CHƯƠNG 4: CHUỖI HÀM PHỨC

§1. KHÁI NIỆM CHUNG

1. Định nghĩa: Cho dãy các hàm biến phức $u_1(z)$, $u_2(z)$, $u_3(z)$,... xác định trong miền E. Ta gọi biểu thức:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z) + \cdots \qquad (1)$$

là chuỗi hàm biến phức.

Tổng của n số hạng đầu tiên là:

$$S_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z)$$

được gọi tổng riêng thứ n của chuỗi hàm (1). Nó là một hàm phức xác định trong miền E.

Nếu tại $z = z_o$, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z_o)$ hội tụ thì z_o được gọi là điểm hội tụ của chuỗi hàm (1). Nếu tại $z = z_o$, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z_o)$ không hội tụ thì z_o được gọi là điểm phân kì của chuỗi hàm (1). Tập hợp các điểm hội tụ của chuỗi hàm được gọi là miền hội tụ của nó. Nếu gọi f(z) là tổng của chuỗi (1) tại điểm hội tụ z thì f(z) hiển nhiên là một hàm biến phức xác định trong miền hội tụ G.

2. Khái niệm về hội tụ đều: Theo định nghĩa 1 ta có $\forall z \in G$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z) = f(z) \qquad (2)$$

Nếu đặt $R_n(z) = f(z) - S_n(z)$ thì đẳng thức (2) được viết là:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0$$

Điều đó có nghĩa là $\forall\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại một số $N(\varepsilon, z)$ dương phụ thuộc vào ε và z sao cho khi $n > N$ thì $| R_n(z) | < \varepsilon$.

a. Định nghĩa: Chuỗi hàm (1) được gọi là hội tụ đều trên tập $G_o \subset G$, nếu $\forall\varepsilon>0$ cho trước, tồn tại một số N chỉ phụ thuộc ε: $N = N(\varepsilon)$ sao cho khi $n > N(\varepsilon)$ thì $| R_n(z) | < \varepsilon \ \forall z \in G_o$.

b. Tiêu chuẩn Weierstrass: Nếu $| u_n(z) | \le a_n \ \forall z \in G$ và nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì chuỗi hàm (1) hội tụ đều trong miền G.

Nói vắn tắt hơn, chuỗi (1) sẽ hội tụ đều trong G nếu chuỗi các môđun của nó, thừa nhận một chuỗi số dương trội hội tụ.

Chứng minh: Cho trước $\varepsilon > 0$, ta sẽ chứng minh rằng tồn tại $N(\varepsilon)$ sao cho khi $n > N(\varepsilon)$ thì $| R_n(z) | < \varepsilon \ \forall z \in G$. Thật vậy vì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nên $\forall\varepsilon >$ luôn luôn tồn tại $N(\varepsilon)$ sao cho khi $n > N(\varepsilon)$ thì:

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots < \varepsilon$$

Nhưng vì $| u_{n+1}(z) | < a_{n+1}$, $| u_{n+2}(z) | < a_{n+2}$, $| u_{n+3}(z) | < a_{n+3}$... nên:

$$| R_n(z) | = | u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \cdots | < | u_{n+1}(z) | + | u_{n+2}(z) | + \cdots < a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots < \varepsilon$$

$\forall z \in G$.

Đó là điều cần chứng minh.

c. Tính chất của chuỗi hội tụ đều:

Định lí 1: Nếu tất cả các số hạng $u_n(z)$ của chuỗi hàm (10) đều liên tục trong miền G và nếu chuỗi hàm (1) hội tụ đều trong G thì tổng f(z) của nó cũng liên tục trong G.

Chứng minh: Giả sử z và z + h là hai điểm bất kì trong G. Ta có:

$$f(z) = S_n(z) + R_n(z)$$
$$f(z+h) = S_n(z+h) + R_n(z+h)$$

Cho trước ε > t phải chứng minh với | h | đủ nhỏ, ta có:

$$|f(z+h) - f(z)| < \varepsilon$$

Thật vậy:

$$\begin{aligned} |f(z+h) - f(z)| &= |S_n(z+h) + R_n(z+h) - S_n(z) - R_n(z)| \\ &= |S_n(z+h) - S_n(z) + R_n(z+h) - R_n(z)| \\ &\le |S_n(z+h) - S_n(z)| + |R_n(z+h) - R_n(z)| \qquad (4) \end{aligned}$$

Do tính hội tụ đều của chuỗi ta có thể tìm được số n chỉ phụ thuộc vào ε sao cho:

$$|R_n(z+h)| < \frac{\varepsilon}{3}; \quad |R_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Với n đã chọn ở trên, xét hàm $S_n(z)$. Đó là tổng của một số hữu hạn các hàm liên tục trong miền G. Vậy $S_n(z)$ cũng liên tục trong G. Do đó ta có thể chọn h khá nhỏ để:

$$|S_n(z+h) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Thay vào (4) ta có:

$$|f(z+h) - f(z)| \le \varepsilon$$

Đó là điều cần chứng minh.

Định lí 2: Nếu tất cả các số hạng của chuỗi hàm (1) đều liên tục trên cung L và chuỗi hàm (1) hội tụ đều trên cung đó thì ta có thể tính tích phân từng số hạng của chuỗi hàm (1) dọc theo L_o, nghĩa là nếu f(z) là tổng của chuỗi hàm (1) thì:

$$\int_L f(z)dz = \int_L u_1(z)dz + \int_L u_2(z)dz + \cdots + \int_L u_n(z)dz + \cdots$$

Chứng minh: Trước hết ta nhận xét rằng vì f(z) liên tục trên L nên tồn tại tích phân $\int_L f(z)dz$. Đặt $\sigma_n = \int_L u_1(z)dz + \int_L u_2(z)dz + \cdots + \int_L u_n(z)dz$. Ta cần chứng minh rằng:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \int_L f(z)dz$$

hay $$\lim_{n\to\infty}\left[\int_L f(z)dz - \sigma_n\right] = 0$$

hay $$\lim_{n\to\infty}\left(\int_L f(z)dz - \int_L [u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z)]dz\right) = 0 \qquad (6)$$

Vì chuỗi (1) hội tụ đều trên L nên với mọi ε > 0 cho trước ta tìm được N(ε) sao cho khi n > N(ε) thì $|R_n(z)| < \varepsilon \ \forall z \in L$. Áp dụng công thức ước lượng tích phân ta có:

$$\left|\int_L R_n(z)dz\right| \le \varepsilon l \text{, } l \text{ là chiều dài của cung } L$$

Vì ε bé nên $\lim\limits_{n\to\infty}\int_L R_n(z)dz = 0$. Đây là điều cần phải chứng minh.

d. Định lí Weierstrass: Nếu các số hạng của chuỗi hàm (1) là giải tích trong miền G và chuỗi (1) hội tụ đều trong miền đó thì tổng f(z) của chuỗi cũng là một hàm giải tích trong G. Đối với chuỗi hàm (1) ta có thể đạo hàm từng số hạng tới cấp tuỳ ý, nghĩa là:

$$f^{(m)}(z) = u_1^{(m)}(z) + u_2^{(m)}(z) + \cdots + u_n^{(m)}(z) + \cdots \quad z \in G, \text{ m nguyên bất kì}$$

Chứng minh: Ta nhận thấy trong định lí này không giả thiết gì về tính hội tụ của chuỗi đạo hàm . Lấy z bất kì thuộc G. C là đường tròn tân z bán kính r khá nhỏ sao cho hình tròn G_o bao bởi C nằm trọn trong G. Để chứng minh f(z) giải tích trong G_o, ta sẽ chứng minh f(z) được biểu diễn bằng một tích phân loại Cauchy, cụ thể ta sẽ chứng minh rằng:

$$f(z) = \frac{1}{2j\pi}\oint_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \tag{7}$$

Thật vậy, do giả thiết, chuỗi hàm (1) hội tụ đều trong G. Vậy nó hội tụ đều trên C. Ta có:

$$u_1(\zeta) + u_2(\zeta) + \cdots + u_n(\zeta) + \cdots = f(\zeta) \text{ đều } \forall z \in C \tag{8}$$

Vì với $\zeta \in C$ thì $\zeta - z \ne 0$ nên nhân 2 vế với $\dfrac{1}{2j\pi}\dfrac{1}{\zeta - z}$ ta có:

$$\frac{1}{2j\pi}\left[\frac{u_1(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{u_2(\zeta)}{\zeta - z} + \cdots + \frac{u_n(\zeta)}{\zeta - z} + \cdots\right] = \frac{f(\zeta)}{2j\pi(\zeta - z)} \text{ đều } \forall z \in C$$

Vì chuỗi hàm ở vế trái hội tụ đều trên C nên theo định lí 2, ta có thể tích phân từng số hạng dọc theo C:

$$\frac{1}{2j\pi}\left[\oint_C \frac{u_1(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \oint_C \frac{u_2(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \cdots + \oint_C \frac{u_n(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \cdots\right] = \frac{1}{2j\pi}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}d\zeta \tag{9}$$

Mặt khác vì mỗi số hạng $u_n(z)$ giải tích nên theo (9), tích phân Cauchy:

$$\frac{1}{2j\pi}\oint_C \frac{u_n(\zeta)}{(\zeta - z)}d\zeta = u_n(z)$$

Vậy (9) viết được:

$$u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z) + \cdots = \frac{1}{2j\pi}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}d\zeta$$

tức: $f(z) = \dfrac{1}{2j\pi}\displaystyle\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}d\zeta$

Vậy f(z) giải tích trong miền G. Vì trên kia đã lấy z bất kì trong G nên có thể kết luận f(z) giải tích trong G. Lập luận tương tự như trên ta chứng minh được rằng có thể đạo hàm từng số hạng của chuỗi (1) tới cấp tuỳ ý.

Nhân 2 vế của (8) với $\dfrac{m!}{2\pi j(\zeta - z)^{m+1}}$ ta có:

$$\frac{m!}{2\pi j}\left[\frac{u_1(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}} + \frac{u_2(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}} + \cdots + \frac{u_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}} + \cdots\right] = \frac{m!f(\zeta)}{2\pi j(\zeta - z)^{m+1}}$$

đều $\forall\zeta \in C$. Do tính hội tụ đều ta có thể tích phân từng số hạng dọc theo C và được:

$$\frac{m!}{2\pi j}\left[\oint_C \frac{u_1(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{m+1}} + \oint_C \frac{u_1(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{m+1}} + \cdots + \oint_C \frac{u_1(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{m+1}} + \cdots\right] = \frac{m!}{2\pi j}\oint_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{m+1}} \quad (9')$$

Vì $u_n(z)$ giải tích theo giả thiết và f(z) giải tích do kết quả chứng minh ở trên nên theo (2) ở mục 12, chương 4 ta có :

$$\frac{m!}{2\pi j}\oint_C \frac{u_1(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{m+1}} = u_n^{(m+1)}(z)\,; \quad \frac{m!}{2\pi j}\oint_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{m+1}} = f^{(m)}(z)$$

Vậy (9') trở thành:

$$u_1^{(m+1)}(z) + u_2^{(m+1)}(z) + \cdots + u_n^{(m+1)}(z) + \cdots = f^{(m)}(z)$$

Đó là điều cần chứng minh.

§2. CHUỖI LUỸ THỪA

1. Định nghĩa: Ta gọi chuỗi luỹ thừa, chuỗi hàm mà các số hạng là các hàm luỹ thừa. Nó có dạng:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_1(z-a)^n + c_2(z-a)^n + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots \qquad (10)$$

Trong đó c_n (n = 0, 1, 2,...) và a là những hằng số phức, a được gọi là tâm của chuỗi. Bằng cách đổi biến $\zeta = z - a$, chuỗi (1) có dạng:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\zeta^n = c_1\zeta^n + c_2\zeta^n + \cdots + c_n\zeta^n + \cdots \qquad (11)$$

có tâm tại $\zeta = 0$.

2. Định lí Abel: Nếu chuỗi luỹ thừa (11) hội tụ tại $\zeta_o \neq 0$ thì nó hội tụ tuyệt đối trong trong hình tròn $|\zeta| < \zeta_o$. Trong mọi hình tròn $|\zeta| < \varphi$, (11) hội tụ đều.

Chứng minh: Lấy ρ là một số dương bất kì $\rho < |\zeta_o|$ ta sẽ chứng minh trong hình tròn $|\zeta| \le \rho$ thì chuỗi (11) thừ nhận một chuỗi trội hội tụ. Thật vậy, theo giả thiết, chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\zeta_o^n$ hội tụ. Do đó $\lim_{n\to\infty} c_n\zeta_o^n = 0$. Dãy số $\{c_n\zeta_o^n\}$ có giới hạn. Vậy nó bị chặn, nghĩa là tồn tại số M > 0 sao cho:

$$|c_n\zeta_o^n| \le M \quad \forall n \text{ nguyên dương} \qquad (12)$$

Từ (12) suy ra rằng với bất kì ζ nào trong hình tròn kín $|\zeta| \le \rho$ ta có:

$$|c_n\zeta^n| = \left|c_n\zeta_o^n\frac{\zeta^n}{\zeta_o^n}\right| = |c_n\zeta_o^n|\left|\frac{\zeta}{\zeta_o}\right|^n \le M\left|\frac{\rho}{\zeta_o}\right|^n$$

Điều đó chứng tỏ rằng chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\zeta^n$ thừa nhận một chuỗi dương trội là chuỗi

$M\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{\rho}{\zeta_o}\right|^n$. Chuỗi dương này là một cấp số nhân hội tụ vì công bội là $\frac{\rho}{|\zeta_o|} < 1$.

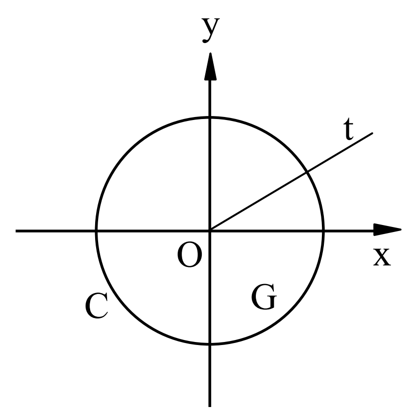
Vậy theo tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi (11) hội tụ tuyệt đối và đều trong mặt tròn $|\zeta| \le \rho$. Vì số ρ có thể chọn gần $|\zeta_o|$ bao nhiêu cũng được nên (11) hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm của hình tròn mở $|\zeta| < \zeta_o$.

3. Hệ quả: Nếu chuỗi (11) phân kì tại ζ_1 thì nó phân kì tại mọi điểm của miền $|\zeta| < |\zeta_1|$.

Chứng minh: ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử chuỗi (11) hội tụ tại ζ_o thuộc miền $|\zeta| > |\zeta_1|$. Áp dụng định lý Abel suy ra chuỗi hội tụ trong hình tròn $|\zeta| < |\zeta_o|$, đặc biệt chuỗi hội tụ tại ζ_1 vì $|\zeta_1| < |\zeta_o|$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết.

4. Bán kính hội tụ: Trước hết chú ý là điểm $\zeta = 0$ bao giờ cũng là điểm hội tụ của chuỗi (11). Tại đó chuỗi hàm tổng là c_o.

Bây giờ ta xét tia Ot bất kì, xuất phát từ gốc $\zeta = 0$. Có thể xảy ra 3 trường hợp:



* Trên tia Ot có cả những điểm hội tụ và những điểm phân kì.

Vì theo định lí Abel, mỗi điểm hội tụ đều nằm gần gốc hơn một điểm phân kì bất kì. Do đó trên tia Ot tìm được một điểm ζ^* ngăn cách những diểm hội tụ trên tia với những điểm phân kì. Bản thân ζ^*, tuỳ trường hợp, có thể là điểm hội tụ hay phân kì.

Cũng theo định lí Abel, chuỗi hội tụ trong hình tròn G: $|\zeta| < |\zeta^*|$ và phân kì bên ngoài tức trong miền $|\zeta| < |\zeta^*|$. Hình tròn G được gọi là hình tròn hội tụ của chuỗi hàm (11), bán kính của nó $R = |\zeta^*|$ được gọi là bán kính hội tụ. Trên biên C của hình tròn có thể có cả điểm hội tụ lẫn phân kì.

* Trên tia Ot, tất cả các điểm đều là điểm hội tụ. Khi đó, theo định lí Abel, chuỗi hàm hội tụ trong một hình tròn bán kính lớn tuỳ ý. Nghĩa là nó hội tụ trong toàn mặt phẳng ζ và ta nói rằng bán kính hội tụ là ∞.

* Trên tia Ot không có điểm nào là điểm hội tụ trừ $\zeta = 0$. Khi đó theo hệ quả của định lí Abel, chuỗi hàm phân kì bên ngoài một hình tròn mà bán kính cả nó nhỏ tuỳ ý. Nói cách khác, mọi điểm c khác 0 đều là điểm phân kì và ta nói bán kính hội tụ $R = 0$.

Lập luận tương tự giải tích thực, dựa vào tiêu chuẩn D'Alembert hay Cauchy, ta thấy bán kính hội tụ có thể tìm theo công thức:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \tag{13}$$

hay:
$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \tag{14}$$

Ghi chú: Đối với chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ bằng phép đổi biến $\zeta = z - a$ ta đưa được về dạng $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n$ nên ta suy ra hoặc chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ chỉ hội tụ tại tâm $z = a$, hoặc hội tụ trong cả mặt phẳng hoặc hội tụ trong hình tròn $| z - a | < R$ và phân kì bên ngoài hình tròn đó.

Ví dụ 1: Xét chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$.

Ta tính bán kính hội tụ R của nó bằng công thức (13):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = 1 \text{ vì } c_n = c_{n+1} = 1$$

Vậy chuỗi hội tụ tuyệt đối trong hình tròn $| z | < 1$. Trong hình tròn $| z | \leq \rho \leq 1$, chuỗi hội tụ đều. Ta xét tổng riêng:

$$S_n(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}$$

Cho $n \to \infty$, nếu $| z | < 1$ thì $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$. Vậy $\lim_{n\to\infty} S_n(z) = \frac{1}{1-z}$. Như vậy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \frac{1}{1-z}; \ | z | < 1$$

Ví dụ 2: Xét sự hội tụ của chuỗi hàm:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} = 1 + \frac{z-1}{1} + \frac{(z-1)^2}{2} + \cdots$$

Bán kính hội tụ của chuỗi đã cho bằng:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

Vậy chuỗi hội tụ trong toàn mặt phẳng phức.

Ví dụ 3: Tìm hình tròn hội tụ của chuỗi $\sum_{0}^{\infty} \frac{(z-j)^{2n+1}}{(n+1)4^n}$

Áp dụng tiêu chuẩn D'Alembert cho chuỗi mođun các số hạng ta có:

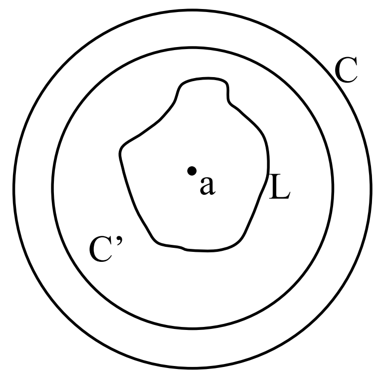
$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z-j|^{2n+3}}{(n+2)4^{n+1}} \frac{(n+1)4^n}{|z-j|^{2n+1}} = \frac{|z-j|^2}{4} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{(n+2)} = \frac{|z-j|^2}{4}$$

Như vậy miền hội tụ của chuỗi là $| z - j |^2 < 4$ hay $| z - j | < 2$.

§3. CHUỖI TAYLOR

Giả sử chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ có bán kính hội tụ là R = 0. Theo kết quả ở trên, trong hình tròn bán kính | z - a | ≤ ρ < R thì chuỗi hội tụ đều. Vì mỗi số hạng của chuỗi hạng của chuỗi đều là hàm giải tích và vì chuỗi hội tụ đều nên theo định lí Weierstrass tổng f(z) của chuỗi là một hàm giải tích trong miền | z - a | ≤ ρ. Bây giờ ta đặt vấn đề ngược lại: cho trước một hàm f(z) giải tích trong một lân cận điểm a. Hỏi có thể khai triển nó thành chuỗi luỹ thừa của (z - a) hay không. Nói khác đi, có thể tìm thấy chuỗi dạng $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ có tổng là f(z) trong lân cận a hay không?

Định lí 1: Mọi hàm f(z) giải tích trong hình tròn | z - a | < R đều có thể khai triển một cách duy nhất thành chuỗi luỹ thừa của (z - a).



Chứng minh: lấy z bất kì thuộc hình tròn | z - a | < R. Ta vẽ hình tròn C’ = {| z - a | = ρ} (ρ < R) bao điểm z bên trong. Gọi C là đường tròn | z - a | = R, C’ là đường tròn | z - a | = ρ. Theo công thức tích phân Cauchy ta có:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \qquad (16)$$

Ta sẽ tìm cách khai triển hàm số dưới dấu tích phân thành chuỗi luỹ thừa của (z - a) hội tụ đều đối với biến ζ trên đường tròn C’.

Muốn vậy ta viết:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z-a)} = \frac{1}{(\zeta - a)\left(1 - \dfrac{z-a}{\zeta - a}\right)}$$

Nhưng vì ζ∈ C’ nên | z - a | < | ζ - a | và $\left|\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right| < 1$. Vậy theo công thức tính tổng của một chuỗi nhân (xem công thức 15) ta có:

$$\frac{1}{1 - \dfrac{z-a}{\zeta-a}} = 1 + \frac{z-a}{\zeta-a} + \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n + \cdots$$

Vậy: $$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-a} + \frac{1}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right) + \frac{1}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n + \cdots$$

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta-a} + \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right) + \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^2 + \cdots + \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n + \cdots \quad (17)$$

Với z cố định, khi ζ biến thiên trên đường C’ thì $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ là một hàm liên tục đối với ζ.

Vậy nó bị chặn, tức $\left|\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right| \le M$. Mặt khác $\left|\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right| = \dfrac{|z-a|}{|\zeta-a|} = \dfrac{|z-a|}{\rho} = q < 1$

nên:

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n\right| \le Mq^n$$

Theo tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi bên vế phải của (17) hội tụ đều với tổng $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ $\forall\zeta\in C'$. Vậy ta có thể tích phân từng số hạng dọc theo C' và được:

$$\oint_{C'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z} = \oint_{C'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-a} + \oint_{C'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)d\zeta + \oint_{C'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^2 d\zeta$$
$$+\cdots+\oint_{C'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n d\zeta+\cdots$$
$$=\oint_{C'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-a} + (z-a)\oint_{C'}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^2}d\zeta + (z-a)^2\oint_{C'}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^3}d\zeta$$
$$+\cdots+(z-a)^n\oint_{C'}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta+\cdots$$

Thay vào (16) ta được:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-a} + \frac{(z-a)}{2\pi j}\oint_{C'}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^2}d\zeta + \frac{(z-a)^2}{2\pi j}\oint_{C'}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^3}d\zeta$$
$$+\cdots+\frac{(z-a)^n}{2\pi j}\oint_{C'}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta+\cdots$$

Như vậy tại mọi điểm z thuộc hình tròn | z - a | < R ta có thể viết:

$$f(z) = c_o + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$

với $\quad c_n = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\oint_{C'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}},\ \ n = 0,1,2,...$

Theo công thức tính đạo hàm cấp n của hàm giải tích ta có:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi j}\oint_{C'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}},\ \ n = 0,1,2,...$$

nên ta có:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Tóm lại ta đã khai triển được f(z) thành chuỗi luỹ thừa của (z - a):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi j}\oint_{C'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}\right)(z-a)^n \qquad (18)$$

Chuỗi luỹ thừa trên được gọi là chuỗi Taylor của hàm f(z) tại z = a. Nếu f(z) giải tích trong hình tròn | z - a | < R thì nó khai triển được thành chuỗi Taylor tại điểm a.

Bây giờ ta còn phải chứng minh tính duy nhất của khai triển.

Giả sử f(z) đã được khai triển thành chuỗi luỹ thừa:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,\ \left|z-a\right|<R \qquad (19)$$

ta sẽ chứng minh rằng $c_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Thật vậy,trong (18) cho z = a, ta được $c_o = f(a)$. Đạo hàm từng số hạng ta sẽ được:

$$f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}nc_n(z-a)^{n-1}$$

Như vậy $f'(a) = c_1$. Tiếp tục đạo hàm rồi thay z = a vào 2 vế, lần lượt ta được:

$f''(a) = 2c_2$, $f'''(a) = 3!c_3$,..., $f^{(n)}(a) = n!c_n$.

Vậy : $c_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Nghĩa là chuỗi (19) đúng là chuỗi Taylor của hàm f(z). Đó là điều phải chứng minh.

Ghi chú: Trong (18) ta viết:

$$c_n=\frac{1}{2\pi j}\oint_{C'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

Giả sử L là đường cong kín bất kì nằm hoàn toàn trong miền | z - a | < R. Vì hàm $\dfrac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$ giải tích trong miền nhị liên có biên là L và C' nên theo định lí Cauchy ta có:

$$\oint_{C'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}=\oint_{L}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

Vậy ta có thể viết:

$$c_n=\frac{1}{2\pi j}\oint_{L}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

Ta sẽ khai triển Taylor một số hàm sơ cấp cơ bản. Trước hết ta lập chuỗi Taylor của hàm $f(z) = e^z$ tại z = 0:

Ta có $f(z) = e^z$, $f^{(n)}(0) = 1$; $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{1}{n!}$

Vây: $e^z=1+\dfrac{z}{1!}+\dfrac{z^2}{2!}+\cdots+\dfrac{z^n}{n!}+\cdots$

Công thức trên có nghĩa $\forall z \in C$ vì e^z giải tích trong toàn bộ C.

Tương tự ta có:

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{n!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots\ (R=\infty)$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots\ (R=\infty)$$

$$\ln(z+1) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots \quad (R = 1)$$

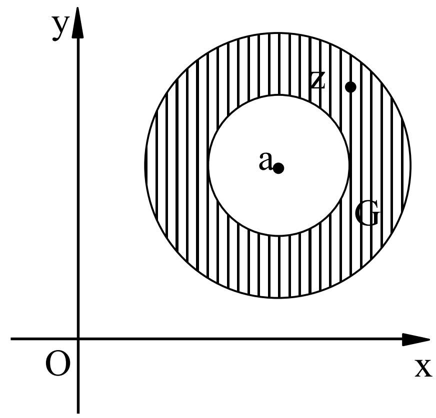
$$\text{arctg}z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots \quad (R = 1)$$

§4. CHUỖI LAURENT

Trong mục trước ta đã thấy rằng nếu f(z) giải tích trong một hình tròn tâm a, thì nó khai triển được thành chuỗi Taylor tại a. Bây giờ ta giả thiết rằng f(z) giải tích trong một lân cận điểm a, trừ tại z = a hay tổng quát hơn f(z) giải tích trong một hình vành khăn tâm a.

1. Định lí Laurent: Giả sử f(z) là một hàm giải tích đơn trị trong hình vành khăn G:

$r < | z - a | < R$



Khi đó ta có $\forall z \in G$:

$$f(z) = c_o + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$
$$+ \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots \quad (22)$$

Trong đó các hệ số c_n được tính theo công thức:

$$c_n = \frac{1}{2\pi j}\oint_L \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \quad (23)$$

L là một đường cong kín bất kỳ bao điểm a và nằm trọn trong hình vành khăn. Chuỗi bên phải hội tụ đều tới f(z) trong mọi hình vành khăn kín : r' ≤ | z - a | ≤ R' (r'>R, R'<R) và được gọi là chuỗi Laurent của hàm f(z) với tâm tại a.

Chứng minh: Lấy z bất kỳ thuộc G. Bao giờ ta cũng vẽ được 2 đường tròn:

L_1 : | z - a | = r'

L_2 : | z - a | = R'

mà r < r' < R' < R sao cho z thuộc hình vành khăn G_o: r' < | z - a | < R'. Vì f(z(giải tích trong G_o nên áp dụng công thức tích phân Cauchy cho miền nhị liên G_o mà biên ngoài là L_2 và biên trong là L_1 ta có:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{L_2} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} - \frac{1}{2\pi j}\oint_{L_1} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \quad (24)$$

Tích phân thứ nhất trong (24) là một hàm giải tích bên trong đường tròn lớn L_2. Ta sẽ tìm cách khai triển nó theo chuỗi luỹ thừa của (z - a). Tích phân thứ hai là một hàm giải tích bên ngoài hình tròn nhỏ và dần tới 0 khi $z \to \infty$. Ta sẽ tìm cách khai triển nó theo chuỗi luỹ thừa của $\frac{1}{z-a}$.

Khi $\zeta \in L_2$ thì:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z-a)} = \frac{1}{(\zeta - a)\left(1 - \frac{z-a}{\zeta - a}\right)}$$

Vì: $\left|\frac{z-a}{\zeta - a}\right| < 1$ nên:

$$\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta - a}\right)^n$$

Vậy: $\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta - a}\right)^n$

$$\frac{1}{2\pi j}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi j}\frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta - a}\right)^n = \frac{f(\zeta)}{2\pi j}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}$$

Lập luận tương tự ta thấy chuỗi bên vế phải hội tụ đều với $\zeta \in L_2$. Vậy có thể tich phân từng số hạng dọc theo L_2:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{L_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - a} = \sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n . \frac{1}{2\pi j}\oint_{L_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}$$

Nếu đặt:

$$c_n = \frac{1}{2\pi j}\oint_{L_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}},\ n = 0,\ 1,\ 2\ ,.... \tag{25}$$

thì ta được:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{L_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - a} = \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \tag{26}$$

Chú ý là không được viết: $c_n = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}$ vì trong giả thiết của định lí không nói gì tới tính giải tích của f(z) tại a.

Khi $\zeta \in L_1$ thì $\left|\frac{z-a}{\zeta - a}\right| > 1$; khi đó ta có thể làm như sau:

Hiển nhiên ta có $\left|\frac{\zeta - a}{z-a}\right| < 1$ nên:

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{\zeta - a - (z-a)} = \frac{1}{(z-a) - (\zeta - a)} = \frac{1}{(z-a)\left(1 - \frac{\zeta - a}{z-a}\right)} = \frac{1}{(z-a)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta - a}{z-a}\right)^k$$

$$\frac{-f(\zeta)}{2\pi j(\zeta - z)} == \frac{-f(\zeta)}{2\pi j}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\zeta - a)^k}{(z-a)^{k+1}}$$

Chuỗi bên phải hội tụ đều đối với $\zeta \in L_1$. Vậy ta có thể tích phân từng số hạng dọc theo L_1:

$$-\frac{1}{2\pi j}\oint_{L_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-a}=\frac{1}{2\pi j}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z-a)^{k+1}}\oint_{L_2}(\zeta-a)^{k+1}f(\zeta)d\zeta$$

Trong vế phải, đổi kí hiệu của chỉ số chạy bằng cách đặt k + 1 = -n. Khi k = 0, 1, 2,.. thì n = -1, -2,...Vậy:

$$-\frac{1}{2\pi j}\oint_{L_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-a}=\frac{1}{2\pi j}\sum_{n=-1}^{-\infty}(z-a)^n.\oint_{L_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

Nếu đặt:

$$c_n=\frac{1}{2\pi j}\oint_{L_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}},\ \ n=-1,-2,... \tag{27}$$

thì: $$-\frac{1}{2\pi j}\oint_{L_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-a}=\sum_{n=-1}^{-\infty}c_n(z-a)^n \tag{28}$$

Thay các kết quả vào (24) ta có:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\sum_{n=-1}^{-\infty}c_n(z-a)^n=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n \tag{29}$$

Với:

$$c_n=\frac{1}{2\pi j}\oint_{L2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}\ \ \text{nếu } n=0,1,2,...$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi j}\oint_{L_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}\ \ \text{nếu } n=-1,-2,...$$

Nếu gọi L là một đường cong kín bất kì bao điểm a và nằm gọn trong vành khăn G thì trong biểu thức tính c_n có thể thay tích phân dọc theo đường L_1 và L_2 bởi tích phân dọc theo L, nghĩa là:

$$c_n=\frac{1}{2\pi j}\oint_{L}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}\ \ n=0,\pm1,\pm2,\pm3,... \tag{30}$$

Tóm lại ta đã chứng minh được rằng với z bất kì thuộc G ta có khai triển (29) với c_n tính theo (30).

Trong khai triển Laurent chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n$ gồm các luỹ thừa dương của (z - a), được gọi là tích phân đều của chuỗi Laurent và chuỗi $\sum_{n=-1}^{-\infty}c_n(z-a)^n$ gồm các luỹ thừa nguyên âm được gọi là phần chính . Như vậy chuỗi Laurent có thể xem là tổng của hai chuỗi phần đều và phần chính.

Theo định lí Abel, phần đều hội tụ bên trong hình tròn lớn | z - a | < R, và hội tụ đều trong hình tròn kín | z -a | ≤ R’ (R’ bất kì nhỏ hơn R). Tương tự, phần chính hội tụ phần chính hội tụ bên ngoài vòng tròn nhỏ tứ là trong miền | z - a | > r và hội tụ đều trong miền | z - a | ≥ r’ (r’ bất kì lớn hơn r)

Muốn chứng minh tính duy nhất của khai triển Laurent ta làm tương tự như khi chứng minh tính duy nhất của khai triển Taylor.

2. Ghi chú: Nếu hình tròn nhỏ | z - a | ≤ r không chứa điểm bất thường của f(z), nghĩa là nếu f(z) giải tích trong hìn tròn lớn | z - a | < R thì $\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$ (n = -1, -2, -3,...) cũng giải tích trong hình tròn đó. Vậy theo định lí Cauchy:

$$c_n = \frac{1}{2\pi j}\oint_L \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} = 0, \quad n = -1, -2, -3,...$$

Phần chính sẽ triệt tiêu và khai triển Laurent trở thành khai triển Taylor. Nói khác đi, khia triển Taylor là trường hợp riêng của khai triển Laurent.

3. Một số phương pháp khai triển thành chuỗi Laurent: Trong một số trường hợp ta có thể dùng những phương pháp khai triển thành chuỗi Laurent đơn giản hơn là áp dụng công thức (23).

Chẳng hạn, nếu f(z) giải tích trong miền r < | z -a | < R, có thể viết được dưới dạng tổng của hai hàm :

$f(z) = f_1(z) + f_2(z)$

hay dưới dạng tích của 2 hàm:

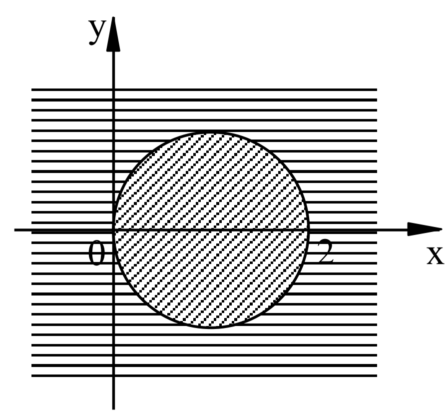
$f(z) = f_1(z).f_2(z)$

trong đó $f_1(z)$ giải tích trong hình tròn lớn | z - a | < R, còn $f_2(z)$ giải tích bên ngoài hình tròn nhỏ, tức trong miền | z - a | > r, thì ta tìm cách khai triển $f_1(z)$ thành chuỗi luỹ thừa đối với (z - a) và khai triển $f_2(z)$ thành chuỗi luỹ thừa đối với $(z - a)^{-1}$.

Cũng có thể dựa vào các khai triển Taylor của các hàm sơ cấp như e^z, cosz, sinz... để khai triển một số hàm siêu việt thành chuỗi Laurent.

Ví dụ 1: Khai triển hàm :

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$



thành chuỗi Laurent tâm tại 1 trong các miền sau:

- hình tròn bỏ tâm 0 < | z - 1 | < 1
- miền ngoài hình tròn trên

Với hình tròn bỏ tâm 0 < | z - 1 | < 1ta viết:

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

Vì hàm $f_2(z) = \frac{1}{z-1}$ giải tích khắp nơi trừ tại z = 1. Bản thân hàm $f_2(z)$ đã là một luỹ thừa của (z - 1) nên chỉ cần khai triển $f_1(z)$.

Vì trong miền | z -1 | < 1, hàm $f_1(z)$ giải tích nên nó khai triển được thành chuỗi Taylor tại z = 1.

$$f_1(z) = \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-1-1} = \frac{-1}{-1-(z-1)}$$
$$= -\left[1 + (z-1) + (z-1)^2 + \cdots + (z-1)^n + \cdots\right]$$

Vậy trong miền 0 < | z -1 | < 1 ta có:

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} - 1 - (z-1) - (z-1)^2 - \cdots - (z-1)^n - \cdots$$

Bây giờ ta tìm khai triển trong hình tròn | z -1| > 1. Trong miền này ta có:

$$f_1(z) = \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-1-1} = \frac{1}{(z-1)\left[1 - \frac{1}{z-1}\right]}$$

Vì $\frac{1}{|z-1|} < 1$ nên ta có khai triển :

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{z-1}} = 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \cdots$$

Vậy:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-1}\left[1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \cdots\right] = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \cdots + \frac{1}{(z-1)^2} + \cdots$$

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} + \cdots + \frac{1}{(z-1)^n} + \cdots$$

Ví dụ 2: Viết khai triển của hàm $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ theo các luỹ thừa của z khi z thuộc các miền sau:

- hình tròn | z | < 1
- hình vành khăn 1 < | z | < 2
- miền ngoài hình tròn tâm O, bán kính 2 : | z | > 2

Trong hình tròn | z | < 1, hàm f(z) giải tích, vậy nó khai triển được thành chuỗi Taylor. Ta phân tích F(z) rồi viết khai triển cho từng số hạng.

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2\left(\frac{z}{2} - 1\right)} = -\frac{1}{2\left(1 - \frac{z}{2}\right)} = -\frac{1}{2}\left[1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{2^3} + \cdots\right]$$

$$-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

Vậy:

$$f(z) = -\frac{1}{2}\left[1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{2^3} + \cdots\right] + \left[1 + z + z^2 + z^3 + \cdots\right]$$

Hay: $f(z) = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)z + \left(1 - \frac{1}{2^3}\right)z^2 + \cdots + \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n + \cdots$

Xét trong miền $1 < | z | < 2$. Vì hàm $\frac{1}{z-2}$ giải tích trong miền $| z | < 2$ nên nó khai triển được thành chuỗi Taylor đối với z:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\left[1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^3}{2^3}+\cdots\right]$$

Còn hàm $\frac{1}{1-z}$ giải tích bên ngoài hình tròn đơn vị nên ta tìm cách khai triển nó theo chuỗi luỹ thừa của $\frac{1}{z}$. Ta có:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z\left(\frac{1}{z}-1\right)} = -\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}$$

Vì ở đây $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ nên:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = 1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots$$

Vậy: $\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right) = -\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\cdots$

$$f(z) = \frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2}\left[1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^3}{2^3}+\cdots\right]-\left[\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots+\frac{1}{z^n}+\cdots\right]$$

$$= -\frac{1}{2}-\frac{z}{2^2}-\frac{z^2}{2^3}-\cdots\frac{z^n}{2^{n+1}}-\cdots-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\cdots-\frac{1}{z^n}-\cdots$$

Xét trong miền $| z | > 2$. Ta phải khai triển hai hàm số $\frac{1}{z-2}$ và $\frac{1}{z-1}$ theo chuỗi luỹ thừa của $\frac{1}{z}$:

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\cdots$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)}$$

Vì ở đây $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$ nên: $\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = 1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\cdots$

Vậy: $$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{2^2}{z^3}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{z^n}+\cdots$$

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z^2}+\frac{2^2-1}{z^3}+\cdots+\frac{2^{n-1}-1}{z^n}+\cdots$$

Ví dụ 3: Khai triển hàm số $f(z)=\sin\left(\frac{z}{z-1}\right)$ thành chuỗi Laurent tâm tại 1.

Ta viết:

$$f(z)=\sin\left(\frac{z}{z-1}\right)=\sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=\sin 1.\cos\frac{1}{z-1}+\cos 1.\sin\frac{1}{z-1}$$

Dựa vào khai triển của sinz và cosz ta có:

$$\sin\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\frac{1}{5!(z-1)^5}-\cdots$$

$$\cos\frac{1}{z-1}=1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{4!(z-1)^4}-\cdots$$

Hai khai triển trên đúng $\forall z\neq 1$. Vậy:

$$\sin\left(\frac{z}{z-1}\right)=\sin 1+\frac{\cos 1}{z-1}-\frac{\sin 1}{2!(z-1)^2}-\frac{\cos 1}{3!(z-1)^3}+\cdots+$$

$$(-1)^n\frac{\sin 1}{2n!(z-1)^{2n}}+(-1)^n\frac{\sin 1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}+\cdots$$

Ví dụ 4: Khai triển thành chuỗi Fourrier hàm số:

$$\varphi(t)=\frac{a\sin t}{1-2a\cos t+a^2}\qquad (|a|<1)\text{ , t là biến số thực}$$

Theo công thức Euler:

$$\cos t=\frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2};\qquad \sin t=\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2}$$

Thay vào biểu thức của $\varphi(t)$ ta có:

$$\varphi(t)=\frac{1-e^{2jt}}{2j\left[e^{2jt}-\left(a+\frac{1}{a}\right)e^{jt}+1\right]}$$

Xét hàm:

$$f(z)=\frac{1-z^2}{2j\left[z^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)z+1\right]}$$

Hiển nhiên $f(e^{jt})=\varphi(t)$. Vậy $\varphi(t)$ là giá trị của hàm f(z) trên đường tròn đơn vị $z=e^{jt}$. Dễ thấy rằng hàm f(z) giải tích trong một hình vành khăn tâm O, chứa đường tròn đơn vị | z | = 1. Ta sẽ khai triển f(z) thành chuỗi Laurent trong hình vành khăn này. Trước hết ta phân tích f(z) thành tổng các phân thức đơn giản:

$$f(z)=\frac{1}{2j}\left(-1+\frac{1}{1-\frac{z}{a}}+\frac{1}{1-az}\right)$$

Chú ý rằng với | az | < 1 ta có:

$$\frac{1}{1-az}=1+az+(az)^2+(az)^3+\cdots$$

còn với | z | > | a | ta có:

$$\frac{1}{1-\frac{z}{a}}=-\frac{1}{\frac{z}{a}\left(1-\frac{a}{z}\right)}=-\frac{a}{z}\left(1+\frac{a}{z}+\frac{a^2}{z^2}+\frac{a^3}{z^3}+\cdots\right)$$

Vậy trong miền $|a|<|z|<\frac{1}{|a|}$ ta có:

$$f(z)=\frac{1}{2j}\left(az+a^2z^2+a^3z^3+\cdots-\frac{a}{z}-\frac{a^2}{z^2}-\frac{a^3}{z^3}-\cdots\right)=\frac{1}{2j}\sum_{n=1}^{\infty}a^n\left(z^n-\frac{1}{z^n}\right)$$

Khi z = z^{jt}, | z | = 1, ta có:

$$\varphi(t)=\frac{1}{2j}\sum_{n=1}^{\infty}a^n\left(e^{njt}-e^{-njt}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a^n\,\frac{e^{njt}-e^{-njt}}{2j}=\sum_{n=1}^{\infty}a^n\sin(nt)$$

Đó là khai triển Fourrier cần tìm.

§5. ĐIỂM BẤT THƯỜNG CỦA HÀM GIẢI TÍCH

1. Phân loại: Giả sử a là điểm bất thường cô lập của hàm f(z), nghĩa là tồn tại một lân cận khá bé của a trong đó chỉ có a là điểm bất thường. Như vậy f(z) sẽ giải tích trong hình vành khăn nhỏ tâm a. Theo mục 5, ta có thể khai triển f(z) thành chuỗi Laurent trong hình vành khăn này. Ta căn cứ vào khai triển Laurent để phân loại tính bất thường của điểm a.

Nếu khai triển Laurent không chứa phần chính tức là $c_n = 0\ \forall n < 0$. Do đó:

$$f(z)= c_o + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 +\cdots \qquad (31)$$

thì điểm a được gọi là điểm bất thường bỏ được.

Nếu a là điểm bất thường bỏ được, thì theo (3) ta có:

$$\lim_{z\to a} f(a)=c_o$$

Do đó nếu đặt f(a) = c_o thì hàm f(z) được bổ sung giá trị tại điểm a. Như vậy nó sẽ là một hàm giải tích trong cả lân cận nói trên của a. Điều đó giải thích ý nghĩa của thuật ngữ "bỏ được" được dùng ở đây.

Nếu trong phần chính chỉ có một số hữu hạn các số hạng thì a được gọi là cực điểm. Khi đó khai triển có dạng:

$$f(z)=\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{(z-a)}+c_o+c_1(z-a)+\cdots \qquad (32)$$

Trong đó $c_{-n} \neq 0$. Số mũ n được gọi là cấp của cực điểm.
Nếu a là cực điểm thì từ (32) suy ra:

$$\lim_{z\to a} f(z)=\infty$$

Nếu phần chính của khai triển có vô số số hạng thì ta gọi a là điểm bất thường cốt yếu của f(z). Đối với điểm bất thường cốt yếu ta có định lí Xakhốtxki:

Nếu a là điểm bất thường cốt yếu của f(z) thì với mọi số A cho trước, luôn luôn tồn tại một dãy $\{z_k\}$ dần tới điểm a sao cho dãy {f(z)} dần tới A.

Ví dụ 1: Xét hàm $f(z)=\frac{\sin z}{z}$. Nó thừa nhận điểm z = 0 làm điểm bất thường cô lập.
Khai triển f(z) theo luỹ thừa của z ta có:

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots$$

Vậy điểm z = 0 là điểm bất thường bỏ được của hàm. Nếu ta bổ sung như sau:

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin z}{z} & \text{khi } z\neq 0\\ 1 & \text{khi } z=0\end{cases}$$

thì f(z) giải tích cả tại z = 0.

Ví dụ 2: Hàm $f(z)=\frac{e^z}{z^3}$ thừa nhận điểm z = 0 làm điểm bất thường cô lập. Khai triển theo luỹ thừa của z ta có:

$$\frac{e^z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!}+\frac{z}{4!}+\cdots$$

Từ đó suy ra điểm z = 0 là cực điểm cấp 3 của f(z).

Ví dụ 3: Xét hàm $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$. Điểm z = 0 là điển bất thường cốt yếu của hàm vì:

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots$$

2. Định lí: Giả sử $f(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ trong đó $f_1(z)$ và $f_2(z)$ là các hàm giải tích tại a. Nếu điểm a không phải là không điểm của tử số, tức $f_1(a) \neq 0$ và là không điểm cấp m của mẫu số, thì a là cực điểm cấp m của f(z).
Chứng minh: theo giả thiết ta có $f_2(z) = (z - a)^m\varphi(z)$ với $\varphi(z)$ giải tích tại a và $\varphi(a) = 0$.
Hàm $\frac{f_1(z)}{\varphi(z)}$ giải tích tại a nên có thể khai triển nó thành chuỗi Taylor ở lân cận điểm a

$$\frac{f_1(z)}{\varphi(z)} = b_o + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \cdots \text{ với } b_o = \frac{f_1(a)}{\varphi(a)} \neq 0$$

Từ đó suy ra khai triển Laurent của f(z) là:

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{(z-a)^m \varphi(z0} = \frac{b_o}{(z-a)^m} + \frac{b_1}{(z-a)^{m-1}} + \cdots$$

Điều đó chứng tỏ a là cực điểm cấp m của f(z)

Ví dụ: Xét hàm $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2+4}$

Vì $z^2 + 4 = (z + 2j)(z - 2j)$ nên mẫu số có hai không điểm đơn là z = ± 2j. Vậy f(z) phải có hai cực điểm đơn là z = ± 2j.

Ví dụ: Xét hàm $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z^2+1)^3}$

Vì $(z^2 + 1)^3 = (z^2 +j)(z^2 - j)^3$ nên z = ±j là những không điểm cấp 3 của mãu số. Vù vậy z = ± j là những cực điểm cấp 3 của mẫu số.