

BÀI TẬP TOÁN CHUYÊN NGÀNH - HÀM BIẾN PHỨC

§1. Hàm biến phức.

Bài 1. Vẽ đồ thị của các miền xác định bởi các phương trình sau trong mặt phẳng phức

1. $|z - 4 + 3i| = 5$
2. $|z + 2 + 2i| = 2$
3. $|z + 3i| = 2$
4. $|2z - 1| = 4$
5. $\text{Im}(\bar{z} + 3i) = 6$
6. $\text{Im}(z - i) = \text{Re}(z + 4 - 3i)$
7. $|\text{Re}(1 + i\bar{z})| = 3$
8. $z^2 + \bar{z}^2 = 2$
9. $\text{Re}(z^2) = 1$
10. $\arg(z) = \pi/4$

Bài 2. Biểu diễn các số phức sau dưới dạng $z = re^{i\phi}$

1. -10
2. $-2\pi i$
3. $-4 - 4i$
4. $(2 + i)^{-1}$
5. $(3 - i)^2$
6. $(1 + i)^{20}$

Bài 3. Tìm phần thực và phần ảo của các hàm sau

1. $f(z) = 6z - 5 + 9i$
2. $f(z) = 3z + 2\bar{z} - i$
3. $f(z) = z^3 - 2z + 6$
4. $f(z) = z^2 + \bar{z}^2$
5. $f(z) = \frac{\bar{z}}{z + 1}$
6. $f(z) = z + \frac{1}{z}$
7. $f(z) = e^{2z+i}$
8. $f(z) = e^{z^2}$

Bài 4. Tìm phần thực và phần ảo của các hàm sau dưới dạng cực

1. $f(z) = \bar{z}$
2. $f(z) = |z|$
3. $f(z) = z^4$
4. $f(z) = z + \frac{1}{z}$
5. $f(z) = e^z$
6. $f(z) = x^2 + y^2 - yi$

Bài 5. Cho $z = x + iy$. Biểu diễn các hàm sau qua z và \bar{z} .

1. $f(z) = x^2 + y^2$
2. $f(z) = x - 2y + 2 + (6x + y)i$
3. $f(z) = x^2 - y^2 - (5xy)i$
4. $f(z) = 3y^2 + (3x^2)i$

Bài 6. Tìm ảnh (Γ') của (Γ) qua ánh xạ $w = f(z)$

1. $f(z) = \bar{z}$; (Γ) là đường thẳng $y = 3$
2. $f(z) = \bar{z}$; (Γ) là đường thẳng $y = x$
3. $f(z) = 3z$; (Γ) là nửa mặt phẳng $\text{Im}(z) > 2$
4. $f(z) = 3z$; (Γ) là dải $2 \leq \text{Re } z < 3$
5. $f(z) = (1 + i)z$; (Γ) là đường thẳng $x = 2$
6. $f(z) = (1 + i)z$; (Γ) là đường thẳng $y = 2x + 1$
7. $f(z) = iz + 4$; (Γ) là nửa mặt phẳng $\text{Im}(z) \leq 1$
8. $f(z) = iz + 4$; (Γ) là dải $-1 < \text{Im}(z) < 2$

Bài 7. Cho đường cong (Γ) dưới dạng tham số $z(t)$. Hãy mô tả dạng của (Γ) và tìm biểu diễn tham số của ảnh (Γ') của nó qua ánh xạ $w = f(z)$

1. $z(t) = 2(1 - t) + it, 0 \leq t \leq 1; f(z) = 3z$
2. $z(t) = i(1 - t) + (1 + i)t, 0 \leq t < \infty; f(z) = -z$

$$3. z(t) = 1 + 2e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi; \quad f(z) = z + 1 - i$$

$$4. z(t) = i + e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi; \quad f(z) = (z - i)^3$$

$$5. z(t) = t, \quad 0 \leq t \leq 2; \quad f(z) = e^{i\pi z}$$

$$6. z(t) = 4e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi; \quad f(z) = \operatorname{Re} z$$

Bài 8. Sử dụng biểu diễn tham số, tìm ảnh (Γ') của (Γ) qua ánh xạ $w = f(z)$

$$1. f(z) = z^3, \quad (\Gamma) \text{ là nửa dương của trục ảo.}$$

$$2. f(z) = iz, \quad (\Gamma) \text{ là đường tròn } |z - 1| = 2.$$

$$3. f(z) = 1/z, \quad (\Gamma) \text{ là đường tròn } |z| = 2.$$

$$4. f(z) = 1/z, \quad (\Gamma) \text{ là đoạn thẳng nối từ } 1 - i \text{ đến } 2 - 2i.$$

$$5. f(z) = z + \bar{z}, \quad (\Gamma) \text{ là nửa đường tròn } |z| = 1 \text{ nằm trong nửa mặt phẳng trên.}$$

$$6. f(z) = e^z, \quad (\Gamma) \text{ là đường thẳng nối từ gốc tọa độ qua điểm } 2 + \sqrt{3}i.$$

Bài 9. Chứng minh rằng các hàm sau không giải tích tại mọi điểm

$$1. f(z) = \operatorname{Re}(z)$$

$$2. f(z) = y + ix$$

$$3. f(z) = 4z - 6\bar{z} + 3$$

$$4. f(z) = \bar{z}^2$$

$$5. f(z) = x^2 + y^2$$

$$6. f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Bài 10. Chứng minh rằng các hàm sau giải tích tại mọi điểm trong miền xác định của chúng.

$$1. f(z) = e^{-x} \cos y - ie^{-x} \sin y$$

$$2. f(z) = x + \sin x \cosh y + i(y + \cos x \sinh y)$$

$$3. f(z) = e^{x^2 - y^2} \cos 2xy + ie^{x^2 - y^2} \sin 2xy$$

$$4. f(z) = 4x^2 + 5x - 4y^2 + 9 + i(8xy + 5y - 1)$$

$$5. f(z) = \frac{x - 1}{(x - 1)^2 + y^2} + i \frac{y}{(x - 1)^2 + y^2}$$

$$6. f(z) = \frac{x^3 + xy^2 + x}{x^3 + y^3} + i \frac{x^2y + y^3 - y}{x^3 + y^3}$$

$$7. f(z) = \frac{\cos \phi}{r} - i \frac{\sin \phi}{r}$$

$$8. f(z) = 5r \cos \phi + r^4 \cos 4\phi + i(5r \sin \phi + r^4 \sin 4\phi)$$

Bài 11. Tìm các hằng số a, b, c, d để các hàm sau là hàm giải tích.

$$1. f(z) = 3x - y + 5 + i(ax + by - 3)$$

$$2. f(z) = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2)$$

Bài 12. Chứng minh rằng các hàm sau không giải tích tại mọi điểm nhưng khả vi dọc theo các đường đã chỉ ra.

$$1. f(z) = x^2 + y^2 + 2ixy; \text{ trục } x$$

$$2. f(z) = 3x^2y^2 - 6ix^2y^2; \text{ các trục tọa độ}$$

$$3. f(z) = x^3 + 3xy^2 - x + i(y^3 + 3x^2y - y); \text{ các trục tọa độ}$$

$$4. f(z) = x^2 - x + y + i(y^2 - 5y - x); \quad y = x + 2$$

Bài 13. Chứng minh rằng hàm u cho ở dưới đây là hàm điều hòa và tìm hàm điều hòa v liên hợp với nó.

1. $u(x, y) = x$
2. $u(x, y) = 2x - 2xy$
3. $u(x, y) = x^2 - y^2$
4. $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$
5. $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
6. $u(x, y) = \cos x \cosh y$
7. $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$
8. $u(x, y) = -e^{-x} \sin y$

Bài 14. Chứng minh rằng u cho ở dưới đây là hàm điều hòa. Tìm hàm điều hòa v liên hợp với nó và tìm hàm giải tích $f(z) = u + iv$ thỏa mãn điều kiện đã cho.

1. $u(x, y) = xy + x + 2y; f(2i) = -1 + 5i$
2. $u(x, y) = 4xy^3 - 4x^3y + x; f(1 + i) = 5 + 4i$

Bài 15. Cho hàm $v(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$

1. Chứng minh rằng v là hàm điều hòa trong miền D không chứa gốc tọa độ.
2. Tìm hàm $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ giải tích trong miền D .
3. Biểu diễn hàm f trong câu 2 ở trên theo z .

Bài 16. Cho hàm $u(x, y) = e^{x^2 - y^2} \cos 2xy$

1. Chứng minh rằng u là hàm điều hòa trong miền D bất kỳ.
2. Tìm hàm điều hòa liên hợp v của u và hàm giải tích $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ thỏa mãn điều kiện $f(0) = 1$.
3. Biểu diễn hàm f trong câu 2 theo z .

Bài 17. Tìm đạo hàm của các hàm sau:

1. $f(z) = z^2 e^{z+i}$
2. $f(z) = \frac{3e^{2z} - ie^{-z}}{z^3 - 1 + i}$
3. $f(z) = e^{iz} - e^{-iz}$
4. $f(z) = ie^{1/z}$

Bài 18. Biểu diễn các biểu thức sau theo x, y .

1. $|e^{z^2 - z}|$
2. $\arg(e^{z-i/z})$
3. $\arg(e^{i(z+\bar{z})})$
4. $\overline{1 + ie^z}$

Bài 19. Biểu diễn các hàm sau dưới dạng $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

1. $f(z) = e^{-iz}$
2. $f(z) = e^{2\bar{z}+i}$
3. $f(z) = e^{z^2}$
4. $f(z) = e^{1/z}$

Bài 20. Tìm tất cả các giá trị phức của các hàm logarithm sau:

1. $\text{Ln}(-5)$
2. $\text{Ln}(-ie)$
3. $\text{Ln}(2i - 2)$
4. $\text{Ln}(1 - i)$
5. $\text{Ln}(\sqrt{2} + i\sqrt{6})$
6. $\text{Ln}(i - \sqrt{3})$

Bài 21. Viết giá trị chính của các hàm logarithm sau dưới dạng $a + ib$.

1. $\ln(6 - 6i)$
2. $\ln(-e^2)$
3. $\ln(5i - 12)$
4. $\ln(3 - 4i)$
5. $\ln(1 + i\sqrt{3})^5$
6. $\ln(1 + i)^4$

Bài 22. Tìm tất cả các nghiệm phức của các phương trình sau:

1. $e^z = 4i$
2. $e^{1/z} = 1$

$$3. e^{z-1} = -ie^3$$

$$4. e^{2z} + e^z + 1 = 0$$

Bài 23. Tìm miền khả vi của các hàm sau và tìm đạo hàm của chúng:

$$1. f(z) = 3z^2 - e^{2iz} + i \ln z$$

$$2. f(z) = (z+1) \ln z$$

$$3. f(z) = \frac{\ln(2z-i)}{z^2+i}$$

$$4. f(z) = \ln(z^2+1)$$

Bài 24. Tìm tất cả các giá trị của hàm lũy thừa với số mũ phức sau:

$$1. (-1)^{3i}$$

$$2. 3^{2i/\pi}$$

$$3. (1+i)^{1-i}$$

$$4. (1+i\sqrt{3})^i$$

$$5. (-i)^i$$

$$6. (ie)^{\sqrt{2}}$$

Bài 25. Tìm giá trị chính của hàm lũy thừa với số mũ phức sau:

$$1. (-1)^{3i}$$

$$2. 3^{2i/\pi}$$

$$3. 2^{4i}$$

$$4. i^{i/\pi}$$

$$5. (1-i\sqrt{3})^{3i}$$

$$6. (1+i)^{2-i}$$

Bài 26. Biểu diễn giá trị của các hàm lượng giác sau đây dưới dạng $a+ib$.

$$1. \sin(4i)$$

$$2. \cos(-3i)$$

$$3. \cos(2-4i)$$

$$4. \sin\left(\frac{\pi}{4}+i\right)$$

$$5. \tan(2i)$$

$$6. \cot(\pi+2i)$$

Bài 27. Tìm tất cả các số phức z thỏa mãn các phương trình sau:

$$1. \sin z = i$$

$$2. \cos z = 4$$

$$3. \sin z = \cos z$$

$$4. \cos z = i \sin z$$

Bài 28. Biểu diễn giá trị của các hàm hyperbolic sau đây dưới dạng $a+ib$.

$$1. \sinh\left(\frac{\pi}{2}i\right)$$

$$2. \cosh(\pi i)$$

$$3. \cosh\left(1-\frac{\pi}{6}i\right)$$

$$4. \tanh(2+3i)$$

Bài 29. Tìm tất cả các số phức z thỏa mãn các phương trình sau:

$$1. \cosh z = i$$

$$2. \sinh z = -1$$

$$3. \sinh z = \cosh z$$

$$4. \sinh z = e^z$$

§2. Tích phân hàm biến phức.

Bài 1. Tính các tích phân sau :

$$1. \int_{(C)} (z+3)dz, \text{ với } (C) : \{x=2t, y=4t-1; 1 \leq t \leq 3\}$$

$$2. \int_{(C)} (2\bar{z}-z)dz, \text{ với } (C) : \{x=-t, y=t^2+2; 0 \leq t \leq 2\}$$

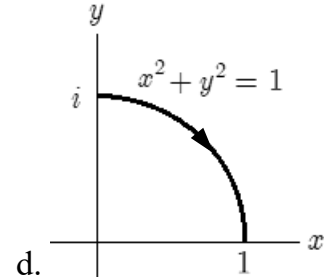
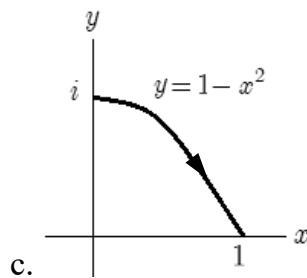
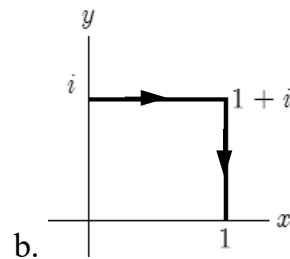
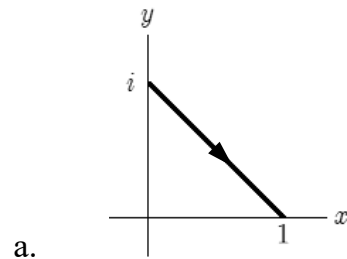
$$3. \int_{(C)} z^2 dz, \text{ với } (C) : \{z(t)=3t+2it; -2 \leq t \leq 2\}$$

$$4. \int_{(C)} (3z^2-2z)dz, \text{ với } (C) : \{z(t)=t+it^2; 0 \leq t \leq 1\}$$

$$5. \int_{(C)} \frac{z+1}{z} dz, \text{ với } (C) : \{|z(t)|=1; -i \leq z \leq i\}$$

$$6. \int_{(C)} |z|^2 dz, \text{ với } (C) : \left\{x=t^2, y=\frac{1}{t}; 1 \leq t \leq 2\right\}$$

7. $\int_{(C)} \left[\frac{1}{(z+i)^3} - \frac{5}{z+i} + 8 \right] dz$, với $(C) : \{ |z+i| = 1 \}$
8. $\int_{(C)} (x^2 + iy^3) dz$, với (C) là đường thẳng nối từ $z = 1$ đến $z = i$.
9. $\int_{(C)} (x^2 - iy^3) dz$, với (C) là nửa dưới đường tròn $|z| = 1$ ($-1 \leq z \leq 1$)
10. $\int_{(C)} e^z dz$, với (C) là đường gấp khúc nối từ $(0,0) \rightarrow (2,0) \rightarrow (1,\pi)$
11. $\int_{(C)} \sin z dz$, với (C) là đường gấp khúc nối từ $(0,0) \rightarrow (1,0) \rightarrow (1,1)$
12. $\int_{(C)} dz$, với (C) là nửa trái của ellipse $\frac{1}{36}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$ ($-2 \leq y \leq 2$)
13. $\oint_{(C)} ze^z dz$, với (C) là hình vuông với các đỉnh $(0,0); (1,0); (1,1); (0,1)$
14. Tính $\int_{(C)} (z^2 + z + 2) dz$ với (C) cho trên các hình sau :



Bài 2. Sử dụng công thức tích phân Cauchy, tính các tích phân sau :

1. $\oint_{|z|=2} \left(z + \frac{1}{z} \right) dz$
2. $\oint_{|z|=2} \left(z + \frac{1}{z^2} \right) dz$
3. $\oint_{|z|=3} \frac{z}{z^2 - \pi^2} dz$
4. $\oint_{|z+i|=1} \frac{10}{(z+i)^4} dz$
5. $\oint_{(C)} \frac{2z+1}{z^2+z} dz$ với (C) là : (a) $|z| = \frac{1}{2}$; (b) $|z| = 2$; (c) $|z-3i| = 1$
6. $\oint_{(C)} \frac{2z}{z^2+3} dz$ với (C) là : (a) $|z| = 1$; (b) $|z| = 4$; (c) $|z-2i| = 1$

$$7. \oint_{(C)} \frac{2-3z}{z^2-8z+12} dz \text{ với } (C) \text{ là : (a) } |z-5|=2; \text{ (b) } |z|=9$$

$$8. \oint_{(C)} \left(\frac{3}{z+2} - \frac{1}{z-2i} \right) dz \text{ với } (C) \text{ là : (a) } |z|=5; \text{ (b) } |z-2i|=\frac{1}{2}$$

$$9. \oint_{(C)} \frac{z-1}{z(z-i)(z-3i)} dz \text{ với } (C) : |z-i|=\frac{1}{2}$$

$$10. \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^3+2iz^2} dz$$

$$11. \oint_{|z|=5} \frac{z^2}{(z-3i)^2} dz$$

$$12. \oint_{(C)} \frac{z^2}{z^2+4} dz, \text{ với } (C) \text{ là : (a) } |z-i|=2; \text{ (b) } |z+2i|=1$$

$$13. \oint_{(C)} \frac{z^2+3z+2i}{z^2+3z-4} dz, \text{ với } (C) \text{ là : (a) } |z|=2; \text{ (b) } |z+5|=\frac{3}{2}$$

$$14. \oint_{|z-3i|=1.3} \frac{z^2+4}{z^2-5iz-4} dz$$

$$15. \oint_{|z-2i|=2} \frac{\sin z}{z^2+\pi^2} dz$$

$$16. \oint_{(C)} \frac{2z+5}{z^2-2z} dz \text{ với } (C) \text{ là : (a) } |z|=1; \text{ (b) } |z-1-i|=1$$

$$17. \oint_{(C)} \frac{1}{z^3(z-4)} dz \text{ với } (C) \text{ là : (a) } |z|=1; \text{ (b) } |z-2|=1$$

$$18. \oint_{(C)} \frac{z+2}{z^2(z-1-i)} dz \text{ với } (C) \text{ là : (a) } |z|=1; \text{ (b) } |z-1-i|=1$$

$$19. \oint_{|z|=6} \left[\frac{e^{2iz}}{z^4} - \frac{z^4}{(z-i)^3} \right] dz$$

$$20. \oint_{|z|=3} \left[\frac{\cosh z}{(z-\pi)^3} - \frac{\sin^2 z}{(2z-\pi)^3} \right] dz$$

§3. Chuỗi hàm biến phức.

Bài 1. Tìm chuỗi Maclaurin và bán kính hội tụ của chuỗi đối với các hàm sau:

$$1. f(z) = \frac{z}{1+z}$$

$$2. f(z) = \frac{1}{4-2z}$$

$$3. f(z) = \frac{1}{(1+2z)^2}$$

$$4. f(z) = \frac{z}{(1-z)^3}$$

$$5. f(z) = e^{-2z}$$

$$6. f(z) = ze^{-z^2}$$

$$7. f(z) = \sinh z$$

$$8. f(z) = \cosh z$$

$$9. f(z) = \cos \frac{z}{2}$$

$$10. f(z) = \sin 3z$$

$$11. f(z) = \sin z^2$$

$$12. f(z) = \cos z^2$$

Bài 2. Khai triển các hàm sau thành chuỗi Taylor tâm tại z_0 và tìm bán kính hội tụ của chuỗi nhận được.

$$1. f(z) = \frac{1}{z}, z_0 = 1$$

$$2. f(z) = \frac{1}{z}, z_0 = 1 + i$$

$$3. f(z) = \frac{1}{3-z}, z_0 = 2i$$

$$4. f(z) = \frac{1}{1+z}, z_0 = -i$$

$$5. f(z) = \frac{z-1}{3-z}, z_0 = 1$$

$$6. f(z) = \frac{1+z}{1-z}, z_0 = i$$

$$7. f(z) = \cos z, z_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$8. f(z) = \sin z, z_0 = \frac{\pi}{2}$$

Bài 3. Tìm chuỗi Maclaurin của các hàm sau và bán kính hội tụ của chúng.

$$1. f(z) = \frac{i}{(z-i)(z-2i)}$$

$$2. f(z) = \frac{z-7}{z^2-2z-3}$$

Bài 4. Tìm chuỗi Laurent của các hàm sau trong hình vành khăn đã cho.

$$1. f(z) = \frac{\cos z}{z}, 0 < |z|$$

$$2. f(z) = \frac{z - \sin z}{z^5}, 0 < |z|$$

$$3. f(z) = e^{-1/z^2}, 0 < |z|$$

$$4. f(z) = \frac{1-e^z}{z^2}, 0 < |z|$$

$$5. f(z) = \frac{e^z}{z-1}, 0 < |z-1|$$

$$6. f(z) = z \cos \frac{1}{z}, 0 < |z|$$

Bài 5. Khai triển hàm $f(z) = \frac{1}{z(z-3)}$ thành chuỗi Laurent trong các miền sau:

$$1. 0 < |z| < 3$$

$$2. |z| > 3$$

$$3. 0 < |z-3| < 3$$

$$4. |z-3| > 3$$

$$5. 1 < |z-4| < 4$$

$$6. 1 < |z+1| < 4$$

Bài 6. Khai triển hàm $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-2)}$ thành chuỗi Laurent trong các miền sau:

$$1. 0 < |z+1| < 3$$

$$2. |z+1| > 2$$

$$3. 1 < |z| < 2$$

$$4. 0 < |z-2| < 3$$

$$5. \sqrt{2} < |z-i| < \sqrt{5}$$

$$6. \sqrt{5} < |z+2i| < 2\sqrt{2}$$

Bài 7. Khai triển hàm $f(z) = \frac{1}{z(1-z)^2}$ thành chuỗi Laurent trong các miền sau :

$$1. 0 < |z| < 1$$

$$2. |z| > 1$$

Bài 8. Khai triển hàm $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-1)^3}$ thành chuỗi Laurent trong các miền sau : 1.

$$0 < |z-2| < 1$$

$$2. |z-1| < 1$$

Bài 9. Chứng minh rằng $z = 0$ là điểm bất thường bỏ được của các hàm cho ở dưới đây. Xác định giá trị của $f(0)$ để hàm $f(z)$ giải tích tại $z = 0$.

$$1. f(z) = \frac{e^{2z} - 1}{z}$$

$$2. f(z) = \frac{z^3 - 4z^2}{1 - e^{z^2/2}}$$

$$3. f(z) = \frac{\sin 4z - 4z}{z^2}$$

$$4. f(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{10} - \cos z^5}{\sin z^2}$$

Bài 10. Xác định các không điểm và bậc của chúng đối với các hàm sau:

$$1. f(z) = (z + 2 - i)^2 \quad 2. f(z) = z^4 - 16 \quad 3. f(z) = z^4 + z^2$$

$$4. f(z) = \sin^2 z \quad 5. f(z) = e^{2z} - e^z \quad 6. f(z) = ze^z - z$$

Bài 11. Sử dụng chuỗi Taylor hoặc chuỗi Maclaurin xác định bậc của không điểm của các hàm sau:

$$1. f(z) = z(1 - \cos^2 z), z = 0 \quad 2. f(z) = z - \sin z, z = 0$$

$$3. f(z) = 1 - e^{z-1}, z = 1 \quad 4. f(z) = 1 - \pi i + z + e^z, z = \pi i$$

Bài 12. Xác định bậc của các cực điểm của các hàm sau:

$$1. f(z) = \frac{3z - 1}{z^2 + 2z + 5}$$

$$2. f(z) = 5 - \frac{6}{z^2}$$

$$3. f(z) = \frac{1 + 2i}{(z + 2)(z + i)^4}$$

$$4. f(z) = \frac{z - 1}{(z + 1)(z^3 + 1)}$$

$$5. f(z) = \tan z$$

$$6. f(z) = \frac{\cos \pi z}{z^2}$$

$$7. f(z) = \frac{1 - \cosh z}{z^4}$$

$$8. f(z) = \frac{e^z}{z^2}$$

$$9. f(z) = \frac{1}{1 + e^z}$$

$$10. f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2}$$

$$11. f(z) = \frac{\sin z}{z^2 - z}$$

$$12. f(z) = \frac{\cos z - \cos 2z}{z^6}$$

§4. Thặng dư và ứng dụng.

Bài 1. Sử dụng chuỗi Laurent, tìm thặng dư của các hàm sau tại các cực điểm đã chỉ ra.

$$1. f(z) = \frac{2}{(z - 1)(z + 4)}; \text{Res}[f(z), 1] \quad 2. f(z) = \frac{e^{-z}}{(z - 2)^2}; \text{Res}[f(z), 2]$$

$$3. f(z) = \frac{2}{z^3(1 - z)^3}; \text{Res}[f(z), 0] \quad 4. f(z) = \frac{4z - 6}{z(2 - z)}; \text{Res}[f(z), 0] \quad 5.$$

$$f(z) = (z + 3)^2 \sin\left(\frac{2}{z + 3}\right); \text{Res}[f(z), -3]$$

$$6. f(z) = e^{-2/z^2}; \text{Res}[f(z), 0]$$

Bài 2. Tìm thặng dư tại các cực điểm của các hàm sau:

$$1. f(z) = \frac{z}{z^2 + 16}$$

$$2. f(z) = \frac{4z + 8}{2z - 1}$$

$$3. f(z) = \frac{1}{z^4 + z^3 - 2z^2}$$

$$4. f(z) = \frac{1}{(z^2 - 2z - 2)^2}$$

$$5. f(z) = \frac{2z - 1}{(z - 1)^4(z + 3)}$$

$$6. f(z) = \frac{5z^2 - 4z + 3}{(z + 1)(z + 2)(z + 3)}$$

$$7. f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z - \pi)^3}$$

$$8. f(z) = \frac{e^z}{e^z - 1}$$

Bài 3. Sử dụng thặng dư, tính các tích phân dọc theo các đường cong kín sau:

$$1. \oint_{(C)} \frac{dz}{z^2 + 4z + 13}; (C) : |z - 3i| = 3 \quad 2. \oint_{(C)} \frac{dz}{z^3(z - 1)^4}; (C) : |z - 2| = \frac{3}{2}$$

$$3. \oint_{(C)} \frac{zdz}{(z + 1)(z^2 + 1)}; (C) : 16x^2 + y^2 = 4 \quad 4. \oint_{(C)} \frac{zdz}{z^4 - 1}; (C) : |z| = 2$$

$$5. \oint_{(C)} \frac{ze^z dz}{z^2 - 1}; (C) : |z| = 2$$

$$6. \oint_{(C)} \frac{e^z dz}{z^3 + 2z^2}; (C) : |z| = 3$$

$$7. \oint_{(C)} \frac{\tan z}{z} dz; (C) : |z - 1| = 2$$

$$8. \oint_{(C)} \frac{\cot \pi z}{z^2} dz; (C) : |z| = \frac{1}{2}$$

$$9. \oint_{(C)} \cot \pi z dz; (C) \text{ là hình chữ nhật tạo bởi } x = \frac{1}{2}, x = \pi, y = 1, y = -1$$

$$10. \oint_{(C)} \frac{(2z - 1)dz}{z^2(z^3 + 1)}; (C) \text{ là hình chữ nhật tạo bởi } x = -2, x = \pi, y = -\frac{1}{2} \text{ và } y = 1$$

Bài 4. Tính các tích phân của các hàm lượng giác sau:

$$1. \int_0^{2\pi} \frac{2}{2 + \sin \phi} d\phi$$

$$2. \int_0^{2\pi} \frac{1}{10 - 6 \cos \phi} d\phi$$

$$3. \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi}{3 + \sin \phi} d\phi$$

$$4. \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + \cos^2 \phi} d\phi$$

$$5. \int_0^{\pi} \frac{1}{2 - \cos \phi} d\phi \quad \text{HD: đặt } t = 2\pi - \phi$$

$$6. \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \sin^2 \phi} d\phi$$

$$7. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \phi}{5 + 4 \cos \phi} d\phi$$

$$8. \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \phi}{3 - \sin \phi} d\phi$$

$$9. \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\phi}{5 - 4 \cos \phi} d\phi$$

$$10. \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos \phi + 2 \sin \phi + 3} d\phi$$

$$11. \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \phi}{2 + \sin \phi} d\phi$$

$$12. \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\phi}{5 - 4 \cos \phi} d\phi$$

Bài 5. Chứng minh các hệ thức sau :

$$1. \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b \cos \phi)^2} d\phi = \frac{2\pi a}{\sqrt{(a^2 - b^2)^3}} (a > b > 0)$$

$$2. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \phi}{a + b \cos \phi} d\phi = \frac{2\pi}{b^2} \left(a - \sqrt{a^2 - b^2} \right) (a > b > 0)$$

Bài 6. Tính giá trị chính Cauchy của các tích phân suy rộng sau:

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 6x + 25} dx$$

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx$$

$$4. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$5. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx$$

$$6. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 4)^3} dx$$

$$7. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$$

$$8. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 9)} dx$$

$$9. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$$

$$10. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6 + 1} dx$$

$$11. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx$$

$$12. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx$$

Bài 7. Tính giá trị chính Cauchy của các tích phân suy rộng sau:

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 1} dx$$

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx$$

$$4. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 4)^2} dx$$

$$5. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$6. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 4x + 5} dx$$

$$7. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^4 + 1} dx$$

$$8. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4 + 1} dx$$

$$9. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx$$

$$10. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$$