$$u = v_\psi + \left(v_\varphi\right)_t + u^* = \frac{1}{4\pi a^2}\left\{ \iint\limits_{S_{at}} \frac{\psi}{t} dS + \frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}} \frac{\varphi}{t} dS + \iiint\limits_{V_{at}} \frac{f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{r} dV \right\}.$$

Nghiệm của bài toán truyền sóng trong mặt phẳng:

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\left\{ \iint\limits_{D_{at}} \frac{\psi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} + \frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{D_{at}} \frac{\varphi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} \right\}$$

Nghiệm của bài toán truyền sóng trên dây: $u(x,t) = \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(v)dv$.

Công thức nghiệm bài toán Cauchy của phương trình truyền nhiệt

- Trên dây $u_t = a^2 u_{xx}$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{\frac{-(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi .$$

- Trong mặt phẳng $u_t = a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)$; $u(x,y,0) = \varphi(x,y)$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$

$$u(x,y,t) = \frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi,\eta) e^{\frac{-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}{4a^2t}} d\xi d\eta .$$

- Trong không gian $u_t = a^2\left(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\right)$; $u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z)$, $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^3} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi,\eta,\zeta) e^{\frac{-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2-(\zeta-z)^2}{4a^2t}} d\xi d\eta d\zeta .$$

CÂU HỎI ÔN TẬP VÀ BÀI TẬP

4.1 Phương trình đạo hàm riêng là phương trình chỉ chứa các đạo hàm riêng.

Đúng ☐ Sai ☐.

4.2 Nghiệm tổng quát của phương trình đạo hàm riêng phụ thuộc các hàm số tùy ý

Đúng ☐ Sai ☐.

4.3 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin x^2 y\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos y\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^3 - 3e^{xy^2}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \cos u = 0$ là phương trình đạo hàm riêng cấp 3.

Đúng ☐ Sai ☐.

4.4 Phương trình đạo hàm riêng riêng tuyến tính cấp 2 có thể phân 3 loại: Hyperbolic, eliptic, parabolic và loại của phương trình không thay đổi khi thực hiện phép đổi biến số không suy biến.

Đúng ☐ Sai ☐.

4.5 Nghiệm của phương trình Laplace trong miền bị chặn được gọi là hàm điều hòa.

Đúng ☐ Sai ☐.

4.6 Nếu hàm $u(X)$ là hàm điều hòa trên Ω, liên tục trên $\overline{\Omega}$ và không phải là hằng số thì $u(X)$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên biên $\partial\Omega$.

Đúng ☐ Sai ☐.

4.7 Bài toán Dirichlet đối với phương trình Laplace nếu tồn tạo là duy nhất.

Đúng ☐ Sai ☐.

4.8 Phương trình truyền sóng thuộc loại parabolic.

Đúng ☐ Sai ☐.

4.9 Nghiệm của bài toán Cauchy của phương trình truyền nhiệt là một hàm tuần hoàn vì có thể tìm nghiệm bằng phép biến đổi Fourier.

Đúng ☐ Sai ☐.

4.10 Công thức Kirchoff, công thức Poisson và công thức D'Alembert lần lượt biểu diễn nghiệm của bài toán Cauchy của phương trình truyền sóng trong không gian, trong mặt phẳng và trên dây.

Đúng ☐ Sai ☐.

4.11 Xác định loại của phương trình và đưa về dạng chính tắc các phương trình sau đây:

a. $u_{xx}+3u_{xy}+4u_{yy}+5u_x-2u_y+4u=2x-3y$.

b. $u_{xx}+2u_{xy}+5u_{yy}-32u=0$.

c. $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+9u_x+9u_y-2u=0$.

d. $u_{xx}+4u_{xy}+13u_{yy}+3u_y-9u+9(x+y)=0$.

4.12. Xác định loại các phương trình sau:

a. $u_{xx}-2\cos u_{xy}-(3+\sin^2 x)u_{yy}-yu_y=0$.

b. $xu_{xx}+yu_{yy}+3y^2u_x=0$.

4.13. Tìm nghiệm của phương trình: $4u_{tt}=25u_{xx}$ với điều kiện: $\begin{cases} u(x,0)=\sin 2x \\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=0 \end{cases}$

4.14. Tìm nghiệm của phương trình $u_{xy} = x^2 y$ thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} u(x,0) = x^2 \\ u(1,y) = \cos y \end{cases}$.

4.15. Tìm tích phân tổng quát của các phương trình:

a. $u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0$.

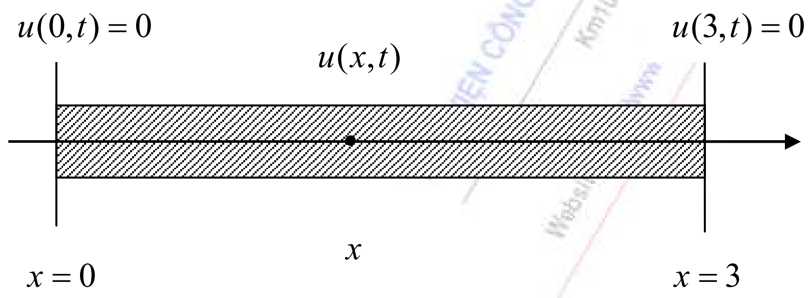
b. $4u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} = 0$.

4.16. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình:

a. $u_{xx} + u_{yy} = e^{2x+y}$ biết rằng phương trình có nghiệm riêng dạng $u = ke^{2x+y}$.

b. $u_{xx} - 4u_{yy} = e^{2x+y}$ biết rằng phương trình có nghiệm riêng dạng $u = kxe^{2x+y}$.

4.17. Một thanh có chiều dài 3 đơn vị, có hệ số khuyếch đại tán bằng hai đơn vị.



Gọi $u(x,t)$ là nhiệt độ vào thời điểm t tại vị trí x trên thanh. Giả sử nhiệt độ ban đầu tại x là: $u(x,0) = 5\sin 4\pi x - 3\sin 8\pi x + 2\sin 10\pi x$.

Nhiệt độ hai đầu luôn bằng 0 thì $u(x,t)$ là nghiệm của phương trình:

$$u_t = 2u_{xx},\ 0 < x < 3,\ t > 0.$$

Với điều kiện: $\begin{cases} u(0,t) = u(3,t) = 0 \\ u(x,0) = 5\sin 4\pi x - 3\sin 8\pi x + 2\sin 10\pi x \end{cases}$

a. Giải phương trình bằng phép biến đổi Fourier hữu hạn

b. Giải phương trình bằng phép biến đổi Laplace.

4.18. Tìm k để các hàm số sau đây là hàm điều hòa

a. $u(x,y) = x^3 + kxy^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b. $u = \dfrac{1}{r^k}$ với $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

4.19. Tìm các giá trị lớn nhất và bé nhất của các hàm điều hòa sau đây:

a. $u(x,y) = xy$ trên miền $\overline{D}$: $x^2 + y^2 \le 1$.

b. $u(x,y) = x^2 - y^2$ trên miền $\overline{D}$: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \le 1$.

4.20. Giả sử u là hàm khả vi liên tục đến cấp 2 trong $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ và $\iint\limits_S \dfrac{\partial u}{\partial \overline{n}} dS = 0$ với mọi mặt cong kín S bất kỳ nằm trong Ω, $\overrightarrow{n}$ là véc tơ pháp tuyến đơn vị của S. Chứng minh u là hàm điều hòa trên Ω.

4.21. Giải bài toán Dirichlet đối với phương trình $\Delta u = 0$ trong các trường hợp sau:

a. Tìm nghiệm phía trong hình tròn tâm O bán kính bằng 1 thỏa mãn điều kiện $u = \sin 2\varphi \ (0 \le \varphi \le 2\pi)$ trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

b. Tìm nghiệm phía ngoài hình tròn tâm O bán kính bằng 2 thỏa mãn:

$u\big|_S = x^2 - xy^2 + 2$, S là đường tròn tâm O bán kính bằng 2.

4.22. Giải bài toán Cauchy sau đây:

$$4y^2 u_{xx} + 2(1-y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1+y^2}(2u_x - u_y) = 0$$

$u(x,0) = \varphi(x)$, $u_y(x,0) = \psi(x)$; $\varphi(x), \psi(x)$ khả vi liên tục đến cấp 2.

4.23. Tìm nghiệm của phương trình: $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_{tt} = 0$ trong mỗi trường hợp sau:

a. $u(x,y,z,0) = e^x \cos y$ và $u_t(x,y,z,0) = x^2 - y^2$.

b. $u(x,y,z,0) = \dfrac{1}{x}$ và $u_t(x,y,z,0) = 0$, $(x \ne 0)$.

4.24. Tìm nghiệm của bài toán: $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} \\ u(x,y,0) = x^3 y^2 \\ u_t(x,y,0) = x^2 y^4 - 3x^2 \end{cases}$

4.25. Tìm nghiệm của bài toán:

a. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} \\ u(x,y,0) = x^2 + y^2 \\ u_t(x,y,0) = 1 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(x,0) = e^x \\ u_t(x,0) = e^x \end{cases}$

4.26. Giải bài toán Cauchy sau:

a. $\begin{cases} u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right), \ t > 0 \\ u(x,y,z,0) = \sin x + \cos^2 y + \cos z, \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} u_t = u_{xx}\ , \quad t > 0 \\ u(x,0) = \sin^2 x\ ,\ x \in \mathbb{R} \end{cases}.$

4.27. Tìm nghiệm của bài toán Cauchy sau:

a. $\begin{cases} u_t = u_{xx}\ , \quad t > 0 \\ u(x,0) = \sin x\ ,\ x \in \mathbb{R} \end{cases}.$

b. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy}\ , \quad t > 0 \\ u(x,y,0) = \sin l_1 x + \cos l_2 y\ ,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$, l_1, l_2 là các hằng số .