DẠNG 2

<u>Câu 2.</u> Từ dạng phức của hệ phương trình Maxwell mô tả trường điện từ biến thiên điều hòa theo thời gian, hãy khảo sát tính chất của sóng phẳng đơn sắc, đồng nhất truyền theo phương Oz, trong môi trường đẳng hướng, tuyến tính, đồng nhất, không có nguồn ngoài.

Giả sử trong môi trường không có nguồn ngoài:

$$\dot{\vec{J}}_S = 0, \rho_s = 0, \dot{\vec{E}}_s = 0, \dot{\vec{J}} = \gamma\dot{\vec{E}}$$

$$rot\,\dot{\vec{H}} = \dot{\vec{J}} + i\omega\dot{\vec{D}}\ (7a)$$

Phương trình (7a) có thể viết lại:

$$rot\,\dot{\vec{H}} = \gamma\dot{\vec{E}} + i\omega\dot{\vec{D}} = \gamma\dot{\vec{E}} + i\omega\varepsilon\dot{\vec{E}} = i\omega\left(\varepsilon - i\frac{\gamma}{\omega}\right)\dot{\vec{E}}$$

Nếu đặt $\tilde{\varepsilon} = \left(\varepsilon - i\frac{\gamma}{\omega}\right)$ thì $rot\,\dot{\vec{H}} = i\omega\tilde{\varepsilon}\dot{\vec{E}}$ với $\tilde{\varepsilon}$ là độ thẩm điện phức

$$rot\,\dot{\vec{H}} = i\omega\tilde{\varepsilon}\dot{\vec{E}} \leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dz}\dot{H}_y = -i\omega\tilde{\varepsilon}\dot{E}_x (3a) \\ \dfrac{d}{dz}\dot{H}_x = i\omega\tilde{\varepsilon}\dot{E}_y (3b) \\ 0 = -i\omega\tilde{\varepsilon}\dot{E}_z \rightarrow \dot{E}_z = 0 \end{cases}$$

$$rot\,\dot{\vec{E}} = -i\omega\mu\dot{\vec{H}} \leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dz}\dot{E}_y = -i\omega\mu\dot{H}_x (4a) \\ \dfrac{d}{dz}\dot{E}_x = i\omega\mu\dot{H}_y (4b) \\ 0 = i\omega\mu\dot{H}_z \rightarrow \dot{H}_z = 0 \end{cases}$$

Đạo hàm theo z 2 vế của (4b), thay (3a) vào kết quả vừa nhận được, ta được phương trình sau:

$$\frac{d^2\dot{E}_x}{dz^2} + \omega^2\tilde{\varepsilon}\mu\dot{E}_x = 0$$

Tương tự từ (4a) và (3b) cũng suy ra được:

$$\frac{d^2\dot{E}_y}{dz^2} + \omega^2\tilde{\varepsilon}\mu\dot{E}_y = 0$$

Đạo hàm theo z 2 vế của (3b), thay (4a) vào kết quả vừa nhận được, ta được phương trình sau:

$$\frac{d^2\dot{H}_x}{dz^2} + \omega^2\tilde{\varepsilon}\mu\dot{H}_x = 0$$

Tương tự

$$\frac{d^2\dot{H}_y}{dz^2} + \omega^2\tilde{\varepsilon}\mu\dot{H}_y = 0$$

Biểu thức giá trị tức thời của $\vec{E}, \vec{H}$:

$$\begin{cases} E_x(t) = m_x e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \psi_x) + n_x e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z + \psi_x) \\ E_y(t) = m_y e^{-\alpha z}\cos\left(\omega t - \beta z + \psi_y\right) + n_y e^{\alpha z}\cos\left(\omega t + \beta z + \psi_y\right) \\ E_z(t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_x(t) = -\dfrac{m_y}{Z_c} e^{-\alpha z}\cos\left(\omega t - \beta z + \psi_y\right) + \dfrac{n_y}{Z_c} e^{\alpha z}\cos\left(\omega t + \beta z + \psi_y\right) \quad (*) \\ H_y(t) = \dfrac{m_x}{Z_c} e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \psi_x) - \dfrac{n_x}{Z_c} e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z + \psi_x) \\ H_z(t) = 0 \end{cases}$$

Từ các biểu thức trên suy ra tính chất của sóng phẳng đơn sắc truyền theo phương z:

- Vi $E_z = 0, H_z = 0$ suy ra các vector $\vec{E}, \vec{H}$ của sóng phẳng vuông góc vơi phương truyền, ta nói sóng điện từ phẳng là sóng điện từ ngang TEM.
- Các số hạng thứ 1 trong biểu thức $(*)$ mô tả sóng phẳng đơn sắc lan truyền theo phương và chiều dương trục Z, gọi là sóng thuận. Khi lan truyền biên độ giảm dần theo hàm mũ, các mặt đẳng pha dịch chuyển theo chiều (+) trục Z với vận tốc ω/β.

+ Các số hạng thứ 2 mô tả sóng phẳng đơn sắc lan truyền theo phương và chiều âm trục Z, gọi là sóng ngược. Biên độ giảm dần theo hàm mũ, các mặt đẳng pha dịch chuyển theo chiều (-) trục Z với vận tốc ω/β.

<u>Câu 2.</u> Từ hệ phương trình Maxwell, hãy thiết lập: dạng phức của hệ phương trình Maxwell mô tả trường điện từ biến thiên điều hòa theo thời gian và các điều kiện biên phức.

Xét vector $\vec{E}$:

$$\vec{E}(x,y,z,t)$$
$$= E_{xm}(x,y,z)\cos[\omega t+\psi_x(x,y,z)]\,\vec{i}_x$$
$$+ E_{ym}(x,y,z)\cos[\omega t+\psi_y(x,y,z)]\,\vec{i}_y$$
$$+ E_{zm}(x,y,z)\cos[\omega t+\psi_z(x,y,z)]\,\vec{i}_z \qquad (\mathbf{1})$$

Trong đó E_{xm}, E_{ym}, E_{zm}: biên độ (không phụ thuộc vào thời gian t)

ψ_x, ψ_y, ψ_z: pha ban đầu (không phụ thuộc vào thời gian t)

Theo công thức Euler $e^{i\alpha} = \cos\alpha + isin\alpha$

$$(\mathbf{1}) \rightarrow \vec{E}(x,y,z,t)$$
$$= Re\{E_{xm}(x,y,z)e^{i(\omega t+\psi_x)}\vec{i}_x + E_{ym}(x,y,z)e^{i(\omega t+\psi_y)}\vec{i}_y + E_{zm}(x,y,z)e^{i(\omega t+\psi_z)}\vec{i}_z\} \quad (\mathbf{2})$$

⇨ $\vec{E}(x,y,z) = Re\left[\dot{\vec{E}}(x,y,z)e^{i\omega t}\right]$

⇨ $\vec{E}(x,y,z) =$
$E_{xm}(x,y,z)e^{i\psi_x}\vec{i}_x + E_{ym}(x,y,z)e^{i\psi_y}\vec{i}_y + E_{zm}(x,y,z)e^{i\psi_z}\vec{i}_z \quad (\mathbf{3})$

Đối với các vector khác của trường điện từ cũng được biểu diễn tương tự

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(x,y,z) = i\omega\vec{E} \qquad (4a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(x,y,z) = i\omega\left(i\omega\vec{E}\right) = -\omega^2\vec{E} \quad (4b)$$

Từ (1), (2) và (4a) suy ra hệ phương trình Maxwell dạng phức:

$$rot\,\dot{\vec{H}} = \dot{\vec{J}} + i\omega\dot{\vec{D}} \quad (5a)$$

$$rot\,\dot{\vec{E}} = -i\omega\dot{\vec{B}} \quad (5b)$$

$$div\,\dot{\vec{B}} = 0 \quad (6a)$$

$$div\,\dot{\vec{D}} = \rho \quad (6b)$$

$$\dot{\vec{D}} = \varepsilon\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{B}} = \mu\dot{\vec{H}}, \dot{\vec{J}} = \gamma\left(\dot{\vec{E}} + \dot{\vec{E}}_s\right) = \gamma\dot{\vec{E}} + \dot{\vec{J}}_s \quad (7)$$

Các điều kiện biên:

$$\begin{cases} H_{1x} = H_{2x} \\ E_{1x} = E_{2x} \\ \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \\ \bar{\varepsilon}_1 \dot{E}_{1n} = \bar{\varepsilon}_2 \dot{E}_{2n} \end{cases}$$