Capacité d'un ouvert en dimension 3

Houssam El Cheairi, Victor Spitzer

Février 2020

Abstract

To write at the end.

Résolution numérique du problème

1.1

Remarquons d'abord que l'inégalité à prouver est immédiate si $\phi = 0_{\mathbb{R}}$

Ce cas étant mis à part, on considère alors une fonction ϕ non nulle p.p. On a alors en intégrant par parties:

$$\int_0^{+\infty} \phi(r)^2 dr = [r\phi(r)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2r\phi(r)\phi'(r)dr = -\int_0^{+\infty} 2r\phi(r)\phi'(r)dr$$

Où la dernière inégalité provient du caractère $C_0^\infty(\mathbb{R})$ de ϕ. De plus, on a part Cauchy-Shwartz :

$$(\int_0^{+\infty} 2r\phi(r)\phi'(r)dr)^2 \leq 4\int_0^{+\infty} \phi(r)^2 dr \int_0^{+\infty} (r\phi'(r))^2 dr$$

Ainsi:

$$(\int_0^{+\infty} \phi(r)^2 dr)^2 = (\int_0^{+\infty} 2r\phi(r)\phi'(r)dr)^2 \leq 4\int_0^{+\infty} \phi(r)^2 dr \int_0^{+\infty} (r\phi'(r))^2 dr$$

En divisant par le terme (stricttement positif car ϕ est non nulle p.p) $\int_0^{+\infty} \phi(r)^2$ on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \phi(r)^2 \leq 4\int_0^{+\infty} (r\phi'(r))^2 dr$$

1.2

Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ avec $\phi|_\Omega$ constante. Considérons alors un réel $R > 0$ tel que supp(ϕ)$\subset \mathbb{B}(0,R)$ et posons $\delta = d(0,\Omega)$. On a alors sans difficultés:

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} \frac{\phi(x)^2}{|x|^2}dx \leq \int_{\mathbb{S}}\int_\delta^R \frac{\phi(rw)^2}{r^2}r^2 drdw = \int_{\mathbb{S}}\int_\delta^R \phi(rw)^2 drdw$$

Or $\forall w \in \mathbb{S}$:

$$\int_\delta^R \phi(rw)^2 dr \leq \int_0^{+\infty} \phi(rw)^2 dr \leq_{(1.1)} 4\int_0^{+\infty} (r\psi'(r))^2 dr$$

Où $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \psi(\alpha) := \phi(\alpha w)$. On en déduit alors que :

$$\forall r \in \mathbb{R} : \psi'(r) = d\phi_{rw}.(r) = \nabla\phi(rw).w$$

Et donc par Cauchy-Shwartz:

$$(\psi'(r))^2 = |\nabla\phi(rw).w|^2 \leq |\nabla\phi(rw)|^2|w|^2 = |\nabla\phi(rw)|^2$$

Finalement on obtient:

$$\int_\delta^R \phi(rw)^2 dr \leq 4\int_0^{+\infty} r^2|\nabla\phi(rw)|^2 dr$$

D'où:

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} \frac{\phi(x)^2}{|x|^2}dx \leq 4\int_{\mathbb{S}}\int_0^{+\infty} |\nabla\phi(rw)|^2 r^2 drdw = 4\int_{\mathbb{R}} |\nabla\phi(x)|^2 dx$$

Or puisque $\phi|_\Omega$ est constante on en déduit que $\int_{\bar{\Omega}} |\nabla\phi(x)|^2 dx = 0$. En effet $\nabla\phi = 0$ sur Ω et donc sur $\bar{\Omega}$ par continuité de $\nabla\phi$.

On en déduit finalement:

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} \frac{\phi(x)^2}{|x|^2}dx \leq 4\int_{\mathbb{R}\setminus\bar{\Omega}} |\nabla\phi(x)|^2 dx$$