableau final du simplexe :

		x_4	x_5
x_1	7	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_3	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_2	4	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
z	40	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$

Les valeurs des variables duales optimales sont donc $y_1^* = 0, \quad y_2^* = \frac{2}{3}, \quad y_3^* = \frac{5}{3}$

En ce point, la valeur de l'objectif est :

$t^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = 8 \times 0 + 15 \times \frac{2}{3} + 18 \times \frac{5}{3} = 40.$

Exemple

A une solution de base (admissible ou non) du primal correspond une solution de base (admissible ou non) du dual.

Primal

		x_4	x_5
x_1	7	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_3	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_2	4	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
z	40	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$

Admissible

Dual

		y_4	y_1	y_5
y_2	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
y_3	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
t	40	7	1	4

Admissible

Lorsque les deux sont admissibles, on a atteint l'optimum.

Conditions d'optimalité

- Problème sous forme canonique

$$\max z = c^T x$$

$$\text{Sous} \begin{cases} Ax & \le b \quad (A \text{ matrice } m \times n) \\ x & \ge 0 \end{cases}$$

- Lagrangien :

$$\mathcal{L}(x, \mu_A, \mu) = -c^T x + \mu_A^T (Ax - b) - \mu^T x$$

Avec
$\mu_A \in (\mathbb{R}_+)^m$
$\mu \in (\mathbb{R}_+)^n$

- Conditions de qualification : contraintes linéaires

Conditions d'optimalité

Conditions du premier ordre :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x^*, \mu_A, \mu)}{\partial x} = -c^T + \mu_A^T A - \mu^T = 0$$
$$\mu^T x^* = 0$$
$$\mu_A^T (Ax^* - b) = 0$$
$$\mu_A \ge 0, \quad \mu \ge 0, \quad Ax^* - b \le 0, \quad x^* \ge 0$$

Soit, en éliminant μ :

$$A^T \mu_A - c \ge 0, \quad \mu_A \ge 0$$

$$\left.\begin{array}{l} (A^T \mu_A - c)^T x^* = 0 \\ \mu_A^T (Ax^* - b) = 0 \end{array}\right\} \text{écarts complémentaires}$$

et $Ax^* \le b, \quad x^* \ge 0$

Conditions d'optimalité

D'après les conditions d'optimalité :

- $A^T \mu_A \ge c$ et $\mu_A \ge 0$ d'où μ_A constitue une **solution admissible** du problème dual.
- Les **écarts complémentaires** donnent :

$$\left.\begin{array}{lcl} (A^T \mu_A - c)^T x^* = 0 & \Rightarrow & \mu_A^T A x^* = c^T x^* \\ \mu_A^T (Ax^* - b) = 0 & \Rightarrow & \mu_A^T A x^* = \mu_A^T b \end{array}\right\} \quad c^T x^* = b^T \mu_A$$

par le corollaire 1 de la dualité faible, μ_A constitue une **solution optimale** du problème dual.

Les variables duales sont donc les paramètres de Kuhn et Tucker associés aux contraintes du problème primal.

Conditions d'optimalité

Théorème des écarts complémentaires

Soit x^* solution admissible du problème primal et y^* solution admissible du dual. Les conditions nécessaires et suffisantes à l'optimalité de x^* et y^* sont :

$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* = b_i$ ou $y_i^* = 0$ (ou les deux) pour $i = 1$ à m

et

$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* = c_j$ ou $x_j^* = 0$ (ou les deux) pour $j = 1$ à n

- Interprétation :
  - La variable duale correspondant à une contrainte non saturée est nécessairement nulle.
  - A une variable duale strictement positive correspond nécessairement une contrainte saturée (variable d'écart nulle).

Exemple

Primal : $n = 2$ variables, $m = 3$ contraintes.
Dual : $m = 3$ variables, $n = 2$ contraintes.

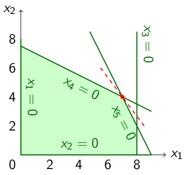


Tableau final du simplexe :

		x_4	x_5
x_1	7	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_3	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_2	4	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
z	40	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$

Variables duales :
$y_1^* = 0,\ y_2^* = 2/3,\ y_3^* = 5/3$

Bilan

- **Dualité forte :** si un programme linéaire admet une solution optimale, alors son dual possède aussi une solution optimale, et ces solutions sont de même valeur.
- **Dualité forte :** à la solution optimale, les variables duales optimales sont les coûts réduits associés aux variables d'écart du problème primal.
- **Écarts complémentaires :** A la solution optimale, si une contrainte n'est pas saturée, la variable duale correspondante est nulle ; si une variable duale est strictement positive, la contrainte correspondante est saturée.

Relations primal-dual

Existence d'une solution optimale :

- Le dual du problème dual étant le problème primal, on déduit du théorème de la dualité que le problème primal a une solution optimale si et seulement si le problème dual a une solution optimale.
- Si le problème dual est non borné, le problème primal n'a pas de solution, et inversement.
- Dans certains cas, ni le problème primal, ni le dual n'ont de solutions.

Configurations particulières :

- Si le problème primal a une infinité de solutions (plusieurs sommets optimaux), le problème dual est dégénéré, et réciproquement.

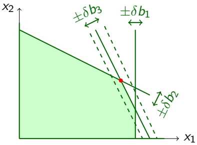
Cas général

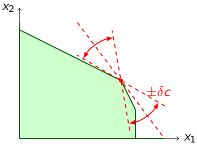
PRIMAL	$\longleftrightarrow$	**DUAL**
Maximisation	$\longleftrightarrow$	Minimisation
i^e contrainte de type $\leq$	$\longleftrightarrow$	Variable $y_i \geq 0$
i^e contrainte de type $=$	$\longleftrightarrow$	Variable $y_i \in \mathbb{R}$
i^e contrainte de type $\geq$	$\longleftrightarrow$	Variable $y_i \leq 0$
Variable $x_j \geq 0$	$\longleftrightarrow$	j^e contrainte de type $\geq$
Variable $x_j \in \mathbb{R}$	$\longleftrightarrow$	j^e contrainte de type $=$
Variable $x_j \leq 0$	$\longleftrightarrow$	j^e contrainte de type $\leq$

Analyse post-optimale

Que devient la solution optimale si les paramètres du problème sont modifiés ?

- Modification de la borne b_i d'une contrainte
- Modification des coefficients c_j de la fonction objectif





Modification de la borne d'une contrainte

Variation δb_i de la borne b_i de la i^e contrainte :

- Critère : à l'optimum, $z^* = c^T x^* = b^T y^*$ d'où $\delta z^* = \delta b_i . y_i^*$.
- Validité de la solution : le sommet doit rester admissible et optimal.

Tableau final du simplexe :

		x_N
x_B	$\bar{b} = B^{-1}b$	$-B^{-1}N$
z	$z^* = c_B^T B^{-1}b$	$\bar{c}_N = c_N^T - c_B^T B^{-1}N \leq 0$

Les coûts réduits ne sont pas affectés par la variation δb_i.
Le tableau reste optimal tant que la solution reste admissible ($x_B \geq 0$).

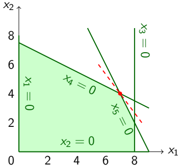
Exemple

$\max z = 4x_1 + 3x_2$
Sous
$$\begin{aligned} x1 \quad\quad + x_3 &= 8 \\ x1 + 2x_2 + x_4 &= 15 \\ 2x1 + \quad x_2 + x_5 &= 18 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

		x_4	x_5
x_1	7	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_3	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_2	4	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
z	40	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$

Variation de b_i :

- Contrainte i non saturée : seule la valeur de x_{n+i} est affectée
- Contrainte i saturée : toutes les valeurs de x_B et z^* sont affectées.



Exemple : contrainte non saturée

		x_4	x_5
x_1	7	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_3	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_2	4	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
z	40	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$

Contrainte 1 : $x_1 + x_3 = 8 + \delta b_1$

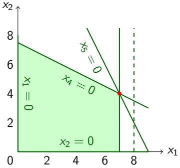
- Non saturée
- $x_3^* = 1$

Le sommet reste optimal tant que

$$x_3 = 8 + \delta b_1 - x_1^* \geq 0$$

d'où $\delta b_1 \in [-1, +\infty]$

et $\delta z^* = 0$



Exemple : contrainte saturée

Contrainte 3 :
$2x_1 + x_2 + x_5 = 18 + \delta b_3$

- Saturée
- $x_5^* = 0$ (hors base)

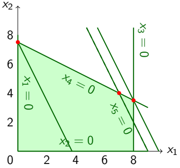
Lorsque b_3 varie de δb_3, le sommet optimal se déplace sur la droite $x_4 = 0$.

Le sommet reste optimal tant que :

$$x_1 = 7 - \tfrac{2}{3}(-\delta b_3) \geq 0$$
$$x_3 = 1 + \tfrac{2}{3}(-\delta b_3) \geq 0$$
$$x_2 = 4 + \tfrac{1}{3}(-\delta b_3) \geq 0$$

D'où $$-21/2 \leq \delta b_3 \leq 3/2$$

		x_4	x_5
x_1	7	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_3	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_2	4	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
z	40	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$



Exemple : contrainte saturée

Variations admissibles :

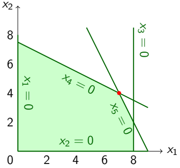
$$-21/2 \leq \delta b_3 \leq 3/2$$

Fonction objectif :

$$\delta z^* = \tfrac{5}{3}\delta b_3$$

d'où $$-35/2 \leq \delta z^* \leq 5/2$$

		x_4	x_5
x_1	7	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_3	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_2	4	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
z	40	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$



Modification de la borne d'une contrainte

Au sommet optimal, si la contrainte i n'est pas saturée :

- La variable d'écart x_i est dans la base ($x_i \geq 0$)
- $y_i^* = 0$ d'où $\Delta z^* = 0$
- l'intervalle de variation admissible est $\delta \in [-x_i; +\infty]$.

Au sommet optimal, si la contrainte est saturée :

- La variable d'écart x_i est hors base ($x_i = 0$)
- $\Delta z^* = \delta . y_i^*$
- δ doit respecter les relations suivantes : $-\delta (B^{-1})^i \leq B^{-1} b$ où $(B^{-1})^i$ est la i^e colonne de B^{-1}. Ces valeurs se lisent directement dans le tableau final du simplexe.

Interprétation économique

Primal : problème de production

- x_j : quantité de produit j réalisée,
- a_{ij} : quantité de ressource i nécessaire à la réalisation d'un produit j,
- b_i : quantité totale de ressource i disponible,
- c_j : profit réalisé lors de la vente d'un produit j.

Problème : maximiser le profit en respectant les contraintes de ressource.

$$\max c^T x \text{ sous } Ax \leq b,\ x \geq 0$$

Interprétation économique

Dual : on propose de racheter les ressources i au prix y_i.
Comment fixer ce prix ?

- **Point de vue du vendeur**
  Pour tout produit j qu'on ne fabrique pas, on souhaite récupérer au moins autant que le profit qu'on aurait réalisé :
  $$\sum_i a_{ij} y_i \geq c_j \quad \forall j$$
- **Point de vue de l'acheteur** : on souhaite payer le moins cher possible les ressources :
  $$\min \sum_i b_i y_i$$

Valeur marginale d'une contrainte

La valeur marginale d'une contrainte i correspond à la valeur de sa variable duale à l'optimum, y_i^* :

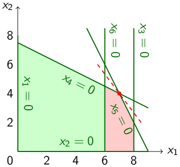
1. Analyse de sensibilité : variation de l'objectif si on modifie la quantité de ressource i disponible
2. Prix minimum auquel on accepterait de vendre une unité de ressource
3. Prix maximum qu'on accepterait de payer pour acheter une unité de ressource complémentaire.
4. Valorisation d'une activité nouvelle : étude d'opportunité de la fabrication d'un nouveau produit.

Ajout d'une contrainte

- L'ajout d'une contrainte non redondante augmente la dimension de la base.
- La variable d'écart x_{n+m+1} de la nouvelle contrainte $m+1$ est dans la nouvelle base puisqu'elle n'apparaît dans aucune autre contrainte et son coefficient est 1.
- Pour l'ajouter dans le tableau optimal du simplexe, on exprime cette variable x_{n+m+1} en fonction des variables hors de la base optimale. Deux possibilités :
  - la valeur de $\bar{x}_{n+m+1}$ est positive ou nulle : la solution actuelle est admissible, l'optimum est inchangé (la contrainte $m+1$ est saturée ou non)
  - la valeur de $\bar{x}_{n+m+1}$ est négative : la solution actuelle n'est plus admissible (la contrainte $m+1$ est violée).

Exemple

Nouvelle contrainte : $x_1 \leq 6$. Forme standard : $x_1 + x_6 = 6$.



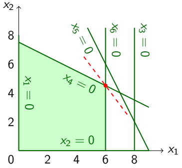
		x_4	x_5
x_1	7	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_3	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_2	4	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_6	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
z	40	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$

Solution non admissible.

La solution duale reste admissible ($y_i^* \geq 0$) mais non optimale. Un pivot dans le problème dual nous ramène à la solution optimale.

Exemple

Nouvelle contrainte : $x_1 \leq 6$. Forme standard : $x_1 + x_6 = 6$.



		x_4	x_6
x_1	6	0	-1
x_3	2	0	1
x_2	$\frac{9}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_5	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
z	$37,5$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$

Solution admissible optimale.

Lectures complémentaires I

Michel Minoux.
Programmation mathématique.
Lavoisier, 2008, 2[e] édition.

Vasek Chvatál.
Linear programming.
Freeman & co, 1983.

Dominique de Werra, Thomas Liebling, Jean-François Hêche.
Recherche opérationnelle pour ingénieurs.
Presses polytechniques et universitaires romandes, 2003.

Stephen Bradley, Arnoldo Hax, Thomas Magnanti
Applied mathematical programming.
MIT Press, Addison-Wesley, 1977.
http ://web.mit.edu/15.053/www/

Lectures complémentaires II

Grégoire Allaire.
Analyse numérique et optimisation.
Support de cours, Ecole Polytechnique.

Jean-François Hêche.
Recherche opérationnelle pour ingénieurs.
Support de cours, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.