L’escalier glissant du diable

Présenté par:
Houssein MANSOUR

Encadrant:
Laurent REGNIER

Faculté des sciences, AMU
Master 1, Mathematiques et applications, TER

21 juillet 2024

Table de matière

Introduction

La fonction **point d'interrogation de Minkowski** est représentée dans la figure suivante :

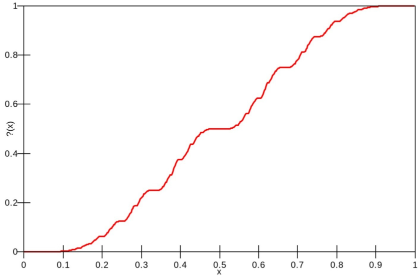


FIGURE 1 – Fonction $?(x)$

Introduction

- Bijection (homéomorphisme) entre les nombres rationnels de l'intervalle $]0, 1[$ et les fractions dyadiques de cet intervalle.
- La fonction est continue, strictement croissante sur $[0, 1]$.
- Si la dérivée de cette fonction existe, alors elle est soit nulle, soit infinie.

Fractions continues

Tout nombre réel positif b a une écriture unique comme fraction continue :

$$b = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}} = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots].$$

L'écriture est finie si et seulement si le nombre est rationnel.

Exemple : $\frac{31}{13}$

$$
\begin{aligned}
(31,13) &\xrightarrow{2} (13,5)\\
&\xrightarrow{2} (5,3)\\
&\xrightarrow{1} (3,2)\\
&\xrightarrow{1} (2,1)\\
&\xrightarrow{2} (1,0)
\end{aligned}
$$

$$\frac{31}{13} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = [2,2,1,1,2]$$

Exemple : $\frac{31}{13}$

$$\begin{aligned}(31,13) &\xrightarrow{2} (13,5)\\ &\xrightarrow{2} (5,3)\\ &\xrightarrow{1} (3,2)\\ &\xrightarrow{1} (2,1)\\ &\xrightarrow{2} (1,0)\end{aligned}$$

$$\frac{31}{13} = 2 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}} = [2,2,1,1,2]$$

Theorem 1

Les réduites d'un nombre b dont l'écriture en fraction continue est

$$b = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}$$

sont de la forme $\dfrac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ *où* $n \geq 1$*, avec :*

$$\begin{cases} p_n & = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n & = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \end{cases}$$

sous les conditions initiales :

$$\begin{cases} p_0 = a_0, \\ q_0 = 1. \end{cases}$$

L’arbre Dyadique

La **Figure 2** représente **l’arbre dyadique**.

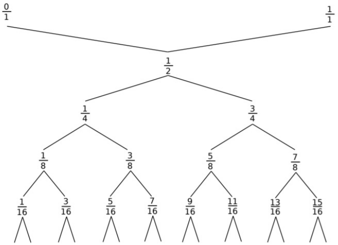


FIGURE 2 – L’arbre Dyadic

L’arbre dyadique est l’arbre binaire complet étiqueté par les fractions dyadiques de la forme $\frac{a}{2^n}$, où $n \in \mathbb{N}$ et $0 < a < 2^n$.

- La fonction $L_{dya}(\frac{a}{2^n})$ représente la fille gauche de $\frac{a}{2^n}$, où

$$L_{dya}\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{2a-1}{2^{n+1}}.$$

- La fonction $R_{dya}(\frac{a}{2^n})$ représente la fille droite de $\frac{a}{2^n}$, où

$$R_{dya}\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{2a+1}{2^{n+1}}.$$

- Si N est impair :

$$\frac{a}{2^n} = \underbrace{0.00\ldots0}_{a_1}\underbrace{11\ldots1}_{a_2}\underbrace{00\ldots0}_{a_3}\ldots\underbrace{00\ldots0}_{a_N}1$$

$$\xrightarrow{L_{dya}} \underbrace{00\ldots0}_{a_1}\underbrace{11\ldots1}_{a_2}\underbrace{00\ldots0}_{a_3}\ldots\underbrace{00\ldots00}_{a_N+1}1.$$

- Si N est pair :

$$\frac{a}{2^n} = \underbrace{0.00\ldots0}_{a_1}\underbrace{11\ldots1}_{a_2}\underbrace{00\ldots0}_{a_3}\ldots\underbrace{11\ldots1}_{a_N}1$$

$$\xrightarrow{L_{dya}} \underbrace{00\ldots0}_{a_1}\underbrace{11\ldots1}_{a_2}\underbrace{00\ldots0}_{a_3}\ldots\underbrace{11\ldots1}_{a_N}01.$$

- Si N est impair :

$$\frac{a}{2^n} = \underbrace{0.00\dots0}_{a_1}\underbrace{11\dots1}_{a_2}\underbrace{00\dots0}_{a_3}\dots\underbrace{00\dots0}_{a_N}1$$

$$\xrightarrow{L_{dya}} \underbrace{00\dots0}_{a_1}\underbrace{11\dots1}_{a_2}\underbrace{00\dots0}_{a_3}\dots\underbrace{00\dots00}_{a_N+1}1.$$

- Si N est pair :

$$\frac{a}{2^n} = \underbrace{0.00\dots0}_{a_1}\underbrace{11\dots1}_{a_2}\underbrace{00\dots0}_{a_3}\dots\underbrace{11\dots1}_{a_N}1$$

$$\xrightarrow{L_{dya}} \underbrace{00\dots0}_{a_1}\underbrace{11\dots1}_{a_2}\underbrace{00\dots0}_{a_3}\dots\underbrace{11\dots1}_{a_N}01.$$

$$\mathbb{Q}_2 = \left\{ \frac{m}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq m < 2^n \right\}$$

La **Figure 3** représente **l'arbre de Farey**, où les fractions de Farey sont positionnées aux nœuds.

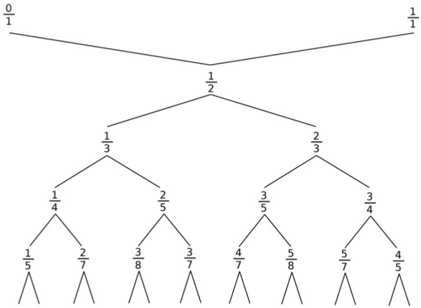


FIGURE 3 – L'arbre de Farey

La médiane de deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ est définie comme $\frac{a+a'}{b+b'}$.

- Pour les fractions $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$, on a $1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 1$.
- Supposons que pour 2 fractions voisines $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$, on a $a'b - ab' = 1$.
  Alors, pour les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+a'}{b+b'}$, on a $(a+a')b - a(b+b') = 1$.
  Ainsi, par récurrence, on a la propriété que pour chaque paire de fractions voisines, $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$, $a'b - ab' = 1$.

On peut conclure donc que :

- Les fractions sont irréductibles (par le théorème de Bezout).
- $\frac{a}{b} < \frac{(a+a')}{(b+b')} < \frac{a'}{b'}$.

- Pour les fractions $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$, on a $1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 1$.
- Supposons que pour 2 fractions voisines $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$, on a $a'b - ab' = 1$.
  Alors, pour les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+a'}{b+b'}$, on a $(a+a')b - a(b+b') = 1$.
  Ainsi, par récurrence, on a la propriété que pour chaque paire de fractions voisines, $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$, $a'b - ab' = 1$.

On peut conclure donc que :

- Les fractions sont irréductibles (par le théorème de Bezout).
- $\frac{a}{b} < \frac{(a+a')}{(b+b')} < \frac{a'}{b'}$.

- Pour les fractions $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$, on a $1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 1$.
- Supposons que pour 2 fractions voisines $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$, on a $a'b - ab' = 1$.
  Alors, pour les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+a'}{b+b'}$, on a $(a+a')b - a(b+b') = 1$.
  Ainsi, par récurrence, on a la propriété que pour chaque paire de fractions voisines, $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$, $a'b - ab' = 1$.

On peut conclure donc que :

- Les fractions sont irréductibles (par le théorème de Bezout).
- $\frac{a}{b} < \frac{(a+a')}{(b+b')} < \frac{a'}{b'}$.

- Pour les fractions $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$, on a $1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 1$.
- Supposons que pour 2 fractions voisines $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$, on a $a'b - ab' = 1$.
  Alors, pour les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+a'}{b+b'}$, on a $(a+a')b - a(b+b') = 1$.
  Ainsi, par récurrence, on a la propriété que pour chaque paire de fractions voisines, $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$, $a'b - ab' = 1$.

On peut conclure donc que :

- Les fractions sont irréductibles (par le théorème de Bezout).
- $\frac{a}{b} < \frac{(a+a')}{(b+b')} < \frac{a'}{b'}$.

Theorem 2

On peut définir sur l'arbre de Farey une autre fois les deux mouvements gauche et droite comme deux fonctions L_{Farey} et R_{Farey} par :

- *Si n est impair :*

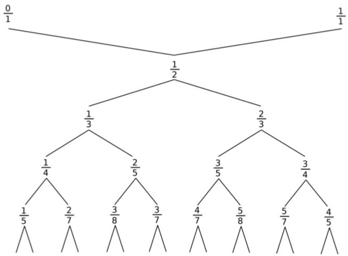
$$L_{Farey}([0,a_1,\ldots,a_n]) = [0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n+1],$$
$$R_{Farey}([0,a_1,\ldots,a_n]) = [0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n-1,2].$$

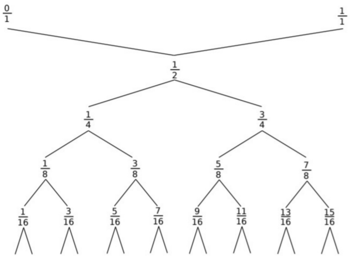
- *Si n est pair :*

$$L_{Farey}([0,a_1,\ldots,a_n]) = [0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n-1,2],$$
$$R_{Farey}([0,a_1,\ldots,a_n]) = [0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n+1].$$

Definition 3

En associant l'arbre de Farey et l'arbre dyadique, on obtient la fonction point d'interrogation de Minkowski notée par $?(x)$.





$$?\left(\frac{a+a'}{b+b'}\right)=\frac{1}{2}\left(?\left(\frac{a}{b}\right)+?\left(\frac{a'}{b'}\right)\right)$$

- $? :]0,1[_{\mathbb{Q}} \to]0,1[_{\mathbb{Q}_2}$.
- Si $x, y \in]0,1[_{\mathbb{Q}}$, $x < y \iff ?(x) < ?(y)$.

Par conséquent, la fonction ? est strictement croissante. Notons que :

- $]0,1[_{\mathbb{Q}}$ est dense dans $]0,1[$.
- $]0,1[_{\mathbb{Q}_2}$ est dense dans $]0,1[$

Theorem 4

La fonction ? est continue.

Démonstration.

Soit $x_0 \in]0,1[_{\mathbb{Q}}$ il faut montrer que :
$\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, $\forall x \in]0,1[_{\mathbb{Q}}$ si $|x - x_0| < \delta$ alors $|?(x) - ?(x_0)| < \varepsilon$.
Soit $y_0 = ?(x_0)$
$\exists y_1$ et $y_2 \in]0,1[_{\mathbb{Q}_2}$ de telle sorte que :

$$0 < y_0 - y_1 < \varepsilon, 0 < y_2 - y_0 < \varepsilon.$$

$\exists x_1$ et $x_2 \in]0,1[_{\mathbb{Q}}$ telle que :

$$x_1 = ?^{-1}(y_1), x_2 = ?^{-1}(y_2).$$

on a : $y_1 < y_0 < y_2$
donc : $x_1 < x_0 < x_2$.
Si $x \in [x_1, x_2]$ alors $?(x) \in [y_1, y_2]$.
Donc il suffit de prendre $\delta = |x_2 - x_1|$.

Theorem 4

La fonction ? est continue.

Démonstration.

Soit $x_0 \in]0,1[_{\mathbb{Q}}$ il faut montrer que :
$\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, $\forall x \in]0,1[_{\mathbb{Q}}$ si $|x - x_0| < \delta$ alors $|?(x) - ?(x_0)| < \varepsilon$.
Soit $y_0 = ?(x_0)$
$\exists y_1$ et $y_2 \in]0,1[_{\mathbb{Q}_2}$ de telle sorte que :

$$0 < y_0 - y_1 < \varepsilon, 0 < y_2 - y_0 < \varepsilon.$$

$\exists x_1$ et $x_2 \in]0,1[_{\mathbb{Q}}$ telle que :

$$x_1 = ?^{-1}(y_1), x_2 = ?^{-1}(y_2).$$

on a : $y_1 < y_0 < y_2$
donc : $x_1 < x_0 < x_2$.
Si $x \in [x_1, x_2]$ alors $?(x) \in [y_1, y_2]$.
Donc il suffit de prendre $\delta = |x_2 - x_1|$.

Theorem 4

La fonction ? est continue.

Démonstration.

Soit $x_0 \in]0,1[_{\mathbb{Q}}$ il faut montrer que :
$\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, $\forall x \in]0,1[_{\mathbb{Q}}$ si $|x - x_0| < \delta$ alors $|?(x) - ?(x_0)| < \varepsilon$.
Soit $y_0 = ?(x_0)$
$\exists y_1$ et $y_2 \in]0,1[_{\mathbb{Q}_2}$ de telle sorte que :

$$0 < y_0 - y_1 < \varepsilon, 0 < y_2 - y_0 < \varepsilon.$$

$\exists x_1$ et $x_2 \in]0,1[_{\mathbb{Q}}$ telle que :

$$x_1 = ?^{-1}(y_1), x_2 = ?^{-1}(y_2).$$

on a : $y_1 < y_0 < y_2$
donc : $x_1 < x_0 < x_2$.
Si $x \in [x_1, x_2]$ alors $?(x) \in [y_1, y_2]$.
Donc il suffit de prendre $\delta = |x_2 - x_1|$.

Theorem 4

La fonction ? est continue.

Démonstration.

Soit $x_0 \in]0,1[_{\mathbb{Q}}$ il faut montrer que :
$\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, $\forall x \in]0,1[_{\mathbb{Q}}$ si $|x - x_0| < \delta$ alors $|?(x) - ?(x_0)| < \varepsilon$.
Soit $y_0 = ?(x_0)$
$\exists y_1$ et $y_2 \in]0,1[_{\mathbb{Q}_2}$ de telle sorte que :

$$0 < y_0 - y_1 < \varepsilon, 0 < y_2 - y_0 < \varepsilon.$$

$\exists x_1$ et $x_2 \in]0,1[_{\mathbb{Q}}$ telle que :

$$x_1 = ?^{-1}(y_1), x_2 = ?^{-1}(y_2).$$

on a : $y_1 < y_0 < y_2$
donc : $x_1 < x_0 < x_2$.
Si $x \in [x_1, x_2]$ alors $?(x) \in [y_1, y_2]$.
Donc il suffit de prendre $\delta = |x_2 - x_1|$.

Theorem 4

La fonction ? est continue.

Démonstration.

Soit $x_0 \in]0,1[_{\mathbb{Q}}$ il faut montrer que :
$\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, $\forall x \in]0,1[_{\mathbb{Q}}$ si $|x - x_0| < \delta$ alors $|?(x) - ?(x_0)| < \varepsilon$.
Soit $y_0 = ?(x_0)$
$\exists y_1$ et $y_2 \in]0,1[_{\mathbb{Q}_2}$ de telle sorte que :

$$0 < y_0 - y_1 < \varepsilon, 0 < y_2 - y_0 < \varepsilon.$$

$\exists x_1$ et $x_2 \in]0,1[_{\mathbb{Q}}$ telle que :

$$x_1 = ?^{-1}(y_1), x_2 = ?^{-1}(y_2).$$

on a : $y_1 < y_0 < y_2$
donc : $x_1 < x_0 < x_2$.
Si $x \in [x_1, x_2]$ alors $?(x) \in [y_1, y_2]$.
Donc il suffit de prendre $\delta = |x_2 - x_1|$.

Theorem 4

La fonction ? est continue.

Démonstration.

Soit $x_0 \in]0,1[_{\mathbb{Q}}$ il faut montrer que :
$\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, $\forall x \in]0,1[_{\mathbb{Q}}$ si $|x - x_0| < \delta$ alors $|?(x) - ?(x_0)| < \varepsilon$.
Soit $y_0 = ?(x_0)$
$\exists y_1$ et $y_2 \in]0,1[_{\mathbb{Q}_2}$ de telle sorte que :

$$0 < y_0 - y_1 < \varepsilon, 0 < y_2 - y_0 < \varepsilon.$$

$\exists x_1$ et $x_2 \in]0,1[_{\mathbb{Q}}$ telle que :

$$x_1 = ?^{-1}(y_1), x_2 = ?^{-1}(y_2).$$

on a : $y_1 < y_0 < y_2$
donc : $x_1 < x_0 < x_2$.
Si $x \in [x_1, x_2]$ alors $?(x) \in [y_1, y_2]$.
Donc il suffit de prendre $\delta = |x_2 - x_1|$.

Theorem 5

La fonction ? de Minkowski peut être étendue par continuité sur tout l'intervalle $]0,1[$.

Démonstration.

Les deux ensembles $]0,1[_{\mathbb{Q}}$ et $]0,1[_{\mathbb{Q}_2}$ sont denses dans l'intervalle $]0,1[$. De plus, la fonction ? est continue de $]0,1[_{\mathbb{Q}}$ dans $]0,1[_{\mathbb{Q}_2}$. Par conséquent, d'aprés la topologie générale on peut étendre cette fonction par continuité sur tout l'intervalle $]0,1[$.

□

Forme directe de la fonction ?

Soit $x = [0, a_1, a_2, \ldots, a_N - 1, 1]$, alors :

$$?(x) = 2\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}2^{-(a_1+a_2+\ldots+a_k)}$$

- N est impair :

$$?(x) = 0.\underbrace{00\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{11\ldots1}_{a_2}\underbrace{00\ldots0}_{a_3}\ldots\underbrace{00\ldots0}_{a_N-1}1.$$

- N est pair :

$$?(x) = 0.\underbrace{00\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{11\ldots1}_{a_2}\underbrace{00\ldots0}_{a_3}\ldots\underbrace{11\ldots1}_{a_N-1}1.$$

Theorem 6

La définition de la fonction point d'interrogation de Minkowski par les arbres et la définition directe sont ***équivalentes****.*

Preuve :

L'idée est de vérifier que si $x = [0, a_1, a_2, ..., a_n]$, alors :

$$L_{dya}(?(x)) = ?(L_{Farey}(x)).$$

Theorem 6

La définition de la fonction point d'interrogation de Minkowski par les arbres et la définition directe sont ***équivalentes****.*

Preuve :

L'idée est de vérifier que si $x = [0, a_1, a_2, ..., a_n]$, alors :

$$L_{dya}(?(x)) = ?(L_{Farey}(x)).$$

Preuve :

- **Le cas où n est impair :** Dans ce cas, on a $?([0, a_1, a_2, \ldots, a_n])$ égal à $?([0, a_1, a_2, \ldots, a_n - 1, 1])$ qui est égal à :

$$?(x) = 0.\underbrace{00\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{11\ldots1}_{a_2}\underbrace{00\ldots0}_{a_3}\ldots\underbrace{00\ldots0}_{a_n-1}\underbrace{1}_{1}.$$

Donc, $L_{dya}(?(x))$ sera égal à :

$$L_{dya}(?([0, a_1, a_2, \ldots, a_n])) = 0.\underbrace{00\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{11\ldots1}_{a_2}\underbrace{00\ldots0}_{a_3}\ldots\underbrace{00\ldots0}_{a_n}\underbrace{1}_{1}.$$

$$\begin{aligned}?(L_{Farey}([0, a_1, a_2, \ldots, a_n])) &= ?([0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 1]) \\ &= 0.\underbrace{00\ldots0}_{a_1-1}\underbrace{11\ldots1}_{a_2}\underbrace{00\ldots0}_{a_3}\ldots\underbrace{00\ldots0}_{a_n}\underbrace{1}_{1}.\end{aligned}$$

- **Le cas où n est pair :** Dans ce cas, on a $?([0, a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1])$ égal à :

$$?(x) = 0.\underbrace{00\dots0}_{a_1-1}\underbrace{11\dots1}_{a_2}\underbrace{00\dots0}_{a_3}\dots\underbrace{11\dots1}_{a_n-1}1.$$

$$L_{dya}(?(x)) = 0.\underbrace{00\dots0}_{a_1-1}\underbrace{11\dots1}_{a_2}\underbrace{00\dots0}_{a_3}\dots\underbrace{11\dots1}_{a_n-1}\underbrace{0}_{1}\underbrace{1}_{1}.$$

$$\begin{aligned} ?(L_{Farey}(x)) &= ?([0, a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1, 1]) \\ &= 0.\underbrace{00\dots0}_{a_1-1}\underbrace{11\dots1}_{a_2}\underbrace{00\dots0}_{a_3}\dots\underbrace{11\dots1}_{a_n-1}\underbrace{0}_{1}\underbrace{1}_{1}. \end{aligned}$$

Dérivabilité de la fonction ?

Theorem 7

Soit $S = \{x \mid x = [0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ *avec* $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty\}$
Soit $x \in S$, *si la dérivée de la fonction* ? *existe et est finie en* x, *alors* $?'(x) = 0$.

Étape 1 :

Soit la réduite de $x = [0, a_1, a_2, \ldots] \in S$ représentée par :

$$r_n = \frac{p_n}{q_n} = [0, a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

- $\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$.
- Soit $\phi_n = ?(r_n)$ et $y = ?(x)$.
  $\frac{1}{2^{S_{n+1}}} < |y - \phi_n| < \frac{1}{2^{S_{n+1}-1}}$.

Étape 2 :

Soit $\delta_n = \left|\frac{y-\phi_n}{x-r_n}\right|$.

$$\frac{a_{n+1}q_n^2}{2^{S_{n+1}}} < \delta_n < \frac{2(a_{n+1}+2)q_n^2}{2^{S_{n+1}}}.$$

Mais $x \in S$, où $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$.

$$\frac{\delta_{n_k-1}}{\delta_{n_k-2}} < C\frac{a_{n_k}^2}{2^{a_{n_k}}}.$$

où C est une constante absolue.

$$\frac{\delta_{n_k-1}}{\delta_{n_k-2}} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Si $x \in S$ et $?'(x)$ existe et est fini, et différent de zéro, alors parce que $\delta_n \xrightarrow{n\to\infty} ?'(x)$ on a $\frac{\delta_{n_k-1}}{\delta_{n_k-2}} \xrightarrow{k\to\infty} 1$.

Étape 2 :

Soit $\delta_n = \left|\frac{y-\phi_n}{x-r_n}\right|$.

$$\frac{a_{n+1} q_n^2}{2^{S_{n+1}}} < \delta_n < \frac{2(a_{n+1}+2)q_n^2}{2^{S_{n+1}}}.$$

Mais $x \in S$, où $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$.

$$\frac{\delta_{n_k-1}}{\delta_{n_k-2}} < C\frac{a_{n_k}^2}{2^{a_{n_k}}}.$$

où C est une constante absolue.

$$\frac{\delta_{n_k-1}}{\delta_{n_k-2}} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Si $x \in S$ et $?'(x)$ existe et est fini, et différent de zéro, alors parce que $\delta_n \xrightarrow{n\to\infty} ?'(x)$ on a $\frac{\delta_{n_k-1}}{\delta_{n_k-2}} \xrightarrow{k\to\infty} 1$.

Étape 2 :

Soit $\delta_n = \left|\frac{y-\phi_n}{x-r_n}\right|$.

$$\frac{a_{n+1} q_n^2}{2^{S_{n+1}}} < \delta_n < \frac{2(a_{n+1}+2) q_n^2}{2^{S_{n+1}}}.$$

Mais $x \in S$, où $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$.

$$\frac{\delta_{n_k-1}}{\delta_{n_k-2}} < C \frac{a_{n_k}^2}{2^{a_{n_k}}}.$$

où C est une constante absolue.

$$\frac{\delta_{n_k-1}}{\delta_{n_k-2}} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Si $x \in S$ et $?'(x)$ existe et est fini, et différent de zéro, alors parce que $\delta_n \xrightarrow{n\to\infty} ?'(x)$ on a $\frac{\delta_{n_k-1}}{\delta_{n_k-2}} \xrightarrow{k\to\infty} 1$.

Étape 2 :

Soit $\delta_n = \left|\frac{y-\phi_n}{x-r_n}\right|$.

$$\frac{a_{n+1} q_n^2}{2^{S_{n+1}}} < \delta_n < \frac{2(a_{n+1}+2) q_n^2}{2^{S_{n+1}}}.$$

Mais $x \in S$, où $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$.

$$\frac{\delta_{n_k-1}}{\delta_{n_k-2}} < C \frac{a_{n_k}^2}{2^{a_{n_k}}}.$$

où C est une constante absolue.

$$\frac{\delta_{n_k-1}}{\delta_{n_k-2}} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Si $x \in S$ et $?'(x)$ existe et est fini, et différent de zéro, alors parce que $\delta_n \xrightarrow{n\to\infty} ?'(x)$ on a $\frac{\delta_{n_k-1}}{\delta_{n_k-2}} \xrightarrow{k\to\infty} 1$.

Étape 2 :

Soit $\delta_n = \left|\frac{y-\phi_n}{x-r_n}\right|$.

$$\frac{a_{n+1}q_n^2}{2^{S_{n+1}}} < \delta_n < \frac{2(a_{n+1}+2)q_n^2}{2^{S_{n+1}}}.$$

Mais $x \in S$, où $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$.

$$\frac{\delta_{n_k-1}}{\delta_{n_k-2}} < C\frac{a_{n_k}^2}{2^{a_{n_k}}}.$$

où C est une constante absolue.

$$\frac{\delta_{n_k-1}}{\delta_{n_k-2}} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Si $x \in S$ et $?'(x)$ existe et est fini, et différent de zéro, alors parce que $\delta_n \xrightarrow{n\to\infty} ?'(x)$ on a $\frac{\delta_{n_k-1}}{\delta_{n_k-2}} \xrightarrow{k\to\infty} 1$.

Reste un mystère : existe-t-il des réels où la fonction point d'interrogation de Minkowski est dérivable ?
Réponse : oui, presque partout, mais c'est un autre TER . . .

Références

ref1 : De Koninck, Jean-Marie et Armel Mercier, *Introduction à la théorie des nombres*, Mont-Royal (Québec), Modulo, 1994, 254 p.
ref2 : Linas Vespas,The Minkowski Question Mark, GL(2,Z) and the Modular Group. Self-published on personal website, 2004 (updated 22 August 2014).
ref3 : Laurent Regnier, Notes de cours Laurent Regnier.
ref4 : J. Paradıs and P. Viader.The Derivative of Minkowski's $?(x)$ Function. Published on Journal of Mathematical Analysis and Applications 253, 107-125(2001).
ref5 : A. Khintchine, "Continued Fractions", Noordhoff, Groningen, 1963.

Merci pour votre attention !