WIKIPEDIA

样条插值

维基百科，自由的百科全书

在数值分析这个数学分支中，**样条插值**是使用一种名為样条的特殊分段多项式进行插值的形式。由于样条插值可以使用低阶多项式样条实现较小的插值误差，这样就避免了使用高阶多项式所出现的龙格现象，所以样条插值得到了流行。

目录

样条插值

使用多项式插值，对给定数据集进行插值的n阶多项式就被给定数据点所唯一地定义出来。但是，对同样的数据进行插值的n阶样条并不是唯一的，为了构建一个唯一的样条插值式它还必须满足另外n-1个自由度。

线性样条插值

线性样条插值是最简单的样条插值。数据点使用直线进行连接，结果样条是一个多边形。

从代数的角度来看，每个S_i 都是一个如下

$$S_i(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$$

的线性函数。 样条在每个数据点都必须连续，即

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) \qquad , i = 1, \ldots n-1$$

我们很容易得到

$$S_{i-1}(x_i) = y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) = y_i$$

$$S_i(x_i) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) = y_i$$

所以以上论述成立。

二次样条插值

二次样条插值可以构建为

$$S_i(x) = y_i + z_i(x - x_i) + \frac{z_{i+1} - z_i}{2(x_{i+1} - x_i)}(x - x_i)^2$$

通过选择z_0，然后用递推关系就可以得到系数：

$$z_{i+1} = -z_i + 2\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

三次样条插值

对于n+1个给定点的数据集{x_i}，我们可以用n段三次多项式在数据点之间构建一个三次样条。如果

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x),\ x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x),\ x \in [x_1, x_2] \\ \dots \\ S_{n-1}(x),\ x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

表示对函数f进行插值的样条函数，那么需要：

- 插值特性，$S(x_i)=f(x_i)$
- 样条相互连接，$S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i)$, i=1,...,n-1
- 两次连续可导，$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$以及$S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i)$, i=1,...,n-1.

由于每个三次多项式需要四个条件才能确定曲线形状，所以对于组成S的n个三次多项式来说，这就意味着需要4n个条件才能确定这些多项式。但是，插值特性只给出了$n + 1$个条件，内部数据点给出$n + 1 - 2 = n - 1$个条件，总计是$4n - 2$个条件。我们还需要另外两个条件，根据不同的因素我们可以使用不同的条件。

其中一项选择条件可以得到给定u与v的*钳位*三次样条，

$$S'(x_0) = u$$
$$S'(x_k) = v$$

另外，我们可以设

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0.$$

这样就得到*自然*三次样条。自然三次样条几乎等同于样条设备生成的曲线。

在这些所有的二次连续可导函数中，钳位与自然三次样条可以得到相对于待插值函数f的最小震荡。

如果选择另外一些条件，

$$
\begin{aligned}
&S(x_0) = S(x_n) \\
&S'(x_0) = S'(x_n) \\
&S''(x_0) = S''(x_n)
\end{aligned}
$$

可以得到*周期性*的三次样条。

如果选择，

$$
\begin{aligned}
&S(x_0) = S(x_n) \\
&S'(x_0) = S'(x_n) \\
&S''(x_0) = f'(x_0), \quad S''(x_n) = f'(x_n)
\end{aligned}
$$

可以得到*complete*三次样条。

三次样条的最小性

三次样条有另外一个非常重要的解释，实际上它是在索伯列夫空间$H^2([a;b])$最小化泛函

$$J(f) = \int_a^b |f''(x)|^2 dx$$

的函数。

泛函J包含对于函数$f(x)$全部曲率$\left|\frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}\right|$的近似，样条是$f(x)$最小曲率的近似。

由于弹性条的总体能量与曲率成比例，所以样条是受到n个点约束的弹性条的最小能量形状。样条也是基于弹性条设计的工具。

使用自然三次样条的插值

它可以定义为

$$S_i(x) = \frac{z_{i+1}(x-x_i)^3 + z_i(x_{i+1}-x)^3}{6h_i} + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6} z_{i+1}\right)(x - x_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6} z_i\right)(x_{i+1} - x)$$

以及

$$h_i = x_{i+1} - x_i.$$

通过解下面的方程可以得到它的系数。

$$
\begin{cases}
z_0 = 0 \\
h_{i-1} z_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) z_i + h_i z_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right) \\
z_n = 0
\end{cases}
$$

示例

线性样条插值

假设要为带有节点

$$(x_0, f(x_0)) = (x_0, y_0) = \left(-1,\ e^{-1}\right)$$
$$(x_1, f(x_1)) = (x_1, y_1) = \left(-\frac{1}{2},\ e^{-\frac{1}{4}}\right)$$
$$(x_2, f(x_2)) = (x_2, y_2) = (0,\ 1)$$
$$(x_3, f(x_3)) = (x_3, y_3) = \left(\frac{1}{2},\ e^{-\frac{1}{4}}\right)$$
$$(x_4, f(x_4)) = (x_4, y_4) = \left(1,\ e^{-1}\right)$$

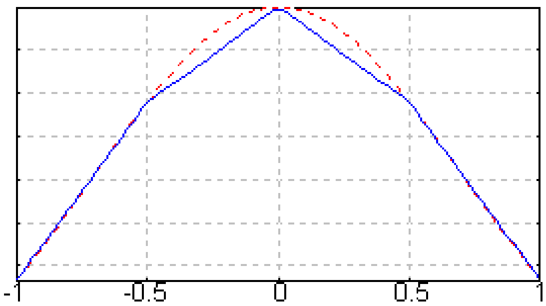
的函数

$$f(x) = e^{-x^2}$$

找一个线性样条。直接代入样条公式，我们得到如下样条：

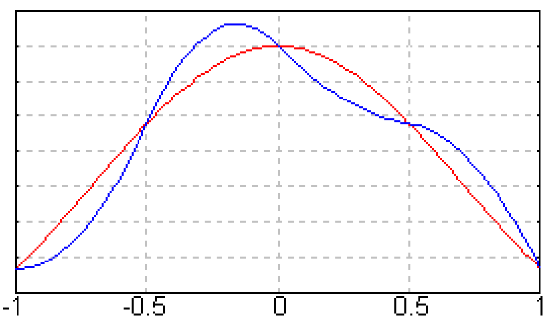
$$S(x) = \begin{cases} e^{-1} + 2(e^{-\frac{1}{4}} - e^{-1})(x+1) & x \in [-1, -\frac{1}{2}] \\ e^{-\frac{1}{4}} + 2(1 - e^{-\frac{1}{4}})(x + \frac{1}{2}) & x \in [-\frac{1}{2}, 0] \\ 1 + 2(e^{-\frac{1}{4}} - 1)x & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ e^{-\frac{1}{4}} + 2(e^{-1} - e^{-\frac{1}{4}})(x - \frac{1}{2}) & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

样条函数（蓝线）以及所近似的函数（红点）如下图所示：



二次样条插值

下图是一个*k*=4的样条函数（蓝线）与所近似的函数（红线）的例子：



参见

- 三次埃尔米特样条
- NURBS
