Đúng ☐ Sai ☐.

3.8 Hàm Bessel loại I $J_\alpha(z)$ và loại II $Y_\alpha(z)$ luôn luôn độc lập tuyến tính.

Đúng ☐ Sai ☐.

3.9 Hàm Bessel loại I $J_\alpha(z)$ và $J_{-\alpha}(z)$ luôn phụ thuộc tuyến tính.

Đúng ☐ Sai ☐.

3.10 Nếu hàm $f(x)$ khai triển thành chuỗi Fourier-Bessel thì $f(x)$ là hàm tuần hoàn.

Đúng ☐ Sai ☐.

3.11. Áp dụng phép biến đổi Laplace suy ra các công thức khai triển sau:

$$\mathrm{Ei}(x) = -\gamma - \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad ; \quad \mathrm{Ci}(x) = \gamma + \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

3.12. Tính

a. $\dfrac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}$ **b.** $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$ **c.** $\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$ **d.** $\Gamma\left(-\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$.

3.13. Sử dụng hàm Gamma tính các tích phân sau:

a. $\displaystyle\int_0^\infty x^3 e^{-x} dx$ **b.** $\displaystyle\int_0^\infty x^6 e^{-2x} dx$

3.14. Sử dụng hàm Gamma tính các tích phân sau:

a. $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{y} e^{-y^3} dy$ **b.** $\displaystyle\int_0^\infty 3^{-4t^2} dt$

3.15. Chứng minh: $\displaystyle\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$ $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{R}$, $m > -1$.

3.16. Áp dụng hàm Beta tính các tích phân sau:

a. $\displaystyle\int_0^1 x^4 (1 - x^3) dx$ **b.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}}$ **c.** $\displaystyle\int_0^2 x \sqrt[3]{8 - x^3}\, dx$

3.17. Áp dụng hàm Beta tính các tích phân sau:

a. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta \cos^5\theta d\theta$ **b.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\theta d\theta$ **c.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\mathrm{tg}\theta}\, d\theta$

3.18. Chứng minh: $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$

(2k+1)!! = 1.3.5...(2k+1).

(2k)!! = 2.4.6...(2k).

3.19. Đặt $I = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2p} x dx$, $\quad \mathrm{J} = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2p} 2x dx, \quad \mathrm{p} > 0$

a. Chứng minh: I = J

b. Chứng minh: $I = \dfrac{\Gamma(p+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}{2\Gamma(p+1)}$; $\mathrm{J} = \dfrac{2^{2p-1}\left\{\Gamma(p+\frac{1}{2}\right\}^2}{\Gamma(2\mathrm{p}+1)}$

c. Suy ra công thức nhân đôi của hàm Gamma:

$$2^{2p-1}\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2p).$$

3.20. Chứng minh rằng:

a. $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{x^{p-1}}{x+1} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p)$, $0 < p < 1$.

b. $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{dx}{x^p + 1} = \Gamma\left(1+\dfrac{1}{p}\right)\Gamma\left(1-\dfrac{1}{p}\right)$, $p > 1$.

3.21. Tính các tích phân sau

a. $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{dx}{x^4+1} dx$ **b.** $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{xdx}{x^6+1}$ **c.** $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{x^2 dx}{x^4+1}$.

3.22. Chứng minh các công thức truy toán đối với hàm Bessel

1) $J_{\alpha+1}(z) = \dfrac{2\alpha}{z} J_\alpha(z) - J_{\alpha-1}(z)$; 2) $zJ'_\alpha(z) = zJ_{\alpha-1}(z) - \alpha J_\alpha(z)$;

3) $zJ'_\alpha(z) = \alpha J_\alpha(z) - zJ_{\alpha+1}(z)$; 4) $J'_\alpha(z) = \dfrac{1}{2}\{J_{\alpha-1}(z) - J_{\alpha+1}(z)\}$;

5) $\dfrac{d}{dz}(z^\alpha J_\alpha(z)) = z^\alpha J_{\alpha-1}(z)$; 6) $\dfrac{d}{dz}(z^{-\alpha} J_\alpha(z)) = -z^{-\alpha} J_{\alpha+1}(z)$;

7) $z^{\alpha-n}J_{\alpha-n}(z)=\dfrac{d^n}{(zdz)^n}(z^{-\alpha}J_\alpha(z))$; $z^{-\alpha-n}J_{\alpha+n}(z)=(-1)^n\dfrac{d^n}{(zdz)^n}(z^{-\alpha}J_\alpha(z))$;

8) $\displaystyle\int_{z_0}^{z} z^{\alpha}J_{\alpha-1}(z)dz=z^{\alpha}J_\alpha(z)\Big|_{z_0}^{z}$ 9) $\displaystyle\int_{z_0}^{z} z^{-\alpha}J_{\alpha+1}(z)dz=-z^{-\alpha}J_\alpha(z)\Big|_{z_0}^{z}$

10) $\displaystyle\int_0^z J_\alpha(z)dz=2\{J_{\alpha+1}(z)+J_{\alpha+3}(z)+\cdots\}$

3.23. Tính các tích phân không xác định:

a. $\int x^n J_{n-1}(x)dx$ **b.** $\int \dfrac{J^{(x)}_{n+1}}{x^n}dx$ **c.** $\int x^4 J_1(x)dx$

3.24. Tính theo $J_1(x)$ và $J_0(x)$

a. $J_3(x)$ **b.** $\int J_1(\sqrt[3]{x})dx$ **c.** $\int J_0(x)\sin x dx$

3.25. Chứng minh:

a. $1=J_0(x)+2J_2(x)+2J_4(x)+\cdots$

b. $J_1(x)-J_3(x)+J_5(x)-J_7(x)+\cdots=\dfrac{1}{2}\sin x$.

3.26. Chứng tỏ rằng

a. $\dfrac{1-x^2}{8}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_n x)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n x)}$, $0<x<1$.

Trong đó λ_n là nghiệm thực dương của phương trình $J_0(\lambda)=0$.

b. $x^3=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(8-\lambda_n^2)J_1(\lambda_n x)}{\lambda_n^3 J'_1(\lambda_n x)}$, $0<x<1$.

Trong đó λ_n là nghiệm thực dương của phương trình $J_1(\lambda)=0$.

3.27. Chứng minh rằng nếu $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n J_0(\lambda_n x)$, $0<x<1$; trong đó λ_n là nghiệm thực dương của phương trình $J_0(\lambda)=0$ thì $\displaystyle\int_0^1 x(f(x))^2dx=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 J_1^2(\lambda_n)$.

3.28. **a.** Chứng tỏ rằng $x=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\lambda_n x)}{\lambda_n J_2(\lambda_n x)}$, $0<x<1$. Trong đó λ_n là nghiệm thực dương của phương trình $J_1(\lambda)=0$.

b. Sử dụng bài 27. và a. chứng tỏ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \frac{1}{4}$.

3.29. Chứng tỏ rằng phương trình: $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + (k^2 - \frac{\alpha^2}{x^2})y = 0$

có nghiệm tổng quát: $y = AJ_\alpha(kx) + BY_\alpha(kx)$

3.30. Giải các phương trình sau:

a. zy'' + y' + ay =0 **b.** 4zy'' + 4y' + y =0

c. zy'' + 2y' + 2y = 0 **d.** y'' + z^2y = 0.

HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG
Km10 Đường Nguyễn Trãi, Hà Đông-Hà Tây
Tel: (04).5541221; Fax: (04).5540587
Website: http://www.e-ptit.edu.vn; E-mail: dhtx@e-ptit.edu.vn
CHƯƠNG TRÌNH ĐÀO TẠO ĐẠI HỌC TỪ XA
PTIT