Chapitre 4

Séries numériques (résumé de cours)

Algèbre et analyse fondamentales - Paris 7 - O. Bokanowski - Octobre 2015

4.1 Généralités

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$. On définit les sommes partielles par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n,$$

et on s'intéresse à la limite de S_n lorsque $n \to \infty$.

Definition. 4.1.1. *On dira que la série $\sum u_n$ est :*
- *convergente (CV) si $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe, et on note alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ cette limite,*
- *divergente (DIV) sinon,*
- *absolument convergente (AC) si $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ est convergente.*

On dira aussi que la série converge simplement (CS) si elle converge mais pas absolument.

On peut définir de même la notion de convergence de la série $\sum_{n\geq p} u_n$ si u_n n'est définie qu'à partir du rang p :

$$\sum_{n\geq n_0} u_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots$$

La modification d'un nombre fini de termes de la série ne change pas sa nature (CV,AC,DIV,CS).

Théorème. 4.1.2. *(Critère de Cauchy) Pour toute série à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,*

$$(\textstyle\sum u_n)\ AC \Rightarrow (\sum u_n)\ CV$$

Série géométrique : $u_n := c\,a^n$, avec $c \neq 0$. La série $(\sum u_n)$ est convergente ssi $|a| < 1$, et la somme vaut alors $\frac{c}{1-a}$ (somme partielle, pour $a \neq 1$: $S_n := c\,\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$).

Série télescopique : $u_n := a_n - a_{n+1}$. La somme partielle S_n vaut $a_0 - a_{n+1}$. La série converge ssi $\lim a_n$ existe, et la somme vaut alors $a_0 - \lim a_n$.
Exemple : $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, pour $n \geq 1$, on a $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et donc $\sum_{n\geq 1} u_n = 1$.

Proposition. 4.1.3. $(\sum u_n)$ *CV* $\Rightarrow u_n \to 0$.

Démonstration. En remarquant que $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour $n \geq 1$. □

Exemple : pour $n \leq 0$, $\frac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 (qd $n \to \infty$), donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente.

4.2 Séries à termes positifs

Dans cette section on suppose que $u_n \geq 0$.

Théorème. 4.2.1. *Soit* $u_n \geq 0$. *Alors* $\sum u_n$ *CV* $\Leftrightarrow \sum u_n$ *bornée.*

Definition. 4.2.2. *Pour* u_n, v_n *suites à valeurs complexes, t.q.* $v_n \neq 0$ *(a partir d'un certain rang) on utilisera la notation* $u_n \sim v_n$, *et on dira que* u_n *est équivalent à* v_n *quand* $n \to \infty$, *si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Théorème. 4.2.3. (Comparaison.) *On suppose* $u_n \geq 0$ *et* $v_n \geq 0$.
- *Si* $0 \leq u_n \leq v_n$ *alors* $\sum v_n$ *CV* $\Rightarrow \sum u_n$ *CV.*
- *Si* $u_n \sim v_n \Rightarrow \sum u_n, \sum v_n$ *de même nature.*

Exercice.* 4.2.4. *. Soit* $u_n \geq 0$, $v_n \geq 0$, *telles que* $v_n \sim u_n$ *et* $\sum_{k=0}^n u_k \to +\infty$. *Alors* $\sum_{k=0}^n v_k \to +\infty$ *et de plus*

$$\sum_{k=0}^n v_k \overset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=0}^n u_k.$$

Démonstration. Le fait que $\sum_{k=1}^n v_k \to +\infty$ est une conséquence du précédent théorème. Soit $\epsilon > 0$. Comme $u_n \sim v_n$, il existe un rang p t.q. $\forall n \geq p$, $v_n/u_n \leq (1+\epsilon)$ (on suppose que u_n est non nulle à partir d'un certain rang). Alors $v_n \leq (1+\epsilon)u_n$, et

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n v_k &= \sum_{k=0}^{p-1} v_k + \sum_{k=p}^n v_k && (4.1)\\
&\leq \sum_{k=0}^{p-1} v_k + (1+\epsilon)\sum_{k=p}^n u_k && (4.2)\\
&\leq \sum_{k=0}^{p-1} (v_k - (1+\epsilon)u_k) + (1+\epsilon)\sum_{k=0}^n u_k, && (4.3)
\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{\sum_{k=0}^n v_k}{\sum_{k=0}^n u_k} \leq \frac{\sum_{k=0}^{p-1}(v_k - (1+\epsilon)u_k)}{\sum_{k=0}^n u_k} + (1+\epsilon) \tag{4.4}$$

Or $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n u_k = \infty$, et donc (pour p fixé), $\exists N \geq 0$, $\forall n \geq N$, $\frac{\sum_{k=0}^{p-1}(v_k-(1+\epsilon)u_k)}{\sum_{k=0}^n u_k} \leq \epsilon$.

Ainsi on en déduit que pour tout $n \geq n_1 := max(N, p)$, on a

$$\frac{\sum_{k=0}^n v_k}{\sum_{k=0}^n u_k} \leq 1 + 2\epsilon. \tag{4.5}$$

De la même manière on peut démontrer qu'il existe un n_2 t.q. $\forall n \geq n_2$,

$$\frac{\sum_{k=0}^n v_k}{\sum_{k=0}^n u_k} \geq 1 - 2\epsilon. \tag{4.6}$$

Ce qui démontre que $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^n v_k}{\sum_{k=0}^n u_k} = 1$. □

Exercice.* 4.2.5. *On suppose que* $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$, *avec* $\ell > 0$. *Montrer, à partir du résultat précédent, que* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k = \ell$. *(Note : en fait le résultat, connu sous le nom de "Théorème de Césaro", reste vrai même si* $\ell \in \mathbb{R}$*).*

Démonstration. Il suffit de considérer $v_n = x_n$ et $u_n = \ell$. Si $\ell > 0$, $\sum_{k=1}^{n} \ell = n\ell$ est divergente. Les séries étant à termes positifs au moins à partir d'un certain rang (car $x_n \to \ell > 0$), on peut utiliser le fait que $x_n \sim \ell$ pour conclure à

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \sim \sum_{k=1}^{n} \ell = n\ell,$$

d'où le résultat désiré après division par n. (On rappelle que si $a_n \sim b_n$, alors pour toute suite c_n, $a_n c_n \sim b_n c_n$. $\square$

Exercice.* 4.2.6. *Soit $u_n \geq 0$, $v_n \geq 0$, telles que $v_n \sim u_n$ et $(\sum u_n)$ converge. Montrer que $\sum v_k$ converge et que les restes des séries sont équivalents :*

$$\sum_{k=n}^{\infty} v_k \overset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{\infty} u_k.$$

Démonstration. On pourra procéder comme à l'exercice 4.2.4. $\square$

Exercice.* 4.2.7. *Montrer que* $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\sim} \log(n)$.

Proposition. 4.2.8. Règle de d'Alembert. *On suppose $u_n > 0$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.*
Si $\ell < 1$, la série converge.
Si $\ell > 1$, la série diverge.
Si $\ell = 1$, on ne peut conclure.

Démonstration. On suppose $\ell < 1$. Soit ρ t.q. $\ell < \rho < 1$. Comme $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, on sait que $\exists n_0$, $\forall n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \rho$. Donc pour $n \geq n_0$: $u_n \leq \rho u_{n-1} \leq \rho^2 u_{n-2} \leq \cdots \leq \rho^{n-n_0} u_{n_0} = C\rho^n$ (avec $C = u_{n_0}/\rho^{n_0}$). Par le critère de comparaison avec une série géométrique convergente, on en déduit la convergence de la série. Le cas $\ell > 1$ se traite de manière analogue en minorant la suite u_n par une suite géométrique à somme divergente.

On verra plus loin des exemples de type $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ (série de Riemann), avec une limite $\ell = 1$ mais où la série peut être convergente (si $\alpha > 1$) ou divergente (si $\alpha \leq 1$). $\square$

Exemple : Etudier la série de terme général $u_n := n^\alpha e^{-n}$, $n \geq 1$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$. On montre que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1/e < 1$, et on a bien $u_n > 0$, donc par la règle de Cauchy la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

On pourra démontrer à titre d'exercice, de maniere analogue le résultat suivant.

Proposition. 4.2.9. (Règle de d'Alembert, variante). *On suppose $u_n > 0$. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell$ à partir d'un certain rang, avec $\ell < 1$, la série converge. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \ell$ avec $\ell > 1$, à partir d'un certain rang, la série diverge.*

De manière analogue à la règle de d'Alembert, on démontre la proposition suivante :

Proposition. 4.2.10. Règle de Cauchy. *On suppose $u_n \geq 0$ et $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.*
Si $\ell < 1$, la série converge.
Si $\ell > 1$, la série diverge.
Si $\ell = 1$, on ne peut conclure.

Exercice. 4.2.11. *Si $\sqrt[n]{u_n} \leq \ell$ à partir d'un certain rang, avec $\ell < 1$, la série converge ; si $\sqrt[n]{u_n} \geq \ell$ à partir d'un certain rang, avec $\ell > 1$, la série diverge.*

4.3 Comparaison avec une intégrale

Supposons $u_n = f(n)$, avec f décroissante. Alors

$$\int_n^{n+1} f(t) \leq u_n \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt.$$

D'où, par exemple :

$$\int_1^{n+1} f(t) \leq \sum_{k=1}^{n} u_k \leq u_1 + \int_1^n f(t)dt.$$

Théorème. 4.3.1. *Si $u_n = f(n)$ (pour $n \geq a$), avec $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}^+$, décroissante, alors*

$$\sum_{n \geq 1} u_n \ CV \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^\infty f(t)dt \ CV$$

Corollaire. 4.3.2.
Séries de Riemann : $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \ CV \Leftrightarrow \alpha > 1.$
Séries de Bertrand : $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \log(n)^\beta} \ CV \Leftrightarrow (\alpha > 1 \text{ ou } \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).$

A titre d'exemple, on pourra démontrer le résultat suivant :

Proposition. 4.3.3. *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue, décroissante, positive. Alors*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)dt \quad \text{converge quand } n \to +\infty$$

(On pourra vérifier que u_n est décroissante et minorée).

Application : $\exists \gamma \in \mathbb{R}$,

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = log(n) + \gamma + o(1), \quad n \to \infty$$

La constante γ est appelée constante d'Euler.

4.4 Séries alternées

On appelle série alternée toute série $(\sum u_n)$ de la forme

$$u_n = (-1)^n a_n, \quad \text{avec } a_n \geq 0.$$

Théorème. 4.4.1. Séries alternées.
On suppose que $\sum u_n$ est une série alternée :

$$u_n = (-1)^n a_n, \quad \forall n \geq 0,$$

avec

$$a_n \geq 0, \ a_n \searrow \text{ et } \lim a_n = 0.$$

On note $S = \sum_{k \geq 0} u_k$ la somme de la série (si elle existe), $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ (sommes partielles) et $R_n = \sum_{k \geq n} u_k$ (le reste de la série).
(i) La série de terme général u_n converge (donc S et R_n sont bien définis).
(ii) S_{2n} décroissante, S_{2n+1} croissante, et

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}, \quad \forall n.$$

(iii) R_n est de même signe que $(-1)^n$, et

$$\left|R_n\right| = \left|a_n - a_{n+1} + a_{n+2} - \cdots\right| \leq a_n, \quad \forall n.$$

Attention une série peut etre alternée à partir d'un certain (ou définie à partir d'un certain rang). Par exmple $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$ (avec $a_n \geq 0$, a_n décroissante vers 0). Le résultat de convergence s'applique encore (puisque cela revient à modifier qu'un nombre fini de termes par rapport à une série alternée à partir du rang $n = 0$, par exemple). Aussi $|R_n| \leq a_n$, mais les autres inégalités peuvent etre décalées.

Exemple : $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$, ...

4.5 Convolution de séries

Definition. 4.5.1. *Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à terme général $a_n, b_n \in \mathbb{C}$. On appelle série convolée de $\sum a_n$ par $\sum b_n$ (ou "série produit"), la série de terme général $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. (On note parfois $c = a * b$).*

Théorème. 4.5.2. *(i) Si $a_n, b_n \geq 0$, $\sum a_n$ et $\sum b_n$ CV alors $\sum c_n$ CV et $\sum c_n = (\sum a_n)(\sum b_n)$.*
(ii) Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont AC alors $\sum c_n$ est aussi AC, avec $\sum |c_n| \leq (\sum |a_n|)(\sum |b_n|)$, et on a encore l'égalité

$$\sum c_n = (\sum a_n)(\sum b_n).$$

Théorème. 4.5.3. La fonction exponentielle complexe e^z. *Pour tout z dans $\mathbb{C}$, on pose*

$$e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}.$$

1) La série est AC pour tout $z \in \mathbb{C}$.
2) Pour tout $y, z \in \mathbb{C}$: $e^{y+z} = e^y e^z$
3) Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|e^z| \leq e^{|z|}$
4) Pour tout x, y réels : $|e^{iy}| = 1$, et $|e^{x+iy}| = e^x > 0$.

On peut alors définir $\cos(x) = Re(e^{ix})$ et $\sin(x) = Im(e^{ix})$ et retrouver les formules de trigonométrie classiques. Le nombre π peut être défini comme le plus petit réel > 0 t.q. $\cos(\pi/2) = 0$.

4.6 Complément* : transformation d'Abel

Il s'agit typiquement de la transformation suivante, pour $p < q$:

$$\sum_{n=p}^{q} a_n(b_{n+1} - b_n) = \sum_{n=p+1}^{q} b_n(a_{n-1} - a_n) + a_q b_{q+1} - a_p b_p.$$

C'est un analogue discret de l'intégration par parties :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = -\int_a^b u'(x)v(b) + u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

Théorème. 4.6.1. (Règle d'Abel pour $\sum a_n u_n$.) *On suppose $A_n = \sum_{i=0}^n a_i$ bornée, $u_n \to 0$ et $\sum_{n\geq 0} |u_{n+1} - u_n|$ convergente. Alors $\sum a_n u_n$ converge.*

Corollaire. 4.6.2. *Si A_n bornée, u_n réelle, positive, décroissante vers 0, alors $\sum a_n u_n$ converge.*

Exercice. 4.6.3. *Montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha}$ est AC pour tout $\alpha > 1$, et CV pour tout $\alpha \in]0, 1]$ et $\theta \neq 0[2\pi]$ (pour $\alpha \in]0, 1]$ on pourra utiliser la règle d'Abel).*

4.7 Compléments* : moyenne de Césaro, comparaison des critères.

Exercice (moyenne de Césaro). Si $x_n \to \ell$, alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \to \ell$.

Exercice. Montrer que si $u_n > 0$ et $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors $\lim \sqrt[n]{u_n} = \ell$. En particulier, la règle de Cauchy implique la règle de d'Alembert (puisqu'elle nécessite une hypothèse plus faible).

4.8 Compléments* : sommes de Riemann

Théorème. 4.8.1 (Sommes de Riemann)**.** *Soit f continue par morceau : $[a,b] \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $n \geq 1$ on définit $a_i = a + i\frac{b-a}{n}$ et (x_i) tels que $x_i \in [a_i, a_{i+1}]$. Alors*

$$u_n = \frac{b-a}{n}\Big(f(x_0) + \cdots + f(x_{n-1})\Big) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)dt$$

On pourra démontrer en exercice le résultat dans le cas où f est Lipschitzienne : $|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$ pour tout x, y. Dans ce cas, $|u_n - \int_a^b f(t)dt| \leq \frac{1}{2}L(b-a)^2/n$.