Université d'Aix-Marseille
Faculté des sciences

Master 1, Mathematiques et applications
Travail d'Étude et de Recherche **TER**

L'escalier glissant du diable

Réalisé par
Houssein MANSOUR

sous la direction de
Laurent REGNIER

S2 M1 2022-2023

Table des matières

Introduction

La fonction **point d'interrogation de Minkowski**, représentée dans **FIGURE 1**, est une fonction notée "?" (ou $x \longmapsto ?(x)$). Cette fonction a été définie par **Hermann Minkowski** en 1904 dans le but de créer une bijection (homéomorphisme) continue entre les nombres rationnels de l'intervalle $]0, 1[$ et les fractions dyadiques de cet intervalle. La définition actuelle de cette fonction a été établie par **Arnaud Denjoy** en 1938. La fonction est continue, strictement croissante sur $[0, 1]$. Si la dérivée de cette fonction existe, alors elle est soit nulle, soit infinie (fonction singulière), c'est pour cela qu'on l'appelle parfois **l'escalier glissant du diable**. L'objectif dans ce qui suit est de definir et d'étudier quelques propriétés de cette fonction.

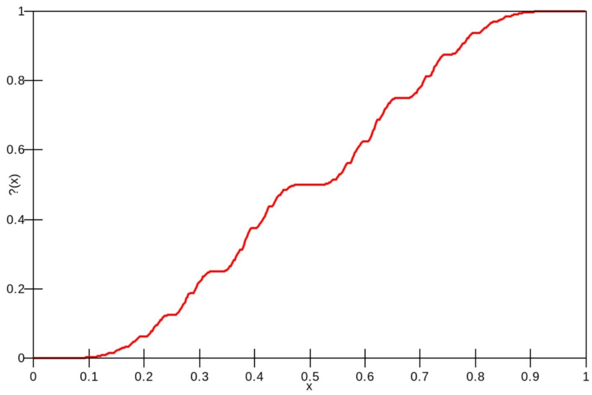


FIGURE 1 – Fonction $?(x)$

Chapitre 1

Fractions continues

La fonction point d'interrogation de Minkowski est définie sur le développement en fraction continue des nombres rationnels ou réels.

Pour motiver les fractions continues, commençons par regarder un exemple avec l'un des plus célèbres nombres irrationnels : le nombre d'or.

EXEMPLE : Soit $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ce nombre, appelé "nombre d'or", a une valeur approximative de 1,61803. Il est solution de l'équation quadratique $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$. Divisons cette équation par φ. On obtient :

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}.$$

Remplaçons l'occurrence de φ au dénominateur par $1 + \frac{1}{\varphi}$. On obtient :

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}.$$

Remplaçons l'occurrence de φ dans la fraction par $1 + \frac{1}{\varphi}$. On obtient :

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}}.$$

On voit bien qu'on peut continuer à l'infini. Ceci suggère l'écriture de φ comme "fraction continue" :

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}.$$

Nous allons introduire une notation pour une telle fraction : Nous noterons $\varphi = [1, 1, 1, \dots]$. Une telle écriture peut être finie ou infinie.

1.1 les nombres réels positifs en fraction continue :

Théorème 1.1.1. Tout nombre réel positif b a une écriture unique comme fraction continue :

$$b = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}} = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots].$$

L'écriture est finie si et seulement si le nombre est rationnel.

Démonstration. Soit b un nombre réel positif. Alors, $b = [b] + \{b\}$, où $[b]$ est la partie entière de b et $\{b\}$ sa partie fractionnaire. Posons $a_0 = [b]$ et $\alpha_0 = \{b\}$. Alors, $\alpha_0 \in [0, 1[$. Si $\alpha_0 = 0$, l'écriture s'arrête là. Sinon, $b_1 = \dfrac{1}{\alpha_0} > 1$. Alors $b_1 = [b_1] + \{b_1\}$. Posons $a_1 = [b_1]$ et $\alpha_1 = \{b_1\}$. Si $\alpha_1 = 0$, alors l'écriture s'arrête là. Sinon, $b_2 = \dfrac{1}{\alpha_1} > 1$. On itère. Décrivons l'étape générale : $b_n = [b_n] + \{b_n\}$. Posons $a_n = [b_n]$ et $\alpha_n = \{b_n\}$. Si $\alpha_n = 0$, alors l'écriture s'arrête là. Sinon, $b_{n+1} = \dfrac{1}{\alpha_n} > 1$.

Montrons l'unicité de cette écriture. Supposons que b ait deux écritures en fraction continue : $b = [a_0, a_1, a_2, \dots] = [c_0, c_1, c_2, \dots]$. Alors la partie entière de b, soit $[b]$, est égale à a_0 et aussi à c_0. Considérons maintenant $b_0 = \{b\} = b - [b]$. Alors $\dfrac{1}{b_0} = [a_1, a_2, \dots] = [c_1, c_2, \dots]$. Pour la même raison que précédemment, $a_1 = c_1$. Etc.

Il nous reste maintenant à montrer que l'écriture est finie si et seulement si le nombre est rationnel.
Une direction est évidente. Si on a une fraction continue finie, alors on peut simplifier la fraction en plusieurs étapes pour finalement la ramener à la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont deux entiers.
Dans l'autre direction, supposons que $b = \frac{p}{q}$. Divisons p par q : $p = a_0 q + r_0$, $0 \le r_0 < q$. Alors, $[b] = a_0$ et $\{b\} = \alpha_0 = \frac{r_0}{q}$. Si $r_0 = 0$, on a fini. Sinon, $\frac{1}{\alpha_0} = \frac{q}{r_0}$. Divisons q par r_0 : $q = a_1 r_0 + r_1$, $0 \le r_1 < r_0$. Alors, $\frac{1}{\alpha_0} = a_0$ et $\alpha_1 = \frac{r_1}{r_0}$. Si $r_0 = 0$, on a fini. Sinon, $\frac{1}{\alpha_1} = \frac{r_0}{r_1}$. Divisons r_0 par r_1 : $r_0 = a_2 r_1 + r_2$, $0 \le r_2 < r_1$. Etc.
Peut-on continuer indéfiniment ?
Non, puisqu'on a la suite décroissante $0 \le \dots \le r_n < r_{n-1} < \dots < r_1 < r_0 < q$, il existe nécessairement un n tel que $r_n = 0$, et on peut même voir que $n \le q$. Donc, la fraction continue est finie.

$\square$

1.2 Les réduites d'un nombre positif

Lorsqu'on tronque la fraction continue d'un nombre positif b, on obtient un nombre rationnel $\frac{p_n}{q_n}$ qui est une approximation de b. Si b s'écrit en fraction continue comme $b = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$, alors les réduites de b sont :

1. $\frac{p_0}{q_0} = a_0$,

   ce qui nous donne $\begin{cases} p_0 = a_0, \\ q_0 = 1. \end{cases}$

2. $\frac{p_1}{q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{1+a_0a_1}{a_1}$,

   ce qui nous donne $\begin{cases} p_1 = a_1a_0 + 1 = a_1p_0 + 1, \\ q_1 = a_1. \end{cases}$
3. La réduite suivante est $\frac{p_2}{q_2} = a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2}} = \frac{a_2(a_0a_1+1)+a_0}{a_1a_2+1}$,

   ce qui nous donne $\begin{cases} p_2 = a_2(a_0a_1 + 1) + a_0 = a_2p_1 + p_0, \\ q_2 = a_1a_2 + 1 = a_2q_1 + q_0. \end{cases}$
4. En sautant les détails de calcul, la réduite suivante est :

$$\begin{aligned} \frac{p_3}{q_3} &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3}}} \\ &= \frac{a_0a_1a_2a_3 + a_0a_1 + a_0a_3 + a_2a_3 + 1}{a_1a_2a_3 + a_1 + a_3} \\ &= \frac{a_3(a_0a_1a_2 + a_0 + a_2) + (a_0a_1 + 1)}{a_3(a_1a_2 + 1) + a_1}, \end{aligned}$$

   ce qui nous donne $\begin{cases} p_3 = a_3p_2 + p_1, \\ q_3 = a_3q_2 + q_1. \end{cases}$

Théorème 1.2.1. Les réduites d'un nombre b dont l'écriture en fraction continue est

$$b = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}$$

sont de la forme $\dfrac{p_n}{q_n}$, où $n \geq 1$, avec :

$$\begin{cases} p_n &= a_np_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n &= a_nq_{n-1} + q_{n-2}, \end{cases}$$

sous les conditions initiales :

$$\begin{cases} p_0 = a_0, \\ q_0 = 1. \end{cases}$$

Démonstration. La formule est vraie pour $n = 2$. Supposons qu'elle soit vraie pour n et montrons-la pour $n + 1$. Comment peut-on calculer la réduite $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ si on connaît $\frac{p_n}{q_n}$? Il faut se convaincre que cela revient à remplacer a_n par $a_n + \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_na_{n+1}+1}{a_{n+1}}$ dans les égalités suivantes :
$\begin{cases} p_n &= a_np_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n &= a_nq_{n-1} + q_{n-2}, \end{cases}$
Faisons-le :

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} &= \frac{\frac{a_na_{n+1}+1}{a_{n+1}}p_{n-1} + p_{n-2}}{\frac{a_na_{n+1}+1}{a_{n+1}}q_{n-1} + q_{n-2}} \\ &= \frac{\frac{(a_na_{n+1}+1)p_{n-1}+a_{n+1}p_{n-2}}{a_{n+1}}}{\frac{(a_na_{n+1}+1)q_{n-1}+a_{n+1}q_{n-2}}{a_{n+1}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(a_n a_{n+1} + 1)p_{n-1} + a_{n+1}p_{n-2}}{(a_n a_{n+1} + 1)q_{n-1} + a_{n+1}q_{n-2}} \\
&= \frac{a_{n+1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} \\
&= \frac{a_{n+1}p_n + p_{n-1}}{a_{n+1}q_n + q_{n-1}}.
\end{aligned}$$

$\square$

Chapitre 2

La fonction ? de Minkowski

2.1 L'arbre Dyadique

La **Figure 2.1** représente **l'arbre dyadique**, qui est clairement de nature "binaire" puisque chaque nœud a exactement deux branches lorsqu'on descend l'arbre. Les nœuds sont étiquetés avec des "fractions dyadiques", c'est-à-dire des fractions dont le dénominateur est une puissance de deux. Il convient de faire la distinction entre le caractère "binaire", qui se rapporte à la structure de l'arbre, et le terme "dyadique", qui renvoie aux puissances de deux. Autrement dit, l'arbre dyadique est l'arbre binaire complet étiqueté par les fractions dyadiques de la forme $\frac{a}{2^n}$, où $n \in \mathbb{N}$ et $0 < a < 2^n$.

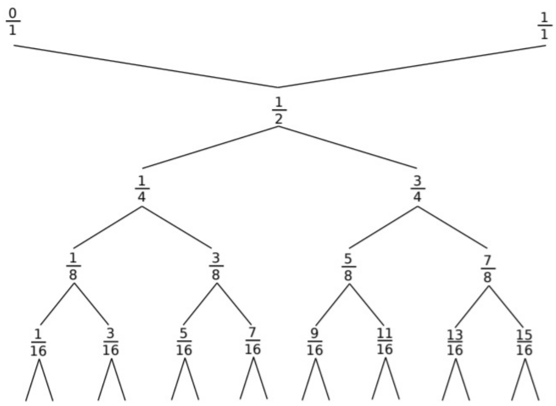


FIGURE 2.1 – L'arbre Dyadic

En partant de la racine (noeud étiqueté par $\frac{1}{2}$), on peut, par des mouvements descendants, atteindre n'importe quel noeud. En utilisant les étiquettes L et R pour marquer ces mouvements, chaque nœud peut donc être identifié de manière unique par le chemin parcouru. Ainsi, un nœud général de l'arbre est représenté par une chaîne fini de lettres $L^m R^n L^p \ldots$ pour un entier positif ou nul m et des entiers strictement positifs $n, p, \ldots$.
L'exposant, signifie simplement qu'une lettre donnée est répétée un certain nombre de fois, de sorte que :

$$L^m R^n L^p = \underbrace{LL \ldots L}_{m \text{ fois}} \underbrace{RR \ldots R}_{n \text{ fois}} \underbrace{LL \ldots L}_{p \text{ fois}}$$

L'arbre dyadique permet de convertir directement l'étiquette du chemin en étiquette dyadique. La séquence de mouvements vers la gauche L et vers la droite R peut être interprétée comme une séquence de 0 et de 1. En lui ajoutant un 1 supplémentaire à la fin, on obtient la valeur de la fraction écrite en base 2. Ainsi, en partant de la racine de l'arbre, qui est prise comme $1/2 = (0.1)_2$, une séquence de mouvements vers la gauche et vers la droite conduit aux nœuds suivants :

$$\begin{aligned}
L &= (0.01)_2 = \frac{1}{4} \\
L^2 &= (0.001)_2 = \frac{1}{8} \\
R &= (0.11)_2 = \frac{3}{4} \\
R^2 &= (0.111)_2 = \frac{7}{8} \\
RL &= (0.101)_2 = \frac{5}{8} \\
L^2RL &= (0.00101)_2 = \frac{5}{32}.
\end{aligned}$$

En plus, on peut définir les deux mouvements sur l'arbre dyadique comme deux fonctions :

— La fonction $L_{dya}(x)$ représente la fille gauche de x, où

$$L_{dya}\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{2a-1}{2^{n+1}}.$$

— La fonction $R_{dya}(x)$ représente la fille droite de x, où

$$R_{dya}\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{2a+1}{2^{n+1}}.$$

Ces fonctions permettent de naviguer dans l'arbre dyadique en se déplaçant vers la gauche (avec L_{dya}) ou vers la droite (avec R_{dya}) à partir d'un nœud donné.

Sélectionner un nœud dans l'arbre équivaut à choisir un sous-arbre, de racine le noeud choisi. De ce fait, tout sous-arbre est isomorphe à l'ensemble de l'arbre, ce qui permet d'établir une similarité intrinsèque pour tout système pouvant être représenté par un arbre binaire. Lorsque les nœuds de l'arbre sont étiquetés de manière strictement croissante, comme c'est le cas dans l'arbre dyadique, sélectionner un nœud revient à spécifier un intervalle ouvert de borne inférieure et supérieure les deux voisines les plus proche du noeud choisi. Cependant, l'inverse n'est pas vrai : un intervalle général ne correspondra pas nécessairement à un seul sous-arbre.

On définit l'ensemble des rationnels 2-adiques sur l'intervalle unité, noté $\mathbb{Q}_2$, comme l'ensemble des nombres rationnels dont le dénominateur est une puissance de 2 par :

$$\mathbb{Q}_2 = \left\{\frac{m}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq m < 2^n\right\}$$

Par construction, toutes les fractions de l'intervalle $]0,1[$ dans l'ensemble des nombres rationnels 2-adiques, noté $]0,1[_{\mathbb{Q}_2}$, apparaissent dans l'arbre dyadique, ordonné d'une manière strictement croissante en profondeur d'abord et de gauche à droite.

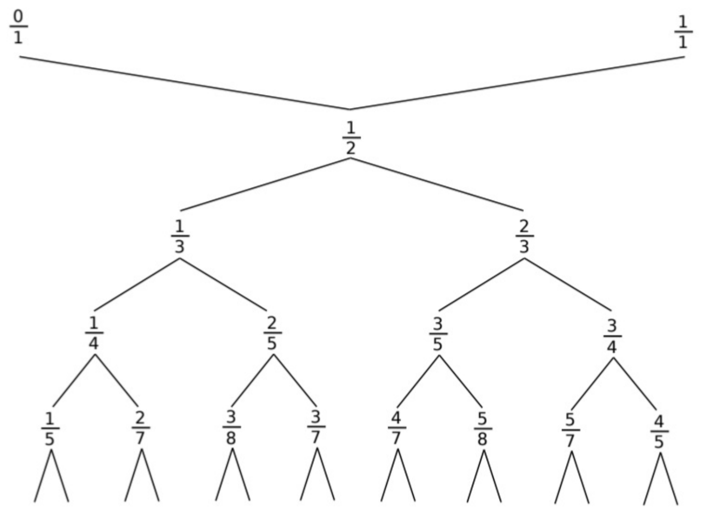
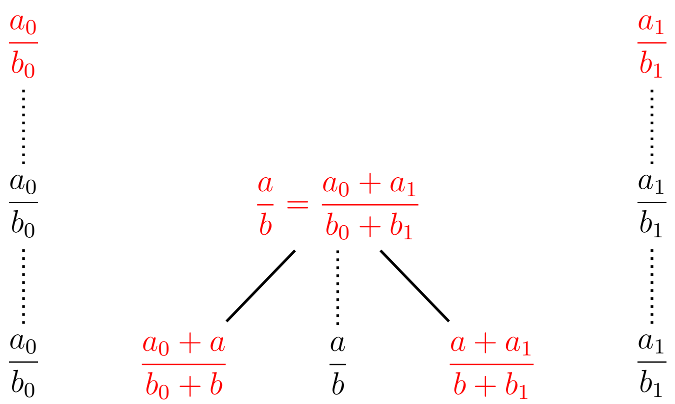


FIGURE 2.2 – L'arbre de Farey

2.2 L'arbre de Farey

La **Figure 2.2** représente **l'arbre de Farey**, où les fractions de Farey sont positionnées aux nœuds. Cet arbre est un arbre binaire qui est étiqueté de manière très spécifique avec des nombres rationnels. Il possède de nombreuses propriétés arithmétiques inhabituelles et fascinantes. Sa construction repose sur l'utilisation des médianes.

La médiane de deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ est définie comme $\frac{a+b}{a'+b'}$: on additionne les numérateurs et les dénominateurs. On commence la construction en étiquetant les extrémités de l'intervalle unité comme $\frac{0}{1}$ à $\frac{1}{1}$, et en les plaçant dans une rangée, la rangée zéro R_0 : $\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\}$. La première médiane, qui est $\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$, est placée au milieu pour créer la première rangée R_1 :$\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\}$. À la prochaine itération, on peut construire deux nouvelles médianes : $\frac{0+1}{1+2} = \frac{1}{3}$ et $\frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3}$, qui sont placées entre leurs fractions parentes, donnant ainsi R_2 : $\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\}$. Dans le cas général, si $\frac{a_0}{b_0}$, $\frac{a}{b}$ et $\frac{a_1}{b_1}$ sont consécutifs dans la rangée R_n, alors les deux filles de $\frac{a}{b}$ sont $\frac{a_0+a}{b_0+b}$ et $\frac{a+a_1}{b+b_1}$, ce qui s'illustre par le dessin :



Ainsi, le processus de construction se poursuit en utilisant les fractions voisines pour déterminer la médiane, et en plaçant ensuite ces médianes aux positions correspondantes dans la structure de l'arbre. Ce procédé permet de construire l'arbre de manière très simple.

Remarquons que pour les fractions $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$, on a $1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 1$. Maintenant, supposons que pour 2 fractions voisines $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$, on a $a'b - ab' = 1$. Alors, pour les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+a'}{b+b'}$, on a

$(a+a')b - a(b+b') = ab + a'b - ab - ab' = 1$. Ainsi, par récurrence, on a la propriété que pour chaque paire de fractions voisines, dans une rangée R_n, $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$, $a'b - ab' = 1$ (on dit que les deux fractions sont unimodulaires).
Notons que l'unimodularité implique que les fractions sont irréductibles, par le théorème de Bezout.
En utilisant aussi la propriété unimodulaire on a que $\frac{a}{b} < \frac{(a+a')}{(b+b')} < \frac{a'}{b'}$, ce qui garantit que pour chaque paire de fractions voisines dans une rangée R_n, les médianes se situent toujours strictement entre les fractions qui les précèdent. Il en découle que chaque rangée de fractions de Farey est strictement ordonnée de manière croissante. Ainsi, cela implique que chaque fraction apparaît uniquement une fois dans une rangée donnée, et les fractions qui précèdent une fraction donnée sont uniques.

Par construction, toutes les fractions de l'intervalle $]0,1[$ dans l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, noté $]0,1[_{\mathbb{Q}}$, apparaissent dans l'arbre de Farey, ordonné d'une manière strictement croissante en profondeur d'abord et de gauche à droite.

Théorème 2.2.1. On peut définir sur l'arbre de Farey une autre fois les deux mouvements gauche et droite comme deux fonctions L_{Farey} et R_{Farey} par :

— Si n est impair :

$$L_{Farey}([0,a_1,\dots,a_n]) = [0,a_1,\dots,a_{n-1},a_n+1],$$
$$R_{Farey}([0,a_1,\dots,a_n]) = [0,a_1,\dots,a_{n-1},a_n-1,2].$$

— Si n est pair :

$$L_{Farey}([0,a_1,\dots,a_n]) = [0,a_1,\dots,a_{n-1},a_n-1,2],$$
$$R_{Farey}([0,a_1,\dots,a_n]) = [0,a_1,\dots,a_{n-1},a_n+1].$$

Démonstration. Soit les réduites de $[0,a_1,a_2,\dots]$ représentée par :

$$\frac{p_n}{q_n} = [0,a_1,a_2,\dots,a_n],$$
$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = [0,a_1,a_2,\dots,a_{n-1}].$$

On va procéder à la démonstration par induction. Tout d'abord, il est démontrable que cette propriété est vraie pour les premières rangées.

Supposons maintenant que la propriété soit vraie jusqu'à $\frac{p'_n}{q'_n}$ dans la figure 2.2.1. Dans cette figure, lorsqu'on descend vers la fille droite de $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = [0,a_1,\dots,a_{n-1}]$ (en supposant que $n-1$ est pair), on obtient le nœud $\frac{p''_n}{q''_n} = [0,a_1,\dots,a_{n-1},1]$. En partant de $\frac{p''_n}{q''_n}$, on applique a_n-2 fois L_{Farey} pour arriver à $\frac{p'_n}{q'_n} = [0,a_1,\dots,a_n-1]$. Ensuite, en prenant la fille gauche de $\frac{p'_n}{q'_n}$, on obtient $\frac{p_n}{q_n} = [0,a_1,\dots,a_n]$.

Maintenant, notre objectif est de montrer, puisque n est impair, que

$$\frac{r}{s} = L_{Farey}\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = [0,a_1,\dots,a_n+1],$$
$$\frac{r'}{s'} = R_{Farey}\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = [0,a_1,\dots,a_{n-1},2].$$

D'après le chapitre 1, on a :

$$\begin{cases} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} p'_n &= (a_n - 1)p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q'_n &= (a_n - 1)q_{n-1} + q_{n-2}. \end{cases}$$

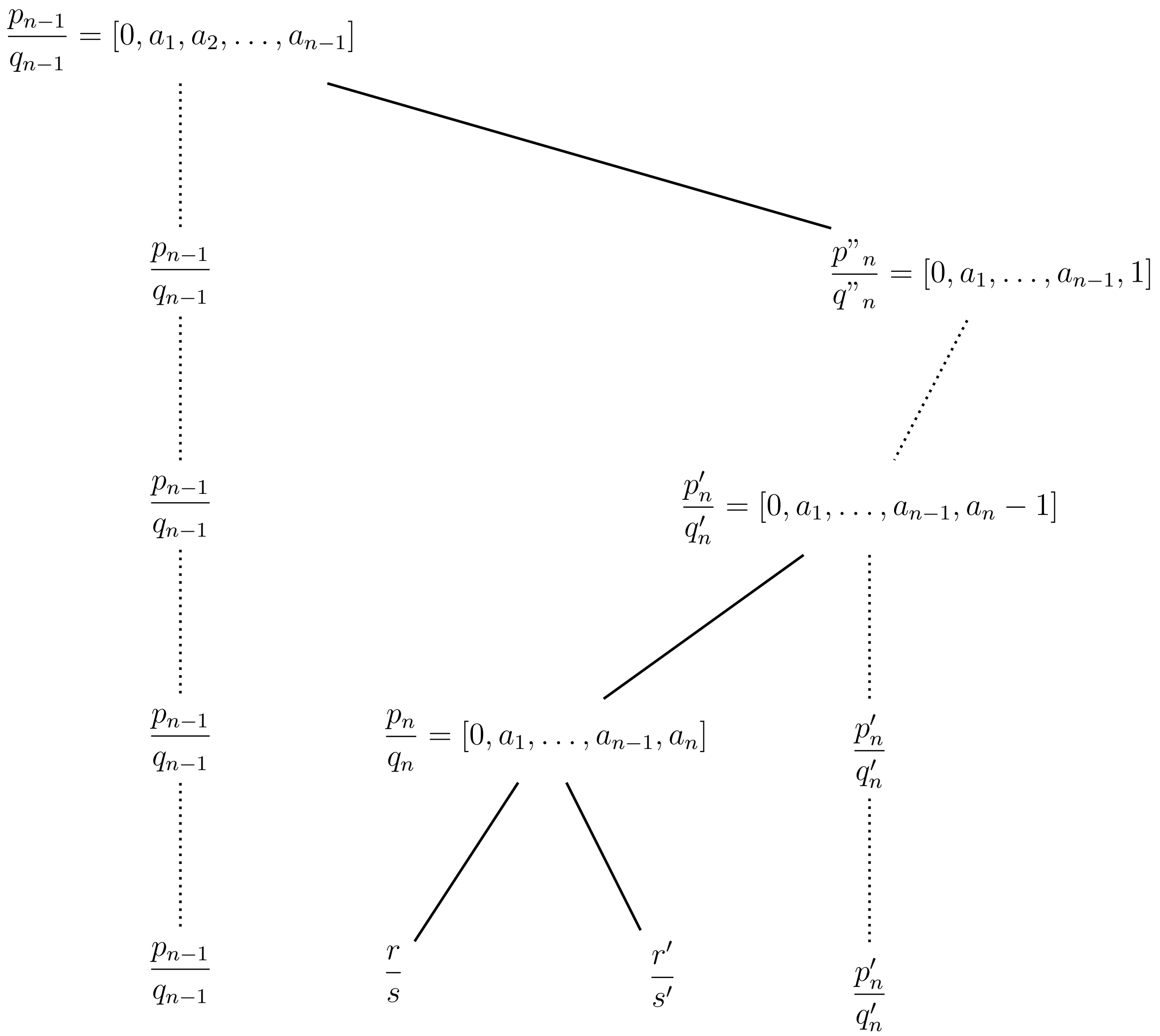


FIGURE 2.2.1

$$\begin{aligned} \frac{r}{s} &= L_{Farey}\left(\frac{p_n}{q_n}\right) \\ &= \frac{p_{n-1} + p_n}{q_{n-1} + q_n} \\ &= \frac{p_{n-1} + a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{q_{n-1} + a_n q_{n-1} + q_{n-2}} \\ &= \frac{(a_n + 1)p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + 1)q_{n-1} + q_{n-2}} \\ &= [0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n + 1]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{r'}{s'} &= R_{Farey}\left(\frac{p_n}{q_n}\right) \\ &= \frac{p'_n + p_n}{q'_n + q_n}. \end{aligned}$$

Démontrons que :

$$[0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1, 2] = \frac{p'_n + p_n}{q'_n + q_n}.$$

$$\begin{aligned}
[0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1, 2] &= \frac{2p'_n + p_{n-1}}{2q'_n + q_{n-1}} \\
&= \frac{p'_n + p'_n + p_{n-1}}{q'_n + q'_n + q_{n-1}} \\
&= \frac{p'_n + (a_n - 1)p_{n-1} + p_{n-2} + p_{n-1}}{q'_n + (a_n - 1)q_{n-1} + q_{n-2} + q_{n-1}} \\
&= \frac{p'_n + a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{q'_n + a_n q_{n-1} + q_{n-2}} \\
&= \frac{p'_n + p_n}{q'_n + q_n}.
\end{aligned}$$

□

2.3 La fonction ? de Minkowski par les arbres

Définition 2.3.1. En associant l'arbre de Farey et l'arbre dyadique, on obtient la fonction point d'interrogation de Minkowski notée par $?(x)$. Par exemple, $?(1/3) = 1/4$. Aux extrémités, on a $?(0) = 0$ et $?(1) = 1$.

Dans l'arbre de Farey (respectivement dans l'arbre dyadique), tous les fractions rationnelles (respectivement tous les fractions dyadiques) possibles apparaissent, ordonnés d'une manière strictement croissante. On a si x, $y \in]0,1[_{\mathbb{Q}}$, $x < y \iff ?(x) < ?(y)$, par conséquent, la fonction ? est strictement croissante et elle est bien définie et bijective de $]0,1[_{\mathbb{Q}}$ sur $]0,1[_{\mathbb{Q}_2}$.

Rappel : Soit $A \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$,
A est dense dans X si $\forall I \neq \emptyset$, un intervalle de X on a $I \cap A \neq \emptyset$.

Montrons que $]0,1[_{\mathbb{Q}}$ est dense dans $]0,1[$: Soient x et $y \in]0,1[$ tels que $x < y$ et $I =]x,y[$. Comme $y - x > 0$, d'après le principe d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < y - x$. On a : $E(nx) \leq nx < E(nx) + 1$, donc $x < \frac{E(nx)}{n} + \frac{1}{n} < y$. Puisque $\frac{E(nx)}{n} + \frac{1}{n} \in]x,y[_{\mathbb{Q}}$, on conclut que $]0,1[_{\mathbb{Q}}$ est dense dans $]0,1[$.

Montrons que $]0,1[_{\mathbb{Q}_2}$ est dense dans $]0,1[$: Soient x et $y \in]0,1[$ tels que $x < y$ et $I =]x,y[$. Comme $y - x > 0$, d'après le principe d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < y - x$. Posons $m = E(2^n x) + 1$, alors $E(2^n x) \leq 2^n x < m$, donc $m - 1 \leq 2^n x < m$. En divisant par 2^n on obtient : $\frac{m}{2^n} - \frac{1}{2^n} \leq x < \frac{m}{2^n}$. De plus $\frac{m}{2^n} \leq x + \frac{1}{2^n} < x + \frac{1}{n} < y$. En conclusion on a : $x < \frac{m}{2^n} < y$, avec $\frac{m}{2^n} \in]x,y[_{\mathbb{Q}_2}$, on conclut que $]0,1[_{\mathbb{Q}_2}$ est dense dans $]0,1[$.

Théorème 2.3.1. La fonction ? est continue.

Démonstration. Soit $x_0 \in]0,1[_{\mathbb{Q}}$, il faut montrer que :
$\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, $\forall x \in]0,1[_{\mathbb{Q}}$ si $|x - x_0| < \delta$ alors $|?(x) - ?(x_0)| < \epsilon$.
Soit $y_0 = ?(x_0)$, on a que $y_0 \in]0,1[_{\mathbb{Q}_2}$, mais cette ensemble est dense dans $]0,1[$ alors $\exists y_1$ et $y_2 \in]0,1[_{\mathbb{Q}_2}$ de telle sorte que :

$$0 < y_0 - y_1 < \epsilon,$$

$$0 < y_2 - y_0 < \epsilon.$$

La fonction ? est bijective alors $\exists x_1$ et $x_2 \in]0,1[_{\mathbb{Q}}$ telle que :

$$x_1 = ?^{-1}(y_1),$$

$$x_2 = ?^{-1}(y_2).$$

on a : $y_1 < y_0 < y_2$
donc : $x_1 < x_0 < x_2$ parce que la fonction ? est strictement croissante.
Si $x \in [x_1, x_2]$ alors $?(x) \in [y_1, y_2]$.
Donc il suffit de prendre $\delta = |x_2 - x_1|$ parsuite $|x - x_0| < \delta$ implique que $|?(x) - ?(x_0)| < \epsilon$.

□

Théorème 2.3.2. La fonction ? de Minkowski peut être étendue par continuité sur tout l'intervalle $]0,1[$.

Démonstration. D'aprés la topologie générale, toute application continue définie sur des sous-ensembles denses de $\mathbb{R}$ peut être étendue de manière unique à une application continue sur l'ensemble entier $\mathbb{R}$. Les deux ensembles $]0,1[_{\mathbb{Q}}$ et $]0,1[_{\mathbb{Q}_2}$ sont denses dans l'intervalle $]0,1[$. De plus, la fonction ? est continue de $]0,1[_{\mathbb{Q}}$ dans $]0,1[_{\mathbb{Q}_2}$. Par conséquent, on peut étendre cette fonction par continuité sur tout l'intervalle $]0,1[$.

□

Chapitre 3

Forme directe de la fonction ?

3.1 Forme directe

Une définition non récursive de la fonction point d'interrogation de Minkowski trouve de nombreuses applications pratiques, notamment dans l'exploration numérique.

En d'autres termes, lorsque nous avons un nombre rationnel ou réel x, nous souhaitons pouvoir évaluer directement la fonction $?(x)$.

Cette évaluation peut être réalisée de manière simple en utilisant des fractions continues.

Lorsque nous avons le développement en fractions continues $x = [0, a_1, a_2, \ldots]$ d'un nombre réel x, nous pouvons utiliser une extension proposée par Conway pour obtenir une solution. Cette extension est parfois appelée "expansion Denjoy". Cette extension est :

$$?(x) = 2\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}2^{-(a_1+a_2+\ldots+a_k)}$$

avec N est la longueur du développement en fraction continue de x. N'oublions pas que N peut être infini lorsque x est irrationnel.

On peut interpréter cette somme comme un décompte d'une séquence alternée de 0 et de 1 dans la représentation binaire de $?(x)$. Si N est une valeur finie, alors l'expansion se termine avec une répétition infinie de l'opposé du dernier chiffre. Ainsi, lorsque N est pair, l'expansion binaire se prolonge avec une séquence de 0, tandis que lorsque N est impair, elle se termine avec une séquence de 1.

$$?(x) = 0.\underbrace{00\ldots0}_{\mathrm{a}_1-1}\underbrace{11\ldots1}_{\mathrm{a}_2}\underbrace{00\ldots0}_{\mathrm{a}_3}\underbrace{11\ldots1}_{\mathrm{a}_4}\underbrace{00\ldots0}_{\mathrm{a}_5}1\ldots$$

3.2 Équivalence entre les deux définitions

Théorème 3.2.1. La définition de la fonction point d'interrogation de Minkowski par les arbres présentée dans le chapitre précédent (définition récursive) et la définition directe donnée dans ce chapitre sont **équivalentes**.

Démonstration. Pour montrer l'équivalence entre les deux définitions de la fonction point d'interrogation de Minkowski (la définition par les arbres dans le chapitre précédent et la forme directe dans ce chapitre), on peut démontrer que, après une séquence de mouvements vers la gauche et vers la droite (R et L) sur l'arbre dyadique, la définition directe de "?" en utilisant le développement en fractions continues conduit au nœud correspondant sur l'arbre de Farey. On va travailler sur le mouvement vers la gauche et on peut prouver de manière similaire ce qui se passe en descendant vers la droite. Rappelons que sur l'arbre dyadique, un mouvement vers la gauche correspond à un changement dans la représentation binaire du nombre en ajoutant un 0 avant le 1 final. Par exemple, si on est sur la valeur $\frac{1}{4}$, on a :

$$\frac{1}{4} = 0.01.$$

Et si on descend vers la gauche, on trouve $\frac{1}{8}$, qui est égale à :

$$\frac{1}{8} = LL = 0.001.$$

L'idée maintenant est de vérifier que si $x = [0, a_1, a_2, ..., a_n]$, alors :

$$L_{dya}(?(x)) = ?(L_{Farey}(x)).$$

— **Le cas où n est impair :** Dans ce cas, on a $?([0, a_1, a_2, \dots, a_n])$ égal à :

$$?(x) = 0.\underbrace{00\dots0}_{a_1-1}\underbrace{11\dots1}_{a_2}\underbrace{00\dots0}_{a_3}\dots\underbrace{00\dots0}_{a_n}1\dots$$

Donc, $L_{dya}(?(x))$ sera égal à :

$$L_{dya}(?([0, a_1, a_2, \dots, a_n])) = 0.\underbrace{00\dots0}_{a_1-1}\underbrace{11\dots1}_{a_2}\underbrace{00\dots0}_{a_3}\dots\underbrace{00\dots0}_{a_n+1}1\dots$$

Donc finalement,

$$L_{dya}(?([0, a_1, a_2, \dots, a_n])) = [0, a_1, a_2, \dots, a_n + 1] = ?(L_{Farey}([0, a_1, a_2, \dots, a_n])).$$

— **Le cas où n est pair :** Dans ce cas, on a $?([0, a_1, a_2, \dots, a_n])$ égal à :

$$?(x) = 0.\underbrace{00\dots0}_{a_1-1}\underbrace{11\dots1}_{a_2}\underbrace{00\dots0}_{a_3}\dots\underbrace{11\dots1}_{a_n}0\dots$$

Donc, $L_{dya}(?(x))$ sera égal à :

$$L_{dya}(?([0, a_1, a_2, \dots, a_n])) = 0.\underbrace{00\dots0}_{a_1-1}\underbrace{11\dots1}_{a_2}\underbrace{00\dots0}_{a_3}\dots\underbrace{11\dots1}_{a_n-1}\underbrace{0}_{1}\underbrace{1}_{1}0\dots$$

Donc finalement,

$$\begin{aligned} L_{dya}(?([0, a_1, a_2, \dots, a_n])) &= [0, a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1, 1] \\ &= [0, a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 2] \\ &= ?(L_{Farey}([0, a_1, a_2, \dots, a_n])). \end{aligned}$$

D'une manière similaire, on montre que :

$$R_{dya}(?(x)) = ?(R_{Farey}(x)).$$

Ce qui implique l'équivalence entre les deux définitions.

□

Chapitre 4

Dérivabilité de la fonction ?

Théorème 4.0.1. Soit $S = \{x \,|\, x = [0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ avec $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty\}$
Soit $x \in S$, si la dérivée de la fonction ? existe et est finie en x, alors $?'(x) = 0$.

Démonstration. Il est utile tout d'abord de rappeler la définition de $f'(a)$. Si f est dérivable, alors

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Maintenant, soit la réduite de $x = [0, a_1, a_2, \ldots] \in S$ représentée par :

$$r_n = \frac{p_n}{q_n} = [0, a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

on a d'après le chapitre 1 que :

$$\begin{cases} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}. \end{cases}$$

Soit $\phi_n = ?(r_n)$ et $y = ?(x)$. Si on suppose que $a'_{n+1} = [a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]$, on a donc :

$$x = \frac{a'_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a'_{n+1} q_n + q_{n-1}}.$$

On cherche maintenant à faire une majoration de la soustraction de la réduite de x

$$\begin{aligned} \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| &= \left| \frac{a'_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a'_{n+1} q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| \\ &= \left| \frac{p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1}}{(a'_{n+1} q_n + q_{n-1}) q_n} \right| \\ &= \frac{1}{(a'_{n+1} q_n + q_{n-1}) q_n}. \end{aligned}$$

Il est clair que $a_{n+1} q_n^2 < a'_{n+1} q_n^2 + q_{n-1} q_n$.
On a aussi que $a_{n+1} < a'_{n+1} < a_{n+1} + 1$, donc $a'_{n+1} q_n < (a_{n+1} + 1) q_n$. De plus, $q_{n-1} < q_n$, donc on conclut que $a'_{n+1} q_n + q_{n-1} < (a_{n+1} + 1) q_n + q_{n-1} < (a_{n+1} + 2) q_n^2$.
Donc finalement, on a :

$$\frac{1}{(a_{n+1} + 2) q_n^2} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{a_{n+1} q_n^2}.$$

D'autre part, si on note $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ on a :

$$\begin{aligned} y - \phi_n &= 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_k}} - 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_k}} \\ &= 2\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_k}}\right] \\ &= 2(-1)^{n+2}\left[\frac{1}{2^{S_{n+1}}} - \frac{1}{2^{S_{n+2}}} + \ldots\right]. \end{aligned}$$

Donc on conclut que :

$$\frac{1}{2^{S_{n+1}}} < |\, y - \phi_n \,| < \frac{1}{2^{S_{n+1}-1}}.$$

Soit $\delta_n = \left|\frac{y-\phi_n}{x-r_n}\right|$. On peut déduire l'inégalité suivante :

$$\frac{a_{n+1}q_n^2}{2^{S_{n+1}}} < \delta_n < \frac{2(a_{n+1}+2)q_n^2}{2^{S_{n+1}}}.$$

On peut voir que

$$\begin{aligned} \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} &< \frac{2}{2^{a_{n+1}}}\left(\frac{a_{n+1}+2}{a_n}\right)\left(\frac{q_n}{q_{n-1}}\right)^2 \\ &< \frac{2}{2^{a_{n+1}}}\left(\frac{a_{n+1}+2}{a_n}\right)(a_n+1)^2 \\ &< C\frac{a_n a_{n+1}}{2^{a_{n+1}}}. \end{aligned}$$

où C est une constante absolue. Puisque $x \in S$, où $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$, alors il existe une sous-suite strictement croissante $\{a_{n_k}\}$ avec a_{n_k} tend vers l'infini. cela implique que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} = 0.$$

Si $x \in S$ et $?'(x)$ existe et est fini, et différent de zéro, alors $\liminf_{n\to\infty} \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} = 1$. Cela mène à une contradiction. Donc, sur S, si $?'(x)$ existe et est fini, alors $?'(x) = 0$.

□

Remarque : D'après la référence **ref5,page 69** la mesure de Lebesgue de l'ensemble S est égale à 1. Ainsi, presque tous les nombres de l'intervalle $[0, 1]$ appartiennent à S. Par conséquent, presque partout dans $[0, 1]$, si la dérivée de la fonction point d'interrogation de Minkowski existe alors elle est soit nulle, soit infinie. Le fait que la dérivée est nulle lorsqu'elle est fini, démontre la singularité de cette fonction.

Reste un mystère : existe-t-il des réels où la fonction point d'interrogation de Minkowski est dérivable ?

Reponse : oui, presque partout, mais c'est un autre TER . . .

Bibliographie

[1] De Koninck, Jean-Marie et Armel Mercier, *Introduction à la théorie des nombres*, Mont-Royal (Québec), Modulo, 1994, 254 p.

[2] Linas Vespas,The Minkowski Question Mark, GL(2,Z) and the Modular Group. Self-published on personal website, 2004 (updated 22 August 2014).

[3] Laurent Regnier, Notes de cours Laurent Regnier.

[4] J. Paradıs and P. Viader.The Derivative of Minkowski's $?(x)$ Function. Published on Journal of Mathematical Analysis and Applications 253, 107-125(2001).

[5] A. Khintchine, "Continued Fractions", Noordhoff, Groningen, 1963.