CHƯƠNG 5: LÝ THUYẾT THẶNG DƯ

§1. KHÁI NIỆM VỀ THẶNG DƯ

1. Định nghĩa thặng dư: Giả sử f(z) là một hàm giải tích trong một lân cận của điểm a trừ chính điểm a (nghĩa là a là điểm bất thường cô lập của f(z)). Nếu C là đường cong kín bất kì bao lấy điểm a và nằm trong lân cận nói trên thì theo định lí Cauchy, tích phân $\oint_C f(z)dz$ là một số không phụ thuộc C. Ta gọi thặng dư của hàm f(z) tại a là kết quả phép chia $\oint_C f(z)dz$ cho $2\pi j$. Thặng dư được kí hiệu là Res[f(z), a]. Tóm lại:

$$\text{Res}[f(z), a] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C f(z)dz \qquad (1)$$

Ví dụ: $\text{Res}\left[\frac{1}{z-a}, a\right] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{1}{z-a}dz = \frac{2\pi j}{2\pi j} = 1$

2. Cách tính thặng dư: Công thức chung để tính thặng dư là:

$$\text{Res}[f(z), a] = c_{-1} \qquad (2)$$

Trong đó c_{-1} là hệ số của $\frac{1}{z-a}$ trong khai triển Laurent của hàm f(z) tại lân cận điểm a.

Chứng minh: Theo công thức tính hệ số của khai triển Laurent:

$$c_n = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\xi - a)^{n+1}}$$

Khi n = -1 ta có:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C f(\zeta)d\zeta = \text{Res}[f(z), a]$$

a. Thặng dư tại cực điểm đơn: Nếu a là cực điểm đơn của hàm f(z) thì :

$$\text{Res}[f(z), a] = \lim_{z\to a}[(z-a)f(z)] \qquad (3)$$

Ví dụ 1: Vì z = 2 là cực điểm đơn của $\frac{z^2}{z-2}$ nên

$$\text{Res}[f(z), a] = \lim_{z\to 2}\left[(z-2)\frac{z^2}{z-2}\right] = \lim_{z\to 2} z^2 = 4$$

Ví dụ 2: Cho $f(z) = \frac{1}{\sin z}$. Tính thặng dư tại a = 0

Ta đã biết :

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = z\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots\right)$$

Căn cứ vào khai triển này ta thấy điểm z = 0 là không điểm đơn của sinz. vậy điểm z = 0 là cực điểm đơn của $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$. Theo (3) ta có:

$$\text{Res}[f(z), a] = \lim_{z\to 0}\left[z\frac{1}{\sin z}\right]=1$$

Định lí: Giả sử $f(z)=\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$, trong đó $f_1(z)$ và $f_2(z)$ là những hàm giải tích tại a. Điểm a là không điểm đơn của f_2(z0 và không phải là không điểm của $f_1(z)$. Khi đó:

$$\text{Res}[f(z), a] = \frac{f_1(a)}{f_2'(a)} \tag{4}$$

Chứng minh: Theo giả thiết ta thấy a là cực điểm đơn của f(z). Theo (3) ta có:

$$\text{Res}[f(z), a] = \lim_{z\to a}\left[(z-a)\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right]=\lim_{z\to a}\left[\frac{f_1(z)}{\dfrac{f_2(z)}{(z-a)}}\right]$$

Vì $f_2(a) = 0$ nên ta có thể viết:

$$\text{Res}[f(z), a] = \frac{\lim\limits_{z\to a} f_1(z)}{\lim\limits_{z\to a}\dfrac{f_2(z)-f_2(a)}{(z-a)}}=\frac{f_1(a)}{f_2'(a)}$$

Ví dụ 3: Tính thặng dư của f(z) = cotgz

Vì a = 0 là đơn của cotgz nên theo (4) ta có:

$$\text{Res}[f(z), a] = \frac{f_1(a)}{f_2'(a)}=\frac{\cos 0}{\cos 0}=1$$

Ví dụ 4: Tính thặng dư của hàm $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2+4}$ tại a = 2j.

Vì 2j là không điểm đơn của $(z^2 + 4)$ nên nó là cực điểm đơn của f(z). Theo (4) ta có:

$$\text{Res}[f(z), a] = \frac{f_1(a)}{f_2'(a)}=\frac{2j+1}{4j}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}j$$

Ví dụ 5: Tính thặng dư của hàm $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-j)(z+j)}$ tại $a=\pm j$

Ta thấy f(z) có hai cực điểm đơn là ±j. Áp dụng công thức (4) ta có:

$$\text{Res}[f(z), j] = \lim_{z\to j}\frac{e^z}{z+j}=\frac{e^j}{2j}=-\frac{j}{2}(\cos 1+j\sin 1)$$

$$\text{Res}[f(z), -j] = \lim_{z\to -j}\frac{e^z}{z-j}=\frac{e^{-j}}{-2j}=\frac{j}{2}(\cos 1-j\sin 1)$$

b. Thặng dư tại cực điểm cấp m: Nếu a là cực điểm cấp m của f(z) thì:

$$\operatorname{Res}[f(z),a]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right] \qquad (5)$$

Ví dụ 1: Tính thặng dư của hàm $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^3}$ tại $a = j$

Vì $(z^2 + 1)^3 = (z + j)^3(z - j)^3$ nên j là không điểm cấp 3 của $(z^2 + 1)^3$. Vậy j là cực điểm cấp 3 của hàm f(z). Theo (5) với m = 3 ta có:

$$\operatorname{Res}[f(z), a]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to j}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-j)^3\frac{1}{(z^2+1)^3}\right]=\frac{1}{2}\lim_{z\to j}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{(z^2+j)^3}\right]$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to j}\frac{12}{(z^2+j)^5}=\frac{6}{(2j)^5}=-\frac{3j}{16}$$

Ví dụ 2: Tìm thặng dư của hàm $f(z)=\dfrac{e^{-z}}{z^3}$

Ta thấy z = 0 là không điểm cấp 3 của z^3 nên z = 0 là cực điểm cấp 3 của hàm f(z). Dùng công thức (5) ta có:

$$\operatorname{Res}[f(z), a]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2e^{-z}}{dz^2}=\frac{1}{2}$$

§2. ỨNG DỤNG THẶNG DƯ

1. Định lí 1: Nếu f(z) giải tích trong miền $\overline{G}$, giới hạn bởi đường cong kín L, ngoại trừ tại một số hữu hạn cực điểm $a_1, a_2, ..,a_s$ ở bên trong thì:

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi j\sum_{k=1}^{s}\operatorname{Res}\left[f(z),a_k\right] \qquad (8)$$

Chứng minh: Loại đi khỏi miền G các hình tròn $\gamma_1, \gamma_2,...,\gamma_s$ có tâm lần lượt là a_1, a_2, ..,a_s và có bán kính đủ nhỏ ta được một miền đa liên . Áp dụng định lý Cauchy cho miền đa liên này ta được:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_L f(z)dz=\frac{1}{2\pi j}\oint_{\gamma_1} f(z)dz+\cdots+\frac{1}{2\pi j}\oint_{\gamma_s} f(z)dz$$

Nhưng vì:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{\gamma_k} f(z)dz=[\ \operatorname{Res}f(z), a_k],\ k = 1, 2,..., s$$

nên thay vào ta có:

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi j\operatorname{Res}[f(z), a_k] + \cdots + 2\pi j\operatorname{Res}[f(z), a_k]$$

2. Định lí 2: Nếu f(z) giải tích trong toàn bộ mặt phẳng ngoại trừ tại một số hữu hạn cực điểm $a_1, a_2, ..,a_s = \infty$ thì:

$$\sum_{k=1}^{s}\operatorname{Res}\left[f(z),a_k\right]+\operatorname{Res}\left[f(z),a_k\right]=0$$

Chứng minh: Chọn R đủ lớn để đường tròn | z | = R bao lấy tất cả các điểm $a_1, a_2,.., a_n$, Ta có:

$$\sum_{k=1}^{s}\mathrm{Res}[f(z),a_k]=\frac{1}{2\pi j}\oint_C f(z)dz$$

Theo định nghĩa thặng dư tại ∞:

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi j}\oint_{C^-} f(z)dz=-\frac{1}{2\pi j}\oint_C f(z)dz$$

Cộng các vế của hai đẳng thức này ta được điều cần phải chứng minh.

Ví dụ 1: Tính $\oint_L \frac{z^2dz}{(z^2+1)(z+3)}$, L là đường tròn tâm | z | = 2

Hàm $f(z)=\frac{z^2}{(z^2+1)(z+3)}$ có 3 cực điểm là z = j, z = -j và z = -3.

Trong hình tròn | z | < 2 có hai cực điểm là ±j, đều là các cực điểm đơn. Tính thặng dư tại các cực điểm đó ta có:

$$\mathrm{Res}[f(z), j] = \lim_{z\to j}(z-j)f(z)=\lim_{z\to j}\frac{z^2}{(z+j)+(z+3)}=\frac{j^2}{2j(z+3)}=\frac{j}{2z+6}=\frac{1+3j}{20}$$

$$\mathrm{Res}[f(z), -j] = \frac{f_1(-j)}{f_2'(-j)}=\left.\frac{\frac{z^2}{z+3}}{2z}\right|_{z=-j}=\left.\frac{z^2}{2z(z+3)}\right|_{z=-j}=\frac{j^2}{-2j(3-j)}=\frac{1-3j}{20}$$

Vậy

$$I = \mathrm{Res}[f(z), j] + \mathrm{Res}[f(z) , -j] = 2\pi j\left(\frac{1+3j}{20}+\frac{1-3j}{20}\right)=\frac{\pi j}{5}$$

Ví dụ 2: Tính $I=\oint_L \frac{\cos z dz}{z^2(z-2)}$, L là đường tròn | z | = 2

Hàm $f(z)=\frac{\cos z}{z^2(z-2)}$ có z = 0 là cực điểm cấp 2 và điểm z = 2 là cực điểm cấp 1. Trong hình tròn | z | < 1 chỉ có một cực điểm z = 0 nên:

$$I = 2\pi j.\mathrm{Res}[f(z), 0]$$

Nhưng vì:

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\cos z}{z^2(z-2)}\right]=\lim_{z\to 0}\left[z^2\frac{\cos z}{z^2(z-2)}\right]'=\lim_{z\to 0}\left(\frac{\cos z}{z-2}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{-\sin z(z-2)-\cos z}{(z-2)^2}=-\frac{1}{4}$$

nên $I=-\frac{\pi j}{2}$

Ví dụ 3: Tính $I=\oint_C \frac{e^z dz}{z^2+1}$ với C là đường tròn | z | = 3

Hàm f(z) dưới dấu tích phân có hai điểm bất thường j và -j nằm trong hình tròn biên C. Theo ví dụ ở mục trước ta có:

$$\mathrm{Res}[f(z), j] = \frac{e^{j}}{2j} \text{ và } \mathrm{Res}[f(z), -j] = \frac{e^{-j}}{2j}$$

Nên: $I = 2\pi j \sin 1$

Ví dụ 4: Tính $I = \oint_C \frac{z+3}{(z-1)(z+1)^2}dz$ với C là đường tròn | z - 0.5 | =1

Trong miền giới hạn bởi C, hàm f(z) dưới dấu tích phân chỉ có một điểm bất thường là z = 1, cực điểm đơn. Do đó:

$$I = 2\pi j.\mathrm{Res}[f(z), 1] = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = 2\pi j$$

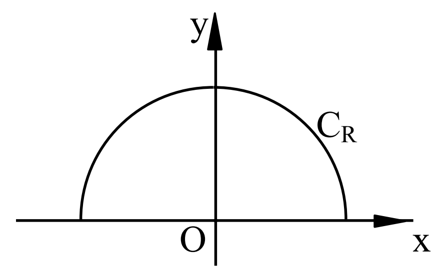
3.Tích phân thực dạng $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$ trong đó R(x) là một phân thức hữu tỉ

a. Bổ đề 1: Giả sử C_R là một nửa đường tròn tâm O, bán kính R, nằm trong nửa mặt phẳng trên Imz > 0. Nếu f(z) giải tích trong nửa mặt phẳng trên, trừ tại một số hữu hạn điểm bất thường và thoả mãn:

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0 \quad 0 \le \arg z \le \pi$$

thì:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0$$



Chứng minh: Phương trình C_R có dạng $z = Re^{j\varphi}$ với φ là tham số biến thiên từ 0 đến π. Chọn R khá lớn sao cho các điểm bất thường của f(z) đều nằm trong miền | z | < R. Vậy hàm f(z) liên tục trên C_R và theo cách tính tích phân ta có:

$$\int_{C_R} f(z)dz = \int_0^{\pi} f(Re^{j\varphi})Re^{j\varphi}d\varphi$$

Ta ước lượng tích phân này. Vì $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ nên ∀ε > 0 cho trước ta luôn tìm được một số N > 0 sao cho khi | z | > N thì | z.f(z) | < ε. Vậy nếu $z \in C_{R+}$ với R > N thì:

$$| f(Re^{j\varphi}).Re^{j\varphi} | = | z.f(z) | < \varepsilon$$

Do đó:

$$\left| \int_{C_R} f(z)dz \right| \le \varepsilon \int_0^{\pi} d\varphi = \varepsilon\pi$$

Vì ε bé tuỳ ý nên ta suy ra $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0$

b. Định lí 1: Giả sử R(z) là một phân thức mà đa thức mẫu số có bậc lớn hơn đa thức tử số ít nhất là hai đơn vị, R(z) có một số hữu hạn cực điểm $a_1, a_2,..., a_n$ nằm trong nửa mặt phẳng trên và không có cực điểm nằm trên trục thực. Khi đó ta có:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi j \sum_{k=1}^{s} \mathrm{Res}[R(z), a_k] \quad (9)$$

Ta thừa nhận mà không chứng minh định lí này.

Ví dụ 1:Tính $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

Vì hàm dưới dấu tích phân là chẵn nên ta có:

Ta có: $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

Đặt $R(z) = \frac{1}{z^4+1}$. Phương trình $z^4 + 1 = 0$ có hai nghiệm trong nửa mặt phẳng trên là:

$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}, z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}$. Rõ ràng R(z) đủ điều kiện để áp dụng (9). Ta có

$$I = \pi j\sum_{k=1}^{2} \mathrm{Res}[R(z), a_k] = \pi j\left(\frac{1}{4z_1^3} + \frac{1}{4z_2^3}\right) = \pi j\left(\frac{z_1}{4z_1^4} + \frac{z_2}{4z_2^4}\right) = -\frac{\pi j}{4}(z_1+z_2) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{(x^2+1)^2}dx$

Hàm $R(z) = \frac{z-1}{(z^2+1)^2} = \frac{z-1}{(z-j)^2(z+j)^2}$ thoả mãn các giả thiết của định lí. Trong nửa mặt phẳng trên, nó có cực điểm cấp 2 là z = j. Theo (9);

$$I = 2\pi j \mathrm{Res}[R(z), j]$$

$$= 2\pi j \lim_{z\to j}\frac{d}{dz}\left[(z-j)^2 R(z)\right] = 2\pi j \lim_{z\to j}\frac{d}{dz}\left[\frac{z-1}{(z+j)^2}\right] = 2\pi j \lim_{z\to j}\frac{2+j-z}{(z+j)^3} = -\frac{\pi}{2}$$

Ví dụ 3: Tính $I = \int_0^{\infty} \frac{x^2dx}{x^4+1}$

Vì hàm dưới dấu tích phân là chẵn nên ta có:

Ta có: $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

Đặt $R(z) = \frac{z^2}{z^4+1}$. Phương trình $z^4 + 1 = 0$ có hai nghiệm trong nửa mặt phẳng trên là:

$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}, z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}$. Rõ ràng R(z) đủ điều kiện để áp dụng (9). Ta có

$$I = \pi j\sum_{k=1}^{2} \mathrm{Res}[R(z), a_k]$$

$$\mathrm{Res}[R(z), j] = \left.\frac{z^2}{(z^4+1)}\right|_{z=z_1} = \left.\frac{z^2}{4z^3}\right|_{z=z_1} = \frac{1}{4z_1} = \frac{1}{4\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)} = \frac{1}{2\sqrt{2}(1+j)} = \frac{1-j}{4\sqrt{2}}$$

Tương tự:

$$\text{Res}[R(z), j] = \frac{1}{2\sqrt{2}(1-j)} = \frac{-1-j}{4\sqrt{2}}$$

Vậy: $$I = \pi j\left(\frac{1-j}{4\sqrt{2}} + \frac{-1-j}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{2\pi}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

c. Định lý 2: Giả sử R(z) là một phân thức hữu tỉ mà bậc của mẫu số lớn hơn bậc của tử số ít nhất 2 đơn vị. Hàm R(z) có các cực điểm trong nửa mặt phẳng trên là $a_1, a_2,.., a_s$ và có m cực điểm đơn trên trục thực là $b_1, b_2,..,b_m$. Khi đó ta có:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi j\sum_{k=1}^{s}\text{Res}[R(z), a_k] + \pi j\sum_{i=1}^{m}\text{Res}[R(z), b_i] \qquad (11)$$

4. Tích phân dạng $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\alpha x dx$ và $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\alpha x dx$ ($\alpha > 0$)

Theo công thức Euler thì $e^{j\alpha x} = \cos\alpha x + j\sin\alpha x$ nên $\cos\alpha x = \text{Re}(e^{j\alpha x})$ và $\sin\alpha x = \text{Im}(e^{j\alpha x})$. Vậy:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\alpha x dx = \text{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{j\alpha x}dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\alpha x dx = \text{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{j\alpha x}dx$$

Do đó muốn tính các tích phân đã cho, chỉ cần tính $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{j\alpha x}dx$ rồi lấy phần thực hay phần ảo của nó là được. Khi tính $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{j\alpha x}dx$ ta dùng bổ đề sau:

a. Bổ đề Jordan: Gọi C_R là cung tròn | z | = R Imz > a (a là số thực cố định cho trước) nghĩa là C_R là cung tròn tâm O, bán kính R và nằm phía trên đường thẳng y=a. Nếu F(z) có dạng $e^{j\alpha z}f(z)$ trong đó α là một số dương cố định còn f(z) giải tích trong nửa mặt phẳng Imz ≥ a , trừ tại một số hữu hạn điểm bất thường và thoả mãn $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ thì:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} F(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{j\alpha z}f(z)dz$$

Ta thừa nhận không chứng minh bổ đề này

b. Định lí 1: Giả sử R(z) là một phân thức hữu tỉ thoả mãn các điều kiện sau:

* R(z) giải tích trong nửa mặt phẳng trên, trừ tại một số hữu hạn các cực điểm $a_1, a_2,.., a_s$

* R(z) không có cực điểm trên trục thực

* trong biểu thức của R(z), bậc của mẫu số lớn hơn bậc của tử số ít nhất là 1 đơn vị.

Thế thì:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{j\alpha x}dx = 2\pi j\sum_{k=1}^{s}\text{Res}[R(z)e^{j\alpha x}, a_k] \qquad (14)$$

Trong α là một số cho trước.
Ta cũng không chứng minh định lí này.

Ví dụ 1: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2 - 2x + 10} dx$

Ta có: $I = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{jx}}{x^2 - 2x + 10} dx$

Để tính I ta áp dụng (14). Muốn vậy ta phải tìm các cực điểm của $R(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 10}$. Giải phương trình $z^2 - 2z + 10 = 0$ ta có hai nghiệm là $z = 1 \pm 3j$.
Đó là hai cực điểm đơn của R(z). Cực điểm $z = 1 + 3j$ nằm trong nửa mặt phẳng trên.
Dùng công thức (14) ta có:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{jx}}{x^2 - 2x + 10} dx = 2\pi j.\mathrm{Res}\left[\frac{ze^{jz}}{z^2 - 2z + 10}, 1 + 3j\right] = 2\pi j \left.\frac{ze^{jz}}{2z - 2}\right|_{z=1+3j} = 2\pi j \frac{(1 + 3j)e^{-3+j}}{6j}$$

$$= \frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1 - 3\sin 1) + j\frac{\pi}{3}e^{-3}(3\cos 1 + \sin 1)$$

Từ đó suy ra:

$$I = \frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1 - 3\sin 1)$$

c. Định lí 2: Giả sử R(z) là một phân thức hữu tỉ thoả mãn các điều kiện sau:

* R(z) giải tích trong nửa mặt phẳng trên, trừ tại một số hữu hạn các cực điểm $a_1, a_2, .., a_s$

* R(z) có m cực điểm trên trục thực $b_1. b_2, ..., b_n$

* trong biểu thức của R(z), bậc của mẫu số lớn hơn bậc của tử số ít nhất là 1 đơn vị.

Thế thì với α là một hằng số dương cho trước :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{j\alpha x} dx = 2\pi j \sum_{k=1}^{s} \mathrm{Res}[R(z)e^{j\alpha x}, a_k] + \pi j \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}[R(z)e^{j\alpha x}, b_k] \qquad (16)$$

Ví dụ: Tính $I = \int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

Vì $\frac{\sin x}{x}$ là hàm chẵn nên ta có thể viết được:

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Mặt khác:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \mathrm{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{jz}}{z} dz$$

Vậy: $I = \frac{1}{2}\mathrm{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{jz}}{z} dz$

Vì hàm $R(z)=\frac{1}{z}$ có cực điểm duy nhất tại z = 0 nên theo (6) ta có:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{jz}}{z}dz=\pi j\,\mathrm{Res}\left[\frac{e^{jz}}{z},0\right]=\pi j\lim_{z\to 0}e^{jz}=\pi j$$

Thay vào trên ta được: $I=\frac{\pi}{2}$

5. Tích phân dạng $\int_0^{2\pi} f(\sin t,\cos t)dt$

Đặt $z=e^{jt}$ thì $\ln z=jt$, $dt=\frac{dz}{jz}$ và theo định nghĩa các hàm lượng giác ta có:

$$\cos t=\frac{z+\frac{1}{z}}{2},\ \sin t=\frac{z-\frac{1}{z}}{2j}.$$

Khi t chạy từ 0 đến 2π, điểm z vẽ nên đường tròn C: | z | = 1. Vậy:

$$\int_0^{2\pi} f(\sin t,\cos t)dt=\oint_L f\left[-\frac{j}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]\frac{jdz}{z} \qquad (17)$$

Trong đó L là đường tròn | z | = 1

Ví dụ 1: Tính $I=\int_0^{2\pi}\frac{2+\cos t}{2-\sin t}dt$

Theo (17) ta có:

$$I=\oint_L\frac{2+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{2+\frac{j}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\frac{jdz}{z}=-\oint_L\frac{4z+z^2+1}{4z+jz^2-j}\frac{jdz}{z}=-\oint_L\frac{z^2+4z+1}{z^2-4jz-1}\frac{dz}{z}$$

Hám dưới dấu tích phân có 3 điểm cực là z = 0, z = $2j\pm j\sqrt{3}$. Vì $\left|(2-\sqrt{3})j\right|=2-\sqrt{3}<1;\left|(2+\sqrt{3})j\right|=2+\sqrt{3}>1$nên bên trong L chỉ có 2 cực điểm là $a_1=0$ và $a_2=2-\sqrt{3}$. ta tính thặng dư:

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z^2+4z+1}{z(z^2-4jz-1)},0\right]=\lim_{z\to 0}\frac{z^2+4z+1}{z^2-4jz-1}=-1$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z^2+4z+1}{z(z^2-4jz-1)},(2-\sqrt{3})j\right]=\left.\frac{z^2+4z+1}{z(2z-4j)}\right|_{(2-\sqrt{3})j}=1+j\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Theo định lí 1 mục trước ta có:

$$I=-2\pi j\left[-1+\left(1+j\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right]=-2\pi j\left(j\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$$

Ví dụ 2: Tính $I=\int_0^{\pi}\frac{dt}{2+\cos t}$

Đặt $z = e^{jt}$, vì hàm dưới dấu tích phân là chẵn nên ta có:

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{2+\cos t} = \frac{1}{2j}\oint_C \frac{dz}{\left[\dfrac{2+\left(z+\dfrac{1}{z}\right)}{2}\right]z} = \frac{1}{j}\oint_C \frac{dt}{z^2+4z+1} = \frac{1}{j}\oint_C \frac{dz}{(z-a)(z-b)}$$

Trong đó C là đường tròn | z | = 1, $a = -2+\sqrt{3}$ và $b = -2-\sqrt{3}$ là các nghiệm của phương trình $z^2 + 4z + 1 = 0$.

Vì | a | < 1 và | b | > 1 nên ta có:

$$I = 2\pi.\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z-a)(z-b)}, a\right] = \frac{2\pi}{a-b} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$