Giả sử hàm $u_o(x)$ khai triển được dưới dạng tích phân Fourier ta sẽ có:

$$C_1(h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_o(\xi)\cosh\xi d\xi$$

$$C_2(h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_o(\xi)\sinh\xi d\xi$$

Từ đó ta có:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} u_o(\xi)e^{-h^2a^2t}\cosh(\xi - x)d\xi\right]dh$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty} e^{-h^2a^2t}\cosh(\xi - x)dh\right]u_o(\xi)d\xi \qquad (5)$$

ta tính tích phân đơn bên trong bằng phương pháp đổi biến: $\tau = ha\sqrt{t};\ \theta = \dfrac{\xi - x}{a\sqrt{t}}$

$$\int_0^{\infty} e^{-h^2a^2t}\cosh(\xi - x)dh = \frac{1}{a\sqrt{t}}\int_0^{\infty} e^{-\tau^2}\cos\theta\tau d\tau = \frac{1}{a\sqrt{t}}I(\theta)$$

Trong đó

$$I(\theta) = \int_0^{\infty} e^{-\tau^2}\cos\theta\tau d\tau \qquad (6)$$

Sau khi lấy đạo hàm của (6) theo θ rồi tích phân từng phần ta có:

$$I'(\theta) = \frac{\theta}{2}I(\theta) \Rightarrow \frac{I'(\theta)}{I(\theta)} = \frac{\theta}{2} \Rightarrow I(\theta) = Ce^{-\frac{\theta^2}{4}}$$

Khi θ = 0 ta có:

$$C = I(0) = \int_0^{\infty} e^{-\tau^2}d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

nên: $I(\theta) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\theta^2}{4}}$

$$\int_0^{\infty} e^{-h^2a^2t}\cosh(\xi - x)dh = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}\exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2t}\right]$$

Thay vào ta có:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} u_o(\xi)\exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2t}\right]d\xi \qquad (7)$$

Công thức (7) được gọi là công thức Poisson của bài toán Cauchy.

Đối với bài toán Cauchy trong không gian n chiều của quá trình truyền nhiệt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{21}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)$$

với các điều kiện đầu :

$$u(x_1, x_2, ..., x_n, t)\big|_{t=0} = u_o(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Người ta chứng minh được nghiệm của phương trình là:

$$u(x_1, x_2, ..., x_n, t) = \frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)\exp\left\{-\frac{1}{4a^2 t}\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i - x_i\right)^2\right\}d\xi_1...d\xi_{n1}$$

Đối với bài toán truyền nhiệt trong thanh nửa vô hạn ta xét các bài toán nhỏ ứng với từng trường hợp riêng rồi mới xét đến bài toán tổng quát.

2. Bài toán 1: Truyền nhiệt trong thanh nửa vô hạn, cách nhiệt đầu mút thanh biết nhiệt độ ban đầu của thanh bằng không:

Khi này ta phải giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 \le x \le \infty,\ t \ge 0 \tag{8}$$

với các điều kiện :

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = u_o(x) \tag{9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \tag{10}$$

Để giải bài toán ta kéo dài chẵn hàm $u_o(x)$ sang phần âm của trục x và áp dụng công thức (7). Khi đó nó sẽ thoả mãn (8). Mặt khác theo (7) ta cũng sẽ có:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \left\{-\frac{1}{4a^3 t\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} u_o(\xi)(\xi - x)\exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}\right]d\xi\right\}\Bigg|_{x=0}$$

Từ đó suy ra:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{0} u_o(\xi)\exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}\right]d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty} u_o(\xi)\exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}\right]d\xi$$

Trong tích phân đầu ta đổi biến ξ = -ξ’ và do tính chất chẵn của u(ξ) ta sẽ có:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{0} u_o(\xi')\exp\left[-\frac{(\xi' - x)^2}{4a^2 t}\right]d\xi' + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty} u_o(\xi)\exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}\right]d\xi$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty} u_o(\xi)\left\{\exp\left[-\frac{(\xi + x)^2}{4a^2 t}\right] + \exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}\right]\right\}d\xi$$

3. Bài toán 2: Truyền nhiệt trong thanh nửa vô hạn biết nhiệt độ ban đầu của thanh một đầu mút luôn luôn giữ 0 độ.

Khi này ta phải giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 \le x \le \infty,\ t \ge 0$$

với các điều kiện :

$$u(x,0)\Big|_{t=0} = u_o(x)$$

$$u(x,l)\Big|_{t=0} = 0$$

Để giải bài toán này ta kéo dài lẻ hàm $u_o(x)$ sang phần âm của trục x và áp dụng công thức (7) ta sẽ có:

$$u(x,t)\Big|_{x=0} = \frac{1}{2at\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} u_o(\xi)\exp\left[-\frac{\xi^2}{4a^2 t}\right]d\xi = 0$$

Tích phân này bằng 0 vì $u_o(\xi)$ là hàm lẻ.

Từ đó suy ra:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{0}u_o(\xi)\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}\right]d\xi+\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty}u_o(\xi)\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}\right]d\xi$$

Trong tích phân đầu ta đổi biến ξ = -ξ' và do tính chất lẻ của u(ξ) ta sẽ có:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty}u_o(\xi)\left\{\exp\left[-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}\right]-\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}\right]\right\}d\xi$$

4. Bài toán 3: Truyền nhiệt trong thanh nửa vô hạn biết nhiệt độ đầu mút của thanh và nhiệt độ ban đầu của thanh bằng 0.

Khi này ta phải giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad 0\le x\le\infty,\ t\ge 0$$

với các điều kiện :

$$u(x,t)\big|_{x=0}=q(t)$$

$$u(x,t)\big|_{t=0}=0$$

Ta giải bài toán này bằng phương pháp biến đổi Laplace của hàm phức. Giả sử u(x, t) và q(t) là các hàm gốc trong phép biến đổi Laplace. Áp dụng phép biến đổi Laplace cho u(x, t) và các đạo hàm của nó ta có:

$$u(x,t)\leftrightarrow U(x,p);\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\leftrightarrow pU(x,p);\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\leftrightarrow p^2U(x,p)$$

Coi p là thông số và đặt các biểu thức trên vào phương trình truyền nhiệt ta có:

$$pU(x,p)=a^2\frac{\partial^2U(x,p)}{\partial x^2}\qquad(10)$$

Vậy ta phải giải phương trình (10) với điều kiện:

$$U(x,p)\big|_{x=0}=Q(p)\leftrightarrow q(t)\qquad(11)$$

Nghiệm tổng quát của (10) có dạng:

$$U(x,p)=C_1\exp\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right)+C_2\exp\left(-\frac{\sqrt{p}}{a}x\right)$$

Hàm U(x, p) là hàm bị chặn khi $x\to\infty$ nên $C_1 = 0$. Từ điều kiện (11) ta suy ra:

$C_2 = U(0, p) = Q(p)$

Vậy nghiệm của phương trình (10) thoả mãn (11) sẽ là:

$$U(x,p)=Q(p)\exp\left(-\frac{\sqrt{p}}{a}x\right)$$

Ta viết lại nó dưới dạng:

$$U(x,p)=pQ(p)\frac{1}{p}\exp\left(-\frac{\sqrt{p}}{a}x\right)$$

Áp dụng công thức Duhamel:

$pF(p)G(p)\leftrightarrow g(0)f(t)+f*g'$

và tính chất:

$$\frac{1}{p}\exp\left(-\frac{\sqrt{p}}{a}x\right)\leftrightarrow 1-\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)=\mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

Trong đó:

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp\left(-\tau^2\right)d\tau$$

Ta sẽ rút ra:

$$u(x,t)=q(t)\mathrm{Erf}(\infty)+\int_0^t\left[\mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{\Lambda}}\right)\right]q(t-\tau)d\tau$$

Mặt khác ta biết rằng:

$$\mathrm{Erf}(\infty)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \exp\left(-\tau^2\right)d\tau=0$$

$$\mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{\tau}}\right)\Bigg|_{\tau=0}=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{\tau}}}\exp\left(-\theta^2\right)d\theta\Bigg|_{\tau=0}=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}\tau^{\frac{3}{2}}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2\tau}\right)$$

Từ đó suy ra:

$$u(x,t)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{q(t-\tau)}{\tau^{\frac{3}{2}}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2\tau}\right)d\tau$$

5. Bài toán 4: Truyền nhiệt trong thanh nửa vô hạn, biết nhiệt độ ban đầu của thanh và biết nhiệt độ tại đầu mút.

Khi này ta phải giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad 0\le x\le\infty,\ t\ge 0$$

với các điều kiện :

$$u(x,t)\big|_{x=0}=u_1(t)$$

$$u(x,t)\big|_{t=0}=u_o(x)$$

Để giải bài toán này ta dùng kết quả của bài toán 2 và bài toán 3 và nguyên lý chồng nghiệm. Cụ thể ta tìm nghiệm u(x, t) dưới dạng:

$$u(x,t)=\tilde{u}(x,t)+\hat{u}(x,t)$$

Trong đó $\tilde{u}(x,t)$ là nghiệm của bài toán:

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2}$$

với các điều kiện:

$$\tilde{u}(x,t)\big|_{t=0}=u_o(x);\ \tilde{u}(x,t)\big|_{x=0}=0$$

còn $\hat{u}(x,t)$ là nghiệm của bài toán:

$$\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial x^2}$$

với các điều kiện:

$$\hat{u}(x,t)\Big|_{t=0} = 0; \qquad \hat{u}(x,t)\Big|_{x=0} = u_1(t)$$

Theo kết quả bài toán 2 và bài toán 3 ta suy ra:

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty u_o(\xi)\left\{\exp\left[-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}\right] - \exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}\right]\right\}d\xi$$

$$\hat{u}(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{u_1(t-\tau)}{\tau^{\frac{3}{2}}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2\tau}\right)d\tau$$

Ví dụ: Giả sử trong một ống nửa vô hạn tại một đầu ống x = 0 bị chặn bởi một tấm không thẩm thấu và tại x = l cũng có một tấm như vây. Trong đoạn [0, l] có một môi trường với hệ số khuyếch tán $D_1 = a^{-2}$ có chứa đầy một loại chất với hệ số đậm đặc u_o. Trong phân còn lại của ống [l, ∞] có một môi trường với hệ số khuyếch tán $D_2 = b^{-2}$ và trong đó không chứa chất trong đoạn [0, l].

Tại thời điểm t = 0 ta bỏ tấm chắn tại x = l và khi đó bắt đầu quá trình khuyếch tán. Gọi nồng độ chất khuyếch tán tại x ở thời điểm t là u(x, t). Trước hết ta thiết lập phương trình khuyếch tán trong ống. Gọi $u_1(x, t)$ là nồng độ của chất lỏng trong khoảng $0 \le x \le l$. Khi đó ta có:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \qquad 0 \le x \le l \qquad (13)$$

với điều kiện:

$$u_1(x,t)\Big|_{t=0} = u_o; \quad \frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$$

Gọi $u_2(x, t)$ là hàm nồng độ chất khuyếch tán trong đoạn [l, ∞] ta có:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \qquad l \le x \le \infty \qquad (14)$$

với điều kiện:

$$u_2(x,t)\Big|_{t=0} = 0; \; u_2(x,t)\Big|_{x=\infty} = 0$$

Mặt khác tại điểm x = l thì $u_1(x, t)$ và $u_2(x, t)$ phải thoả mãn điều kiện liên tục ("kết dính"), nghĩa là:

$$u_1(x,t)\Big|_{x=l} = u_2(x,t)\Big|_{x=l}$$

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u_1(l,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 u_2(l,t)}{\partial x^2}$$

Giả sử $u_1(x, t)$ và $u_2(x, t)$ và đạo hàm của chúng là các hàm gốc trong biến đổi Laplace, ta sẽ có các hàm ảnh là:

$$u_1(x,t) \leftrightarrow U_1(x,p) \qquad\qquad u_2(x,t) \leftrightarrow U_2(x,p)$$

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} \leftrightarrow pU_1(x,p) - u_o \qquad\qquad \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} \leftrightarrow pU_2(x,p)$$

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} \leftrightarrow \frac{\partial^2 U_1(x,t)}{\partial x^2} \qquad\qquad \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} \leftrightarrow \frac{\partial^2 U_2(x,t)}{\partial x^2}$$

Từ các phương trình (13) và (14) và các hệ thức trên ta suy ra:

$$pU_1(x,p) = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U_1(x,t)}{\partial x^2} + u_o$$

$$pU_2(x,p) = \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 U_2(x,t)}{\partial x^2}$$

Nghiệm tổng quát tương ứng sẽ là:

$$U_1(x,p) = C_1 \mathrm{cha}x\sqrt{p} + C_2 \mathrm{sha}x\sqrt{p} + \frac{u_o}{p} \qquad (15)$$

$$U_2(x,p) = C_3 \exp\left[b\sqrt{p}(x-l)\right] + C_4 \exp\left[-b\sqrt{p}(x-l)\right] \qquad (16)$$

Mặt khác từ điều kiện $\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$ ta suy ra $\left.\frac{dU_1(x,p)}{dx}\right|_{x=0} = 0$. Từ đó ta có:

$$\left. C_1 a\sqrt{p}\,\mathrm{sha}x\sqrt{p} + C_2 a\sqrt{p}\,\mathrm{cha}x\sqrt{p}\right|_{x=0} = C_2 a\sqrt{p} = 0$$

Vậy $C_2 = 0$

Mặt khác $\left. u_2(x,t)\right|_{x=\infty} = 0$ nên ảnh của $u_2(x, t)$ là một hàm bị chặn khi $x \to \infty$ và do đó $C_3 = 0$. Khi đó (15) và (16) trở thành:

$$U_1(x,p) = C_1 \mathrm{cha}x\sqrt{p} + \frac{u_o}{p}$$

$$U_2(x,p) = C_4 \exp\left[-b\sqrt{p}(x-l)\right]$$

Xét đến điều kiện "kết dính" ta có:

$$U_1(l,p) = U_2(l,p)$$

$$\left.\frac{1}{a^2}\frac{dU_1(x,p)}{dx}\right|_{x=l} = \left.\frac{1}{b^2}\frac{dU_2(x,p)}{dx}\right|_{x=l}$$

Từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} C_1 \mathrm{cha}l\sqrt{p} + \dfrac{u_o}{p} = C_4 \\ \dfrac{1}{a^2} C_1 a\sqrt{p}\,\mathrm{sha}l\sqrt{p} = -\dfrac{1}{b^2} C_4 b\sqrt{p} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta có:

$$\begin{cases} C_1 = -\dfrac{u_o a}{p\left(a\,\mathrm{cha}l\sqrt{p} + b\,\mathrm{sha}l\sqrt{p}\right)} \\ C_4 = \dfrac{u_o b\,\mathrm{sha}l\sqrt{p}}{p\left(a\,\mathrm{cha}l\sqrt{p} + b\,\mathrm{sha}l\sqrt{p}\right)} \end{cases}$$

Vậy:

$$U_1(x,p) = \frac{u_o}{p} - \frac{u_o a\,\mathrm{cha}x\sqrt{p}}{p\left(a\,\mathrm{cha}l\sqrt{p} + b\,\mathrm{sha}l\sqrt{p}\right)}$$

$$U_2(x,p) = \frac{u_o b\,\mathrm{sha}l\sqrt{p}}{p\left(a\,\mathrm{cha}l\sqrt{p} + b\,\mathrm{sha}l\sqrt{p}\right)} \exp\left[-b\sqrt{p}(x-l)\right]$$

Sau khi dùng biến đổi Laplace ngược ta có các hàm $u_1(x, t)$ và $u_2(x, t)$.

§7. BÀI TOÁN TRUYỀN NHIỆT TRONG THANH VÔ HẠN VÀ NỬA VÔ HẠN CÓ NGUỒN NHIỆT

1. Nguyên lý Duhamel: Trước hết ta xét nguyên lý Duhamel của phương trình truyền nhiệt không thuần nhất trong không gian n chiều R^n. Nếu $H(\alpha, x, t)$ với mọi giá trị của tham biến α là nghiệm của phương trình:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2 \Delta H \tag{1}$$

với điều kiện:

$$H(\alpha, x, t)\big|_{t=0} = h(x, \alpha) \tag{2}$$

khi đó hàm:

$$u(x,t) = \int_0^t H(\alpha, x, t-\alpha)d\alpha \tag{3}$$

là nghiệm của phương trình:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + h(x, \alpha) \tag{4}$$

và thoả mãn điều kiện:

$$u(x,t)\big|_{t=0} = 0$$

Ta áp dụng vào các bài toán sau đây

2. Bài toán 1: Truyền nhiệt trong thanh vô hạn có nguồn nhiệt với nhiệt độ ban đầu bằng 0.

Khi này ta giải phương trình:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad -\infty < x < \infty;\ t \ge 0$$

với điều kiện ban đầu:

$$u(x,t)\big|_{t=0} = 0$$

Sử dụng nguyên lý Duhamel và kết quả cho bởi công thức Poisson của bài toán Cauchy ta có nghiệm là:

$$u(x,t) = \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \alpha)}{2a\sqrt{\pi(t-\alpha)}} \exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2(t-\alpha)} \right] d\xi \right) d\alpha$$

Ở đây hàm $H(\alpha, x, t)$ là tích phân:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \alpha) \exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t} \right] d\xi$$

3. Bài toán 2: Truyền nhiệt trong thanh vô hạn có nguồn nhiệt với nhiệt độ ban đầu bằng $u_o(x)$.

Khi này ta giải phương trình:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad -\infty < x < \infty;\ t \ge 0$$

với điều kiện ban đầu:

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u_o(x)$$

Dùng phương pháp xếp chồng nghiệm và kết quả của bài toán 1 ta có nghiệm:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}u_o(\xi)\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}\right]d\xi+\int_0^t\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi\right)d\tau$$

4. Bài toán 3: Gải bài toán truyền nhiệt:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)\qquad -\infty< x<\infty;\ t\ge 0$$

với điều kiện ban đầu:

$$u(x,t)\big|_{t=0}=u_o(x)$$

$$u(x,t)\big|_{x=0}=u_1(t)$$

Dùng phương pháp xếp chồng nghiệm và kết quả của các bài toán trên ta có nghiệm:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}u_o(\xi)\left\{\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}\right]-\exp\left[-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}\right]\right\}d\xi$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{u_1(t-\tau)}{\tau^{3/2}}\exp\left[-\frac{x^2}{4a^2\tau}\right]d\tau$$

$$+\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\left\{\int_0^{\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\left\{\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]-\exp\left[-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right\}d\xi\right\}d\tau$$

§8. BÀI TOÁN HỖN HỢP CỦA PHƯƠNG TRÌNH LOẠI HYPERBOLIC TRUYỀN NHIỆT TRONG THANH HỮU HẠN VÀ MIỀN HỮU HẠN

1. Đặt bài toán: Ta xét bài toán truyền nhiệt trong khối lập phương đồng chất, không có nguồn nhiệt với điều kiện biết nhiệt độ ban đầu của khối đó và nhiệt độ trên biên luôn luôn bằng không. Bài toán này đưa đến phương trình:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2\Delta u \tag{1}$$

Trong miền $T \ge t \ge 0$ và $0 < x < l_1$; $0 < y < l_2$; $0 < z < l_3$

với điều kiện :

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0}=u_o(x,y,z) \tag{2}$$

$$u\big|_{x=0}=u\big|_{x=l_1}=u\big|_{y=0}=u\big|_{y=l_2}=u\big|_{z=0}=u\big|_{z=l_3}=0 \tag{3}$$

Dùng phương pháp tách biến ta tìm nghiệm dưới dạng:

$$u(x, y, z, t) = u^*(x, y, z).T(t)$$

và ta có:

$$T'(t)+a^2\lambda T(t)=0 \tag{4}$$

$$\Delta u^*(x,y,z)+\lambda u^*(x,y,z)=0 \tag{5}$$

Từ (4) để có nghiệm riêng không suy biến và kèm điều kiện bị chặn của u khi $t \to \infty$ ta suy ra nghiệm của nó có dạng:

$$T_\lambda(t) = C\exp(-a^2\lambda t)$$

Mặt khác ta lại dùng phương pháp tách biến để tìm $u^*(x, y, z)$, nghĩa là:

$$u^*(x, y, z) = X(x).Y(y).Z(z)$$

Sau khi đạo hàm và thay vào phương trình ta có:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} + \lambda = 0$$

Từ đó ta rút ra hệ phương trình vi phân tương ứng là:

$$X''(x) + \alpha X(x) = 0$$

$$Y''(y) + \beta Y(y) = 0 \qquad \alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$Z''(z) + \gamma Z(z) = 0$$

Đối với hàm X(x), Y(y), Z(z) ta thấy do điều kiện biên (3) chúng phải thoả mãn các điều kiện sau:

$$X(0) = X(l_1) = 0;\ Y(0) = Y(l_2) = 0;\ Z(0) = Z(l_3) = 0$$

Giải hệ phương trình vi phân trên với các điều kiện đã biết ta suy ra các giá trị riêng ($-\lambda$):

$$\alpha_k = \frac{k^2\pi^2}{l_1^2};\ \beta_k = \frac{m^2\pi^2}{l_2^2};\ \gamma_k = \frac{n^2\pi^2}{l_3^2}$$

$$\lambda_{k,m,n}(l_1, l_2, l_3) = \pi^2\left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} + \frac{n^2}{l_3^2}\right)$$

Các hàm riêng tương ứng khi đó sẽ là:

$$u_{k,m,n}(x, y, z) = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{l_1 l_2 l_3}} \sin\frac{k\pi}{l_1}x \sin\frac{m\pi}{l_2}y \sin\frac{n\pi}{l_3}z$$

Vậy nghiệm tổng quát của bài toán đó là:

$$u(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{k,m,n} \exp\left[-a^2\pi^2\left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} + \frac{n^2}{l_3^2}\right)t\right] \sin\frac{k\pi}{l_1}x \sin\frac{m\pi}{l_2}y \sin\frac{n\pi}{l_3}z$$

Trong đó $C_{k,m,n}$ được suy ra từ điều kiện:

$$C_{k,m,n} = \frac{8}{l_1 l_2 l_3}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\int_0^{l_3} u_o(\xi, \eta, \zeta) \sin\frac{k\pi}{l_1}\xi \sin\frac{m\pi}{l_2}\eta \sin\frac{n\pi}{l_3}\zeta\, d\xi d\eta d\zeta$$

2. Bài toán 1: Giải phương trình truyền nhiệt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Trong miền $T \geq t \geq 0$ và $0 < x < l$

với điều kiện :

$$u(x, t)\big|_{t=0} = u_o(x)$$

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0$$

Nghiệm là:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \exp\left(-a^2\pi^2\frac{k^2}{l^2}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

Trong đó:

$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l u_o(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}d\xi$$

3. Bài toán 2: Giải phương trình truyền nhiệt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{6}$$

Trong miền $T \geq t \geq 0$ và $0 < x < l$

với điều kiện :

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u_o(x)$$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = u(x,t)\big|_{x=l} = 0$$

Ta tìm nghiệm dưới dạng:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\frac{k\pi}{l}x \tag{7}$$

Giả sử $u_o(x)$ có các đạo hàm liên tục trong khoảng (0, l) và $u_o(0) = u_o(l) = 0$ còn hàm f(x, t) có các đạo hàm riêng cấp 1 theo x liên tục trong khoảng (0, l) và:

$$f(0, t) = f(l, t) = 0$$

Khi đó ta có thể thu được các khai triển Fourier của chúng là:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin\frac{k\pi}{l}x \tag{8}$$

$$u_o(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\frac{k\pi}{l}x \tag{9}$$

với:

$$f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx$$

$$\alpha_k = \frac{2}{l}\int_0^l u_o(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx$$

Sau khi lấy đạo hàm hai vế của (7) và chú ý đến (8) và (9) ta có:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k(t) + \left(\frac{k\pi}{l}a\right)^2 T_k(t) - f_k(t)\right]\sin\frac{k\pi}{l}x = 0$$

Nên:

$$T_k(t) + \left(\frac{k\pi}{l}a\right)^2 T_k(t) = f_k(t) \tag{10}$$

Khi t = 0 ta có:

$$u\big|_{t=0} = u_o(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)\sin\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k \sin\frac{k\pi}{l}x$$

nên:

$$T_k(0) = \alpha_k \tag{11}$$

Sau khi giải (10) với điều kiện (11) ta có $T_k(t)$, nghĩa là có nghiệm của bài toán.

4. Bài toán 3: Giải phương trình truyền nhiệt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{12}$$

Trong miền $T \geq t \geq 0$ và $0 < x < l$

với điều kiện :

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u_o(x)$$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = \varphi_1(x);\ u(x,t)\big|_{x=l} = \varphi_2(x)$$

Ta giải bài toán này bằng phương pháp chồng nghiệm, nghĩa là tìm nghiệm dưới dạng:

$$u(x,t) = \overline{u}(x,t) + \widetilde{u}(x,t) + \varphi_1(t) + \frac{x}{l}\left[\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\right]$$

Trong đó $\overline{u}(x,t)$ là nghiệm của phương trình:

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} + f(x,t)$$

với các điều kiện:

$$\overline{u}(x,t)\big|_{t=0} = u_o(x)$$

$$\overline{u}(x,t)\big|_{x=0} = \overline{u}(x,t)\big|_{x=l} = 0$$

Còn $\widetilde{u}(x,t)$ là nghiệm của phương trình:

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x^2} + f(x,t)$$

với các điều kiện:

$$\widetilde{u}(x,t)\big|_{t=0} = 0$$

$$\widetilde{u}(x,t)\big|_{x=0} = \widetilde{u}(x,t)\big|_{x=l} = 0$$

Rõ ràng $\overline{u}(x,t)$ đượcc rút ra từ bài toán 1 và $\widetilde{u}(x,t)$ được rút ra từ bài toán 2.