CHƯƠNG 1: HÀM GIẢI TÍCH

§1. SỐ PHỨC VÀ CÁC PHÉP TÍNH

1. Dạng đại số của số phức: Ta gọi số phức là một biểu thức dạng $(x + jy)$ trong đó x và y là các số thực và j là đơn vị ảo. Các số x và y là phần thực và phần ảo của số phức. Ta thường kí hiệu:

$z = x + jy$
$x = Rez = Re(x + jy)$
$y = Imz = Im(x + jy)$

Tập hợp các số phức được kí hiệu là **C**. Vậy:

$C = \{ z = x + jy \mid x \in R , y \in R\}$

trong đó R là tập hợp các số thực.
Nếu $y = 0$ ta có $z = x$, nghĩa là số thực là trường hợp riêng của số phức với phần ảo bằng 0. Nếu $x = 0$ ta $z = jy$ và đó là một số thuần ảo.
Số phức $\overline{z} = x - jy$ được gọi là số phức liên hợp của $z = x + jy$. Vậy $Re(\overline{z}) = Re(z)$, $Im(\overline{z}) = -Im(z)$, $\overline{\overline{z}} = z$.
Số phức $-z = -x - jy$ là số phức đối của $z = x + jy$.
Hai số phức $z_1 = x_1 + jy_1$ và $z_2 = x_2 + jy_2$ gọi là bằng nhau nếu $x_1 = x_2$ và $y_1 = y_2$.

2. Các phép tính về số phức:

a. Phép cộng: Cho hai số phức $z_1 = x_1 + jy_1$ và $z_2 = x_2 + jy_2$. Ta gọi số phức

$z = (x_1 + x_2) + j(y_1 + jy_2)$

là tổng của hai số phức z_1 và z_2.
Phép cộng có các tính chất sau:

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (giao hoán)
$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ (kết hợp)

b. Phép trừ: Cho 2 số phức $z_1 = x_1 + jy_1$ và $z_2 = x_2 + jy_2$. Ta gọi số phức

$z = (x_1 - x_2) + j(y_1 - jy_2)$

là hiệu của hai số phức z_1 và z_2.

c. Phép nhân: Cho 2 số phức $z_1 = x_1 + jy_1$ và $z_2 = x_2 + jy_2$. Ta gọi số phức

$z = z_1.z_2 = (x_1x_2-y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1)$

là tích của hai số phức z_1 và z_2.
Phép nhân có các tính chất sau:

$z_1,z_2 = z_2.z_1$ (tính giao hoán)
$(z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3)$ (tính kết hợp)
$z_1(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_2.z_3$ (tính phân bố)
$(-1.z) = -z$
$z.0 = 0. z = 0$
$j.j = -1$

d. Phép chia: Cho 2 số phức $z_1 = x_1 + jy_1$ và $z_2 = x_2 + jy_2$. Nếu $z_2 \neq 0$ thì tồn tại một số phức $z = x + jy$ sao cho $z.z_2 = z_1$. Số phức:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j\frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

được gọi là thương của hai số phức z_1 và z_2.

e. Phép nâng lên luỹ thừa: Ta gọi tích của n số phức z là luỹ thừa bậc n của z và kí hiệu:

$$z^n = z.z\cdots z$$

Đặt $w = z^n = (x + jy)^n$ thì theo định nghĩa phép nhân ta tính được Rew và Imw theo x và y.

Nếu $z^n = w$ thì ngược lại ta nói z là căn bậc n của w và ta viết:

$$z = \sqrt[n]{w}$$

f. Các ví dụ:

Ví dụ 1: $j^2 = -1$

$j^3 = j^2.j = -1.j = -j$

Ví dụ 2: $(2+j3) + (3-5j) = 5-2j$

$$\frac{1}{j} = -j$$

$$\frac{2+5j}{1-j} = \frac{(2+5j)(1+j)}{1-j^2} = \frac{-3+7j}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2}j$$

Ví dụ 3: $z + \overline{z} = (x + jy) + (x - jy) = 2x = 2\,\mathrm{Re}\,z$

Ví dụ 4: Tìm các số thực thoả mãn phương trình:

$$(3x - j)(2 + j) + (x - jy)(1 + 2j) = 5 + 6j$$

Cân bằng phần thực và phần ảo ta có:

$$x = \frac{20}{17} \quad y = -\frac{36}{17}$$

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} z + j\varepsilon = 1 \\ 2z + \varepsilon = 1 + j \end{cases}$$

Ta giải bằng cách dùng phương pháp Cramer và được kết quả:

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & j \\ 1+j & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & j \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2-j}{1-2j} = \frac{(2-j)(1+2j)}{5} = \frac{4+3j}{5}$$

$$\varepsilon = \frac{\begin{vmatrix} 1 & j \\ 2 & 1+j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & j \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{j-1}{1-2j} = \frac{(j-1)(1+2j)}{5} = \frac{-3-j}{5}$$

Ví dụ 6: Chứng minh rằng nếu đa thức P(z) là một đa thức của biến số phức z với các hệ số thực:

$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_n$ thì $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$

Thật vậy ta thấy là số phức liên hợp của tổng bằng tổng các số phức liên hợp của từng số hạng, số phức liên hợp của một tích bằng tích các số phức liên hợp của từng thừa số. Do vậy:

$$\overline{a_k z^{n-k}} = \overline{a_k}.\overline{z^{n-k}}$$

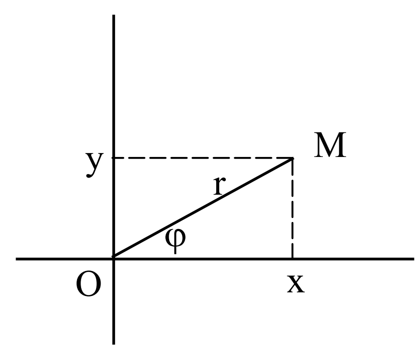
Do đó:

$$\overline{P(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z^{n-k}} = P(\overline{z})$$

Từ kết quả này suy ra nếu đa thức $P(z)$ có các hệ số thực và nếu α là một nghiệm phức của nó tức $P(\alpha) = 0$ thì $\overline{\alpha}$ cũng là nghiệm của nó, tức $P(\overline{\alpha}) = 0$.

3. Biểu diễn hình học: Cho số phức $z = x + jy$. Trong mặt phẳng xOy ta xác định điểm $M(x,y)$ gọi là toạ vị của số phức z. Ngược lại cho điểm M trong mặt phẳng, ta biết toạ độ (x,y) và lập được số phức $z = x + jy$. Do đó ta gọi xOy là mặt phẳng phức. Ta cũng có thể biểu diễn số phức bằng một vec tơ tự do có toạ độ là (x,y).

4. Mođun và argumen của số phức z: Số phức z có toạ vị là M. Ta gọi độ dài r của vec tơ $\overrightarrow{OM}$ là mođun của z và kí hiệu là $|z|$.



Góc φ xác định sai khác $2k\pi$ được gọi là argumen của z và kí hiệu là Argz:

$$r = |z| = OM$$

$$\mathrm{Argz} = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right) = \varphi + 2k\pi$$

đặc biệt, trị số của Argz nằm giữa $-\pi$ và π gọi là giá trị chính của Argz và kí hiệu là argz. Trường hợp $z = 0$ thì Argz không xác định.

Giữa phần thực, phần ảo, mođun và argumen có liên hệ:

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

$$\arg z = \begin{cases} \mathrm{acrtg}\dfrac{y}{x} & \text{khi } x > 0 \\ \pi + \mathrm{acrtg}\dfrac{y}{x} & \text{khi } x < 0, y \geq 0 \\ -\pi + \mathrm{acrtg}\dfrac{y}{x} & \text{khi } x < 0, y < 0 \end{cases}$$

Với $x = 0$ từ định nghĩa ta có:

$$\arg z = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{khi } y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{khi } y < 0 \end{cases}$$

Hai số phức bằng nhau có mođun và argumen bằng nhau.

$$|z| = |\overline{z}|$$

$$z.\overline{z} = |z|^2$$

Từ cách biểu diễn số phức bằng vec tơ ta thấy số phức (z_1 - z_2) biểu diễn khoảng cách từ điểm M_1 là toạ vị của z_1 đến điểm M_2 là toạ vị của z_2. Từ đó suy ra $|z| = r$ biểu thị đường tròn tâm O, bán kính r. Tương tự $|z - z_1| = r$ biểu thị đường tròn tâm z_1, bán kính r; $|z - z_1| > r$ là phần mặt phức ngoài đường tròn và $|z - z_1| < r$ là phần trong đường tròn đó.

Hơn nữa ta có các bất đẳng thức tam giác:

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \ ; \ |z_1 - z_2| \ge ||z_1| - |z_2||$$

Từ định nghĩa phép nhân ta có:

$$z_1.z_2 = r_1.r_2\,[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) - j(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_2)]$$
$$= r_1.r_2\,[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

Vậy: $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$

$$\text{Arg}(z_1.z_2) = \text{Arg}z_1 + \text{Arg}z_2 + 2k\pi$$

Tương tự, nếu $z_2 \neq 0$ thì:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}z_1 + \text{Arg}z_2 + 2k\pi$$

5. Các ví dụ:

Ví dụ 1: $|3 + 2j| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

Ví dụ 2: Viết phương trình đường tròn $A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0$ với các hệ số A, B, C, D là các số thực trong mặt phẳng phức.

Ta đặt $z = x + jy$ nên $\overline{z} = x - jy$.

Mặt khác $x^2 + y^2 = |z|^2 = z.\overline{z}$

$$2x = z + \overline{z}$$

$$2y = \frac{z - \overline{z}}{j} = -j(z - \overline{z})$$

Thay vào phương trình ta có:

$$Az\overline{z} + B(z + \overline{z}) - Cj(z - \overline{z}) = 0$$

hay $\quad Az\overline{z} + \overline{E}z + E\overline{z} + D = 0$

6. Dạng lượng giác của số phức: Nếu biểu diễn số phức z theo r và φ ta có:

$$z = x + jy = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

Đây là dạng lượng giác số phức z.

Ví dụ: $z = -2 = 2(\cos\pi + j\sin\pi)$

Các phép nhân chia dùng số phức dưới dạng lượng giác rất tiên lợi. Ta có:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

$$z_2 = r_2(\cos\psi + j\sin\psi)$$

$$z = z_1.z_2 = r_1r_2[\cos(\varphi+\psi) + j\sin(\varphi+\psi)]$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi-\psi) + j\sin(\varphi-\psi)]$$

Áp dụng công thức trên để tính tích n thừa số z, tức là $z^{n.}$ ta có:

$$[r(\cos\varphi + j\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + j\sin n\varphi)$$

Đặc biệt khi r = 1 ta có công thức Moivre:

$$(\cos\varphi + j\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + j\sin n\varphi)$$

Thay φ bằng -φ ta có:

$$(\cos\varphi - j\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi - j\sin n\varphi)$$

Ví dụ: Tính các tổng:

$$s = \cos\varphi + \cos2\varphi + \cdots + \cos n\varphi$$

$$t = \sin\varphi + \sin2\varphi + \cdots + \sin n\varphi$$

Ta có $jt = j\sin\varphi + j\sin2\varphi + \cdots + j\sin n\varphi$

Đặt $z = \cos\varphi + j\sin\varphi$ và theo công thức Moivre ta có:

$$s + jt = z + z^2 + \cdots + z^n$$

Vế phải là một cấp số nhân gồm n số, số hạng đầu tiên là z và công bội là z. Do đó ta có:

$$s + jt = z\frac{z^n - 1}{z - 1} = \frac{z^{n+1} - z}{z - 1} = \frac{\cos(n+1)\varphi + j\sin(n+1)\varphi - \cos\varphi - j\sin\varphi}{\cos\varphi + j\sin\varphi - 1}$$

$$= \frac{[\cos(n+1)\varphi - \cos\varphi] + j[\sin(n+1)\varphi - \sin\varphi]}{(\cos\varphi - 1) + j\sin\varphi}$$

$$= \frac{[\cos(n+1)\varphi - \cos\varphi] + j[\sin(n+1)\varphi - \sin\varphi]}{(\cos\varphi - 1) + j\sin\varphi} \cdot \frac{(\cos\varphi - 1) - j\sin\varphi}{(\cos\varphi - 1) - j\sin\varphi}$$

Như vậy:

$$s = \mathrm{Re}(s + jt) = \frac{\cos(n+1)\varphi.\cos\varphi - \cos^2\varphi - \cos(n+1)\varphi + \cos\varphi + \sin(n+1)\varphi.\sin\varphi - \sin^2\varphi}{(\cos\varphi - 1)^2 + \sin^2\varphi}$$

$$= \frac{\cos(n+1)\varphi.\cos\varphi + \sin(n+1)\varphi.\sin\varphi - \cos(n+1)\varphi + \cos\varphi - 1}{2 - 2\cos\varphi}$$

$$= \frac{\cos\varphi - \cos(n+1)\varphi + \cos n\varphi - 1}{2(1 - \cos\varphi)}$$

Tương tự ta tính được

$t = \mathrm{Im}(s+jt)$

Khi biểu diễn số phức dưới dạng lượng giác ta cũng dễ tính được căn bậc n của nó. Cho số phức $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ ta cần tìm căn bậc n của z, nghĩa là tìm số phức ζ sao cho:

$\zeta^n = z$

trong đó n là số nguyên dương cho trước.

Ta đặt $\zeta = \rho(\cos\alpha + j\sin\alpha)$ thì vấn đề là phải tìm ρ và α sao cho:

$$\rho^n(\cos n\alpha + j\sin n\alpha) = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

Nghĩa là $\rho^n = r$

và $n\alpha = \varphi$

Kết quả là: $\zeta = \sqrt[n]{r}\ ;\ \alpha = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$

Cụ thể, căn bậc n của z là số phức:

$$\zeta_o = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + j\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

$$\zeta_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi}{n} + j\sin\frac{\varphi + 2\pi}{n}\right)$$

. . . . . .

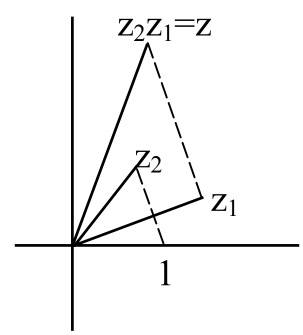
$$\zeta_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n} + j\sin\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}\right]$$

với k là số nguyên và chỉ cần lấy n số nguyên liên tiếp (k = 0, 1, 2,...,n-1) vì nếu k lấy hai số nguyên hơn kém nhau n thì ta có cùng một số phức.

7. Toạ vị của số phức tổng, hiệu, tích và thương hai số phức:

a. Toạ vị của tổng và hiệu: Toạ vị của tổng hai số phức là tổng hay hiệu 2 vec tơ biểu diễn số phức đó.

b. Toạ vị của tích hai số phức: Ta có thể tìm toạ vị của tích hai số phức bằng phương pháp dựng hình. Cho hai số phức z_1 và z_2 như hình vẽ. Ta dựng trên cạnh Oz_1 tam giác Oz_1z đồng dạng với tam giác $O1z_2$. Như vậy Oz là tích của hai số phức z_1 và z_2.



Thật vậy, do tam giác Oz_1z đồng dạng với tam giác $O1z_2$ nên ta có:

$$\frac{z}{z_1} = \frac{z_2}{1} \quad \text{hay} \quad z = z_1.z_2$$

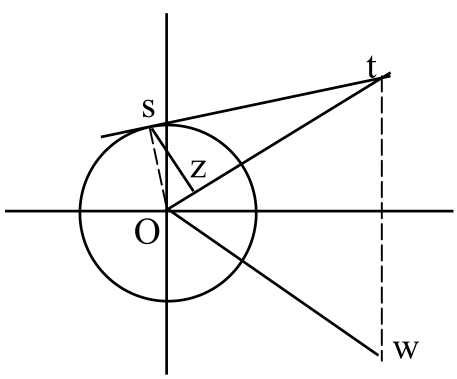
c. Toạ vị của thương hai số phức: Việc tìm thương hai số phức đưa về tìm tích $z_1.\dfrac{1}{z_2}$. Vì vậy ta chỉ cần tìm $w = \dfrac{1}{z}$. Trước hết ta giả thiết | z | < 1(hình a)

Ta tìm w theo các bước sau:

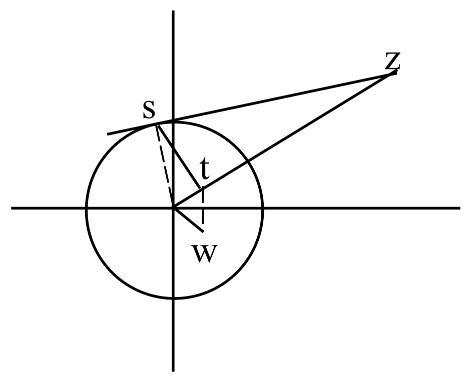
- vẽ đường tròn đơn vị và z

- dựng tại z đường vuông với Oz và cắt đường tròn đơn vị tại s
- vẽ tiếp tuyến với đường tròn tại s và cắt Oz tại t.
- do ΔOzs & ΔOst đồng dạng nên ta có $|\, t\,| = \frac{1}{|\, z\,|}$
- lấy w đối xứng với t.

Trường hợp | z | > 1 ta vẽ như hình b:
- vẽ đường tròn đơn vị và z
- từ z vẽ tiếp tuyến với đường tròn tại s
- dựng tại s đường vuông với Oz cắt Oz tại t
- do Ozs và Ost đồng dạng nên ta có $|\, t\,| = \frac{1}{|\, z\,|}$
- lấy w đối xứng với t.



a



b

8. Dạng mũ của số phức: Nhờ công thức Euler $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$ ta có thể biểu diễn số phức dưới dạng số mũ:

$$z = re^{j\varphi} = |\, z\,|e^{jArgz}$$

Ví dụ $z = -1 - j = \sqrt{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}}$

Biểu diễn số phức dưới dạng mũ rất tiện lợi khi cần nhân hay chia các số phức:

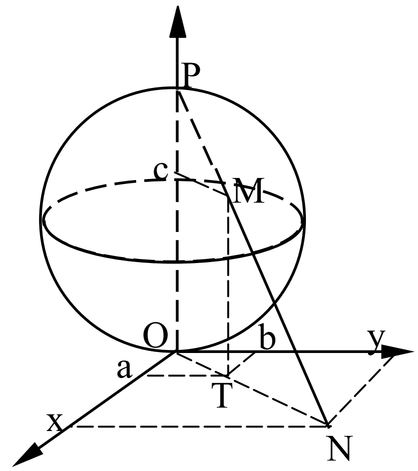
$$z_1 = r_1e^{j\varphi} \qquad z_2 = r_2e^{j\alpha}$$

$$z_1z_2 = r_1r_2e^{j(\varphi+\alpha)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{j(\varphi-\alpha)}$$

9. Mặt cầu Rieman: Ta xét một mặt cầu S tâm (0, 0, 0.5), bán kính 0.5 (tiếp xúc với mặt phẳng xOy tại O). Mặt phẳng xOy là mặt phẳng phức z với Ox là trục thực và Oy là trục ảo. Đoạn thẳng nối điểm z = x + jy có toạ vị là N của mặt phẳng phức với điểm P(0, 0, 1) của mặt cầu cắt mặt cầu tại điểm M(a, b, c). Ta gọi M là hình chiếu nổi của điểm z lên mặt cầu S với cực P. Phép ánh xạ này lập nên một tương ứng một - một giữa tất cả các điểm của mặt phẳng z và của mặt cầu S thủng tại P. Vì các điểm P, M, và N cùng nằm trên một đường thẳng nên ta có:

$$\frac{OT}{ON} = \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{PM}{PN} = \frac{1-c}{1}$$



hay $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{1-c}{1}$

hay: $x = \frac{a}{1-c}\,; y = \frac{b}{1-c}\,; z = \frac{a+jb}{1-c}$

Từ đó: $|z|^2 = \frac{(a^2+b^2)}{(1-c)^2}$

và do : $a^2 + b^2 + c^2 - c = 0$

suy ra: $|z|^2 = \frac{c}{1-c}$

hay: $c = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}\;;\; a = \frac{x}{1+|z|^2}\;;\; b = \frac{y}{1+|z|^2}$

Hình chiếu nổi có tính chất đáng lưu ý sau: mỗi đường tròn của mặt phẳng z(đường thẳng cũng được coi là đường tròn có bán kính ∞) chuyển thành một đường tròn trên mặt cầu và ngược lại. Thật vậy để ý $x = \frac{z+\overline{z}}{2}; y = \frac{z+\overline{z}}{2j}$ ta thấy mỗi đường tròn của mặt phẳng z thoả mãn một phương trình dạng:

$$Az\overline{z} + \frac{1}{2}B(z+\overline{z}) - \frac{j}{2}C(z-\overline{z}) + D = 0$$

Trong đó A, B, C, D là các số thực thỏa mãn $A \geq 0$, $B^2 + C^2 > 4AD$, đặc biệt đối vơsi đường thẳng A = 0. Áp dụng các gái trị của z, x, y ta có:

$$(A - D)c + Ba + Cb + D = 0$$

đây là một đường tròn trên mặt cầu S.

§2. HÀM MỘT BIẾN PHỨC

1. Khái niệm về miền và biên của miền:

a. Điểm trong của một tập: Giả sử E là tập hợp điểm trong mặt phẳng phức z và z_o là một điểm thuộc E. Nếu tồn tại một số ε lân cận của z_o nằm hoàn toàn trong E thì z_o được gọi là điểm trong của tập E.

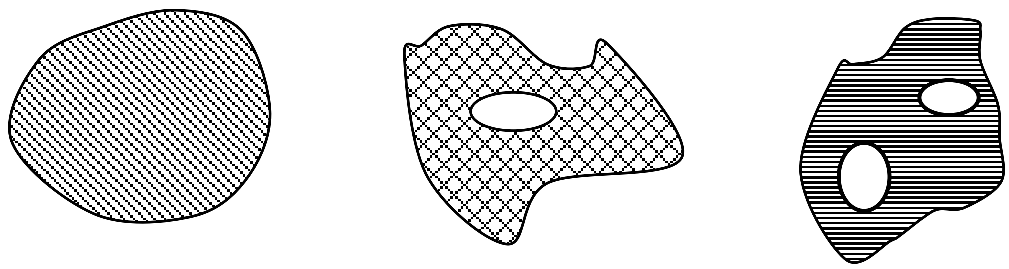
b**. **Biên của một tập: Điểm ζ thuộc E hay không thuộc E được gọi là điểm biên của tập E nếu mọi hình tròn tâm ζ đều chứa cả những điểm thuộc E và không thuộc E. Tập hợp các điểm biên của tập E được gọi là biên của tập E. Nếu điểm η không thuộc E và tồn tại hình tròn tâm η không chứa điểm nào của E thì η được gọi là điểm ngoài của tập E.

Ví dụ: Xét tập E là hình tròn $|z| < 1$. Mọi điểm của E đều là điểm trong. Biên của E là đường tròn $|z| = 1$. Mọi điểm $|\eta| > 1$ là điểm ngoài của E.

c. Miền: Ta gọi miền trên mặt phẳng phức là tập hợp G có các tính chất sau:

- G là tập mở, nghĩa là chỉ có các điểm trong.
- G là tập liên thông, nghĩa là qua hai điểm tuỳ ý thuộc G, bao giờ cũng có thể nói chúng bằng một đường cong liên tục nằm gọn trong G.

Tập G, thêm những điểm biên gọi là tập kín và kí hiệu là $\overline{G}$. Miền G gọi là bị chặn nếu tồn tại một hình trong bán kính R chứa G ở bên trong.



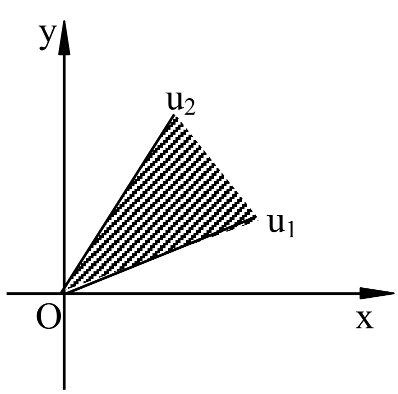
a *b* *c*

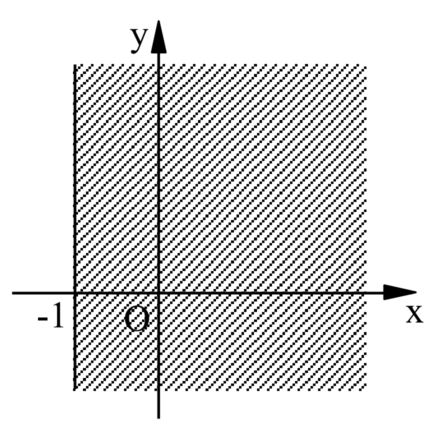
Trên hình a là miền đơn liên, hình b là miền nhị liên và hình c là miền tam liên. Hướng dương trên biên L của miền là hướng mà khi đi trên L theo hướng đó thì phần của miền G kề với người đó luôn nằm bên trái.

Ví dụ 1: Vẽ miền $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3}$

Ta vẽ tia $\overrightarrow{Ou_1}$ sao cho $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ou_1}) = \frac{\pi}{6}$. Sau đó vẽ tia $\overrightarrow{Ou_2}$ sao cho $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ou_2}) = \frac{\pi}{3}$. Mọi điểm z nằm trong u_1Ou_2 đều có argumen thoả mãn điều kiện bài toán. Ngược lại các điểm có argumen nằm giữa $\frac{\pi}{6}$ và $\frac{\pi}{3}$ đều ở trong góc u_1Ou_2

Vậy miền $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3}$ là phần mặt phẳng giới hạn bởi hai cạnh Ou_1 và Ou_2





Ví dụ 2: Vẽ miền Rez > -1

Mọi điểm nằm bên phải đường thẳng x = -1 đều thoả mãn Rez > -1. Ngược lại mọi điểm z có phần thực lớn hơn -1 đều nằm bên phải đường thẳng x = -1. Vậy miền Rez > -1 là nửa mặt phẳng phức gạch chéo trên hình vẽ.

2. Định nghĩa hàm biến phức:

a. Định nghĩa: Giả sử E là một tập hợp điểm trên mặt phẳng phức. Nếu có một quy luật cho ứng với mỗi số phức $z \in E$ một số phức xác định w thì ta nói rằng w là một hàm số đơn trị của biến phức z xác định trên E và ký hiệu:

$$w = f(z),\ z \in E \qquad (1)$$

Tập E được gọi là miền xác định của hàm số. Nếu ứng với một giá trị $z \in E$ ta có nhiều giá trị của w thì ta nói w là một hàm đa trị. Sau này khi nói đến hàm số mà không nói gì thêm thì đó là một hàm đơn trị.

Ví dụ: Hàm $w = \frac{1}{z}$ xác định trong toàn bộ mặt phẳng phức trừ điểm z = 0

Hàm $w = \frac{z}{z^2+1}$ xác định trong toàn bộ mặt phẳng phức trừ điểm $z = \pm j$ vì $z^2+1 = 0$ khi $z = \pm j$

Hàm $w = z + \sqrt{z+1}$ xác định trong toàn bộ mặt phẳng phức. Đây là một hàm đa trị. Chẳng hạn, với z = 0 ta có $w = \sqrt{1}$. Vì 1 = cos0 + j sin0 nên w có hai giá trị:

$$w_1 = \cos\frac{0}{2} + j\sin\frac{0}{2} = 1$$

$$w_2 = \cos\frac{0+2\pi}{2} + j\sin\frac{0+2\pi}{2} = \cos\pi + j\sin\pi = -1$$

nên ứng với z = 0 ta có hai giá trị $w_1 = 1$ và $w_1 = -1$

b. Phần thực và phần ảo của hàm phức: Cho hàm w = f(z) nghĩa là cho phần thực u và phần ảo v của nó. Nói khác đi u và v cũng là hai hàm của z. Nếu z= x+jy thì có thể thấy u và v là hai hàm thực của các biến thực độc lập x và y. Tóm lại. cho hàm phức w = f(z) tương đương với việc cho hai hàm biến thưc u = u(x, y) và v = v(x, y) và có thể viết w = f(z) dưới dạng:

$$w = u(x, y) + jv(x, y) \qquad (2)$$

Ta có thể chuyển về dạng (2) hàm phức cho dưới dạng (1).

Ví dụ 1: Tách phần thực và phần ảo của hàm phức $w = \frac{1}{z}$

Ta có:

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+jy} = \frac{x-jy}{(x+jy)(x-jy)} = \frac{x-jy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{jy}{x^2+y^2}$$

Vậy:

$$u = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad v = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

Ví dụ 2: Tách phần thực và phần ảo của hàm $w = z^3$

Ta có: $w = z^3 = (x+jy)^3 = x^3 + 3jx^2y + 3j^2xy^2 + j^3y^3 = (x^3 - 3xy^2) + j(3x^2y - y^3)$

Vậy: $u = x^3 - 3xy^2 \qquad v = 3x^2y - y^3$

Ví dụ 3: Cho hàm $w = x^2 - y + j(x + y^2)$. Hãy biểu diễn w theo z = x + jy và $\overline{z}$= x - jy

Vì $x = \frac{z + \overline{z}}{2}$ và $y = \frac{z - \overline{z}}{2j}$ nên:

$$w = \left(\frac{z + \overline{z}}{2}\right)^2 - \frac{j}{2}(\overline{z} - z) + j\left[\frac{z + \overline{z}}{2} + \left(\frac{\overline{z} - z}{2}\right)^2\right]$$

Rút gọn ta có:

$$w = \frac{1}{4}(1 - j)(z^2 + \overline{z^2}) + \frac{1}{2}(1 + j)z\overline{z} + jz$$

Ví dụ 4: Cho w = x^2 - y^2 + 2jxy. Hãy biểu diễn w theo z

Ta có: $w = \left(\frac{z + \overline{z}}{2}\right)^2 + j^2\left(\frac{\overline{z} - z}{2}\right)^2 + 2j\left(\frac{z + \overline{z}}{2}\right)\left(\frac{\overline{z} - z}{2j}\right)$

Hay: $w = \left(\frac{z + \overline{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\overline{z} - z}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{z + \overline{z}}{2}\right)\left(\frac{\overline{z} - z}{2}\right) = \frac{z + \overline{z}^2}{2} + \frac{z - \overline{z}^2}{2} = z^2$

3. Phép biến hình thực hiện bởi hàm biến phức: Để biểu diễn hình học một hàm biến số thực ta vẽ đồ thị của hàm số đó. Để mô tả hình học một hàm biến số phức ta không thể dùng phương pháp đồ thị nữa mà phải làm như sau:

Cho hàm biến phức w = f(z), z∈E. Lấy hai mặt phẳng phức xOy (mặt phẳng z) và uOv (mặt phẳng w). Ví mỗi điểm z_0∈E ta có một điểm $w_0 = f(z_0)$ trong mặt phẳng w. Cho nên về mặt hình học, hàm w = f(z0 xác định một phép biến hình từ mặt phẳng z sang mặt phẳng w. Điểm w_0 được gọi là ảnh của z_0 và z_0 là nghịch ảnh của w_0.

Cho đường cong L có phương trình tham số x = x(t), y = y(t). Ảnh của L qua phép biến hình w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y) là tập hợp các điểm trong mặt phẳng w có toạ độ:

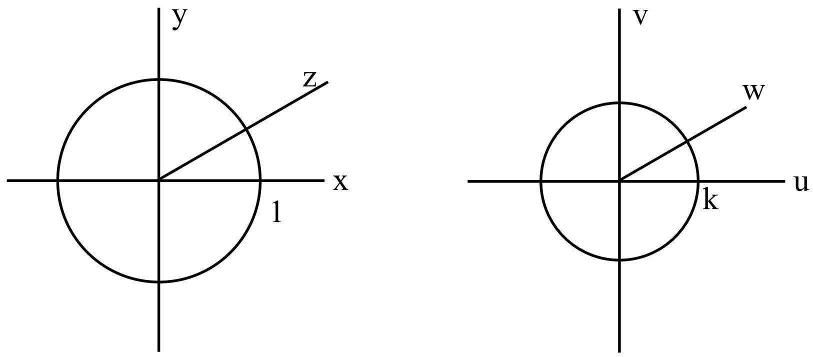
$$\begin{aligned} u &= u[x(t), y(t)] \\ v &= v[x(t), y(t)] \end{aligned} \qquad (3)$$

Thông thường thì ảnh của đường cong L là đường cong Γ có phương trình tham số (3) Muốn được phương trình quan hệ trực tiếp giữa u và v ta khử t trong (3). Muốn tìm ảnh của một miền G ta coi nó được quét bởi họ đường cong L.Ta tìm ảnh Γ của L. Khi L quét nên miền G thì Γ quét nên miền Δ là ảnh của G.

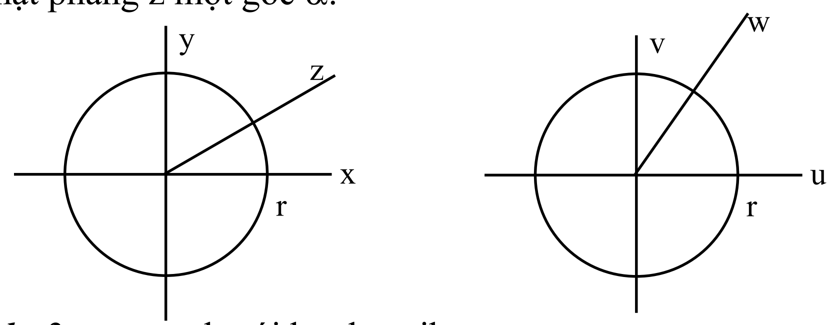
4. Các hàm biến phức thường gặp:

a. Ví dụ 1: Hàm w = kz (k > 0)

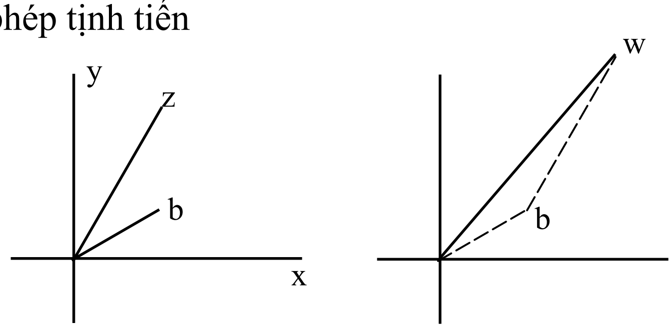
Đặt $z = re^{j\varphi}$, $w = \rho e^{j\theta} = kre^{j\varphi}$. Ta có ρ = kr, θ = φ + 2kπ . Vậy đây là một phép co dãn hay phép đồng dạng với hệ số k



b. Ví dụ 2: $w = ze^{j\alpha}$ $(\alpha \in R)$
Đặt $z = re^{j\varphi}$, $w = \rho e^{j\theta} = re^{j\varphi}e^{j\alpha} = re^{j(\alpha+\varphi)}$. Ta có $\rho = r$, $\theta = \varphi + \alpha + 2k\pi$. Như vậy đây là phép quay mặt phẳng z một góc α.



c. Ví dụ 3: $w = z + b$ với $b = b_1 + jb_2$
Đặt $z = x + jy$ $w = u + jv$, ta có:
$u = x + b_1$; $v = y + b_2$
Vậy đây là một phép tịnh tiến



d. Ví dụ 4: $w = az + b$ với $a = ke^{j\alpha}$ là phép biến hình tuyến tính nguyên. Nó là hợp của ba phép biến hình:
- phép co dãn $s = kz$
- phép quay $t = s^{j\alpha}$
- phép tịnh tiến $w = t + b$

e. Ví dụ 5: $w = z^2$
Đặt $z = re^{j\varphi}$, $w = \rho e^{j\theta}$ ta có: $\rho = r^2$; $\theta = 2\varphi + 2k\pi$. Mỗi tia $z = \varphi_o$ biến thành tia $\arg w = 2\varphi_o$, mỗi đường tròn $| z | = r_o$ biến thành đường tròn $| w | = r_o^2$. Nếu $D = \{z: 0 < \varphi < 2\pi \}$ thì $f(D) = \{-w: 0 < \theta < 2\pi \}$ nghĩa là nửa mặt phẳng phức có $Imz > 0$ biến thành toàn bộ mặt phẳng phức w.

f. Ví dụ 6: w = | z |. z

Đặt $z = re^{j\varphi}$, $w = \rho e^{j\theta}$ ta có: $\rho = r^2$; $\theta = \varphi + 2k\pi$. Miền D = {z: $0 < \varphi < \pi$ } được biến đơn diệp lên chính nó, nghĩa là nửa mặt phẳng phức Imz > 0 được biến thnành nửa mặt phẳng phức Imw > 0.

g. Ví dụ 7: $w = \sqrt[3]{z}$

Với $z \neq 0$ thì w có 3 giá trị khác nhau. Đặt $z = re^{j\varphi}$, $w = \rho e^{j\theta}$ ta có: $\rho = \sqrt[3]{r}$; $\theta_k = \frac{\varphi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$. Miền D = {z: $0 < \varphi < \pi$ } có ảnh là ba miền: $B_1 = \left\{ w : 0 < \theta < \frac{\pi}{3} \right\}$; $B_2 = \left\{ w : \frac{2\pi}{3} < \theta < \pi \right\}$; $B_3 = \left\{ w : -\frac{2\pi}{3} < \theta < -\frac{\pi}{3} \right\}$

§3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM PHỨC

1. Giới hạn của hàm biến phức: Định nghĩa giới hạn và liên tục của hàm biến phức cũng tương tự như hàm biến thực.

a. Định nghĩa 1: Giả sử f(z) là hàm xác định trong lân cận của z_o(có thể trừ z_o). Ta nói số phức A là giới hạn của f(z) khi z dần tới z_o nếu khi $| z - z_o | \rightarrow 0$ thì $| f(z)-A \rightarrow 0$. Nói khác đi, với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, luôn luôn tồn tại $\delta > 0$ để khi $| z - z_o | < \delta$ thì $|f(z)-A| < \varepsilon$.

Ta kí hiệu: $\lim\limits_{z \to z_o} f(z) = A$

Dễ dàng thấy rằng nếu f(z) = u(x,y) +jv(x,y) ; $z_o = x_o + jy_o$; $A = \alpha + j\beta$ thì:

$$\lim_{z \to z_o} f(z) = A \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_o \\ y \to y_o}} u(x, y) = \alpha \quad \lim_{\substack{x \to x_o \\ y \to y_o}} v(x, y) = \beta$$

Trong mặt phẳng phức, khi z dần tới z_o nó có thể tiến theo nhiều đường khác nhau. Điều đó khác với trong hàm biến thực, khi x dần tới x_o, nó tiến theo trục Ox.

b. Định nghĩa 2: Ta nói số phức A là giới hạn của hàm w = f(z) khi z dần ra vô cùng, nếu khi $| z | \rightarrow +\infty$ thì $| f(z) - A | \rightarrow 0$. Nói khác đi, với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, luôn luôn tồn tại R > 0 để khi | z | > R thì $| f(z) - A | < \varepsilon$.

Ta kí hiệu: $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = A$

c. Định nghĩa 3: Ta nói hàm w = f(z) dần ra vô cùng khi z dần tới z_o, nếu khi $| z - z_o | \rightarrow 0$ thì $| f(z) | \rightarrow +\infty$. Nói khác đi, với mọi M > 0 cho trước lớn tuỳ ý, luôn luôn tồn tại $\delta > 0$ để khi $| z - z_o | < \delta$ thì | f(z) | > M.

Ta kí hiệu: $\lim\limits_{z \to z_o} f(z) = \infty$

d. Định nghĩa 4: Ta nói hàm w = f(z) dần ra vô cùng khi z dần ra vô cùng, nếu khi $| z | \rightarrow +\infty$ thì $| f(z) | \rightarrow +\infty$. Nói khác đi, với mọi M > 0 cho trước lớn tuỳ ý, luôn luôn tồn tại R > 0 để khi | z | > R thì | f(z) | > M.

Ta kí hiệu: $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$

2. Hàm liên tục: Ta định nghĩa hàm liên tục như sau:

Định nghĩa: Giả sử w = f(z) là một hàm số xác định trong một miền chứa điểm z_o. Hàm được gọi là liên tục tại z_o nếu $\lim_{z \to z_o} f(z) = f(z_o)$

Dễ thấy rằng nếu f(z) = u(x, y) + jv(x, y) liên tục tại $z_o = x_o + jy_o$ thì u(x, y) và v(x, y) là những hàm thực hai biến, liên tục tại (x_o, y_o) và ngược lại. Hàm w = f(z) liên tục tại mọi điểm trong miền G thì được gọi là liên tục trong miền G.

Ví dụ: Hàm $w = z^2$ liên tục trong toàn bộ mặt phẳng phức vì phần thực $u = x^2 - y^2$ và phần ảo v = 2xy luôn luôn liên tục.

3. Định nghĩa đạo hàm: Cho hàm w = f(z) xác định trong một miền chứa điểm z = x + jy. Cho z một số gia Δz = Δx + jΔy. Gọi Δw là số gia tương ứng của hàm:

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$$

Nếu khi $\Delta z \to 0$ tỉ số $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ dần tới một giới hạn xác định thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm w tại z và kí hiệu là f'(z) hay w'(z) hay $\frac{dw}{dz}$. Ta có:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \qquad (4)$$

Về mặt hình thức, định nghĩa này giống định nghĩa đạo hàm của hàm biến số thực. Tuy nhiên ở đây đòi hỏi $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ phải có cùng giới hạn khi $\Delta z \to 0$ theo mọi cách.

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của $w = z^2$ tại z.

Ta có : $\Delta w = (z + \Delta z)^2 - z^2 = 2z.\Delta z + \Delta z^2$

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = 2z + \Delta z$$

Khi $\Delta z \to 0$ thì $\frac{\Delta w}{\Delta z} \to 2z$. Do vậy đạo hàm của hàm là 2z.

Ví dụ 2: Hàm $w = \overline{z} = x - jy$ có đạo hàm tại z không

Cho z một số gia Δz = Δx + jΔy. Số gia tương ứng của w là:

$$\Delta w = \overline{z + \Delta z} - \overline{z} = \overline{z} + \overline{\Delta z} - \overline{z} = \overline{\Delta z} = \Delta x - j\Delta y$$

Nếu Δy = 0 thì Δz = Δx khi đó Δw = Δx ; $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta w}{\Delta x} = 1$ nên $\lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ \Delta x \to 0}} \frac{\Delta w}{\Delta x} = 1$

Δx = 0 thì Δz = -jΔy khi đó Δw = -jΔy ; $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta w}{j\Delta y} = -1$ nên $\lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ \Delta x \to 0}} \frac{\Delta w}{\Delta x} = -1$

Như vậy khi cho $\Delta z \to 0$ theo hai đường khác nhau tỉ số $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ có những giới hạn khác nhau. Vậy hàm đã cho không có đạo hàm tại mọi z.

3. Điều kiện khả vi: Như thế ta phải tìm điều kiện để hàm có đạo hàm tại z. Ta có định lí sau: