ĐỀ THI TOÁN CHUYÊN NGÀNH 2015 – 2016

Câu 1. Giải bài toán biên sau cho phương trình truyền sóng:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u_{tt} = a^2 u_{xx}} & \boldsymbol{(0 < x < 1, t > 0)} \\ \boldsymbol{u_x(0,t) = u(1,t) = 0} & \boldsymbol{(t > 0)} \\ \boldsymbol{u(x,0) = 1 - x, u_t(x,0) = 0} & \boldsymbol{(0 < x < 1)} \end{cases}$$

Giải

Nghiệm có dạng:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\pi a t + b_n \sin n\pi a t) . \sin n\pi x$$

$$a_n = 2\int_0^1 (1-x)\sin n\pi x \, dx = 2. \left[-\frac{(1-x)\cos n\pi x}{n\pi} - \frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2} \right] \Bigg|_0^1 = -\frac{2}{n\pi}$$

$$b_n = 0$$

$$\to u(x,t) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos n\pi a t . sin\, n\pi x$$

Câu 2. Giải bài toán biên sau cho phương trình truyền sóng:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u_{tt} = a^2 u_{xx}} & \boldsymbol{(0 < x < 1, t > 0)} \\ \boldsymbol{u_x(0,t) = u(1,t) = 0} & \boldsymbol{(t > 0)} \\ \boldsymbol{u(x,0) = 0, u_t(x,0) = l - x} & \boldsymbol{(0 < x < 1)} \end{cases}$$

Nghiệm có dạng:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\pi at + b_n \sin n\pi at) \sin n\pi x$$

$$u(x,0) = 0 \rightarrow a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^1 (1 - x) \sin n\pi x \, dx = \frac{2}{n\pi a} . \left[\frac{(x-l)\cos n\pi x}{\pi n} - \frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2} \right] \Bigg|_0^1 = \frac{2l}{n^2\pi^2 a}$$

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{l}{n^2} \sin n\pi at \right) \sin n\pi x$$

Câu 3. Giải bài toán biên sau cho phương trình truyền sóng:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u_{tt} = a^2 u_{xx}} & \boldsymbol{(0 < x < 1, t > 0)} \\ \boldsymbol{u_x(0,t) = u(1,t) = 0} & \boldsymbol{(t > 0)} \\ \boldsymbol{u(x,0) = 4x(1-x), u_t(x,0) = 0} & \boldsymbol{(0 < x < 1)} \end{cases}$$

Nghiệm có dạng:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi at + b_n \sin n\pi at) \sin n\pi x$$

$$u_t(x,0) = 0 \to b_n = 0$$

$$a_n = 2\int_0^1 [4x(1-x)\sin n\pi x]dx = 8\int_0^1 (x - x^2)\sin n\pi x\, dx$$

$$= 8.\left[\frac{(x^2 - x)\cos n\pi x}{n\pi} + \frac{(1-2x)\sin n\pi x}{n^2\pi^2} - \frac{2\cos n\pi x}{n^3\pi^3}\right]\Bigg|_0^1 = 8.\left(-\frac{2\cos n\pi + 2}{n^3\pi^3}\right) = \begin{cases} 0, n = 2k-1 \\ -\dfrac{32}{n^3\pi^3}, n = 2k \end{cases}$$

$$u(x,y) = -\frac{4}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^3}\cos 2k\pi at\right)\sin 2k\pi x$$

Câu 4. Giải bài toán biên sau cho phương trình truyền sóng:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u_{tt} = u_{xx}} & \boldsymbol{(0 < x < 1, t > 0)} \\ \boldsymbol{u_x(0,t) = u(1,t) = 0} & \boldsymbol{(t > 0)} \\ \boldsymbol{u(x,0) = x, u_t(x,0) = 0} & \boldsymbol{(0 < x < 1)} \end{cases}$$

Nghiệm có dạng:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t] \sin n\pi x$$

$$u_t(x,0) = 0 \to b_n = 0$$

$$a_n = 2\int_0^1 x sin\, n\pi x dx = 2.\left[\frac{-x cos\, n\pi x}{n\pi} + \frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\right]\Bigg|_0^1 = 2.\left(\frac{1 - \cos n\pi}{n\pi}\right) = \begin{cases} 0, n = 2k \\ \dfrac{4}{n\pi}, n = 2k-1 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \cos[(2k-1)\pi t]\right] \sin[(2k-1)\pi x]$$

Câu 5. Giải bài toán biên sau cho phương trình truyền sóng:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u_{tt} = u_{xx}} & \boldsymbol{(0 < x < 1, t > 0)} \\ \boldsymbol{u_x(0,t) = u(1,t) = 0} & \boldsymbol{(t > 0)} \\ \boldsymbol{u(x,0) = 0, u_t(x,0) = x} & \boldsymbol{(0 < x < 1)} \end{cases}$$

Nghiệm có dạng:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t] \sin n\pi x$$

$$u(x,0) = 0 \rightarrow a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\sin n\pi x dx = \frac{2}{n\pi}\left[\frac{-x\cos n\pi x}{n\pi} + \frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\right]\Bigg|_0^1 = \begin{cases} 0, n = 2k \\ \dfrac{4}{n^2\pi^2}, n = 2k-1 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}\cos[(2k-1)\pi t]\right]\sin[(2k-1)\pi x]$$

Câu 5 (2 điểm): Giải bài toán biên sau cho phương trình truyền nhiệt :

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0 < x < 1,\ t > 0) \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0 & (t > 0) \\ u(x,0) = x & (0 < x < 1) \end{cases}$$

Nghiệm có dạng:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_k \exp(-a^2\pi^2 n^2 t) \sin n\pi x$$

Trong đó:

$$C_k = 2\int_0^1 x\sin n\pi\, dx = \sin n\pi\, x^2\Big|_0^1 = \sin n\pi$$

$$\to u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi \exp(-a^2\pi^2 n^2 t) \sin n\pi x$$

$$
1) \begin{cases} u_t = u_{xx} \quad (0 < x < 1, t > 0) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \ (t > 0) \\ u(x,0) = x(1-x) \ (0 \le x \le 1) \end{cases}
$$

Nghiệm có dạng:

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_k \, \mathrm{e}^{-\pi^2 n^2 t} \sin n\pi x
$$

$$
C_k = 2\int_0^1 (x - x^2) \sin n\pi \, dx = \frac{\sin n\pi}{3}
$$

$$
\to u(x,y) = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi \, \mathrm{e}^{-\pi^2 n^2 t} \sin n\pi x
$$

Câu 5 (2 điểm): Giải bài toán biên sau cho phương trình truyền nhiệt :

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} & (0 < x < \pi,\ t > 0) \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \quad (t > 0) & \\ u(x,0) = \begin{cases} T_0 & \text{khi } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{khi } \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases} & \end{cases}$$

Nghiệm có dạng:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_k e^{-16\ \ ^{2}n^{2}t} \sin nx \right]$$

Trong đó:

$$C_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} T_0 \sin n dx = T_0 \sin n$$

$$\to u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(T_0 \sin n\, e^{-16\pi^2 n^2 t} \sin nx \right)$$