Corrigé série 3-Exercice1 : Cheminement dans les graphes

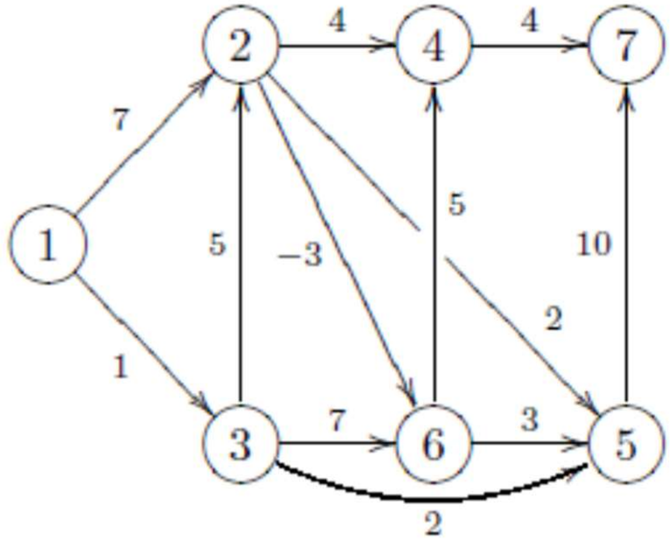
1ère Génie Info

2020-2021

Exercice 1

1. Donner la matrice d'adjacence du graphe suivant.

M	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	1	0
3	0	1	0	0	1	1	0
4	0	0	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	1	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0



2. Calculer sa matrice des fermetures réflexo-transitives.

M

M	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	1	0
3	0	1	0	0	1	1	0
4	0	0	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	1	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0

M'

	1	2	3	4	5	6	7
1	**1**	1	1	0	0	0	0
2	0	**1**	0	1	1	1	0
3	0	1	**1**	0	1	1	0
4	0	0	0	**1**	0	0	1
5	0	0	0	0	**1**	0	1
6	0	0	0	1	1	**1**	0
7	0	0	0	0	0	0	**1**

Calculer les puissances paires de M' pour trouver $\bar{M}$.

M'^2

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	0
2	0	1	0	1	1	1	1
3	0	1	1	1	1	1	1
4	0	0	0	1	0	0	1
5	0	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	1	1	1	1
7	0	0	0	0	0	0	1

$M'^4 = M'^6 = \bar{M}$

$\bar{M}$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	1	1	1
3	0	1	1	1	1	1	1
4	0	0	0	1	0	0	1
5	0	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	1	1	1	1
7	0	0	0	0	0	0	1

3. Justifier, à l'aide de cette dernière matrice, l'existence de chemins reliant le sommet 1 à tous les autres sommets du graphe.

$\bar{M}$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	1	1	1
3	0	1	1	1	1	1	1
4	0	0	0	1	0	0	1
5	0	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	1	1	1	1
7	0	0	0	0	0	0	1

que des 1 : **Fermeture réflexo-transitive du sommet 1 = {1,2,3,4,5,6,7}**
Donc on peut aller de 1 vers n'importe autre sommet dans le graphe

Quel(s) sommet(s) peut-on atteindre à partir de 6 ?

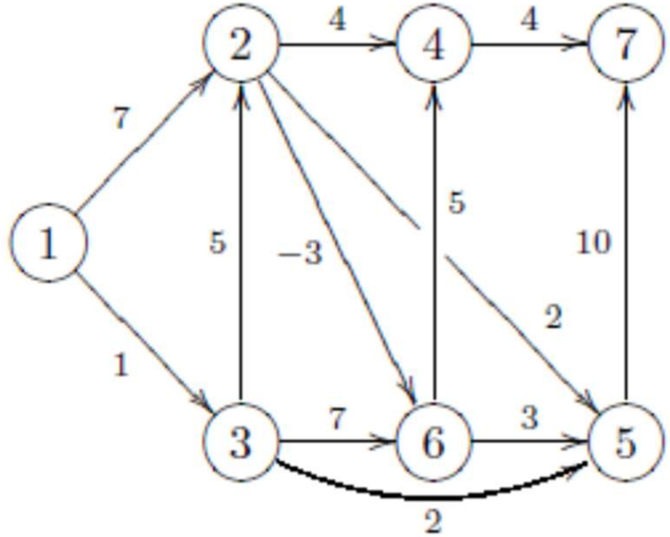
Fermeture réflexo-transitive du sommet 6 = {4,5,6,7}
Donc on peut aller de 6 vers 4,5 ou 7

Les sommets 2 et 3 peuvent-ils être dans la même composante fortement connexe ?

Non, puisque de 3 on peut atteindre 2 mais à partir de 2 on ne peut pas atteindre 3.

4. Quel(s) algorithme(s) de plus court chemin pourrait-on appliquer sur ce graphe ?

- Ford-Bellman ☑
- Dijsktra ☒
- Alg. Pour GSC ☑

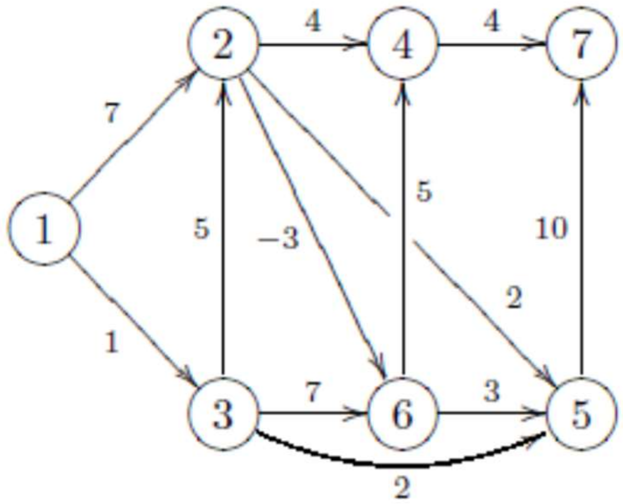


Dijkstra ne peut pas être appliqué dans le cas de longueurs négatives.

Ce graphe est sans circuits ($M^n \neq 0$) donc on peut appliquer l'alg pour GSC.

Algorithme Bellman ou GSC

5. Appliquer un algorithme de votre choix pour trouver les longueurs des plus courts chemins en partant de 1.



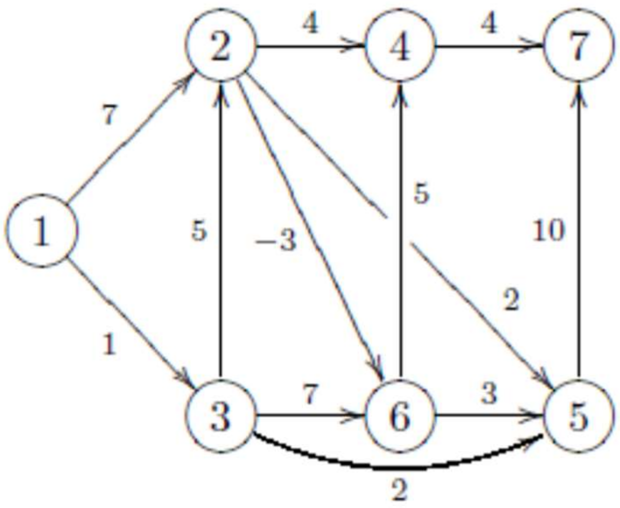
5.1. Ford Bellman:

Initialement, tous les $\lambda_i=+\infty$ sauf $\lambda_1=0$

arc		1,2	1,3	2,4	2,5	2,6	3,2	3,5	3,6	4,7	5,7	6,4	6,5
it1	λ_i	$\lambda_2=7$	$\lambda_3=1$	$\lambda_4=11$	$\lambda_5=9$	$\lambda_6=4$	$\lambda_2=6$	$\lambda_5=3$	-	$\lambda_7=15$	$\lambda_7=13$	$\lambda_4=9$	-
	p_i	$p_2=1$	$p_3=1$	$p_4=2$	$p_5=2$	$p_6=2$	$p_2=3$	$p_5=3$	-	$p_7=4$	$p_7=5$	$p_4=6$	-
it2	λ_i	-	-	-	-	$\lambda_6=3$	-	-	-	-	-	$\lambda_4=8$	-
	p_i	-	-	-	-	$p_6=2$	-	-	-	-	-	$p_4=6$	-
it3	λ_i	-	-	-	-	-	-	-	-	$\lambda_7=12$	-	-	-
	p_i	-	-	-	-	-	-	-	-	$p_7=4$	-	-	-
it3	λ_i	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Résultat :

	1	2	3	4	5	6	7
λ_i	0	6	1	8	3	3	12
p_i	-	3	1	6	3	2	4



6. Plus court chemin de 1 à 5 ?

$p_3 \quad p_5$

$$1 \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow{2} 5 \qquad \lambda_5=3$$

Plus court chemin de 1 à 7 ?

$p_3 \quad p_2 \quad p_6 \quad p_4 \quad p_7$

$$1 \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow{5} 2 \xrightarrow{-3} 6 \xrightarrow{5} 4 \xrightarrow{4} 7 \qquad \lambda_7=12$$

5.2. GSC :

Décomposition du graphe en niveaux

r =0 : {1}

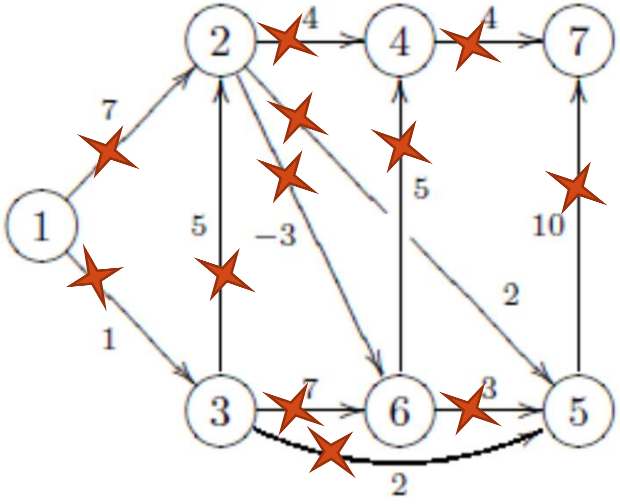
r =1 : {3}

r =2 : {2}

r =3 : {6}

r =4 : {4,5}

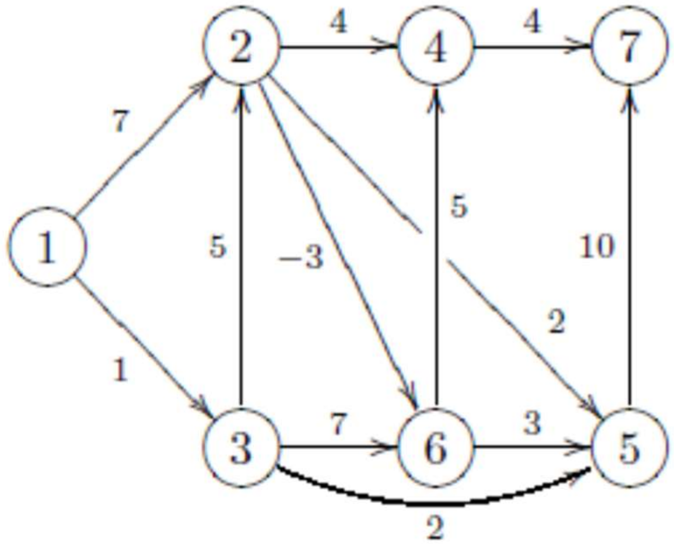
r =5 : {7}



Tri des sommets :

{1,3,2,6,4,5,7}

- Sommets triés : {1,3,2,6,4,5,7}
- Initialement, tous les $\lambda_i=+\infty$ sauf $\lambda_1=0$
- $\lambda_1=0$
- $\lambda_3=\min\{0+1\}=1$; $p_3=1$
- $\lambda_2=\min\{\lambda_1+7, \lambda_3+5\}=6$; $p_2=3$
- $\lambda_6=\min\{\lambda_2-3, \lambda_3+7\}=3$; $p_6=2$
- $\lambda_4=\min\{\lambda_2+4, \lambda_6+5\}=8$; $p_4=6$
- $\lambda_5=\min\{\lambda_2+2, \lambda_3+2, \lambda_6+3\}=3$; $p_5=3$
- $\lambda_7=\min\{\lambda_4+4, \lambda_5+10\}=12$; $p_7=4$



	1	2	3	4	5	6	7
λ_j	0	6	1	8	3	3	12
p_j	-	3	1	6	3	2	4