ĐỀ THI TOÁN CHUYÊN NGÀNH 2018 – 2019

Câu 1. Tìm chuỗi Laurent của hàm $f(z) = \frac{2z+3}{z^2+z-6}$

a. Trong miền: $2 < |z| < 3$

$$f(z) = \frac{2z+3}{z^2+z-6} = \frac{2z+3}{(z-2)(z+3)} = \frac{7}{5(z-2)} + \frac{3}{5(z+3)}$$

Với $|z| < 3 \Leftrightarrow \left|\frac{z}{3}\right| < 1$ ta có:

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3}.\frac{1}{\left(1+\frac{z}{3}\right)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-z)^n}{3^{n+1}}$$

Với $|z| > 2 \Leftrightarrow \left|\frac{2}{z}\right| < 1$ ta có:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}.\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$$

$$f(z) = \frac{2z+3}{z^2+z-6} = \frac{7}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} + \frac{3}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-z)^n}{3^{n+1}}$$

ĐỀ THI TOÁN CHUYÊN NGÀNH 2018 – 2019

Câu 1. Tìm chuỗi Laurent của hàm $f(z) = \frac{2z+3}{z^2+z-6}$

b. Trong miền: $2 < |z+1| < 3$

$$f(z) = \frac{2z+3}{z^2+z-6} = \frac{2z+3}{(z-2)(z+3)} = \frac{7}{5}.\frac{1}{(z-2)} + \frac{3}{5}\frac{1}{(z+3)}$$

Với $|z+1| > 2 \Leftrightarrow \ \frac{2}{z+1} < 1$ ta có:

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{z+1+2} = \frac{1}{z+1}.\frac{1}{1+\frac{2}{z+1}} = \frac{1}{z+1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-2}{z+1}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)^n}{(z+1)^{n+1}}$$

Với $|z+1| < 3 \Leftrightarrow \ \frac{z+1}{3} < 1$ ta có:

$$\frac{1}{z-2} =.\frac{1}{z+1-3} = \frac{1}{3}.\frac{1}{\frac{z+1}{3}-1} = -\frac{1}{3}.\frac{1}{1-\frac{z+1}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z+1}{3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}$$

$$f(z) = \frac{2z+3}{z^2+z-6} = \frac{3}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)^n}{(z+1)^{n+1}} - \frac{7}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}$$

ĐỀ THI TOÁN CHUYÊN NGÀNH 2018 – 2019

Câu 1. Tìm chuỗi Laurent của hàm $\boldsymbol{f(z)=\frac{2z+3}{z^2+z-6}}$

c. Trong miền: $\boldsymbol{\sqrt{5}<|z-i|<\sqrt{10}}$

$$f(z)=\frac{2z+3}{z^2+z-6}=\frac{2z+3}{(z-2)(z+3)}=\frac{7}{5}.\frac{1}{(z-2)}+\frac{3}{5}\frac{1}{(z+3)}$$

Với $|z-i|>\sqrt{5}\Leftrightarrow\left|\frac{2-i}{z-i}\right|<1$ ta có:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-i-(2-i)}=\frac{1}{z-i}.\frac{1}{1-\frac{2-i}{z-i}}=\frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2-i}{z-i}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2-i)^n}{(z-i)^{n+1}}$$

Với $|z-i|<\sqrt{10}\Leftrightarrow\left|\frac{3-i}{z-i}\right|<1$ ta có:

$$\frac{1}{z+3}=\frac{1}{z-i+(3-i)}=\frac{1}{z-i}.\frac{1}{1+\frac{3-i}{z-i}}=\frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{3-i}{z-i}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-3+i)^n}{(z-i)^{n+1}}$$

$$f(z)=\frac{2z+3}{z^2+z-6}=\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-3+i)^n}{(z-i)^{n+1}}+\frac{7}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2-i)^n}{(z-i)^{n+1}}$$

ĐỀ THI TOÁN CHUYÊN NGÀNH 2018 – 2019

Câu 2. Sử dụng thặng dư, tính tích phân sau: $\boldsymbol{I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos 4x}{x^2+8x+20} dx}$

Ta có: $I = Re \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{j4x}}{x^2+8x+20} dx$

Tìm các cực điểm của $R(z) = \frac{z}{z^2+8z+20}$

Giải phương trình $z^2 + 8z + 20 = 0$ ta có 2 nghiệm là $z = -4 \pm 2j$

Cực điểm $z = -4 + 2j$ nằm trong nữa mặt phẳng trên.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos 4x}{x^2 + 8x + 20} dx = 2\pi j.Res\left[\frac{ze^{j4z}}{z^2 + 8z + 20}, -4 + 2j\right] = 2\pi j \left.\frac{ze^{j4z}}{2z + 8}\right|_{-4+2j}$$

$$= 2\pi j \frac{-2(2 - j)e^{-8-16j}}{4j} = -\pi e^{-8}[2\cos 16 + \sin(-16)] - \mathrm{j}\pi \mathrm{e}^{-8}[-\cos 16 + 2\sin(-16)]$$

Từ đó suy ra $y = -\pi e^{-8}[2\cos 16 + \sin(-16)]$

ĐỀ THI TOÁN CHUYÊN NGÀNH 2018 – 2019

Câu 3. Cho hàm $\boldsymbol{f(x) = |x| (-\pi < x < \pi)}$

a. Tìm chuỗi Fourier của hàm $\boldsymbol{f(x)}$

Ta có: $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$

$f(x)$ là hàm chẵn chu kỳ $T = 2\pi$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n cos\, nx)$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x cos\, nx dx = \frac{2\pi n sin n\pi + 2 \cos n\pi - 2}{\pi n^2} = \begin{cases} 0, & n \text{ chẵn} \\ -\dfrac{4}{\pi n^2}, & n \text{ lẽ} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n cos\, nx) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{(2k+1)^2} \cos[(2k+1)x] \right]$$

ĐỀ THI TOÁN CHUYÊN NGÀNH 2018 – 2019

Câu 3. Cho hàm $\boldsymbol{f(x) = |x|(-\pi < x < \pi)}$

b. Sử dụng chuỗi nhận được tính các tổng sau:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$$

Tại $x = 0$, ta có :

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{(2k+1)^2} \cos[(2k+1)x] \right]$$

$$\leftrightarrow 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

ĐỀ THI TOÁN CHUYÊN NGÀNH 2018 – 2019

Câu 4. Sử dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình sau:

$$\boldsymbol{y'' - 12y' + 37y = 3e^{6t}} \textbf{ với } \boldsymbol{y(0) = -2, y'(0) = -3}$$

Lấy biến đổi Laplace hai vế của phương trình:

$$L\{y'' - 12y' + 37y\} = L\{3e^{6t}\} \Leftrightarrow L\{y''\} - 12L\{12y'\} + 37L\{y\} = 3L\{e^{6t}\} \quad (\mathbf{2})$$

$$L\{y''\} = p^2Y - py(0) - y'(0) = p^2Y + 2p + 3$$

$$L\{y'\} = pY - y(0) = pY + 2$$

$$L\{y\} = Y$$

Thay vào phương trình (2) ta có:

$$p^2Y + 2p - 12pY - 21 + 37Y = \frac{3}{p-6}$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{-2p^2+33p-123}{(p-6)(p^2-12p+37)} = \frac{3}{p-6} + \frac{-5p+39}{p^2-12p+37} = \frac{3}{p-6} + \frac{-5(p-6)}{(p^2-6)^2+1} + \frac{9}{(p^2-6)^2+1}$$

Vậy $f(t) = L^{-1}\{Y\} = 3e^{6t} - 5e^{6t}cost + 9e^{6t}sint$