TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

MỤC LỤC

HƯỚNG DẪN

MÔ TẢ MÔN HỌC

Trường điện từ là một trong những môn học cơ sở cho chuyên ngành Kỹ thuật Điện tử Truyền thông và Kỹ thuật Điện – Điện tử. Môn học giới thiệu các định luật và nguyên lý cơ bản, tính toán các thông số cho trường điện từ (tĩnh, dừng, biến thiên), giới thiệu về bức xạ điện từ, sóng điện từ trong các hệ định hướng và hộp cộng hưởng.

Phần đầu giới thiệu về các định luật cơ bản, từ đó xây dựng hệ phương trình Maxwell.. Phần kế tiếp giải hệ phương trình Maxwell ứng với các điều kiện (tĩnh, dừng, biến thiên) để xác định các thông số của trường điện từ. Phần cuối đề cập đến quá trình bức xạ điện từ và quá trình truyền sóng điện từ trong ống dẫn sóng, hộp cộng hưởng.

NỘI DUNG MÔN HỌC

- Bài 1. Các định luật và nguyên lý cơ bản của trường điện từ.
- Bài 2. Trường điện tĩnh.
- Bài 3. Trường điện từ dừng.
- Bài 4. Trường điện từ biến thiên.
- Bài 5. Bức xạ điện từ.
- Bài 6. Sóng điện từ trong các hệ định hướng.
- Bài 7. Hộp cộng hưởng.

KIẾN THỨC TIỀN ĐỀ

Môn học Trường điện từ đòi hỏi sinh viên có nền tảng về toán giải tích vector, hàm phức, phương trình vi phân.

YÊU CẦU MÔN HỌC

Người học phải dự học đầy đủ các buổi lên lớp và làm bài tập đầy đủ ở nhà.

CÁCH TIẾP NHẬN NỘI DUNG MÔN HỌC

Để học tốt môn này, người học cần ôn tập các bài đã học, trả lời các câu hỏi và làm đầy đủ bài tập; đọc trước bài mới và tìm thêm các thông tin liên quan đến bài học.

Đối với mỗi bài học, người học đọc trước mục tiêu và tóm tắt bài học, sau đó đọc nội dung bài học. Kết thúc mỗi ý của bài học, người đọc trả lời câu hỏi ôn tập và kết thúc toàn bộ bài học, người đọc làm các bài tập.

PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ MÔN HỌC

Môn học được đánh giá gồm:

- Điểm quá trình: 30%. Hình thức và nội dung do giảng viên quyết định, phù hợp với quy chế đào tạo và tình hình thực tế tại nơi tổ chức học tập.
- Điểm thi: 70%. Hình thức bài thi tự luận trong 60 phút. Nội dung gồm các bài tập thuộc bài thứ 1 đến bài thứ 7.

BÀI 1: CÁC ĐỊNH LUẬT VÀ NGUYÊN LÝ CƠ BẢN

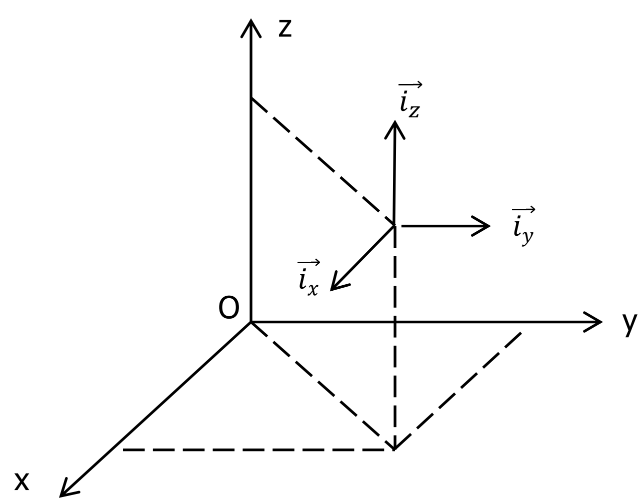
Sau khi học xong bài này, người học có thể:

- *Biết được các khái niệm về giải tích vector, các toán tử gradient, divergence,rot, Laplace và hai định lý trong giải tích vector: định lý divergence và định lý Stokes.*
- *Biết được các vector đặc trưng của trường điện và trường từ.*
- *Hiểu các định luật cơ bản trong trường điện từ.*

1.1 GIẢI TÍCH VECTOR

1.1.1 Các hệ tọa độ

1.1.1.1 Hệ tọa độ Descartes



Hình 1.1 – Hệ tọa độ Descartes

x = const: mặt phẳng song song với mặt yOz.

y = const: mặt phẳng song song với mặt xOz.

z = const: mặt phẳng song song với mặt xOy.

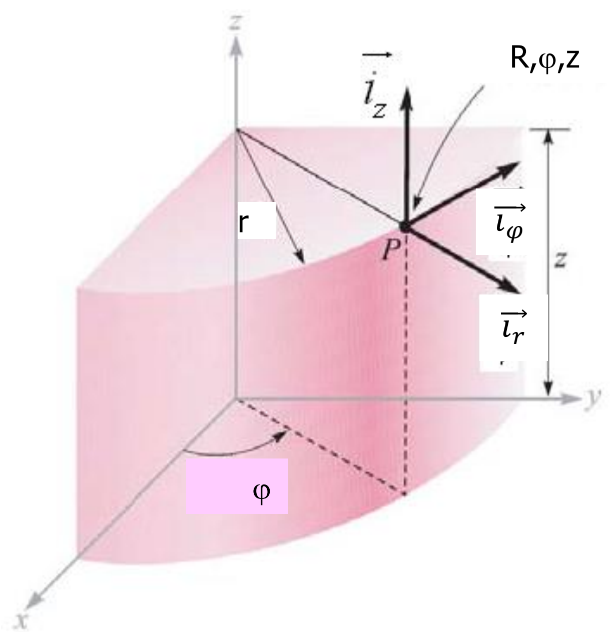
Các vector đơn vị: $\overrightarrow{\iota_x}$, $\overrightarrow{\iota_y}$, $\overrightarrow{\iota_z}$.

$$\overrightarrow{\iota_x} = \overrightarrow{\iota_y} \times \overrightarrow{\iota_z} \quad \overrightarrow{\iota_y} = \overrightarrow{\iota_z} \times \overrightarrow{\iota_x} \quad \overrightarrow{\iota_z} = \overrightarrow{\iota_x} \times \overrightarrow{\iota_y} \tag{1.1}$$

Vector vị trí của một điểm P(x,y,z) là vector vẽ từ gốc tọa độ đến P.

$$\vec{R} = x\overrightarrow{\iota_x} + y\overrightarrow{\iota_y} + z\overrightarrow{\iota_z} \tag{1.2}$$

1.1.1.2 Hệ tọa độ trụ



Hình 1.2 – Hệ tọa độ trụ

r = const: mặt trụ bán kính r có trục trùng với Oz.

φ = const: nửa mặt phẳng chứa trục Oz.

z = const: mặt phẳng song song với mặt xOy.

Các vector đơn vị: $\overrightarrow{\iota_r}$, $\overrightarrow{\iota_\varphi}$, $\overrightarrow{\iota_z}$.

$$\overrightarrow{\iota_r} = \overrightarrow{\iota_\varphi} \times \overrightarrow{\iota_z} \quad \overrightarrow{\iota_\varphi} = \overrightarrow{\iota_z} \times \overrightarrow{\iota_r} \quad \overrightarrow{\iota_z} = \overrightarrow{\iota_r} \times \overrightarrow{\iota_\varphi} \tag{1.3}$$

Vector vị trí của một điểm P(r,φ,z) là vector vẽ từ gốc tọa độ đến P.

$$\vec{R} = r\overrightarrow{\iota_r} + z\overrightarrow{\iota_z} \tag{1.4}$$

1.1.1.3 Hệ tọa độ cầu

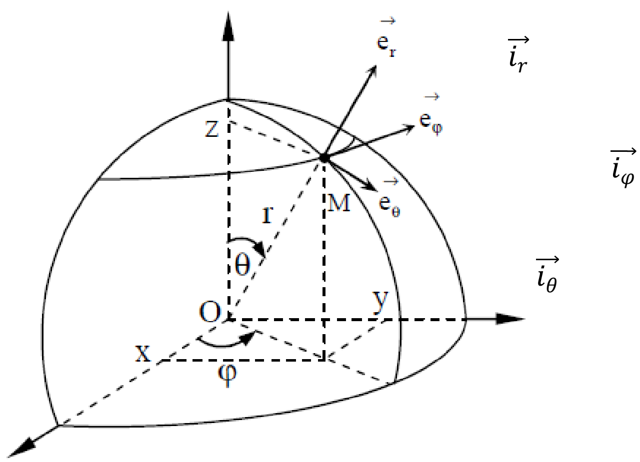
r = const: mặt trụ bán kính r có tâm tại gốc tọa độ.

φ = const: nửa mặt phẳng chứa trục Oz.

θ = const: mặt nón có trục trùng với Oz.

Các vector đơn vị: $\overrightarrow{\iota_r}$, $\overrightarrow{\iota_\theta}$, $\overrightarrow{\iota_\varphi}$.

$$\overrightarrow{\iota_r} = \overrightarrow{\iota_\theta} \times \overrightarrow{\iota_\varphi} \quad \overrightarrow{\iota_\theta} = \overrightarrow{\iota_\varphi} \times \overrightarrow{\iota_r} \quad \overrightarrow{\iota_\varphi} = \overrightarrow{\iota_r} \times \overrightarrow{\iota_\theta} \tag{1.5}$$



Hình 1.3 – Hệ tọa độ cầu

Vector vị trí của một điểm P(r,φ,θ) là vector vẽ từ gốc tọa độ đến P.

$$\vec{R} = r\overrightarrow{\iota_r} \tag{1.6}$$

	Descartes	**Trụ**	**Cầu**
Descartes (x,y,z)		x = rcosφ y = rsinφ z = z	x = rsinθcosφ y = rsinθsinφ z = rcosθ
Trụ (R,φ,z)	$r = \sqrt{x^2+y^2}$ $\varphi = arctang\dfrac{y}{x}$ z = z		r = rsinθ φ = φ z = rcosθ
Cầu (r,θ,φ)	$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\theta = arctang\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ $\varphi = arctang\dfrac{y}{x}$	$r = \sqrt{r^2+z^2}$ $\theta = arctang\dfrac{r}{z}$ φ = φ	

Bảng 1.1 – Liên hệ giữa các hệ tọa độ

	Toạ độ			Vector đơn vị			Hệ số Larmor		
	u_1	u_2	u_3	$\overrightarrow{\iota_1}$	$\overrightarrow{\iota_2}$	$\overrightarrow{\iota_3}$	h_1	h_2	h_3
Descartes (x,y,z)	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < y < \infty$	$-\infty < z < \infty$	$\overrightarrow{\iota_x}$	$\overrightarrow{\iota_y}$	$\overrightarrow{\iota_z}$	1	1	1
Trụ (r,φ,z)	$0 \le r < \infty$	$0 \le \varphi < 2\pi$	$-\infty < z < \infty$	$\overrightarrow{\iota_r}$	$\overrightarrow{\iota_\varphi}$	$\overrightarrow{\iota_z}$	1	r	1
Cầu (r,θ,φ)	$0 \le r < \infty$	$0 \le \theta < \pi$	$0 \le \varphi < 2\pi$	$\overrightarrow{\iota_r}$	$\overrightarrow{\iota_\theta}$	$\overrightarrow{\iota_\varphi}$	1	r	$r\sin\theta$

Bảng 1.2 – Các thông số của các hệ tọa độ

1.1.2 Các yếu tố vi phân

Vi phân chiều dài:

Hệ tọa độ Descartes:

$$\overrightarrow{dl} = dx\overrightarrow{\iota_x} + dy\overrightarrow{\iota_y} + dz\overrightarrow{\iota_z} \tag{1.7}$$

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \tag{1.8}$$

Hệ tọa độ trụ:

$$\overrightarrow{dl} = dr\overrightarrow{\iota_r} + rd\varphi\overrightarrow{\iota_\varphi} + dz\overrightarrow{\iota_z} \tag{1.9}$$

$$dl = \sqrt{(dr)^2 + (rd\varphi)^2 + (dz)^2} \tag{1.10}$$

Hệ tọa độ cầu:

$$\overrightarrow{dl} = dr\overrightarrow{\iota_r} + rd\theta\overrightarrow{\iota_\theta} + rsin\theta d\varphi\overrightarrow{\iota_\varphi} \tag{1.11}$$

$$dl = \sqrt{(dr)^2 + (rd\theta)^2 + (rsin\theta d\varphi)^2} \tag{1.12}$$

Vi phân diện tích:

Hệ tọa độ Descartes:

$$\overrightarrow{dS_x} = \pm dydz\overrightarrow{\iota_x} \quad \overrightarrow{dS_y} = \pm dzdx\overrightarrow{\iota_y} \quad \overrightarrow{dS_z} = \pm dxdy\overrightarrow{\iota_z} \tag{1.13}$$

Hệ tọa độ trụ:

$$\overrightarrow{dS_r} = \pm rd\varphi dz\overrightarrow{\iota_r} \quad \overrightarrow{dS_\varphi} = \pm drdz\overrightarrow{\iota_\varphi} \quad \overrightarrow{dS_z} = \pm rdrd\varphi\overrightarrow{\iota_z} \tag{1.14}$$

Hệ tọa độ cầu:

$$\overrightarrow{dS_r} = \pm(rd\theta)(rsin\theta d\varphi)\overrightarrow{\iota_r} \quad \overrightarrow{dS_\theta} = \pm(dr)(rsin\theta d\varphi)\overrightarrow{\iota_\theta} \quad \overrightarrow{dS_\varphi} = \pm(dr)(rd\theta)\overrightarrow{\iota_\varphi} \quad (1.15)$$

Vi phân thể tích:

Hệ tọa độ Descartes:

$$dV = dxdydz \quad (1.16)$$

Hệ tọa độ trụ:

$$dV = rdrd\varphi dz \quad (1.17)$$

Hệ tọa độ cầu:

$$dV = (dr)(rd\theta)(rsin\theta d\varphi) \quad (1.18)$$

1.1.3 Phép tính vector

Biểu diễn vector (các vector đơn vị tương ứng như Bảng 1.1 – Liên hệ giữa các hệ tọa độ
):

$$\vec{A} = A_1\overrightarrow{\iota_1} + A_2\overrightarrow{\iota_2} + A_3\overrightarrow{\iota_3} \quad (1.19)$$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \quad (1.20)$$

A_1, A_2, A_3 là các hình chiếu của vector $\vec{A}$ trên các hướng của 3 vector đơn vị.

Cộng trừ vector:

$$\vec{A} \pm \vec{B} = (A_1 \pm B_1)\overrightarrow{\iota_1} + (A_2 \pm B_2)\overrightarrow{\iota_2} + (A_3 \pm B_3)\overrightarrow{\iota_3} \quad (1.21)$$

Tích vô hướng:

$$\vec{A}.\vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \quad (1.22)$$

Tích có hướng:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\iota_1} & \overrightarrow{\iota_2} & \overrightarrow{\iota_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = (A_2B_3 - A_3B_2)\overrightarrow{\iota_1} + (A_3B_1 - A_1B_3)\overrightarrow{\iota_2} + (A_1B_2 - A_2B_1)\overrightarrow{\iota_3} \quad (1.23)$$

Đạo hàm vector:

$$d\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}dz \qquad (1.24)$$

Trong đó:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\vec{A}(x+\Delta x,y,z)-\vec{A}(x,y,z)}{\Delta x} \\
\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\vec{A}(x,y+\Delta y,z)-\vec{A}(x,y,z)}{\Delta y} \\
\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\vec{A}(x,y,z+\Delta z)-\vec{A}(x,y,z)}{\Delta z}
\end{aligned} \qquad (1.25)$$

1.1.4 Tích phân

Tích phân đường:

$$\int_C \vec{F}\overrightarrow{dl} = \int_C F.dl.cos(\vec{F}\overrightarrow{dl}) \qquad (1.26)$$

Nếu C là đường cong kín, tích phân (1.26) gọi là lưu số của $\vec{F}$ theo C: $\oint_C \vec{F}\overrightarrow{dl}$

Tích phân mặt:

$$\int_S \overrightarrow{\vec{A}ds} = \int_C A.ds.cos(\overrightarrow{\vec{A}ds}) \qquad (1.27)$$

Nếu S là mặt kín, tích phân (1.27) trở thành:

$$\oint_S \overrightarrow{\vec{A}ds} = \oint_S \vec{A}\vec{n}ds \qquad (1.28)$$

Trong đó $\vec{n}$ là vector pháp tuyến của mặt S.

Tích phân thể tích:

$$\int_V \rho dV \qquad (1.29)$$

ρ: mật độ khối

1.1.5 Các toán tử

Toán tử Nabla:

$$\nabla = \overrightarrow{\iota_x}\frac{\partial}{\partial x} + \overrightarrow{\iota_y}\frac{\partial}{\partial y} + \overrightarrow{\iota_z}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (1.30)$$

Gradient:

- Tác dụng lên hàm vô hướng, kết quả là vector.
- Có hướng vuông góc với mặt V = const đi qua điểm đang xét.

$$gradV = \frac{1}{h_1}\overrightarrow{\iota_1}\frac{\partial V}{\partial u_1} + \frac{1}{h_2}\overrightarrow{\iota_2}\frac{\partial V}{\partial u_2} + \frac{1}{h_3}\overrightarrow{\iota_3}\frac{\partial V}{\partial u_3} \quad (1.31)$$

Các giá trị h_1, h_2, h_3, u_1, u_2, u_3 như Bảng 1.1 – Liên hệ giữa các hệ tọa độ

.

Trong hệ tọa độ Descartes:

$$gradV = \overrightarrow{\iota_x}\frac{\partial V}{\partial x} + \overrightarrow{\iota_y}\frac{\partial V}{\partial y} + \overrightarrow{\iota_z}\frac{\partial V}{\partial z} = \nabla V \quad (1.32)$$

Trong hệ tọa độ trụ:

$$gradV = \overrightarrow{\iota_r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r}\overrightarrow{\iota_\varphi}\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \overrightarrow{\iota_z}\frac{\partial V}{\partial z} \quad (1.33)$$

Trong hệ tọa độ cầu:

$$gradV = \overrightarrow{\iota_r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r}\overrightarrow{\iota_\theta}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{rsin\theta}\overrightarrow{\iota_\varphi}\frac{\partial V}{\partial \varphi} \quad (1.34)$$

Divergence:

- Tác dụng lên hàm vector, kết quả là vô hướng.
- Đặc trưng cho cường độ của nguồn.

$$div\vec{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial(A_1h_2h_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial(A_2h_3h_1)}{\partial u_2} + \frac{\partial(A_3h_1h_2)}{\partial u_3}\right] \quad (1.35)$$

Trong hệ tọa độ Descartes:

$$div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla\vec{A} \quad (1.36)$$

Trong hệ tọa độ trụ:

$$div\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.37)$$

Trong hệ tọa độ cầu:

$$div\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial(sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (1.38)$$

Định lý divergence: (định lý Gauss – Ostrograsky)

Gọi S là mặt kín bất kỳ bao quanh thể tích V.

$$\int_V div\vec{A}dV = \oint_S \vec{A}\vec{ds} \tag{1.39}$$

Định lý divergence cho phép thay thế tích phân thể tích thành tích phân mặt và ngược lại.

Rotation:

- Tác dụng lên hàm vector, kết quả là vector.
- Đặc trưng cho tính chất xoáy của vector

$$rot\vec{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{\imath_1} & h_2\vec{\imath_2} & h_3\vec{\imath_3} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ A_1h_1 & A_2h_2 & A_3h_3 \end{vmatrix} \tag{1.40}$$

Trong hệ tọa độ Descartes:

$$rot\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{\imath_x} & \vec{\imath_y} & \vec{\imath_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{A} \tag{1.41}$$

Trong hệ tọa độ trụ:

$$rot\vec{A} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \vec{\imath_r} & r\vec{\imath_\varphi} & \vec{\imath_z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\varphi & A_z \end{vmatrix} \tag{1.42}$$

Trong hệ tọa độ cầu:

$$rot\vec{A} = \frac{1}{r^2sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{\imath_r} & r\vec{\imath_\theta} & rsin\theta\vec{\imath_\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & rsin\theta A_\varphi \end{vmatrix} \tag{1.43}$$

Định lý Stokes:

Gọi C là dường cong kín bất kỳ bao quanh mặt S.

$$\int_S rot\vec{A}\vec{ds} = \oint_C \vec{A}\vec{dl} \tag{1.44}$$

Định lý Stokes cho phép thay thế tích phân mặt thành tích phân đường và ngược lại.

Toán tử Laplace:

- Tác dụng lên hàm vô hướng, kết quả là vô hướng.

$$\Delta f = div(gradf) = \nabla.\nabla.f = \nabla^2 f$$

$$\Delta f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\right)\right] \quad (1.45)$$

Trong hệ tọa độ Descartes:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (1.46)$$

Trong hệ tọa độ trụ:

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (1.47)$$

Trong hệ tọa độ cầu:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(sin\theta\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) \quad (1.48)$$

- Tác dụng lên hàm vector, kết quả là vector.

$$\Delta\vec{A} = \nabla.\left(\nabla.\vec{A}\right) - \nabla\times\nabla\times\vec{A} = grad\left(div\vec{A}\right) - rot(rot\vec{A}) \quad (1.49)$$

Các biểu thức cơ bản:

$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$

$\nabla.\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \nabla.\vec{A} + \nabla.\vec{B}$

$\nabla\times\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \nabla\times\vec{A} + \nabla\times\vec{B}$

$\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$

$\nabla\left(f\vec{A}\right) = \vec{A}\nabla f + f\nabla\vec{A}\ \ hay\ div\left(f\vec{A}\right) = \vec{A}gradf + fdiv\vec{A}$

$\nabla\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \vec{B}.\nabla\times\vec{A} - \vec{A}.\nabla\times\vec{B}\ hay\ div\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \vec{B}.rot\vec{A} - \vec{A}.rot\vec{B}$

$\nabla\left(\vec{A}.\vec{B}\right) = \vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{B}\right) + \vec{B}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right) + \left(\vec{A}.\nabla\right)\vec{B} + (\vec{B}.\nabla)\vec{A}$

$\nabla\times\left(f\vec{A}\right) = \nabla f\times\vec{A} + f\nabla\times\vec{A}$

$\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \vec{A}\nabla.\vec{B} - \vec{B}\nabla.\vec{A} + \left(\vec{B}.\nabla\right)\vec{A} - (\vec{A}.\nabla)\vec{B}$

$\nabla(\nabla \times \vec{A}) = div(rot\vec{A}) = 0$

$$\nabla.\nabla \times f = rot(gradf) = 0 \quad (1.50)$$

1.2 KHÁI NIỆM

Trường điện từ là một dạng vật chất đặc biệt trong đó đặc trưng của nó là truyền tải năng lượng trong môi trường. Năng lượng điện từ có thể chuyển đổi thành các dạng năng lượng khác như nhiệt, cơ, … Trường điện từ là biểu hiện đặc trưng cho quan hệ hỗ cảm của hai trường biến thiên là điện trường và từ trường. Trường điện từ lan truyền trong các môi trường ở dạng sóng và được gọi là sóng điện từ.

Trường điện từ phân bố trong không gian dưới dáng sóng và có kết cấu hạt nên:

- Tốc độ lan truyền bằng tốc độ ánh sáng.
- Năng lượng trường điện từ W = mc^2.

Trường điện từ được phân chia thành:

- Trường điện từ tĩnh: gắn với sự phân bố tĩnh của các hạt mang điện.
- Trường điện từ dừng: trường có phân bố dòng không đổi trong môi trường vật dẫn dứng yên.
- Trường điện từ biến thiên.

1.2.1 Các vector đặc trưng

1.2.1.1 Trường điện

Một điện tích thử q (đủ nhỏ để không ảnh hưởng đến trường điện ban đầu) đặt trong trường điện chịu tác dụng của lực điện $\overrightarrow{F_e}$. Tại mỗi điểm của trường điện, cường độ điện trường được định nghĩa:

$$\vec{E} = \frac{\overrightarrow{F_e}}{q} \quad [V/m] \quad (1.51)$$

Khi đặt điện môi vào trường điện, điện môi sẽ bị phân cực đặc trưng bởi vector phân cực điện $\vec{P}$.

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to \infty} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta V} \quad [C/_{m^2}] \tag{1.52}$$

$\Delta\vec{P}$: moment của lưỡng cực điện của điện môi có thể tích ΔV.

Vector cảm ứng điện $\vec{D}$ được định nghĩa:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad [C/_{m^2}] \tag{1.53}$$

Trong đó ε_0 là hằng số điện môi:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi.9.10^9} \quad [F/m] \tag{1.54}$$

Nếu môi trường đẳng hướng, tuyến tính hay cường độ trường đủ nhỏ:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{P} \quad [C/_{m^2}] \tag{1.55}$$

Thay (1.55) vào (1.53):

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \quad [C/_{m^2}] \tag{1.56}$$

$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$: hằng số điện môi tương đối của môi trường.

$\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$: hằng số điện môi tuyệt đối của môi trường.

Chất	ε_r	**Chất**	ε_r
Không khí	1,0006	Đất khô	5
Giấy	2-3	Thuỷ tinh	5-10
Cao su	2-3,5	Mica	6
Polyetylen	2,26	Sứ	6
Thạch anh nóng chảy	3,8	Đất ẩm	10
Bakelite	4,9	Nước cất	81

Bảng 1.3 – Hằng số điện môi tương đối của một số môi trường

1.2.1.2 Trường từ

Vector cảm ứng từ $\vec{B}$ được định nghĩa dựa trên lực từ $\overrightarrow{F_m}$ tác dụng lên điện tích điểm q di chuyển với vận tốc $\vec{v}$ trong trường từ:

$$\overrightarrow{F_m} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{1.57}$$

Khi vector vận tốc vuông góc với vector cảm ứng từ, lực từ tác dụng lên điện tích thử q sẽ cực đại. Do đó, có thể tìm độ lớn của vector cảm ứng từ bằng cách thay đổi hướng của vận tốc (độ lớn giữ không đổi) và tìm giá trị lực từ cực đại F_{max}.

$$\vec{B} = \frac{\overrightarrow{F_{max}} \times \overrightarrow{\iota_v}}{qv} \quad [Wb/m^2] \tag{1.58}$$

Trong đó $\overrightarrow{\iota_v}$ là vector đơn vị theo hướng của $\vec{v}$ ứng với lực từ cực đại.

Khi đặt từ môi vào trường từ, từ môi sẽ bị phân cực đặc trưng bởi vector phân cực từ $\vec{M}$.

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to \infty} \frac{\Delta \vec{M}}{\Delta V} \quad [A/m] \tag{1.59}$$

$\Delta \vec{M}$: moment của lưỡng cực từ của từ môi có thể tích ΔV.

Vector cường độ từ trường $\vec{H}$ được định nghĩa:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad [A/m] \tag{1.60}$$

Trong đó μ_0 là hằng số từ thẩm:

$$\mu_0 = 4\pi.10^{-7} \quad [H/m] \tag{1.61}$$

Chất thuận từ	χ_m	**Chất nghịch từ**	χ_m
Không khí	$3{,}6.10^{-7}$	Nitrogen	$-0{,}5.10^{-8}$
Oxygen	$2{,}1.10^{-6}$	Hydrogen	$-0{,}21.10^{-8}$
Nhôm	$2{,}3.10^{-5}$	Thuỷ ngân	$-3{,}2.10^{-5}$
Tungsten	$6{,}8.10^{-5}$	Bạc	$-2{,}6.10^{-5}$
Bạch kim	$2{,}9.10^{-4}$	Đồng	$-0{,}98.10^{-5}$
Oxygen lỏng	$3{,}5.10^{-3}$	Natri	$-0{,}24.10^{-5}$

Bảng 1.4 – Hằng số từ thẩm tương đối của một số môi trường

Nếu môi trường đẳng hướng, tuyến tính hay cường độ trường đủ nhỏ:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad [A/m] \tag{1.62}$$

Thay (1.62) vào (1.60):

$$\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu\vec{H} \quad [{}^{Wb}/_{m^2}] \tag{1.63}$$

$\mu_r = 1 + \chi_m$: hằng số từ thẩm tương đối của môi trường.

$\mu = \mu_r\mu_0$: hằng số từ thẩm tuyệt đối của môi trường.

Ví dụ 1.1: Điện tích thử q chuyển động trong trường điện từ với vận tốc $\vec{v} = \vec{\iota_x} + \vec{\iota_y}$. Xác định $\vec{E}$ biết rằng lực tác dụng của trường điện từ lên điện tích thử = 0 và $\vec{B} = \vec{\iota_x} - 2\vec{\iota_z}$.

<u>Giải</u>

Lực điện từ tác dụng lên điện tích thử:

$$\vec{F} = \vec{F_e} + \vec{F_m} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = 0$$

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} = -\begin{vmatrix} \vec{\iota_x} & \vec{\iota_y} & \vec{\iota_z} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{\iota_x} - 2\vec{\iota_y} + \vec{\iota_z}$$

1.2.2 Định luật bảo toàn điện tích

1.2.2.1 Mật độ điện tích – mật độ dòng điện

- Mật độ điện tích khối:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \quad [{}^{C}/_{m^3}] \tag{1.64}$$

- Mật độ điện tích mặt:

$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} \quad [{}^{C}/_{m^2}] \tag{1.65}$$

- Mật độ điện tích dài:

$$\lambda = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \quad [{}^{C}/_{m}] \tag{1.66}$$

Điện tích q chứa trong thể tích V, mặt S, đường C:

$$q = \int_{V,S,C} dq \quad dq = \begin{cases} \rho dV \\ \sigma dS \\ \lambda dl \end{cases} \tag{1.67}$$

Ví dụ 1.2: Xác định tổng điện tích q của:

a. Dây dẫn 0 < x < 5m nằm trên Ox có $\lambda = 3x^2$ (mC/m).

b. Mặt trụ R = 2m, 0 < z < 3m, trục trùng với Oz có $\sigma = Rz^2$ (nC/m^2)

c. Nửa trái khối cầu bán kính r = 3m, tâm tại gốc tọa độ có $\rho = \frac{1}{rsin\theta}$ (C/m^3)

<u>Giải</u>

a. Dây dẫn trên trục Ox: dl = dx.

$$q = \int_C dq = \int_C \lambda dl = \int_0^5 3x^2 dx = x^3|_0^5 = 125\ (mC)$$

b. Mặt trục có trục trùng với Oz: dS = Rdφdz.

$$q = \int_S dq = \int_S \sigma dS = \int_0^3 \int_0^{2\pi} Rz^2 Rd\varphi dz = R^2 \frac{z^3}{3}\bigg|_0^3 \varphi|_0^{2\pi} = 72\pi\ (nC)$$

c. Khối cầu: sử dụng hệ tọa độ cầu: dV = $r^2 sin\theta dr d\theta d\varphi$.

$$q = \int_V dq = \int_V \rho dV = \int_\pi^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^3 \frac{1}{rsin\theta} r^2 sin\theta dr d\theta d\varphi = \frac{r^2}{2}\bigg|_0^3 \theta|_0^\pi \varphi|_\pi^{2\pi} = \frac{9\pi^2}{2}\ (C)$$

Cường độ dòng điện chảy qua mặt S bất kỳ:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad [A] \tag{1.68}$$

Để mô tả đầy đủ hơn sự chuyển động có hướng của các hạt mang điện, người ta đưa ra khái niệm mật độ dòng điện:

$$J = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \quad [A/m^2] \tag{1.69}$$

Dạng vi phân của định luật Ohm:

$$\vec{J} = \gamma \vec{E} \quad \left[{}^{A}/_{m^2}\right] \tag{1.70}$$

γ: độ dẫn điện của môi trường [S/m].

Từ đó, cường độ dòng điện được tính:

$$I = \int_S \overrightarrow{J}\overrightarrow{ds} \quad (1.71)$$

1.2.2.2 Định luật bảo toàn điện tích

Định luật bảo toàn điện tích được Faraday tìm ra bằng thực nghiệm, nó được xem là một tiên đề của lý thuyết trường điện từ:

Điện tích trong một hệ cô lập về điện không thay đổi.

Như vậy, lượng điện tích ở trong một thể tích V bị giảm đi trong một đơn vị thời gian bằng lượng điện tích đi ra khỏi thể tích V trong một đơn vị thời gian và bằng cường độ dòng điện I đi xuyên qua mặt kín S bao quanh thể tích V đó.

Gọi q là điện tích của thể tích V, ρ là mật độ điện tích khối của V. Vậy:

$$I = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\int \rho dV\right) = \oint_S \overrightarrow{J}\overrightarrow{ds} \quad (1.72)$$

Từ định lý divergence (1.39):

$$-\int_V \frac{\partial \rho}{dt} dV = \int_V div\vec{J} dV \quad (1.73)$$

Biểu thức trên đúng với mọi thể tích V, vì vậy:

$$div\vec{J} + \frac{\partial \rho}{dt} = 0 \quad (1.74)$$

Biểu thức (1.74) được gọi là dạng vi phân của định luật bảo toàn điện tích hay còn gọi là phương trình liên tục.

1.2.3 Các đặc trưng cơ bản của môi trường

Đặc tính của môi trường vật chất được thể hiện qua các tham số điện và từ của nó:

- Hằng số điện môi ε [F/m].
- Hằng số điện môi tương đối ε_r (không thứ nguyên).
- Hằng số từ thẩm μ(H/m).
- Hằng số từ thẩm tương đối μ_r (không thứ nguyên).
- Độ dẫn điện γ (S/m).

Các biểu thức (1.56), (1.63) và (1.70) được gọi là các phương trình liên hệ hay còn gọi là các phương trình chất.

Dựa trên các tham số điện và từ, người ta chia vật chất (môi trường điện từ) thành:

- Môi trường tuyến tính: các tham số ε, μ, và σ không phụ thuộc cường độ trường. Khi đó, các phương trình liên hệ là tuyến tính.
- Môi trường đồng nhất và đẳng hướng: các tham số điện và từ là hằng số. Trong môi trường này, các vectơ của cùng một phương trình liên hệ song song với nhau.
- Nếu các tham số điện từ theo các hướng khác nhau có các giá trị không đổi khác nhau thì được gọi là không đẳng hướng.
- Môi trường có các đại lượng điện từ là các hàm của tọa độ được gọi là môi trường không đồng nhất.

Trong tự nhiên, hầu hết các chất có hằng số điện môi tương đối lớn hơn 1 và là môi trường tuyến tính.

- Môi trường có hằng số từ thẩm tương đối lớn hớn gọi là chất thuận từ, nhỏ hơn 1 gọi là chất nghịch từ.
- Chất dẫn điện là chất có $\gamma > 10^4$ (S/m).
- Chất bán dẫn là chất có $10^4 > \gamma > 10^{-10}$ (S/m).
- Chất cách điện là chất có $\gamma < 10^{-10}$ (S/m).
- Môi trường là dẫn điện lý tưởng nếu $\gamma = \infty$, là cách điện lý tưởng nếu $\gamma = 0$.

1.3 HỆ PHƯƠNG TRÌNH MAXWELL

1.3.1 Khái niệm về dòng điện dịch

Đối với dòng điện không đổi, ta có $\frac{\partial \rho}{dt} = 0$. Từ phương trình liên tục (1.74):

$$div\vec{J} = 0 \qquad (1.75)$$

Dựa theo định nghĩa của toán tử divergence, (1.75) chứng tỏ các đường dòng dẫn không đổi khép kín hoặc đi ra xa vô cùng, không có điểm bắt đầu và điểm kết thúc.

Đối với dòng điện biến đổi:

$$div\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{dt} \neq 0 \quad (1.76)$$

(1.76) chứng tỏ các đường của dòng dẫn biến đổi không khép kín, chúng bắt đầu và kết thúc tại những điểm ở đó có mật độ điện tích biến đổi theo thời gian, chẳng hạn tại các bản tụ của tụ điện. Dòng điện biến đổi đi qua được mạch có tụ, dù không tồn tại dòng chuyển dịch có hướng của các hạt mang điện đi qua lớp điện môi của tụ. Maxwell đã đưa ra giả thiết có một quá trình xảy ra tương đương với sự có mặt của dòng điện giữa hai bản tụ và đưa ra khái niệm *dòng điện dịch*. Dòng điện dịch khép kín dòng điện dẫn trong mạch, trường điện biến đổi tạo nên dòng điện dịch này. Dòng chuyển dời có hướng của các hạt mang điện được Maxwell gọi là *dòng điện dẫn*. Dòng điện bao gồm dòng điện dẫn và dòng điện dịch được gọi là *dòng điện toàn phần*.

1.3.2 Phương trình Maxwell thứ ba và thứ tư

Phương trình Maxwell thứ tư được dẫn ra dựa theo định luật Gauss đối với trường điện. Định luật Gauss được phát biểu như sau:

Thông lượng của vector cảm ứng điện gởi qua một mặt kín S bất kỳ bằng tổng các điện tích tự do phân bố trong thể tích V được bao bởi mặt kín S ấy.

$$\oint_S \vec{D}\overrightarrow{ds} = q = \int_V \rho dV \quad (1.77)$$

Trong đó:

q: tổng điện tích tự do có trong thể tích V.

$\vec{D}$: vector cảm ứng điện trên mặt S.

ρ: mật độ điện tích khối trong thể tích V.

Áp dụng định lý Divergence đối với vế trái:

$$\int_V div\vec{D}dV = \int_V \rho dV \quad (1.78)$$

Hệ thức này luôn đúng với mọi thể tích V. Vì vậy:

$$div\vec{D} = \rho \quad (1.79)$$

Nếu trong V không có điện tích thì $div\vec{D} = 0$, đường sức của vector cảm ứng điện không có điểm bắt đầu và kết thúc trong thể tích V, hay nói cách khác V không phải là nguồn của vector cảm ứng điện. Nếu ρ > 0, thông lượng của vectơ cảm ứng điện qua S dương, chứng tỏ đường sức của vector cảm ứng điện đi ra khỏi V. Ngược lại, đường sức của vector cảm ứng điện đi vào V.

Từ đó, ta có thể rút ra kết luận***: nguồn của trường vector cảm ứng điện là điện tích, đường sức của vector cảm ứng điện bắt đầu ở điện tích dương và kết thúc ở điện tích âm.***

Biểu thức (1.79) chính là phương trình thứ tư của hệ phương trình Maxwell.

Phương trình Maxwell thứ ba được dẫn ra từ định luật Gauss đối với trường từ:

Thông lượng của vec tơ cảm ứng từ qua mặt kín thì bằng không.

Tương tự như cách dẫn phương trình Maxwell thứ tư, ta được:

$$div\vec{B} = 0 \tag{1.80}$$

(1.80) chính là phương trình thứ ba của hệ phương trình Maxwell.

1.3.3 Phương trình Maxwell thứ nhất

Phương trình Maxwell thứ nhất được dẫn ra từ định luật lưu số Ampère - Maxwell, hay còn gọi là định luật dòng điện toàn phần. Định luật này thiết lập liên hệ giữa cường độ trường từ và dòng điện toàn phần tạo nên trường từ:

Lưu số của vectơ cường độ trường từ theo đường kín C tùy ý bằng tổ đại số cường độ các dòng điện chảy qua diện tích bao bởi đường kín C.

$$\oint_C \vec{H}\vec{dl} = \sum_k I_k \tag{1.81}$$

$I_k > 0$ nếu chiều dòng điện và chiều lấy tích phân theo quy tắc đinh ốc

Trong trường hợp dòng I chảy qua điện tích S phân bố liên tục với mật độ dòng $\vec{J}$, định luật lưu số Ampère – Maxwell có dạng:

$$\oint_C \vec{H}\vec{dl} = \oint_S \vec{J}\vec{ds} \tag{1.82}$$

Áp dụng định lý Stokes đối với vế trái, chuyển vế, ta được:

$$\oint_S \left(rot\vec{H} - \vec{J}\right)\overrightarrow{ds} = 0 \tag{1.83}$$

Vì vế trái luôn bằng không với mọi S, biểu thức dưới dấu tích phân phải bằng không:

$$rot\vec{H} = \vec{J} \tag{1.84}$$

Tiếp theo, ta lấy divergence cả hai vế:

$$div\left(rot\vec{H}\right) = div\vec{J} \tag{1.85}$$

Theo (1.50), vế trái luôn bằng không với mọi $\vec{H}$. Liên hệ với phương trình liên tục (1.74):

$$div\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{dt} = 0 \tag{1.86}$$

(1.86) chỉ đạt được khi dòng điện là dòng không đổi. Vậy (1.81) và (1.84) chỉ đúng khi dòng điện là dòng không đổi.

Bây giờ ta xét trường hợp dòng điện biến thiên. Khi đó:

$$div\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{dt} \neq 0 \tag{1.87}$$

Thay (1.79) vào, ta được:

$$div\vec{J} = -\frac{\partial}{dt}\left(div\vec{D}\right) \tag{1.88}$$

$$div\left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{dt}\right) = 0 \tag{1.89}$$

(1.89) chứng tỏ đường dòng của vector $\overrightarrow{J_{tp}} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{dt}$ khép kín. Vector $\overrightarrow{J_{tp}}$ chính là vector mật độ dòng điện toàn phần đã đề cập. Dòng điện toàn phần là tổng của dòng điện dẫn có vector mật độ dòng điện dẫn $\vec{J} = \gamma\vec{E}$ và dòng điện dịch có vector mật độ dòng điện dịch $\overrightarrow{J_d} = \frac{\partial\vec{D}}{dt}$.

Biểu thức toán học của định luật lưu số của Ampère (1.82) đã được Maxwell mở rộng, khi có kể đến dòng điện dịch, như sau:

$$\oint_C \vec{H}\overrightarrow{dl} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\overrightarrow{ds} \tag{1.90}$$

$$rot\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{1.91}$$

(1.91) chính là phương trình thứ nhất của hệ phương trình Maxwell. Hệ thức này chứng tỏ không chỉ dòng điện dẫn mà ngay cả điện trường biến thiên cũng có thể sinh ra trường từ.

1.3.4 Phương trình Maxwell thứ hai

Phương trình thứ hai của hệ phương trình Maxwell được dẫn ra từ định luật cảm ứng điện từ Faraday. Định luật này thiết lập mối quan hệ giữa trường từ biến đổi trong không gian với trường điện phân bố trong không gian do trường từ gây ra:

Sức điện động sinh ra trên một vòng dây có giá trị bằng và ngược dấu với tốc độ biến thiên của từ thông gởi qua diện tích giới hạn bởi vòng dây đó.

$$\oint_C \vec{E}\overrightarrow{dl} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\overrightarrow{ds} \tag{1.92}$$

S là mặt giới hạn bởi đường cong kín C. Yếu tố diện tích $\overrightarrow{ds}$ của mặt S có chiều hợp với chiều của lấy tích phân C theo quy tắc đinh ốc thuận.

Áp dụng định lý Stokes cho vế trái:

$$\int_S rot\vec{E}\overrightarrow{ds} = \oint_C \vec{E}\overrightarrow{dl} \tag{1.93}$$

Nếu mặt lấy tích phân S không phụ thuộc thời gian:

$$\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\overrightarrow{ds} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\overrightarrow{ds} \tag{1.94}$$

Thay (1.93) và (1.94) vào (1.92):

$$\int_S rot\vec{E}\overrightarrow{ds} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\overrightarrow{ds} \tag{1.95}$$

(1.95) luôn đúng với mọi S, vì vậy:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.96}$$

(1.96) biểu diễn toán học của định luật Faraday, chính là phương trình thứ hai trong hệ phương trình Maxwell. Hệ thức này chứng tỏ trường từ biến thiên theo thời gian sinh ra trường điện xoáy phân bố trong không gian. Đến đây, ta đã có đủ hệ phương trình Maxwell gồm 4 phương trình:

$$\begin{aligned} rot\vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} && (1)\\ rot\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} && (2)\\ div\vec{B} &= 0 && (3)\\ div\vec{D} &= \rho && (4) \end{aligned} \tag{1.97}$$

Các phương trình liên hệ:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \vec{B} = \mu\vec{H}, \vec{J} = \gamma\vec{E} \tag{1.98}$$

Lưu ý:

- ε, μ, γ: thông số đặc trưng cho môi trường.
- Môi trường đẳng hướng, tuyến tính hay cường độ trường đủ nhỏ.
- Chỉ đúng với môi trường chất không chuyển động, các thông số ε, μ, γ không phải là hàm theo thời gian, môi trường không có chất sắt từ, không có nam châm vĩnh cửu.

Trong trường hợp xét trường được tạo ra bởi nguồn kích thích là nguồn độc lập với môi trường và không chịu ảnh hưởng của trường do nó tạo ra, hệ phương trình Maxwell phải có xét đến yếu tố mật độ dòng điện ngoài $\vec{J_e}$. Hệ phương trình Maxwell trở thành:

$$\begin{aligned} rot\vec{H} &= \vec{J} + \vec{J_e} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} && (1)\\ rot\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} && (2)\\ div\vec{B} &= 0 && (3)\\ div\vec{D} &= \rho && (4) \end{aligned} \tag{1.99}$$

1.3.5 Nguyên lý đối ngẫu của hệ phương trình Maxwell

Xét trường hợp với môi trường đồng nhất và đẳng hướng, bên trong không tồn tại dòng dẫn, mật độ điện tích tự do bằng không, không có nguồn ngoài. Hệ phương trình Maxwell trong trường hợp này có dạng là:

$$\begin{aligned} rot\vec{H} &= \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (1)\\ rot\vec{E} &= -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \quad (2)\\ div\vec{H} &= 0 \quad (3)\\ div\vec{E} &= \rho \quad (4) \end{aligned} \tag{1.100}$$

Ta thấy hệ phương trình (1.100) có dạng đối xứng. Các phương trình Maxwell vẫn giữ nguyên nếu ta thực hiện phép đối ngẫu:

$$\vec{E} \leftrightarrows \vec{H}, \varepsilon \leftrightarrows -\mu \tag{1.101}$$

Tính chất này được gọi là nguyên lý đối ngẫu.

Tương tự, trong trường hợp có nguồn ngoài, nguyên lý áp dụng sẽ là:

$$\vec{E} \leftrightarrows \vec{H}, \vec{J} \leftrightarrows -\overrightarrow{J_m}, \varepsilon \leftrightarrows -\mu, \rho \leftrightarrows -\rho_m \tag{1.102}$$

$\overrightarrow{J_m}$ và ρ_m là mật độ dòng từ và từ tích, hai đại lượng đưa vào mang tính hình thức, thực tế, chúng luông bằng không. Nguyên lý đối ngẫu của hệ phương trình Maxwell có ý nghĩa quan trọng trong việc nghiên cứu lý thuyết và trong khi giải các bài toán điện từ thực tiễn, nếu kết quả của nguồn điện (hay nguồn từ) đã biết thì chúng ta có thể nhận ngay kết quả do nguồn từ (hoặc nguuồn điện) mà không phải tiến hành quá trình giải bài toán đó.

1.3.6 Hệ phương trình Maxwell đối với trường điều hòa

Một trạng thái rất quan trọng của trường điện từ là trạng thái khi các đại lượng cơ bản của trường và nguồn biến thiên điều hòa theo thời gian với tần số góc ω. Bây giờ ta biểu diễn các đại lượng cơ bản của trường dưới dạng số phức và viết các phương trình Maxwell cho các biên độ phức của nó. Các đại lượng thực của trường ở một thời điểm bất kỳ được coi như là phần thực của các đại lượng phức tương ứng với chúng.

$$\begin{gathered} \vec{E} = Re\left\{E_{xm}e^{j(\omega t+\psi_x)}\overrightarrow{i_x} + E_{ym}e^{j(\omega t+\psi_y)}\overrightarrow{i_y} + E_{zm}e^{j(\omega t+\psi_z)}\overrightarrow{i_z}\right\}\\ \vec{E} = Re\left\{\dot{\vec{E}}e^{j\omega t}\right\} \end{gathered} \tag{1.103}$$

Với $\vec{H},\vec{J}$, ρ cách biểu diễn tương tự.

Từ cách biểu diễn phức các đại lượng của trường theo (1.103), ta xây dựng được hệ phương trình Maxwell dạng vi phân cho các biên độ phức của trường như sau:

$$\begin{aligned} rot\dot{\vec{H}} &= \dot{\vec{J}} + j\omega\dot{\vec{D}} && (1)\\ rot\dot{\vec{E}} &= -j\omega\dot{\vec{B}} && (2)\\ div\dot{\vec{B}} &= 0 && (3)\\ div\dot{\vec{D}} &= \dot{\rho} && (4) \end{aligned} \qquad (1.104)$$

Các phương trình liên hệ dạng phức:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{D}} &= \varepsilon\dot{\vec{E}} && (1)\\ \dot{\vec{B}} &= \mu\dot{\vec{H}} && (2)\\ \dot{\vec{J}} &= \gamma\left(\dot{\vec{E}} + \dot{\vec{E_e}}\right) = \gamma\dot{\vec{E}} + \dot{\vec{J_e}} && (3) \end{aligned} \qquad (1.105)$$

Với $\dot{\vec{E_e}}$ là cường độ của nguồn ngoài tạo nên trường.

Trong trường hợp không có nguồn ngoài:

$$\begin{aligned} rot\dot{\vec{H}} &= j\omega\dot{\varepsilon}\dot{\vec{E}} && (1)\\ rot\dot{\vec{E}} &= -j\omega\mu\dot{\vec{H}} && (2)\\ div\left(\mu\dot{\vec{H}}\right) &= 0 && (3)\\ div\left(\dot{\varepsilon}\dot{\vec{E}}\right) &= 0 && (4) \end{aligned} \qquad (1.106)$$

$\dot{\varepsilon}$ là hằng số điện môi phức của môi trường.

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon - j\frac{\gamma}{\omega} \qquad (1.107)$$

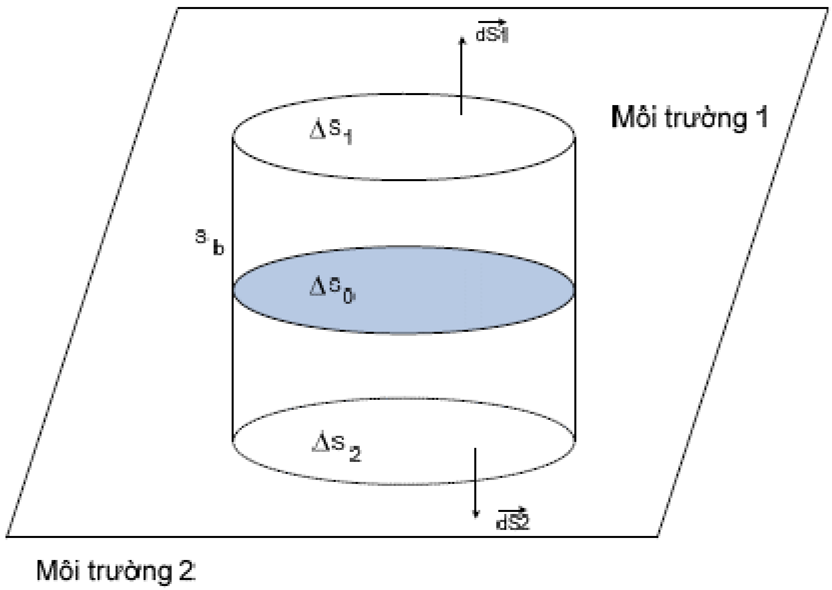
1.4 ĐIỀU KIỆN BIÊN

Điều kiện biên đối với các vector của trường điện từ là hệ thức giữa các thành phần của các vector trường điện từ ở hai bên, sát mặt giới hạn phân cách hai môi trường khác nhau. Điều kiện biên có tầm quan trọng trong cả nghiên cứu lý thuyết lẫn tìm nghiệm các bài toán điện từ trong thực tế.

Xét thành phần pháp tuyến:

Điều kiện biên đối với thành phần pháp tuyến của một vector được dẫn ra từ phương trình dạng tích phân lấy theo mặt kín S, gồm mặt bên S_b và hai đáy ΔS_1, ΔS_2

đủ nhỏ để có thể coi vector trường không đổi trên mỗi đáy này. Chọn vector pháp tuyến $\vec{n}$ hướng từ môi trường (2) đến môi trường (1). Các vector ở môi trường 1 và 2 lần lượt có chỉ số là 1 và 2. Lấy giới hạn cho mặt bên S_b -> 0, ΔS_1 -> ΔS_0, ΔS_2 -> ΔS_0, thông lượng của vectơ trường gởi qua mặt bên S_b -> 0, sẽ nhận được quy luật biến đổi thành phần pháp tuyến vector của trường tại mặt biên.



Hình 1.4 – Thành phần pháp tuyến trong điều kiện biên

Ta có:

$$\oint_S \vec{D}\overrightarrow{ds} = \int_V \rho dV \qquad (1.108)$$

Mà:

$$\lim_{S_b \to 0} \oint_S \vec{D}\overrightarrow{ds} = \vec{n}\left(\overrightarrow{D_1} - \overrightarrow{D_2}\right)\Delta S_0 \qquad (1.109)$$

$$\lim_{S_b \to 0} \int_V \rho dV = \sigma \Delta S_0 \text{ (điện tích phân bố mặt trên } \Delta S_0\text{)} \qquad (1.110)$$

σ: mật độ điện tích mặt trên mặt biên.

Từ (1.108), (1.109) và (1.110):

$$\vec{n}\left(\overrightarrow{D_1} - \overrightarrow{D_2}\right) = \sigma \qquad (1.111)$$

Hay:

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma \tag{1.112}$$

Thực hiện tương tự:

$$\vec{n}\left(\overrightarrow{B_1} - \overrightarrow{B_2}\right) = 0 \tag{1.113}$$

$$B_{1n} - B_{2n} = 0 \tag{1.114}$$

$$\vec{n}\left(\overrightarrow{J_1} - \overrightarrow{J_2}\right) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \tag{1.115}$$

$$J_{1n} - J_{2n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \tag{1.116}$$

Đối với thành phần tiếp tuyến:

Cách xác định tương tự, với vòng dây dẫn chữ nhật nằm về hai bên của mặt biên, hai cạnh song song với mặt biên, ta được điều kiện biên đối với thành phần tiếp tuyến:

$$\vec{n} \times \left(\overrightarrow{E_1} - \overrightarrow{E_2}\right) = 0 \tag{1.117}$$

Hay:

$$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0 \tag{1.118}$$

$$\vec{n} \times \left(\overrightarrow{H_1} - \overrightarrow{H_2}\right) = \overrightarrow{J_s} \tag{1.119}$$

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = J_s \tag{1.120}$$

1.5 NĂNG LƯỢNG CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ - ĐỊNH LÝ POYNTING

Định lý Poynting thiết lập mối liên hệ giữa sự thay đổi năng lượng điện từ trong một thể tích V với dòng năng lượng điện từ chảy qua mặt kín S bao quanh thể tích này.

Giả sử có một điện tích điểm dq chuyển động với một vận tốc $\vec{v}$ trong miền thể tích V có trường điện từ, đặc trưng bởi các vectơ $\vec{E}, \vec{B}$. Điện tích điểm dq chịu tác dụng của lực điện và lực từ (Lorentz và Coulomb):

$$\vec{F} = dq\vec{E} + dq\vec{v} \times \vec{B} \quad (1.121)$$

Khi dq dịch chuyển được quãng đường $\overrightarrow{dl}$, công của lực điện từ tác dụng lên dq là:

$$dA = \vec{F}\overrightarrow{dl} = \left(dq\vec{E} + dq\vec{v} \times \vec{B}\right)\overrightarrow{dl} \quad (1.122)$$

Vector $\vec{v} \times \vec{B}$ vuông góc với $\vec{v}$ và $\overrightarrow{dl} = \vec{v}dt$ cùng phương với $\vec{v}$ nên $\left(dq\vec{v} \times \vec{B}\right)\overrightarrow{dl} = 0$.

$$dA = dq\vec{E}\overrightarrow{dl} = dq\vec{E}\vec{v}dt \quad (1.123)$$

Công suất thực hiện bởi trường điện từ:

$$\frac{dA}{dt} = dq\vec{E}\vec{v} \quad (1.124)$$

Nếu điện tích dq phân bố liên tục với mật độ ρ thì dq = ρdV. Khi đó:

$$\frac{dA}{dt} = \rho dV\vec{E}\vec{v} \quad (1.125)$$

Theo định luật Ohm:

$$\vec{J} = \rho\vec{v} \quad (1.126)$$

(1.125) thành:

$$\frac{dA}{dt} = \vec{J}\vec{E}dV \quad (1.127)$$

Như vậy, nếu điện tích khối mật độ ρ chuyển động với vận tốc $\vec{v}$ tạo nên dòng điện dẫn có mật độ dòng $\vec{J}$ thì công suất trường điện từ thực hiện đối với dòng này trong miền thể tích V bằng:

$$P_j = \int_V \vec{J}\vec{E}dV \quad (1.128)$$

Đó là công suất tiêu tán trường do tỏa nhiệt trong thể tích V. Hàm dưới dấu tích phân là mật độ công suất tiêu tán:

$$p_j = \vec{J}\vec{E} \quad [W/m^2] \quad (1.129)$$

Từ phương trình Maxwell thứ nhất: $rot\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$. Để ý hằng đẳng thức:

$$div\left(\vec{E} \times \vec{H}\right) = \vec{H}rot\vec{E} - \vec{E}rot\vec{H} \quad (1.130)$$

Theo (1.96): $rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$div(\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E}\left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \tag{1.131}$$

Hay:
$$-div(\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{J}\vec{E} + \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.132}$$

Vec tơ Poynting được định nghĩa:

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} \quad [W/m^2] \tag{1.133}$$

Thay vào (1.132):

$$-div\vec{P} = \vec{J}\vec{E} + \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.134}$$

(1.134) là định lý Poynting dạng vi phân đối với giá trị tức thời của các vector trường điện từ.

Lấy tích phân hai vế theo thể tích V:

$$-\int_V div\vec{P}dV = \int_V \vec{J}\vec{E}dV + \int_V \left(\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)dV \tag{1.135}$$

Áp dụng định lý Divergence cho vế trái:

$$-\oint_S \vec{P}\overrightarrow{ds} = \int_V \vec{J}\vec{E}dV + \int_V \left(\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)dV \tag{1.136}$$

Đây chính là dạng tích phân của định lý Poynting.

Bây giờ ta xét ý nghĩa vật lý của định lý Poynting. Vì E đo bằng V/m, H đo bằng A/m nên P đo bằng W/m^2. Vậy tích phân $-\oint_S \vec{P}\overrightarrow{ds}$ là công suất trường điện từ truyền qua mặt S vào trong thể tích V. Do đó vector Poynting còn được gọi là vector mật độ dòng công suất.

Tích phân thứ nhất ở vế phải của (1.136) là công suất tiêu tán trường trong thể tích V, nên theo định luật bảo toàn và chuyển hóa năng lượng, tích phân thứ hai phải là công suất ứng với sự thay đổi năng lượng điện từ tập trung trong thể tích V.

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \left(\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)dV \tag{1.137}$$

W là năng lượng trường điện từ tập trung trong thể tích V. Giả thiết ở thời điểm t = 0, các vector của trường điện từ bằng không, ở thời điểm t có giá trị $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$:

$$W = \int_0^t \int_V \left(\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) dV dt \quad [J] \tag{1.138}$$

Mà:

$$\begin{aligned} \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \vec{E}\frac{\partial(\varepsilon\vec{E})}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial\left(\varepsilon\vec{E}^2\right)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial(\vec{E}\vec{D})}{\partial t} \\ \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{H}\frac{\partial(\mu\vec{H})}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial\left(\mu\vec{H}^2\right)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial(\vec{B}\vec{H})}{\partial t} \end{aligned} \tag{1.139}$$

Thay vào (1.138):

$$W = \frac{1}{2}\int_V \left(\vec{E}\vec{D}\right) dV + \frac{1}{2}\int_V \left(\vec{B}\vec{H}\right) dV \quad [J] \tag{1.140}$$

Tích phân thứ nhất trong (1.140) là năng lượng trường điện, tích phân thứ hai là năng lượng trường từ. Mật độ năng lượng trường điện w_e và mật độ năng lượng trường từ w_b lần lượt là:

$$w_e = \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} \quad w_b = \frac{1}{2}\vec{B}\vec{H} \tag{1.141}$$

Đối với trường điện từ biến thiên điều hòa, ta có vector Poynting phức:

$$\dot{\vec{P}} = \frac{1}{2}\left[\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*\right] \tag{1.142}$$

Mật độ dòng công suất trung bình:

$$\overrightarrow{P_{tb}} = Re\left\{\dot{\vec{P}}\right\} \tag{1.143}$$

Mật độ năng lượng trường điện trung bình:

$$w_{etb} = \frac{1}{4}\dot{\vec{E}}\dot{\vec{D}}^* \tag{1.144}$$

Mật độ năng lượng trường từ trung bình:

$$w_{mtb} = \frac{1}{4}\dot{\vec{B}}\dot{\vec{H}}^* \tag{1.145}$$

Mật độ công suất tiêu tán trung bình:

$$p_{jtb} = \frac{1}{2}\dot{\vec{E}}\dot{\vec{J}}^* \tag{1.146}$$

Định lý Poynting dạng phức:

$$-\oint_S \overrightarrow{\dot{P}}\overrightarrow{ds} = \int_V p_{jtb}dV + j2\omega \int_V (w_{etb} + w_{mtb})\, dV \qquad (1.147)$$

Phần thực của vế trái chính là tích phân thứ nhất của vế phải, là công suất tác dụng đưa vào mạch điện. Phần ảo của vế trái chính là tích phân thứ hai của vế phải, là công suất phản kháng đưa vào mạch điện.

1.6 ĐỊNH LÝ NGHIỆM DUY NHẤT

Hệ phương trình Maxwell có nghiệm duy nhất khi trường điện từ thỏa mãn hai điều kiện sau:

1. Biết các vector cường độ điện trường và từ trường tại thời điểm ban đầu t = 0 ở bất kỳ điểm nào trong vùng không gian khảo sát (điều kiện ban đầu).

2. Biết thành phần tiếp tuyến của vector cường độ điện trường hoặc thành phần tiếp tuyến của vector cường độ từ trường trên mặt giới hạn S bao miền không gian khảo sát trong khoảng thời gian 0 < t < ∞ (điều kiện biên).

TÓM TẮT

Bài này nhắc lại các kiến thức cần thiết về giải tích để giải quyết bài toán trường điện từ: các hệ tọa độ, phép toán trên vector, các toán tử và định lý cơ bản.

Phần sau tập trung vào các vấn đề tổng quát của trường điện từ:

- *Các đại lượng cơ bản của trường điện từ.*
- *Các định luật cơ bản của trường điện từ, từ đó thiết lập các phương trình toán học. Hệ phương trình Maxwell được thành lập từ các phương trình toán học này.*
- *Điều kiện biên: là điều kiện để tìm nghiệm của các phương trình Maxwell sau này.*

CÂU HỎI ÔN TẬP

Câu 1. Xác định vector đơn vị theo hướng của vector $\overrightarrow{AB}$ biết A(1,2,3) và B(4,1,6) (hệ tọa độ Descartes).

Câu 2. Tìm vector đơn vị vuông góc với mặt xy = 2 tại điểm A(2,1,0).

Câu 3. Cho $\vec{A} = 2xz\overrightarrow{\iota_x} + x^2y^2\overrightarrow{\iota_y} + xy\overrightarrow{\iota_z}, \vec{B} = 2\overrightarrow{\iota_x} + 3\overrightarrow{\iota_y} + \overrightarrow{\iota_z}, \vec{C} = r^2\overrightarrow{\iota_r} + 2rsin\varphi\overrightarrow{\iota_\varphi} + z\overrightarrow{\iota_z}$, $V = 2x^2(y+1)(z^2+1), U = r^3 + rsin\varphi cos\theta + r^2 sin\theta$. Tính:

a. $\vec{A}.\vec{B}$ b. $\vec{A} \times \vec{B}$ c. $d\vec{A}$ d. gradV e. $div\vec{A}$

f. $rot\vec{A}$ g. $\Delta\vec{A}$ h. ΔV i. $div\vec{C}$ j. gradU

Câu 4. Tính khối lượng vật thể hình cầu bán kính a, tâm tại gốc tọa độ có mật độ khối lượng $\rho = 1/r$.

Câu 5. Tìm tích phân $\int_V (x^2 + y^2)dV$ với V là nửa trên hình cầu bán kính R.

Câu 6. Các lực điện từ tác dụng lên điện tích thử q tại điểm P với các vận tốc khác nhau cho như sau:

Vận tốc $\vec{v}$	Lực tác dụng $\vec{F}$
$\overrightarrow{\iota_x}$	$q\overrightarrow{\iota_x}$
$\overrightarrow{\iota_y}$	$q(2\overrightarrow{\iota_x} + \overrightarrow{\iota_y})$
$\overrightarrow{\iota_z}$	$q(\overrightarrow{\iota_x} + \overrightarrow{\iota_y})$

Xác định $\vec{E}$ và $\vec{B}$ tại P.

Câu 7. Giữa hai tấm của tụ điện phẳng không khí có điện trường biến thiên theo quy luật sin với Em = 10^{-3} V/m, diện tích mỗi bản tụ S = 80 cm^2. Xác định biên độ dòng điện dịch tại tần số 50 Hz.

Câu 8. Dây dẫn bằng đồng có độ dẫn điện γ = 5,8.107 S/m, $\varepsilon \approx \varepsilon_0$ = 8,854.10^{-12} F/m dạng hình trụ đường kính d = 1mm mang dòng điện hình sin biên độ 1A, tần số 50 Hz. Xác định mật độ dòng điện dẫn và mật độ dòng điện dịch.

Câu 9. Xác định tần số để biên độ dòng điện dẫn bằng biên độ dòng điện dịch trong môi trường có $\varepsilon = 80\varepsilon_0$ và γ = 1 S/m (giả sử dòng điện có dạng sin).

Câu 10. Trong môi trường đồng nhất, tuyến tính, đẳng hướng có ε = const, μ = const, γ = 0, không có điện tích tự do, tồn tại trường điện từ có $\vec{B} = \text{asin}(\omega t - kx)\overrightarrow{\iota_x} + akycos(\omega t - kx)\overrightarrow{\iota_y}$ với k, a, ω là hằng số. Xác định $\vec{E}$.

Câu 11. Trong môi trường ε = const, μ = const, γ = 0, tồn tại trường điện từ có $\vec{E} = \sin(k_x x)\, sin(k_y y)\cos(\omega t)\overrightarrow{\iota_z}$ với kx, ky, ω là hằng số.

1. Xác định $\vec{H}$.
2. Chứng minh $k_x^2 + k_y^2 = \varepsilon\mu\omega^2$.

Câu 12. Tụ điện phẳng lấp đầy bằng điện môi có hằng số điện môi ε và độ dẫn điện $\gamma \neq 0$, diện tích và khoảng cách giữa 2 bản tụ là S và d. Tụ điện được đặt dưới hiệu điện thế Uc biến thiên chậm. Xác định dòng điện dẫn và dòng điện dịch trong điện môi.

Câu 13. Môi trường 1 ($\mu_1 = 4\mu_0$) và môi trường 2 ($\mu_2 = 6\mu_0$) phân cách bằng mặt phẳng y + z = 1. Giả sử trên mặt phân cách không có dòng điện mặt. Tìm $\overrightarrow{B_2}$ trong miền 2 trên mặt phân cách biết trong miền 1 trên mặt phân cách $\overrightarrow{B_2} = 2\overrightarrow{\iota_x} + \overrightarrow{\iota_y}$.

BÀI 2: TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

Sau khi học xong bài này, người học có thể:

- *Biết các khái niệm về trường điện tĩnh.*
- *Biết các phương pháp giải bài toán trường điện tĩnh.*

2.1 KHÁI NIỆM

Trường điện từ tĩnh là trường điện từ thỏa mãn hai điều kiện sau:

1. Các đại lượng điện và từ không thay đổi theo thời gian. Đạo hàm riêng các đại lượng này theo thời gian đều bằng không.
2. Không có sự chuyển động của các hạt mang điện, nghĩa là mật độ dòng điện luôn bằng không.

Áp dụng vào hệ phương trình Maxwell và điều kiện biên của trường điện từ:

$$\begin{aligned}
&rot\vec{H} = 0 && (1)\\
&div\vec{B} = 0 && (2)\\
&\vec{n}.\left(\overrightarrow{B_1} - \overrightarrow{B_2}\right) = 0 \; hay \; B_{1n} = B_{2n} && \\
&\vec{n} \times \left(\overrightarrow{H_1} - \overrightarrow{H_2}\right) = \vec{0} && (3)\\
&\vec{B} = \mu\vec{H} && (4)
\end{aligned} \qquad (2.1)$$

$$\begin{aligned}
&rot\vec{E} = 0 && (5)\\
&div\vec{D} = \rho && (6)\\
&\vec{n}.\left(\overrightarrow{D_1} - \overrightarrow{D_2}\right) = \sigma \; hay \; D_{1n} - D_{2n} = \sigma && \\
&\vec{n} \times \left(\overrightarrow{E_1} - \overrightarrow{E_2}\right) = \vec{0} && (7)\\
&\vec{D} = \varepsilon\vec{E} && (8)
\end{aligned} \qquad (2.2)$$

Các phương trình tách thành 2 nhóm độc lập có mô tả toán học tương tự → chỉ khảo sát trường điện tĩnh. Đó là trường điện không thay đổi theo thời gian của các điện tích đứng yên.

2.2 TÍNH CHẤT THẾ CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

2.2.1 Công của trường điện tĩnh

Công của lực điện tĩnh khi di chuyển một điện tích dq theo một đường cong kín C:

$$A = \oint_C \vec{E}\overrightarrow{dl} \tag{2.3}$$

Từ (2.2): $rot\vec{E} = 0$ và áp dụng định lý Stokes:

$$A = \oint_C \vec{E}\overrightarrow{dl} = \int_S rot\vec{E}\overrightarrow{ds} = 0 \tag{2.4}$$

Công lực điện tĩnh theo đường cong kín = 0. ***Trường điện tĩnh là trường thế.***

Chia đường cong kín C thành hai nhánh khác nhau PaQ và QbP:

$$\oint_C \vec{E}\overrightarrow{dl} = \int_{PaQbP} \vec{E}\overrightarrow{dl} = \int_{PaQ} \vec{E}\overrightarrow{dl} + \int_{QbP} \vec{E}\overrightarrow{dl} = 0 \tag{2.5}$$

$$\int_{PaQ} \vec{E}\overrightarrow{dl} = -\int_{QbP} \vec{E}\overrightarrow{dl} = \int_{PbQ} \vec{E}\overrightarrow{dl} \tag{2.6}$$

Công lực điện tĩnh không phụ thuộc vào đường dịch chuyển, chỉ phụ thuộc điểm đầu và điểm cuối.

2.2.2 Điện thế

Từ (1.50): rot(gradf) = 0 và (2.2): $rot\vec{E} = 0$ nên ta định nghĩa điện thế ϕ:

$$\boxed{\vec{E} = -grad\phi} \tag{2.7}$$

Dấu trừ ở (2.7) chỉ mang tính quy ước, nó xác định rằng chiều của vector cường độ điện trường là chiều giảm của điện thế.

Từ định nghĩa của toán tử gradient, suy ra:

$$d\phi = -\vec{E}\overrightarrow{dl} \tag{2.8}$$

$$\phi = -\int \vec{E}\overrightarrow{dl} + C \tag{2.9}$$

Điện thế là một đại lượng không đơn trị. Giá trị của nó phụ thuộc vào việc xác định gốc điện thế, là điểm mà điện thế được xem là bằng không. Trong thực tế, người ta thường chọn điện thế bằng không là điện thế đất. Trong lý thuyết, nếu điện tích tạo nên điện trường phân bố trong một miền hữu hạn thì thường chọn điện thế ở ∞ bằng không.

Một đại lượng khác quan trọng hơn điện thế, đó là hiệu điện thế. Hiệu điện thế giữa hai điểm P và Q được xác định như sau:

$$\phi(P) - \phi(Q) = \int_P^Q \vec{E}\overrightarrow{dl} \quad [V] \tag{2.10}$$

Nếu chọn điện thế tại ∞ bằng không:

$$\phi(P) = \int_P^\infty \vec{E}\overrightarrow{dl} \quad [V] \tag{2.11}$$

Ví dụ 2.1: Xác định cường độ trường điện khi biết thế của trường điện tĩnh phân bố như sau (toạ độ cầu): $\phi = \begin{cases} a & r < R = const \\ \frac{aR}{r} & r > R \end{cases}$

Giải

$$\vec{E} = -grad\phi = -\left(\overrightarrow{\iota_r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\overrightarrow{\iota_\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \frac{1}{rsin\theta}\overrightarrow{\iota_\varphi}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right)$$

$$\phi = a \rightarrow \vec{E} = 0$$

$$\phi = \frac{aR}{r} \rightarrow \vec{E} = \frac{aR}{r^2}\overrightarrow{\iota_r}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{aR}{r^2}\overrightarrow{\iota_r} & r > R \end{cases}$$

2.3 PHƯƠNG TRÌNH POISSON - LAPLACE

Từ phương trình (6) trong (2.2): $div\vec{D} = \rho$. Thay $\vec{E} = -grad\phi$ và $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$:

$$div(\varepsilon grad\phi) = -\rho \tag{2.12}$$

Nếu môi trường khảo sát đồng nhất, ε = const:

$$div(grad\phi) = -\rho/\varepsilon \tag{2.13}$$

Hay:

$$\Delta\phi = -\rho/\varepsilon \tag{2.14}$$

(2.14) được gọi là phương trình Poisson. Nếu miền khảo sát không có phân bố điện tích:

$$\Delta\phi = 0 \tag{2.15}$$

(2.15) là phương trình Laplace.

2.4 VẬT DẪN TRONG TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

2.4.1 Các tính chất

Vật dẫn là môi trường có các điện tích tự do. Do tác dụng của lực điện, các điện tích tự do di chuyển tạo thành dòng điện dẫn. Từ (1.70) và (1.74):

$$\vec{J} = \gamma\vec{E} \quad div\vec{J} + \frac{\partial\rho}{dt} = 0$$

$$div(\gamma\vec{E}) + \frac{\partial\rho}{dt} = 0 \tag{2.16}$$

Mà:

$$div\vec{D} = div(\varepsilon\vec{E}) = \rho \tag{2.17}$$

Nếu môi trường đồng nhất, ε, μ là hằng số:

$$\frac{\gamma}{\varepsilon}\rho + \frac{\partial\rho}{dt} = 0 \tag{2.18}$$

Phương trình vi phân (2.18) có nghiệm:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}t} \tag{2.19}$$

(2.19) chứng tỏ:

- Mật độ điện tích khối bên trong vật dẫn suy giảm theo quy luật hàm mũ với hằng số thời gian γ/ε.
- Theo định luật bảo toàn điện tích, các điện tích tự do sẽ phân bố trên bề mặt vật dẫn với mật độ điện tích mặt.

Trong trường điện tĩnh không có sự di chuyển của các điện tích:

$$\vec{J} = \gamma\vec{E} = 0 \tag{2.20}$$

Bên trong vật dẫn $\gamma \neq 0$ nên:

$$\vec{E} = 0 \qquad (2.21)$$

$$\vec{E} = -grad\phi \ = 0 \rightarrow \phi = const \qquad (2.22)$$

Điện thế tại mọi điểm trên vật dẫn đều bằng nhau: ***vật dẫn là vật đẳng thế, mặt dẫn là mặt đẳng thế***.

Theo điều kiện biên (1.111):

$$\vec{n}\left(\overrightarrow{D_1} - \overrightarrow{D_2}\right) = \sigma \qquad (2.23)$$

Bên trong vật dẫn: $\vec{E} = 0 \rightarrow \vec{D} = 0$

$$\vec{n}\vec{D} = \sigma \qquad (2.24)$$

Hay: $$\sigma = D_n \qquad (2.25)$$

Theo điều kiện biên (1.118):

$$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0 \qquad (2.26)$$

Bên trong vật dẫn: $\vec{E} = 0$ nên $E_{1\tau} = E_{2\tau} = 0$ → không có thành phần tiếp tuyến trên bề mặt vật dẫn.

$$\vec{D} = D_n\vec{n} = \sigma\vec{n} \qquad (2.27)$$

2.4.2 Phân bố điện thế và điện tích trong hệ thống vật dẫn

2.4.2.1 Định lý tương hỗ

Xét hệ thống có n vật dẫn:

- Điện tích các vật dẫn $q_1, q_2, \ldots, q_n$ và điện thế tương ứng $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$.
- Điện tích các vật dẫn thay đổi thành $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ và điện thế tương ứng $\phi'_1, \phi'_2, \ldots, \phi'_n$.
- Các vật dẫn phân bố trong miền giới nội đặt trong môi trường tuyến tính, đẳng hướng không có phân bố điện tích khối.

Biểu diễn toán học của định lý tương hỗ:

$$\sum_{k=1}^{n} \phi'_k q_k = \sum_{k=1}^{n} \phi_k q'_k \qquad (2.28)$$

2.4.2.2 Hệ số thế

- Điện dung C của vật dẫn cô lập:

$$C = q/\phi \tag{2.29}$$

- Hệ thống có n vật dẫn, điện thế của vật dẫn thứ k:

$$\phi_k = \sum_{m=1}^{n} B_{km} q_m \tag{2.30}$$

Điện thế này phụ thuộc vào điện tích, hình dạng và sự phân bố của tất cả các vật dẫn. Hệ số B_{km} ($k \neq m$) gọi là hệ số tương hỗ giữa vật dẫn k và vật dẫn m.

Ý nghĩa của hệ số tương hỗ:

Xét trường hợp tất cả các vật dẫn đều có điện tích bằng không trừ q_m, theo (2.30):

$$\phi_k = \sum_{m=1}^{n} B_{km} q_m = B_{km} q_m \tag{2.31}$$

Vật dẫn k đặt trong trường do vật dẫn m tạo ra sẽ có điện thế cùng dấu với điện tích:

$$B_{km} > 0 \tag{2.32}$$

Nếu q_m = 1C:

$$\phi_k = B_{km} \tag{2.33}$$

Hệ số tương hỗ giữa vật dẫn k và vật dẫn m có giá trị bằng điện thế của vật dẫn k khi vật dẫn m mang giá trị 1C và các vật dẫn khác không mang điện.

Từ định lý tương hỗ (2.28):

$$B_{km} = B_{mk} \tag{2.34}$$

Nếu k = m:

$$\phi_k = B_{kk} q_k \tag{2.35}$$

Hệ số thế riêng của vật dẫn k có giá trị bằng điện thế của vật dẫn k khi nó mang giá trị 1C và các vật dẫn khác không mang điện.

2.4.2.3 Hệ số điện dung (hệ số cảm ứng)

Giải hệ phương trình (2.30):

$$q_k = \sum_{m=1}^{n} A_{km} \phi_m \tag{2.36}$$

A_{km}: hệ số điện dung tương hỗ giữa vật dẫn k và vật dẫn m.

$$A_{km} = \Delta_{km}/\Delta \tag{2.37}$$

Trong đó:

$$\Delta_{km} = (-1)^{(k+m)} \begin{vmatrix} \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1m} & \cdots & \mathbf{B}_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{B}_{k1} & \cdots & \mathbf{B}_{km} & \cdots & \mathbf{B}_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{B}_{n1} & \cdots & \mathbf{B}_{nm} & \cdots & \mathbf{B}_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.38}$$

Theo (2.34):

$$\Delta_{km} = \Delta_{mk} \tag{2.39}$$

Từ đó:

$$A_{km} = A_{mk} \tag{2.40}$$

Xét một tụ điện là hệ gồm 2 vật dẫn (2 bản tụ có điện tích bằng nhau và trái dấu), theo (2.36):

$$\begin{aligned} q_1 &= A_{11}\phi_1 + A_{12}\phi_2 = q \\ q_2 &= A_{21}\phi_1 + A_{22}\phi_2 = -q \end{aligned} \tag{2.41}$$

Cộng hai phương trình:

$$(A_{11} + A_{21})\phi_1 + (A_{12} + A_{22})\phi_2 = 0 \tag{2.42}$$

Phương trình này thỏa mãn với mọi điện thế và kết hợp với (2.40):

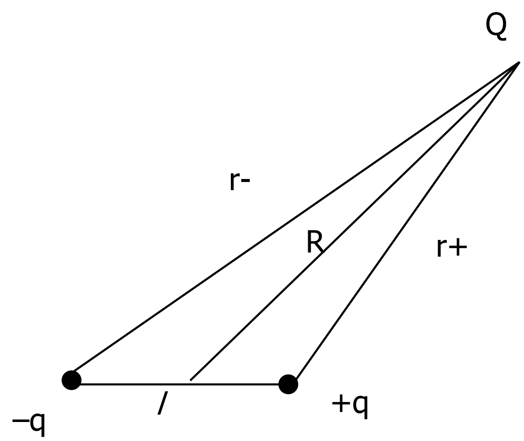
$$A_{11} = -A_{21} = -A_{12} = A_{22} = -C \tag{2.43}$$

Thế vào (2.41):

$$C = \frac{q}{\phi_2 - \phi_1} = \frac{q}{U} \tag{2.44}$$

2.5 ĐIỆN MÔI TRONG TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

- Không có các điện tích tự do.
- Các điện tích dương và âm chuyển dịch theo 2 hướng ngược nhau hình thành lưỡng cực điện (2 điện tích –q và +q cách nhau khoảng l).



Hình 2.1 – Lưỡng cực điện

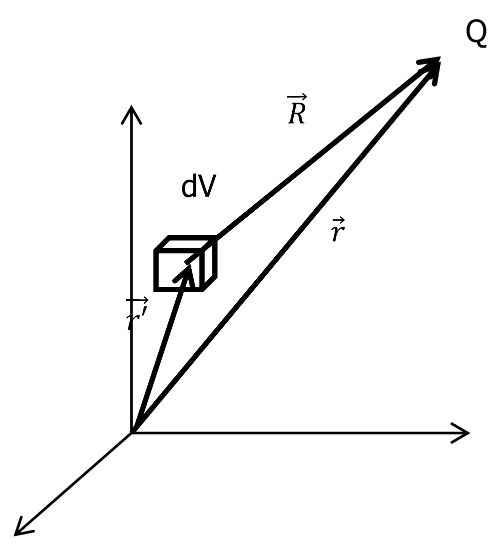
Điện thế do lưỡng cực điện tạo ra:

$$\phi(Q) = \frac{q\vec{l}.\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{\vec{p}.\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \quad (2.45)$$

$\vec{p} = q\vec{l}$: moment lưỡng cực

Trạng thái phân cực của điện môi xác định bằng vector phân cực điện $\vec{P}$. Nếu trong một đơn vị thể tích có N lưỡng cực điện:

$$\vec{P} = N\vec{p} \quad (2.46)$$



Hình 2.2 – Điện thế do yếu tố thể tích dV tạo ra

Điện thế do yếu tố thể tích dV tạo ra tại Q:

$$d\phi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}dV\vec{R}}{R^3} \tag{2.47}$$

Với $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r'}$

$$\phi_P(Q) = \phi_P(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\left(\vec{r}-\vec{r'}\right)\vec{P}dV}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3} \tag{2.48}$$

Hay:

$$\phi_P(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\vec{P}.\vec{dS}}{|\vec{r}-\vec{r'}|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{-div\vec{P}dV}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \tag{2.49}$$

Thành phần thứ nhất của (2.49) là thế điện gây ra bởi điện tích phân cực phân bố trên mặt S với mật độ điện tích phân cực mặt:

$$\sigma_P = \vec{n}.\vec{P} = P_n \quad [C/m^2] \tag{2.50}$$

Thành phần thứ hai là thế điện gây ra bởi điện tích phân cực phân bố trong thể tích V với mật độ điện tích phân cực khối:

$$\rho_P = -div\vec{P} \quad [C/m^3] \tag{2.51}$$

Điện môi khi phân cực tạo ra điện tường phụ nên điện trường khi có điện môi là tổng của hai trường:

- Trường của các điện tích tự do.
- Trường của điện tích do phân cực điện môi.

$$\phi_P(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{(\sigma+\sigma_P)dS}{|\vec{r}-\vec{r'}|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{(\rho+\rho_P)dV}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \tag{2.52}$$

2.6 NĂNG LƯỢNG TRƯỜNG ĐIỆN

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \vec{E}\vec{D}dV \tag{2.53}$$

Nếu trường điện tạo bởi các điện tích phân bố khối mật độ ρ trong thể tích V và phân bố mặt mật độ σ trên mặt S:

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \phi\rho dV + \frac{1}{2}\int_S \phi\sigma dS \tag{2.54}$$

Nếu trường điện tạo bởi n vật dẫn mang điện q_1, q_2, … :

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\phi_k q_k \tag{2.55}$$

2.7 CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN TRƯỜNG ĐIỆN TĨNH

- Bài toán trường điện tĩnh chủ yếu xác định $\vec{E}$ và ϕ.

$$\begin{gathered}\phi = -\int \vec{E}\overrightarrow{dl} + C \\ \vec{E} = -grad\phi\end{gathered} \tag{2.56}$$

- Nếu môi trường đồng nhất, đẳng hướng:

$$\Delta\phi = \begin{cases} -\frac{\rho}{\varepsilon} & \\ 0 & \rho = 0 \end{cases} \tag{2.57}$$

Các hằng số khi giải các phương trình này được xác định dựa vào các điều kiện biên thích hợp. Các điều kiện biên đối với điện thế:

$$\begin{gathered}\phi_1 = \phi_2 \\ \varepsilon_1 \frac{\delta\phi_1}{\delta n} - \varepsilon_2 \frac{\delta\phi_2}{\delta n} = -\sigma \\ \frac{\delta\phi_1}{\delta\tau} - \frac{\delta\phi_2}{\delta\tau} = 0\end{gathered} \tag{2.58}$$

Phương pháp tổng quát để giải bài toán là phương pháp tích phân. Tuy nhiên, ta có thể dùng một số phương pháp khác để giải bài toán trường điện tĩnh.

2.7.1 Dùng nguyên lý chồng trường

Nguyên lý chồng trường dựa cơ sở trên trường tạo ra bởi điện tích điểm đối xứng cầu:

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon r} \tag{2.59}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\overrightarrow{i_q} \tag{2.60}$$

r: khoảng cách từ điểm khảo sát P đến điện tích điểm.

$\overrightarrow{i_q}$: vector đơn vị hướng từ điện tích điểm q đến điểm khảo sát.

Ví dụ 2.2: Xác định cường độ trường điện và điện thế do điện tích điểm q = 1C đặt tại điểm A tạo ra tại điểm P.

a. Tọa độ Descartes A(1,2,4); P(1,1,1).

b. Tọa độ trụ A(1,0,1); P(0,π/2,2).

c. Tọa độ cầu A(1,0,π/2); P(3,π/2,π).

<u>Giải</u>

a. $\overrightarrow{AP}(0,-1,-3) \rightarrow |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{0^2+(-1)^2+(-3)^2} = \sqrt{10} \rightarrow \vec{\iota_q} = \frac{\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AP}|} = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(-\vec{\iota_y} - 3\vec{\iota_z}\right)$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{\iota_q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\left|\overrightarrow{AP}\right|^2}\vec{\iota_q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon 10\sqrt{10}}\left(-\vec{\iota_y} - 3\vec{\iota_z}\right) \quad [V/m]$$

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\sqrt{10}} \quad [V]$$

b. Chuyển sang hệ tọa độ Descartes:

Theo Bảng 1.1: x = rcosφ, y = rsinφ, z = z.

A(1,0,1) $\rightarrow$ A(1,0,1); P(0,π/2,2) $\rightarrow$ P(0,0,2)

$$\overrightarrow{AP}(-1,0,1) \rightarrow |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2} \rightarrow \vec{\iota_q} = \frac{\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AP}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{\iota_x} + \vec{\iota_z})$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{\iota_q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\left|\overrightarrow{AP}\right|^2}\vec{\iota_q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon 2\sqrt{2}}(-\vec{\iota_x} + \vec{\iota_z}) \quad [V/m]$$

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\sqrt{2}} \quad [V]$$

c. Chuyển sang hệ tọa độ Descartes:

Theo Bảng 1.1: x = rsinθcosφ, y = rsinθsinφ, z = rcosθ.

A(1,0,π/2) $\rightarrow$ A(1,0,0); P(3,π/2,π) $\rightarrow$ P(-3,0,2)

$$\overrightarrow{AP}(-4,0,2) \rightarrow |\overrightarrow{AP}| = 2\sqrt{5} \rightarrow \vec{\iota_q} = \frac{\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AP}|} = \frac{1}{2\sqrt{5}}(-4\vec{\iota_x} + 2\vec{\iota_z})$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{\iota_q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\left|\overrightarrow{AP}\right|^2}\vec{\iota_q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon 40\sqrt{5}}(-4\vec{\iota_x} + 2\vec{\iota_z}) \quad [V/m]$$

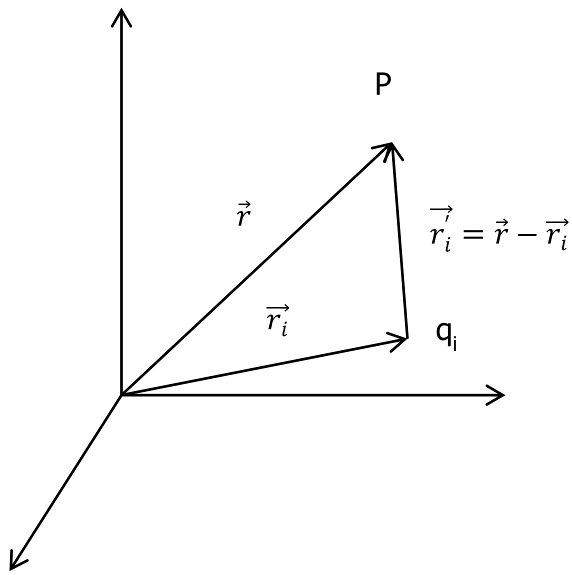
$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon 2\sqrt{5}} \quad [V]$$

Điện thế gây ra bởi n điện tích điểm:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\left|\vec{r}-\overrightarrow{r_i'}\right|} \tag{2.61}$$

$\vec{r} = x\overrightarrow{\iota_x} + y\overrightarrow{\iota_y} + x\overrightarrow{\iota_z}$: vector vị trí của điểm khảo sát.

$\overrightarrow{r_i'}$: vector xác định vị trí của điện tích điểm q_i so với điểm khảo sát.



Hình 2.3 – Vị trí điện tích điểm so với điểm khảo sát

Ví dụ 2.3: Xác định cường độ điện trường và điện thế do điện tích điểm q_1 = 1C đặt tại điểm A(1,2,1) và điện tích điểm q_2 = -1C đặt tại B(2,1,0) tạo ra tại điểm P(1,1,1) (hệ tọa độ Descartes).

Giải

Cường độ điện trường và điện thế do q_1 tạo ra: $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{\iota_y}$

$$\overrightarrow{E_1} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon r_1^2}\frac{\overrightarrow{r_1}}{r_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(-\overrightarrow{\iota_y}\right) \quad [V/m]$$

$$\phi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon r_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \quad [V]$$

Cường độ điện trường và điện thế do q_2 tạo ra: $\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{BP} = -\overrightarrow{\iota_x} + \overrightarrow{\iota_z}$

$$\overrightarrow{E_2} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon r_2^2}\frac{\overrightarrow{r_2}}{r_2} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon 2\sqrt{2}}\left(-\overrightarrow{\iota_x} + \overrightarrow{\iota_z}\right) \quad [V/m]$$

$$\phi_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon r_1} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon\sqrt{2}} \quad [V]$$

Cường độ điện trường và điện thế do hai điện tích điểm tạo ra:

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\overrightarrow{\iota_x} - \overrightarrow{\iota_y} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\overrightarrow{\iota_z}\right) \quad [V/m]$$

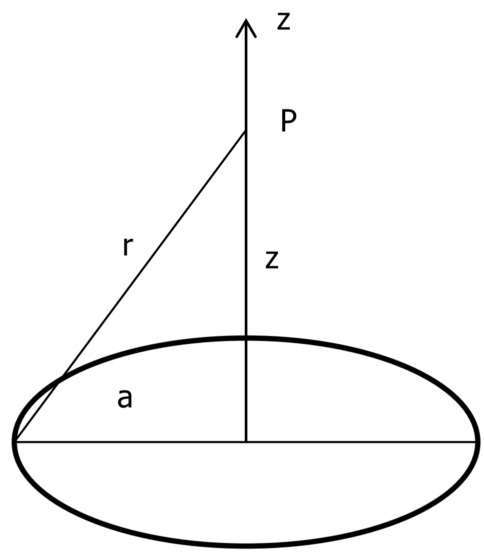
$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad [V]$$

Nếu điện tích phân bố liên tục trong miền không gian hữu hạn:

$$\phi = \int_{V,S,C} \frac{dq}{4\pi\varepsilon r} \qquad (2.62)$$

Ví dụ 2.4: Điện tích Q phân bố liên tục đều trên vòng dây tròn mảnh bán kính a. Xác định thế và cường độ điện trường tại điểm P nằm trên trục z vuông góc và qua tâm vòng dây.

Giải



Hình 2.4 – Vòng dây có điện tích phân bố đều

Điện tích Q phân bố đều trên vòng dây $\rightarrow \lambda$ là hằng số.

$$Q = \oint_C \lambda dl = \lambda \oint_C dl = \lambda L = \lambda.2\pi a$$

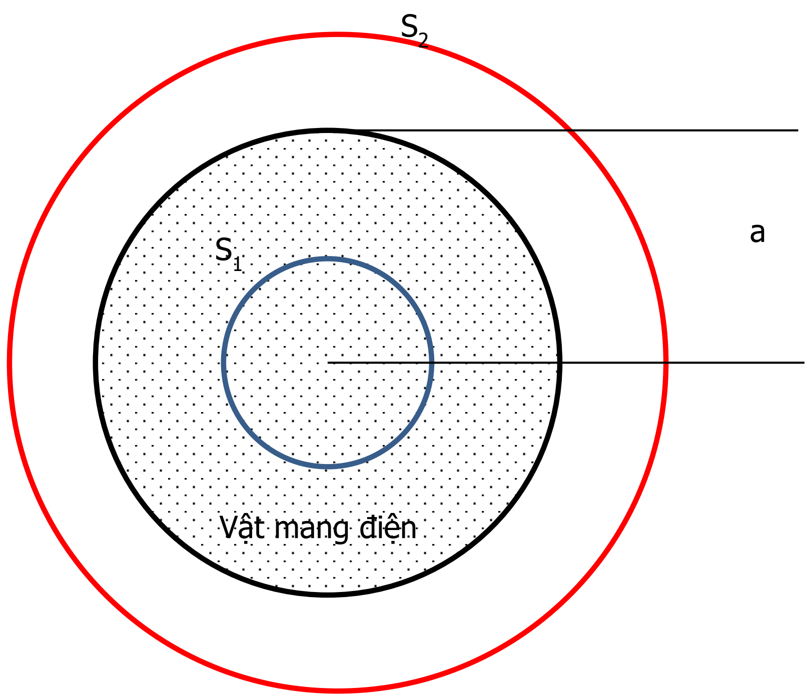
$$\phi = \oint_C \frac{dq}{4\pi\varepsilon r} = \oint_C \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon r} = \oint_C \frac{\frac{Q}{2\pi a} dl}{4\pi\varepsilon\sqrt{a^2+z^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\sqrt{a^2+z^2}}$$

$$\vec{E} = -grad\phi = \frac{Qz}{4\pi\varepsilon\sqrt{(a^2+z^2)^3}}\vec{i_z}$$

2.7.2 Dùng định luật Gauss

Dùng để tính trường điện tĩnh có tính đối xứng cầu, trụ, …

2.7.2.1 Trường điện của vật hình cầu mang điện đều



Hình 2.5 – Quả cầu có điện tích phân bố đều

Điện tích Q phân bố liên tục đều trong thể tích hình cầu V bán kính a đặt trong môi trường đồng nhất đẳng hướng.

$$Q = \int_V \rho dV = \rho \int_V dV = \rho V = \rho.4\pi a^3/3 \qquad (2.63)$$

Áp dụng định luật Gauss:

$$q = \oint_S \vec{D}\overrightarrow{ds} \tag{2.64}$$

Chọn gốc tọa độ tại tâm quả cầu, các mặt S_1 và S_2 là các mặt cầu đồng tâm nằm bên trong và bên ngoài quả cầu. Vector cảm ứng điện $\vec{D}$ trên mặt cầu có biên độ không đổi và phương vuông góc với mặt cầu.

Vùng ngoài quả cầu mang điện (r > a):

Chọn mặt S trong (2.64) là mặt S_2.

$$q = \oint_{S_2} \overrightarrow{D_2}\overrightarrow{ds} \tag{2.65}$$

$$q = \int_{V_2} \rho dV = \int_{ngoài\ V} \rho dV + \int_V \rho dV \tag{2.66}$$

Ngoài thể tích V không có phân bố điện tích nên: $\int_{ngoài\ V} \rho dV = 0$

$$q = \int_V \rho dV = Q \tag{2.67}$$

$\vec{D}$ trên mặt cầu có biên độ không đổi và phương vuông góc với mặt cầu:

$$\overrightarrow{D_2}\overrightarrow{ds} = \overrightarrow{D_2}\vec{n}ds = D_2 ds \tag{2.68}$$

Thế (2.67) và (2.68) vào (2.65):

$$Q = \oint_{S_2} D_2 ds = D_2 \oint_{S_2} ds = D_2 S_2 = D_2.4\pi r^2 \tag{2.69}$$

$$D_2 = \frac{Q}{4\pi r^2} \tag{2.70}$$

Do $\vec{D}$ vuông góc với mặt cầu (hướng tâm) nên:

$$\overrightarrow{D_2} = \frac{Q}{4\pi r^2}\overrightarrow{i_r} \tag{2.71}$$

$$\overrightarrow{E_2} = \frac{\overrightarrow{D_2}}{\varepsilon} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\overrightarrow{i_r} \tag{2.72}$$

Chọn điện thế tại ∞ bằng không, theo (2.11):

$$\phi(r) = \int_r^\infty \vec{E}_2\overrightarrow{dl} \tag{2.73}$$

$$\vec{E}_2\overrightarrow{dl} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{\iota_r}\left(dr\vec{\iota_r} + rd\theta\vec{\iota_\varphi} + rsin\theta d\varphi\vec{\iota_z}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}dr \quad (2.74)$$

$$\phi_2(r) = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r} \quad [V] \quad (2.75)$$

Nếu dùng mật độ điện tích khối, từ (2.63):

$$\overrightarrow{D_2} = \frac{\rho.4\pi a^3/3}{4\pi r^2}\vec{\iota_r} = \frac{\rho a^3}{3r^2}\vec{\iota_r} \quad (2.76)$$

$$\overrightarrow{E_2} = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon r^2}\vec{\iota_r} \quad (2.77)$$

$$\phi_2(r) = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon r} \quad [V] \quad (2.78)$$

Vùng trong quả cầu mang điện (r < a):

Chọn mặt S trong (2.64) là mặt S_1.

$$q = \oint_{S_1} \overrightarrow{D_1}\overrightarrow{ds} \quad (2.79)$$

$$q = \int_{V_1} \rho dV = \rho\int_{V_1} dV = \rho V_1 = \rho.4\pi r^3/3 \quad (2.80)$$

$$\overrightarrow{D_1}\overrightarrow{ds} = \overrightarrow{D_1}\vec{n}ds = D_1 ds \quad (2.81)$$

$$\rho.4\pi r^3/3 = \oint_{S_1} D_1 ds = D_1\oint_{S_1} ds = D_1 S_1 = D_1.4\pi r^2 \quad (2.82)$$

$$D_1 = \frac{\rho r}{3} \quad (2.83)$$

$$\overrightarrow{D_1} = \frac{\rho r}{3}\vec{\iota_r} \quad (2.84)$$

$$\overrightarrow{E_1} = \frac{\rho r}{3\varepsilon}\vec{\iota_r} \quad (2.85)$$

$$\phi_1(r) = \int_r^\infty \vec{E}\overrightarrow{dl} = \int_r^a \overrightarrow{E_1}\overrightarrow{dl} + \int_a^\infty \overrightarrow{E_2}\overrightarrow{dl} = \int_r^a \frac{\rho r}{3\varepsilon}dr + \int_a^\infty \frac{\rho a^3}{3\varepsilon r^2}$$

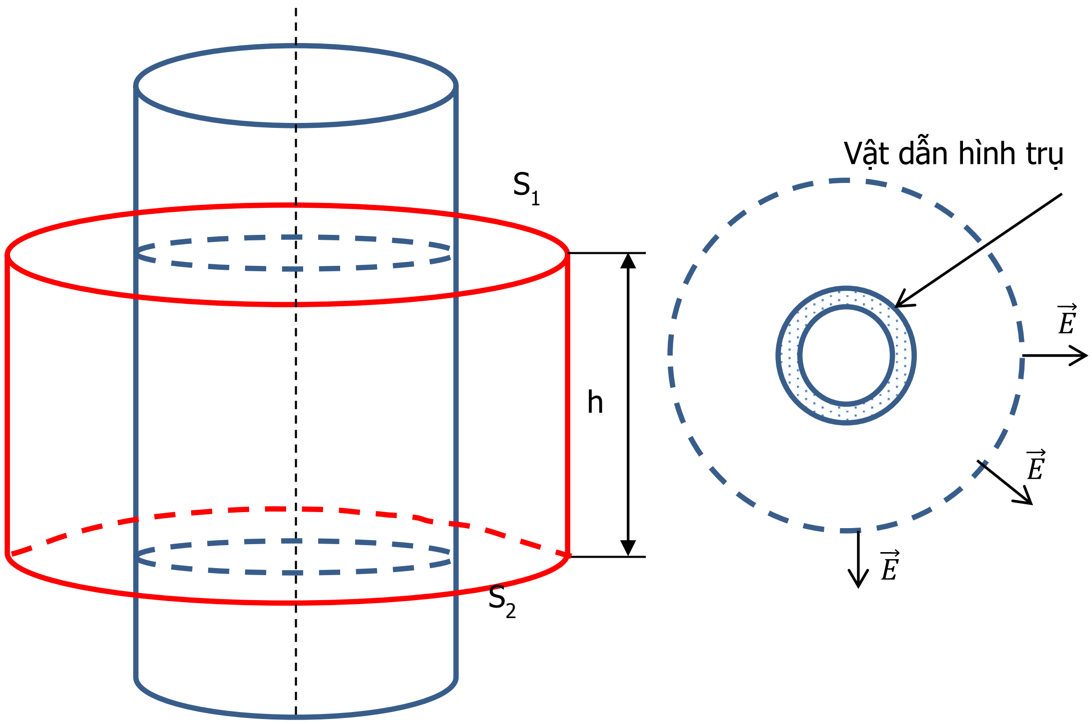
$$\phi_1(r) = \frac{\rho\left(3a^2 - r^2\right)}{6\varepsilon} \quad [V] \quad (2.86)$$

Năng lượng trường điện:

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \phi_1 \rho dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \frac{\rho(3a^2-r^2)}{6\varepsilon}\rho r^2 sin\theta dr d\theta d\varphi \quad (2.87)$$

$$W_e = \frac{4\pi\rho^2 a^5}{15\varepsilon} \quad (2.88)$$

2.7.2.2 Trường điện của vật hình trụ dài mang điện đều



Hình 2.6 – Vật hình trụ dài mang điện đều

Điện tích Q phân bố liên tục đều trong hình trụ kim loại mỏng bán kính a chiều dài L (L >> a) đặt trong môi trường đồng nhất đẳng hướng.

Vùng bên trong hình trụ:

Điện tích chỉ phân bố trên bề mặt hình trụ, bên trong hình trụ không có điện tích nên q = 0.

$$\oint_S \vec{D}\overrightarrow{ds} = q = 0 \quad (2.89)$$

$$\vec{D} = 0 \rightarrow \vec{E} = 0 \quad (2.90)$$

Vùng bên ngoài hình trụ:

Bỏ qua hiệu ứng mép, vector cường độ điện trường vuông góc với trục hình trụ và có giá trị bằng nhau tại các điểm cách đều trục. Chọn gốc tọa độ tại tâm hình trụ, trục z trùng với trục hình trụ, vẽ mặt trụ S cùng trục, tiết diện tròn bán kính r > a, chiều cao h. Điện tích chứa trong mặt trụ S chỉ phân bố trên bề mặt hình trụ bán kính a nên:

$$q = \int_{S_a} \sigma ds = \sigma \int_{S_a} ds = \sigma S_a = \sigma.2\pi ah \qquad (2.91)$$

Nếu xét trên toàn mặt trụ chiều dài L:

$$Q = \sigma.2\pi aL \rightarrow \sigma = \frac{Q}{2\pi aL} \qquad (2.92)$$

$$\oint_S \vec{D}\overrightarrow{ds} = \int_{S_1} \vec{D}\overrightarrow{ds} + \int_{S_2} \vec{D}\overrightarrow{ds} + \int_{S_{xq}} \vec{D}\overrightarrow{ds} \qquad (2.93)$$

S_1, S_2: 2 mặt đáy; S_{xq}: diện tích xung quanh.

Đối với 2 mặt đáy: $\overrightarrow{ds}$ vuông góc mặt đáy → $\overrightarrow{ds}$ vuông góc với $\vec{D}$:

$$\vec{D}\overrightarrow{ds} = 0 \rightarrow \int_{S_1} \vec{D}\overrightarrow{ds} = \int_{S_2} \vec{D}\overrightarrow{ds} = 0 \qquad (2.94)$$

Đối với mặt xung quanh: $\overrightarrow{ds}$ vuông góc mặt xung quanh → $\overrightarrow{ds}$ cùng phương với $\vec{D}$:

$$\vec{D}\overrightarrow{ds} = Dds \qquad (2.95)$$

Từ (2.93), (2.94), (2.95):

$$\oint_S \vec{D}\overrightarrow{ds} = \int_{S_{xq}} Dds = D\int_{S_{xq}} ds = DS_{xq} = D.2\pi r.h \qquad (2.96)$$

Áp dụng định luật Gauss:

$$q = \oint_S \vec{D}\overrightarrow{ds} \rightarrow \sigma.2\pi ah = D.2\pi rh \qquad (2.97)$$

$$D = \frac{\sigma a}{r} \qquad (2.98)$$

Thế (2.92) vào (2.98):

$$D = \frac{Q}{2\pi aL}\frac{a}{R} = \frac{Q}{2\pi RL} \qquad (2.99)$$

Do $\vec{D}$ vuông góc với mặt trụ nên:

$$\vec{D} = \frac{Q}{2\pi rL}\overrightarrow{\iota_R} \qquad (2.100)$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon r L}\overrightarrow{\iota_R} \qquad (2.101)$$

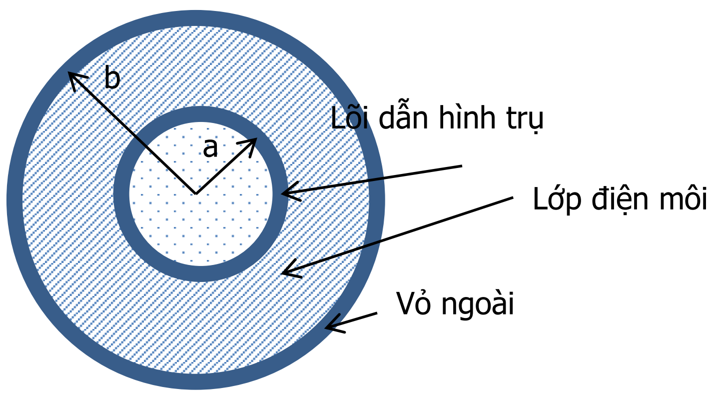
Chọn điện thế tại r = b bằng không, theo (2.11):

$$\phi(r) = \int_r^b \vec{E}\overrightarrow{dl} \qquad (2.102)$$

$$\vec{E}\overrightarrow{dl} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon r L}\overrightarrow{\iota_r}\left(dr\overrightarrow{\iota_r} + rd\varphi\overrightarrow{\iota_\varphi} + dz\overrightarrow{\iota_z}\right) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon r L}dr \qquad (2.103)$$

$$\phi(r) = \int_r^b \vec{E}\overrightarrow{dl} = \int_r^b \frac{Q}{2\pi\varepsilon r L}dr \quad [V] \qquad (2.104)$$

$$\phi(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon L}ln\frac{b}{r} \quad [V] \qquad (2.105)$$



Hình 2.7 – Cáp đồng trục

- Trường hợp cáp đồng trục có lõi dẫn hình trụ bán kính a, vỏ ngoài bán kính b, vỏ và lõi mang điện tích bằng nhau và trái dấu.

  Chọn $\phi(r=b) = 0$ (vỏ nối đất):

  r < a và r > b: $\vec{E} = 0$ (do q = 0).

  a < r < b: $\vec{E}$ và ϕ như (2.101) và (2.105).

  → trường điện chỉ tập trung trong lớp điện môi mà không tồn tại bên ngoài cáp.

- Cường độ điện trường không phụ thuộc bán kính a → nếu a tiến tới 0 thì kết quả vẫn không đổi → có thể thay bằng trục mang điện.

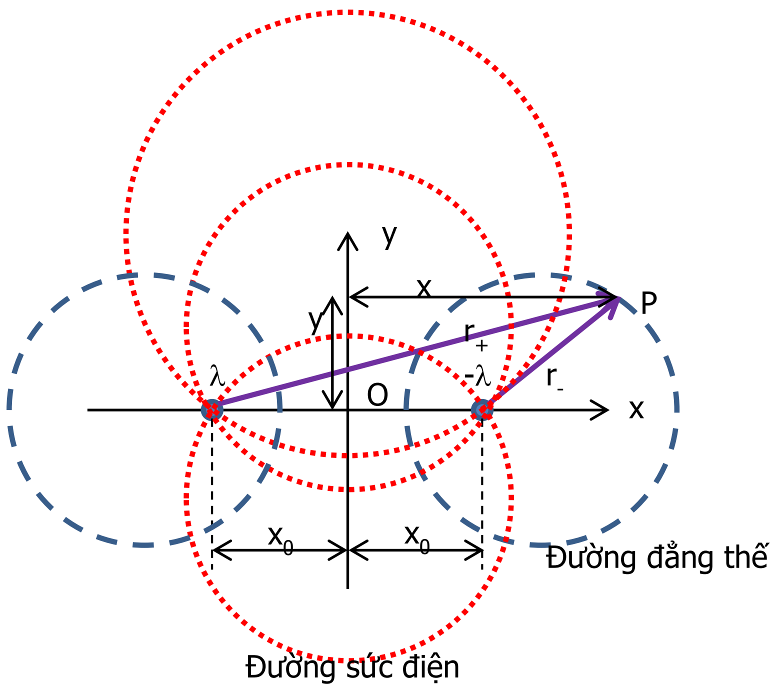
  Trục mang điện đều có mật độ điện tích dài λ:

$$Q = \int_L \lambda dl = \lambda \int_L dl = \lambda L \rightarrow \lambda = \frac{Q}{L} \qquad (2.106)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\vec{i_r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r^2}\vec{r} \qquad (2.107)$$

$$\phi(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} ln\frac{b}{r} \quad [V] \qquad (2.108)$$

2.7.2.3 Trường điện của hai trục mang điện trái dấu đặt song song



Hình 2.8 – Hai trục mang điện

Xét hai trục mang điện song song cách nhau khoảng $2x_0$ có mật độ điện dài λ và $-\lambda$. Cường độ điện trường tại P là tổng điện trường do hai trục tạo ra. Từ (2.107):

$$\vec{E} = \vec{E_+} + \vec{E_-} = \frac{\lambda}{2\pi r_+^2 \varepsilon}\vec{r_+} - \frac{\lambda}{2\pi r_-^2 \varepsilon}\vec{r_-} \qquad (2.109)$$

$$\phi = \phi_+ + \phi_- = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} ln\frac{r_-}{r_+} \quad [V] \qquad (2.110)$$

Xét các đường đẳng thế: ϕ = const. Khi đó:

$$\frac{r_-}{r_+} = K = const \tag{2.111}$$

Trong đó:

$$r_+ = \sqrt{(x_0 + x)^2 + y^2} \tag{2.112}$$

$$r_- = \sqrt{(x_0 - x)^2 + y^2} \tag{2.113}$$

Thế (2.112), (2.113) vào (2.111) và biến đổi:

$$\left(x - x_0\frac{1+K^2}{1-K^2}\right)^2 + y^2 = \frac{4K^2x_0^2}{(1-K^2)^2} \tag{2.114}$$

(2.114) là phương trình đường tròn với tọa độ tâm:

$$\begin{aligned} x_I &= x_0\frac{1+K^2}{1-K^2} \\ y_I &= 0 \end{aligned} \tag{2.115}$$

Và bán kính:

$$\left|\frac{2Kx_0}{1-K^2}\right| \tag{2.116}$$

Có thể chứng minh được phương trình đường sức điện:

$$x^2 + (y - y_1)^2 = x_0^2 + y_1^2 \tag{2.117}$$

Đây là phương trình đường tròn đi qua các trục mang điện.

2.7.3 Dùng phương pháp ảnh điện

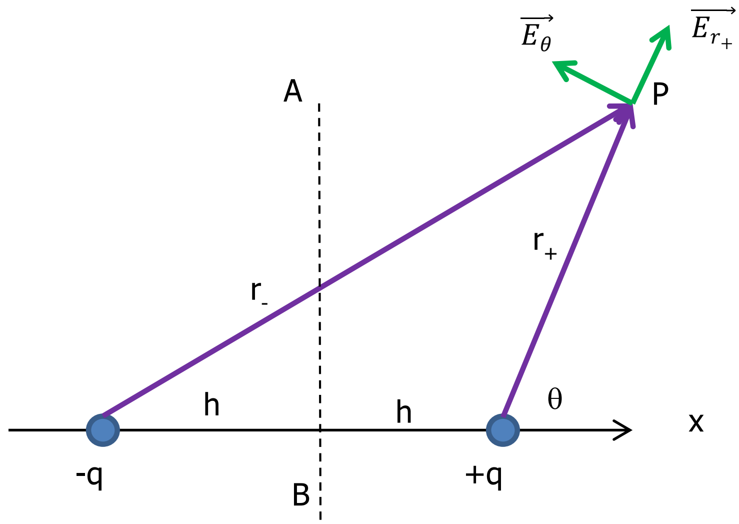
Thay thế hai hay nhiều môi trường khác nhau bằng một môi trường đồng nhất đồng thời đưa thêm những điện tích mới sao cho đảm bảo điều kiện biên như trước.

2.7.3.1 Trường điện của điện tích điểm và mặt phẳng dẫn

Xét 2 điện tích điểm q và −q đặt cách nhau một khoảng 2h.

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) \tag{2.118}$$

$$r_-^2 = r_+^2 + (2h)^2 + 2.2h.r_+cos\theta \tag{2.119}$$



Hình 2.9 – Trường điện do hai điện tích điểm

Thế (2.119) vào (2.118):

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{\sqrt{r_+^2+(2h)^2+2.2h.r_+cos\theta}}\right) \quad (2.120)$$

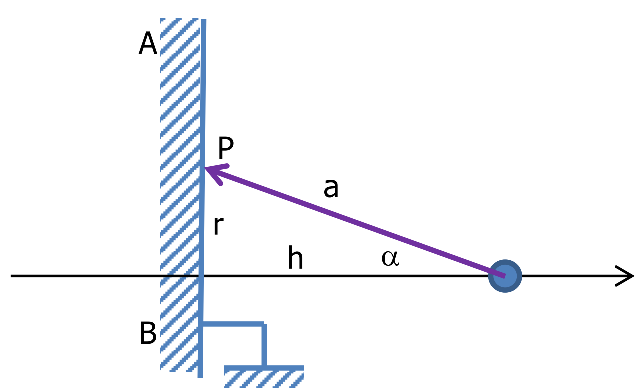
$$E_{r_+} = -\frac{\partial\phi}{\partial r_+} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_+^2} - \frac{r_++2hcos\theta}{\sqrt{\left(r_+^2+4h^2+4hr_+cos\theta\right)^3}}\right) \quad (2.121)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r_+}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{2hsin\theta}{\sqrt{\left(r_+^2+4h^2+4hr_+cos\theta\right)^3}}\right) \quad (2.122)$$

$$E_x = E_{r_+}cos\theta - E_\theta sin\theta = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{cos\theta}{r_+^2} - \frac{r_+cos\theta+2h}{\sqrt{\left(r_+^2+4h^2+4hr_+cos\theta\right)^3}}\right) \quad (2.123)$$

Nhận xét:

- Trên mặt phẳng AB: $r_+ = r_- \rightarrow \phi = 0$.
- Khi $r_+ \rightarrow 0$ thì $\phi \rightarrow \infty$ (tỷ lệ với 1/r).
- Khi $r_+ \rightarrow \infty$ thì $\phi \rightarrow 0$.



Kết quả này tương tự với bài toán gồm 1 điện tích điểm +q đặt cách mặt phẳng dẫn nối đất một khoảng h. Do đó, bài toán xét trường điện của một điện tích điểm +q đặt cách mặt dẫn AB (miền khảo sát nằm bên phải mặt phẳng AB như)giống như khi bỏ AB và đưa vào điện tích điểm –q đối xứng với q qua AB (-q gọi là điện tích ảnh của q).

Nếu xét trên mặt phẳng dẫn: $r_+ = r_- = a$.

$$E_n = E_x = -\frac{q2h}{4\pi\varepsilon a^3} \tag{2.124}$$

Trên mặt dẫn:

$$\sigma = \vec{D}.\vec{n} = D_n = \varepsilon E_n = -\frac{qh}{2\pi a^3} \tag{2.125}$$

Ta có:

$$a^2 = r^2 + h^2 \rightarrow ada = rdr \text{ (do h = const)} \tag{2.126}$$

Điện tích cảm ứng trên mặt dẫn:

$$\int \sigma ds = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \sigma r d\varphi dr = \int_0^\infty \sigma 2\pi r dr = \int_h^\infty -\frac{qh}{2\pi a^3} 2\pi a da = -q \text{ (bằng điện tích ảnh)} \tag{2.127}$$

Lực tác dụng lên mặt dẫn:

$$\int q \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon a^2} cos\alpha ds = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon 4h^2} \text{(bằng lực tác dụng giữa q và –q)} \tag{2.128}$$

Ví dụ 2.5: Xác định cường độ trường điện và điện thế tại P(1,1,1) tạo ra do hệ thống gồm điện tích điểm q = 1C đặt tại A(1,0,2) và mặt phẳng dẫn vuông góc với trục Oy và cắt Oy tại y_0 = -1.

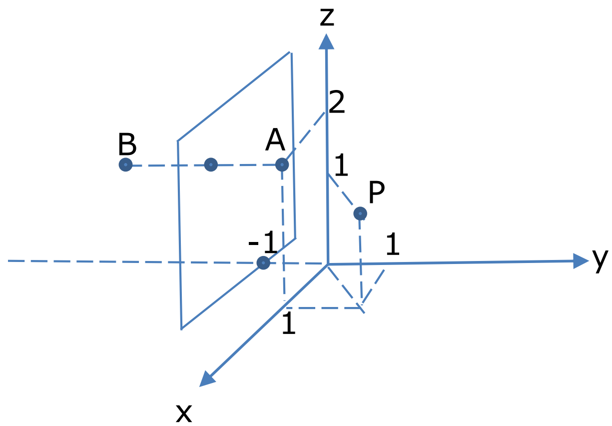
<u>Giải</u>

Thay thế hệ thống bằng cách thêm điện tích điểm –q đối xứng với q qua mặt phẳng dẫn.

A(1,0,2), mặt phẳng dẫn y = -1 → B(1,-2,2).

$$\overrightarrow{AP}(0,1,-1) \rightarrow \left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{2} \quad \overrightarrow{BP}(0,3,-1) \rightarrow \left|\overrightarrow{BP}\right| = 2$$

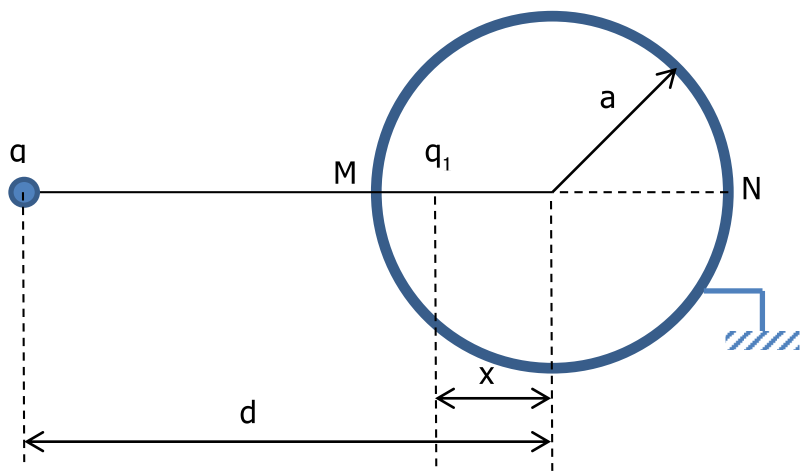
$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{|\overrightarrow{AP}|} - \frac{1}{|\overrightarrow{BP}|}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right) \quad [V]$$



$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AP}|^3} - \frac{\overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{BP}|^3}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}(\overrightarrow{\iota_y} - \overrightarrow{\iota_z}) - \frac{1}{8}(3\overrightarrow{\iota_y} - \overrightarrow{\iota_z})\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{8}\right)\overrightarrow{\iota_y} + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\overrightarrow{\iota_z}\right] \ [V/m]$$

2.7.3.2 Trường điện của điện tích điểm và quả cầu dẫn



Hình 2.11 – Điện tích điểm và quả cầu dẫn nối đất

Điện tích điểm q đặt cách quả cầu dẫn nối đất bán kính a một khoảng d đặt trong môi trường đồng nhất có ε = const.

Để tính toán trường ở ngoài quả cầu, dùng phương pháp ảnh điện, thay quả cầu dẫn bằng điện tích điểm q_1. Do tính đối xứng, q_1 nằm trên đường thẳng nối tâm quả cầu và q, cách tâm quả cầu một khoảng x.

$$\phi(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon(d-a)} + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon(a-x)} \tag{2.129}$$

$$\phi(N) = \frac{q}{4\pi\varepsilon(d+a)} + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon(a+x)} \tag{2.130}$$

Quả cầu dẫn nối đất:

$$\phi(M) = \phi(N) = 0 \tag{2.131}$$

Giải hệ phương trình trên:

$$q_1 = -\frac{a}{d}q \quad x = \frac{a^2}{d} \tag{2.132}$$

Bài toán trở thành tính trường của hai điện tích điểm q, q_1 cách nhau một khoảng d’:

$$q_1 = -\frac{a}{d}q \quad d' = d - \frac{a^2}{d} \tag{2.133}$$

Nếu quả cầu dẫn không nối đất và không mang điện: $\phi(M) = \phi(N) \neq 0$

Hệ gồm 2 điện tích điểm q và q_1 như trên: $\phi(M) = \phi(N) = 0$ nên để khác 0 thì phải thêm một điện tích điểm q_2, để $\phi(M) = \phi(N)$ thì q_2 phải đặt tại tâm quả cầu.

Quả cầu không mang điện:

$$q = q_1 + q_2 = 0 \rightarrow q_2 = -q_1 = \frac{a}{d}q \tag{2.134}$$

Ví dụ 2.6: Xác định cường độ trường điện và điện thế tại P(1,1,1) tạo ra do hệ thống gồm điện tích điểm q = 1C đặt tại A(0,1,0) và quả cầu dẫn nối đất tâm tại B(0,-2, 0), bán kính 1.

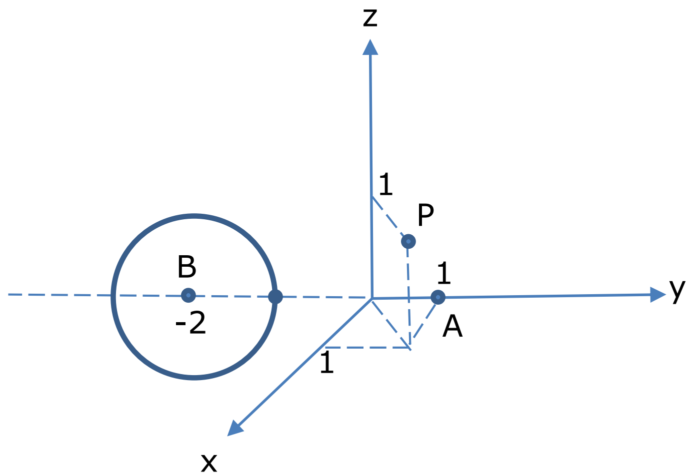
<u>Giải</u>

Khoảng cách giữa điện tích điểm q và tâm quả cầu:

$$\overrightarrow{AB}(0,-3,0) \rightarrow d = \left|\overrightarrow{AB}\right| = 3$$

Thay quả cầu dẫn nối đất bằng điện tích điểm q_1 đặt cách q một khoảng d’:

$$q_1 = -\frac{a}{d}q = -\frac{1}{3}1 = -\frac{1}{3}C \quad d' = d - \frac{a^2}{d} = 3 - \frac{1^2}{3} = \frac{8}{3}$$



Tọa độ của q_1: C(0,-5/3,0).

$$\overrightarrow{AP}(1,0,1) \rightarrow \left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{2} \quad \overrightarrow{CP}(1,8/3,1) \rightarrow \left|\overrightarrow{CP}\right| = \sqrt{82}/3$$

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{\left|\overrightarrow{AP}\right|} - \frac{1}{\left|\overrightarrow{CP}\right|}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{82}}\right) \quad [V]$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{\overrightarrow{AP}}{\left|\overrightarrow{AP}\right|^3} - \frac{\overrightarrow{CP}}{\left|\overrightarrow{CP}\right|^3}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}(\vec{\iota_x} + \vec{\iota_z}) - \frac{3}{\sqrt{82}}\left(\vec{\iota_x} + \frac{8}{3\vec{\iota_y}} + \vec{\iota_z}\right)\right]$$

2.7.3.3 Trường điện của trục mang điện và hình trụ dẫn

Trục mang điện đều, mật độ điện dài λ đặt cách hình trụ dẫn nối đất bán kính a một khoảng d > a.

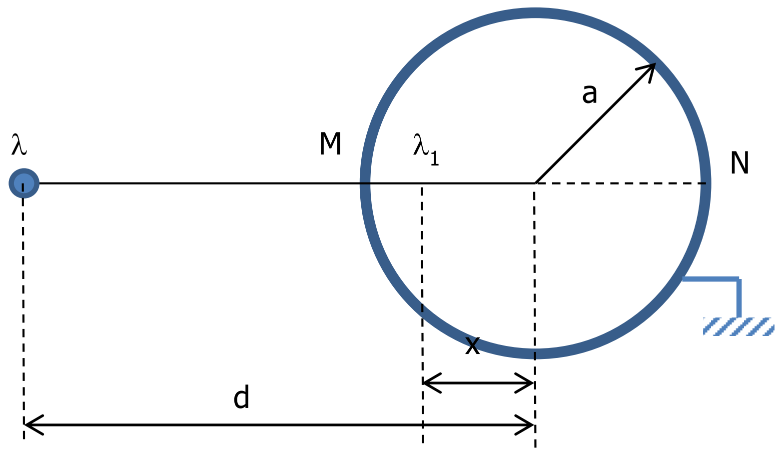
Dùng phương pháp ảnh điện, thay hình trụ dẫn bằng trục mang điện λ_1.

Hình trụ dẫn nối đất là mặt đẳng thế: $\phi(M) = \phi(N) = 0$.

Điện thế tại N:

$$\phi(N) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} ln\left(\frac{d-a}{d+a}\right) + \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon} ln\left(\frac{a-x}{a+x}\right) = 0 \qquad (2.135)$$

$$\lambda_1 = -\lambda$$
$$x = \frac{a^2}{d} \quad (2.136)$$



Hình 2.12 – Trục mang điện và hình trụ dẫn nối đất

Kết quả này giống như hai trục mang điện trái dấu song song đặt cách nhau một khoảng $d - \frac{a^2}{d}$. Cường độ điện trường và điện thế tại điểm bất kỳ:

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_+} + \overrightarrow{E_-} = \frac{\lambda}{2\pi r_+^2 \varepsilon} \overrightarrow{R_+} - \frac{\lambda}{2\pi r_-^2 \varepsilon} \overrightarrow{R_-} \quad (2.137)$$

$$\phi = \phi_+ + \phi_- = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} ln \frac{r_-}{r_+} \quad [V] \quad (2.138)$$

2.7.3.4 Trường điện của điện tích điểm đặt gần mặt phân chia hai điện môi

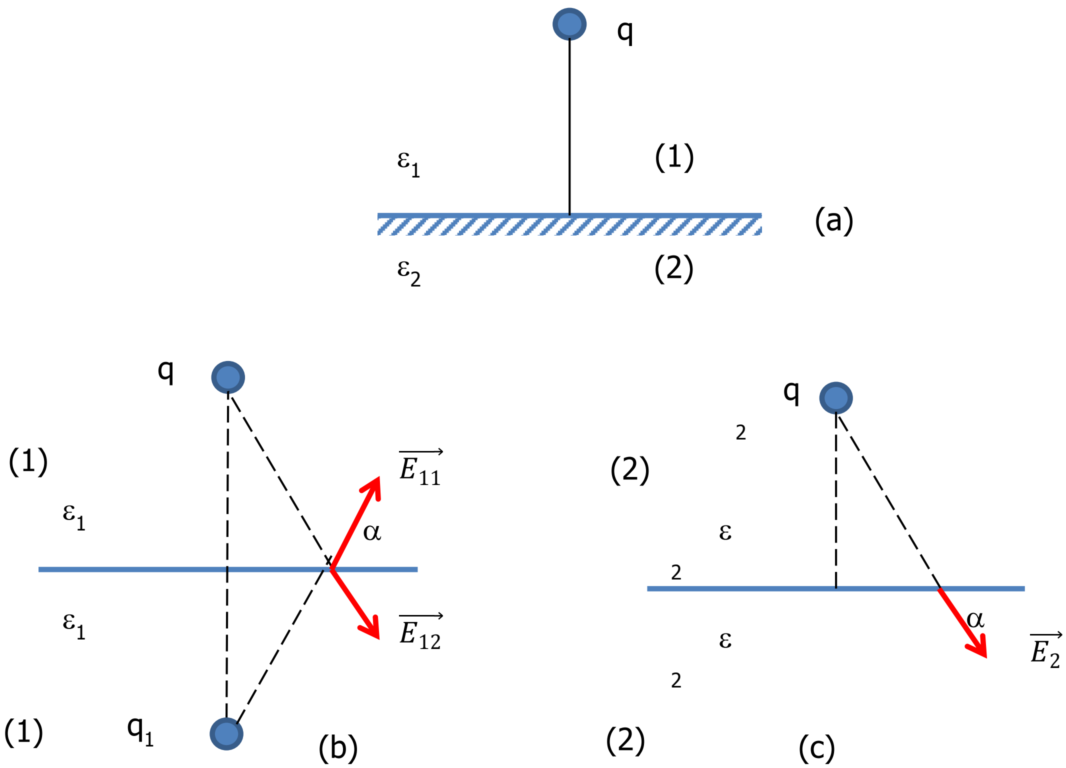
Điện tích điểm q đặt trong môi trường đồng nhất ε_1 cách môi trường ε_2 một khoảng h.

- Tính cho môi trường ε_1

Thêm điện tích điểm q_2 đối xứng với q qua mặt phân cách (Hình 2.13b).

$$E_{1t} = E_{11} cos\alpha + E_{12} cos\alpha = \frac{q + q_1}{4\pi\varepsilon_1 r^2} cos\alpha \quad (2.139)$$

$$D_{1n} = D_{11}sin\alpha - D_{12}sin\alpha = \frac{q-q_1}{4\pi r^2}sin\alpha \qquad (2.140)$$



Hình 2.13 – Điện tích điểm đặt gần mặt phân cách hai điện môi

- Tính cho môi trường ε_2

Thay điện tích điểm q bằng điện tích điểm q_2.

$$E_{2t} = E_2 cos\alpha = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_2 r^2}cos\alpha \qquad (2.141)$$

$$D_{2n} = D_2 sin\alpha = \frac{q_2}{4\pi r^2}sin\alpha \qquad (2.142)$$

Các điện tích ảnh q_1 và q_2 phải bảo đảm điều kiện biên:

$$\begin{aligned} E_{1t} &= E_{2t} \\ D_{1n} &= D_{2n} \end{aligned} \qquad (2.143)$$

Thay (2.139), (2.140), (2.141) và (2.142) vào (2.143):

$$\frac{q+q_1}{\varepsilon_1} = \frac{q_2}{\varepsilon_2} \qquad (2.144)$$

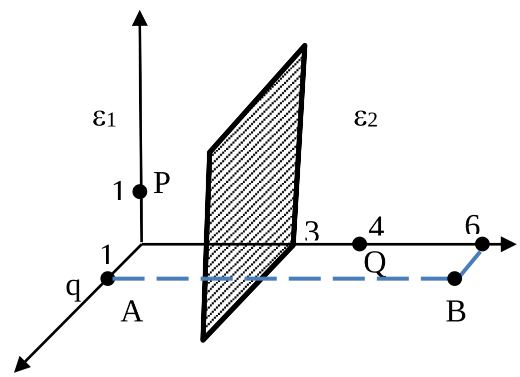
$$q - q_1 = q_2 \qquad (2.145)$$

Giải hệ phương trình trên:

$$q_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q \tag{2.146}$$

$$q_2 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q \tag{2.147}$$

Ví dụ 2.7: Xác định điện thế và cường độ điện trường tại điểm P(0,0,1) và Q(0,4,0) do điện tích điểm q = 1C đặt tại điểm A(1,0,0) tạo ra trong đó mặt phân cách hai môi trường là mặt phẳng y = 3 và hằng số điện môi của hai môi trường $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0$.



Giải

A nằm trong môi trường 1: thêm điện tích điểm q_1 đối xứng với q qua mặt phân cách.

Tọa độ B: (1,6,0).

$$q_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q = -\frac{1}{3} C$$

Điện thế và cường độ điện trường tại P do q và q_1 tạo ra:

$$\overrightarrow{AP}(1,0,1) \to \left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{2} \quad \overrightarrow{BP}(1,6,-1) \to \left|\overrightarrow{BP}\right| = \sqrt{38}$$

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\left|\overrightarrow{AP}\right|} + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon\left|\overrightarrow{BP}\right|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{38}}\right) \quad [V]$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{\overrightarrow{AP}}{\left|\overrightarrow{AP}\right|^3} + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon}\frac{\overrightarrow{BP}}{\left|\overrightarrow{BP}\right|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}(\overrightarrow{\iota_x} + \overrightarrow{\iota_z}) - \frac{1}{3.38\sqrt{38}}(\overrightarrow{\iota_x} + 6\overrightarrow{\iota_y} - \overrightarrow{\iota_z})\right] \; [V/m]$$

Q nằm trong môi trường 2: thay điện tích điểm q bằng q_2 đặt tại A.

$$q_2 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q = \frac{4}{3} C$$

Điện thế và cường độ điện trường tại Q do q_2 tạo ra:

$$\overrightarrow{AQ}(-1,4,0) \to \left|\overrightarrow{AQ}\right| = \sqrt{17}$$

$$\phi = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon\left|\overrightarrow{AP}\right|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{4}{3\sqrt{17}} \quad [V]$$

$$\vec{E} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon}\frac{\overrightarrow{AP}}{\left|\overrightarrow{AP}\right|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{4}{3.17\sqrt{17}}\left(-\overrightarrow{\iota_x} + 4\overrightarrow{\iota_y}\right) = \frac{1}{\pi\varepsilon 51\sqrt{17}}\left(-\overrightarrow{\iota_x} + 4\overrightarrow{\iota_y}\right) [V/m]$$

2.7.4 Dùng phương trình Poisson - Laplace

Trường điện tĩnh trong môi trường đẳng hướng có ε = const được mô tả bằng phương trình Poisson:

$$\Delta\phi = \nabla^2\phi = -\rho/\varepsilon \tag{2.148}$$

Nếu môi trường không có điện tích, phương trình trên trở thành phương trình Laplace:

$$\Delta\phi = \nabla^2\phi = 0 \tag{2.149}$$

Các phương trình này có nghiệm duy nhất với điều kiện biên xác định.

2.7.4.1 Quả cầu mang điện đều

Một quả cầu mang điện đều có mật độ điện tích khối ρ bán kính a tâm tại gốc tọa độ.

$$\Delta\phi = \begin{cases} -\rho/\varepsilon & r < a \\ 0 & r > a \end{cases} \tag{2.150}$$

Trong hệ tọa độ cầu:

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2 sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right)\right] \tag{2.151}$$

Do tính đối xứng cầu, điện thế chỉ là hàm của r:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = 0, \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = 0 \tag{2.152}$$

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = \begin{cases} -\rho/\varepsilon & r < a \\ 0 & r > a \end{cases} \tag{2.153}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = \begin{cases} -\rho r^2/\varepsilon & r < a \\ 0 & r > a \end{cases} \tag{2.154}$$

Lấy tích phân 2 vế theo r:

$$r^2\frac{\partial\phi}{\partial r} = \begin{cases} -\frac{\rho r^3}{3\varepsilon} + A & r < a \\ C & r > a \end{cases} \tag{2.155}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = \begin{cases} -\frac{\rho r}{3\varepsilon} + \frac{A}{r^2} & r < a \\ \frac{C}{r^2} & r > a \end{cases} \tag{2.156}$$

Lấy tích phân 2 vế theo r:

$$\phi = \begin{cases} -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon} - \frac{A}{r} + B & r < a \\ -\frac{C}{r} + D & r > a \end{cases} \tag{2.157}$$

Cường độ điện trường:

$$\vec{E} = -grad\phi = \begin{cases} \left(\frac{\rho r}{3\varepsilon} - \frac{A}{r^2}\right)\overrightarrow{i_r} & r < a \\ -\frac{C}{r^2}\overrightarrow{i_r} & r > a \end{cases} \tag{2.158}$$

Điện thế hữu hạn khi r $\to$ 0: A = 0. Chọn thế tại ∞ bằng không: ϕ = D = 0.

$$\phi = \begin{cases} -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon} + B & r < a \\ -\frac{C}{r} & r > a \end{cases} \tag{2.159}$$

$$\vec{E} = -grad\phi = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\varepsilon}\overrightarrow{i_r} & r < a \\ -\frac{C}{r^2}\overrightarrow{i_r} & r > a \end{cases} \tag{2.160}$$

Từ điều kiện biên (1.112):

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma \tag{2.161}$$

Tại mặt biên r = a:

$$D_{1n} = \frac{E_{1n}}{\varepsilon} = \frac{\rho a}{3\varepsilon}$$
$$D_{2n} = \frac{E_{2n}}{\varepsilon} = -\frac{C}{a^2} \tag{2.162}$$

Do không có mật độ điện tích mặt: σ = 0 nên:

$$\frac{\rho a}{3\varepsilon} + \frac{C}{a^2} = 0 \rightarrow C = -\frac{\rho a^3}{3\varepsilon} \tag{2.163}$$

Điện thế liên tục tại r = a, từ (2.159):

$$-\frac{\rho a^2}{6\varepsilon} + B = -\frac{C}{a} \rightarrow B = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon} \tag{2.164}$$

Thay vào (2.159) và (2.160):

$$\phi = \begin{cases} -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon} + \frac{\rho a^2}{2\varepsilon} & r < a \\ \frac{\rho a^3}{3\varepsilon r} & r > a \end{cases} \tag{2.165}$$

$$\vec{E} = -grad\phi = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\varepsilon}\overrightarrow{i_r} & r < a \\ \frac{\rho a^3}{3\varepsilon r^2}\overrightarrow{i_r} & r > a \end{cases} \tag{2.166}$$

2.7.4.2 Hình trụ mang điện đều

Hình trụ dài bán kính tiết diện a, điện tích phân bố đều bên trong hình trụ với mật độ khối ρ.

$$\Delta\phi = \begin{cases} -\rho/\varepsilon & r < a \\ 0 & r > a \end{cases} \tag{2.167}$$

Trong hệ tọa độ trụ:

$$\Delta\phi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right] \tag{2.168}$$

Bỏ qua hiệu ứng mép, do tính đối xứng cầu, điện thế chỉ là hàm của r:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = 0, \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \tag{2.169}$$

$$\Delta\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = \begin{cases} -\frac{\rho}{\varepsilon} & r < a \\ 0 & r > a \end{cases} \tag{2.170}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = \begin{cases} -\rho r/\varepsilon & r < a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad (2.171)$$

Lấy tích phân 2 vế theo r:

$$r\frac{\partial\phi}{\partial r} = \begin{cases} -\frac{\rho r^2}{2\varepsilon} + A & r < a \\ C & r > a \end{cases} \quad (2.172)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = \begin{cases} -\frac{\rho r}{2\varepsilon} + \frac{A}{r} & r < a \\ \frac{C}{r} & r > a \end{cases} \quad (2.173)$$

Lấy tích phân 2 vế theo r:

$$\phi = \begin{cases} -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon} + Alnr + B & r < a \\ Clnr + D & r > a \end{cases} \quad (2.174)$$

Cường độ điện trường:

$$\vec{E} = -grad\phi = \begin{cases} \left(\frac{\rho r}{2\varepsilon} - \frac{A}{r}\right)\overrightarrow{i_r} & r < a \\ -\frac{C}{r}\overrightarrow{i_r} & r > a \end{cases} \quad (2.175)$$

Điện thế hữu hạn khi r $\rightarrow$ 0: A = 0. Chọn thế tại 0 bằng không: ϕ = B = 0.

$$\phi = \begin{cases} -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon} & r < a \\ Clnr + D & r > a \end{cases} \quad (2.176)$$

$$\vec{E} = -grad\phi = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\varepsilon}\overrightarrow{i_r} & r < a \\ \frac{C}{r}\overrightarrow{i_r} & r > a \end{cases} \quad (2.177)$$

Từ điều kiện biên (1.112):

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma \quad (2.178)$$

Tại mặt biên r = a:

$$D_{1n} = \frac{E_{1n}}{\varepsilon} = \frac{\rho a}{2\varepsilon}$$
$$D_{2n} = \frac{E_{2n}}{\varepsilon} = \frac{C}{a} \quad (2.179)$$

Do không có mật độ điện tích mặt: σ = 0 nên:

$$\frac{\rho a}{2\varepsilon} + \frac{C}{a} = 0 \rightarrow C = -\frac{\rho a^2}{2\varepsilon} \tag{2.180}$$

Điện thế liên tục tại r = a, từ (2.176):

$$-\frac{\rho a^2}{4\varepsilon} = Clna + D \rightarrow D = -\frac{\rho a^2}{4\varepsilon} + \frac{\rho a^2}{2\varepsilon} lna \tag{2.181}$$

Thay vào:

$$\phi = \begin{cases} -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon} & r < a \\ -\frac{\rho a^2}{2\varepsilon} lnr - \frac{\rho a^2}{4\varepsilon} + \frac{\rho a^2}{2\varepsilon} lna & r > a \end{cases} \tag{2.182}$$

$$\vec{E} = -grad\phi = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\varepsilon} \overrightarrow{i_r} & r < a \\ -\frac{\rho a^2}{2\varepsilon r} \overrightarrow{i_r} & r > a \end{cases} \tag{2.183}$$

TÓM TẮT

- *Bài này giới thiệu về trường điện tĩnh, là trường điện có các thông số không thay đổi theo thời gian và không có sự di chuyển của các điện tích, nghĩa là mật độ dòng bằng không. Các thông số của trường điện tĩnh được khảo sát: điện thế, năng lượng trường điện và ảnh hưởng khi đặt điện môi, vật dẫn vào trường điện cho trước.*
- *Bài này cũng đưa ra một số phương pháp để giải bài toán trường điện tĩnh: dùng nguyên lý chồng trường (dựa trên trường do điện tích điểm tạo ra), dùng phương trình Poisson – Laplace, dùng phương pháp ảnh điện hay định luật Gauss.*

CÂU HỎI ÔN TẬP

Câu 1: Trong miền không khí có $\varepsilon = \varepsilon_0$ giới hạn bằng các mặt dẫn gồm các nửa mặt phẳng x = 0, y > 0; x > 0, y = 0 và mặt cong xy = 2. Giả sử điện thế trong miền này là ϕ = 50xy [V]. Tính mật độ điện tích mặt trên các mặt dẫn.

Câu 2: Tính điện dung của tụ điện phẳng chứa đầy bằng 2 lớp điện môi $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ với độ dày d_1, d_2 song song với 2 bản tụ có diện tích S.

Câu 3: Xác định cường độ trường điện và mật độ điện tích khối khi biết môi trường có ε = const và thế của trường điện tĩnh phân bố như sau (toạ độ cầu):

$$\phi = \begin{cases} \dfrac{b}{2R}\left(3 - \dfrac{r}{R}\right) & r < R = const \\ \dfrac{b}{r} & r > R \end{cases}$$

Câu 4: Xác định hiệu điện thế giữa 2 điểm A(0,1,2) và B(1,2,3) biết cường độ trường điện có dạng:

a. $\vec{E} = yz\vec{\iota_x} + zx\vec{\iota_y} + xy\vec{\iota_z}$.

b. $\vec{E} = yz^2\vec{\iota_x} + xz^2\vec{\iota_y} + xyz\vec{\iota_z}$

Câu 5: Giữa hai điện cực phẳng song song cách nhau khoảng x = d, dài y = a, rộng z = b, cường độ điện trường biến thiên theo quy luật:

$$\vec{E} = E_0\left(1 - \frac{x^2}{2d^2}\right)\vec{\iota_x}$$

a. Xác định mật độ điện tích khối và hiệu điện thế giữa hai điện cực

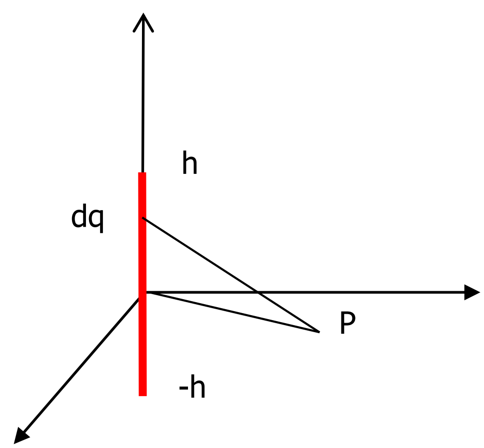
b. Xác định cường độ điện trường nếu nối 2 điện cực với nguồn U_0.

Câu 6: Hai điện cực là hai tấm kim loại phẳng hình vuông cạnh l = 10cm đặt song song cách nhau một khoảng d = 0,5cm. Giữa hai điện cực là chân không có điện thế $\phi = ax^2 + bx + c$ với a = -6,28.10^8 V/m^3, b = -9,24.10^5 V/m^2, c = -12.10^2 V/m. Bỏ qua hiệu ứng mép, tìm điện tích giữa hai điện cực.

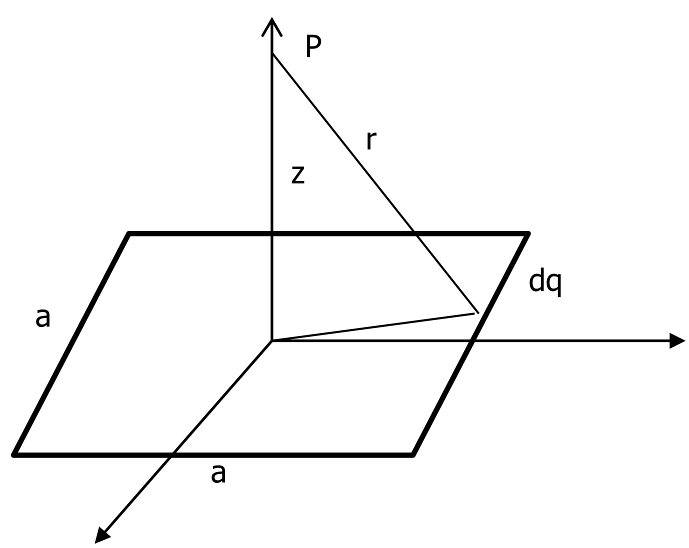
Câu 7: Trong miền không khí có $\varepsilon = \varepsilon 0$ giới hạn bằng các mặt dẫn gồm các nửa mặt phẳng x = 0, y > 0; x > 0, y = 0 và mặt cong xy = 2. Giả sử điện thế trong miền này là $\phi = 50xy$ [V]. Tính mật độ điện tích mặt trên các mặt dẫn.

Câu 8: Tính điện dung của tụ điện phẳng chứa đầy bằng 2 lớp điện môi $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ với độ dày d_1, d_2 song song với 2 bản tụ có diện tích S.

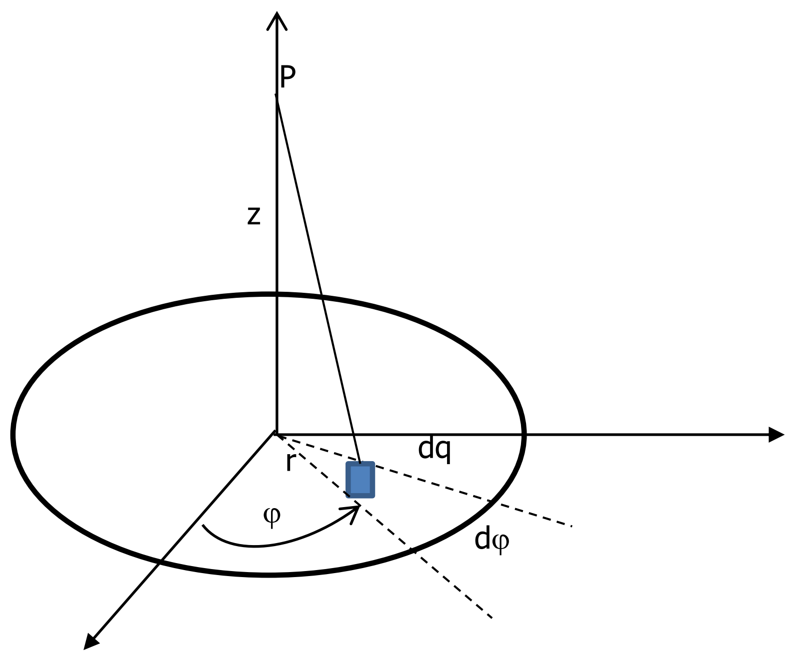
Câu 9: Điện tích phân bố liên tục đều với mật độ λ trên đoạn thẳng $-h \le z \le h$. Xác định thế và cường độ điện trường tại điểm P nằm trên mặt phẳng xOy và cách tâm khoảng r.



Câu 10: Điện tích Q phân bố liên tục đều trên dây dẫn mảnh hình vuông chiều dài mỗi cạnh a. Xác định thế và cường độ điện trường tại điểm P nằm trên trục z vuông góc và qua tâm dây dẫn.



Câu 11: Điện tích Q phân bố liên tục đều trên đĩa tròn phẳng bán kính a. Xác định thế và cường độ điện trường tại điểm P nằm trên trục z vuông góc và qua tâm đĩa.



Câu 12: Xác định thế điện và cường độ điện trường bên trong và bên ngoài mặt cầu bán kính a mang điện tích Q phân bố đều trên mặt cầu.

Câu 13: Xác định thế điện và cường độ điện trường bên trong và bên ngoài hình trụ dài bán kính tiết diện a, điện tích phân bố đều bên trong hình trụ với mật độ khối ρ.

Câu 14: Xác định thế điện và cường độ điện trường bên trong và bên ngoài 2 mặt phẳng z = -a/2 và z = a/2 biết điện tích phân bố đều giữa 2 mặt phẳng với mật độ khối ρ.

Câu 15: Xác định thế điện và cường độ điện trường gây ra bởi điện tích phân bố đều với mật độ khối ρ (dùng định luật Gauss):

$$\rho = \begin{cases} 0 & r < a \\ A & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

a. Trong hệ tọa độ cầu.

b. Trong hệ tọa độ trụ.

Câu 16: Xác định thế điện và cường độ điện trường gây ra bởi điện tích phân bố đều với mật độ mặt σ (dùng định luật Gauss):

$$\rho\sigma = \begin{cases} \sigma_0 & trên\, mặt\, r = a < b \\ -\dfrac{\sigma_0 a}{b} & trên\, mặt\, r = b \\ 0 & khác \end{cases}$$

a. Trong hệ tọa độ cầu.

b. Trong hệ tọa độ trụ.

Câu 17: Xác định thế điện gây bởi điện tích phân bố khối trong hệ tọa độ trụ với mật độ (dùng phương trình Poisson - Laplace):

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & a < r < b \\ 0 & khác \end{cases}$$

a. Trong hệ tọa độ cầu.

b. Trong hệ tọa độ trụ.

BÀI 3: TRƯỜNG ĐIỆN TỪ DỪNG

Sau khi học xong bài này, người học có thể:

- *Tính toán các thông số cho trường điện dừng và trường từ dừng.*

3.1 KHÁI NIỆM

- Trường điện từ dừng là trường điện từ trong đó các đại lượng đặc trưng cho trường không phụ thuộc thời gian và có dòng điện không đổi.

$$rot\vec{H} = \vec{J} \tag{3.1}$$

$$div\vec{B} = 0 \tag{3.2}$$

$$rot\vec{E} = 0 \tag{3.3}$$

$$div\vec{D} = \rho \tag{3.4}$$

- Môi trường đẳng hướng, tuyến tính:

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \tag{3.5}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \tag{3.6}$$

$$\vec{J} = \gamma\vec{E} \tag{3.7}$$

$$div\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \tag{3.8}$$

- Các phương trình (3.1), (3.2), (3.5): trường từ dừng gây bởi dòng điện không đổi theo thời gian.
- Các phương trình (3.3), (3.4), (3.6), (3.7), (3.8): trường điện dừng.
    - Các phương trình (3.3), (3.4), (3.6): trường điện dừng trong điện môi lý tưởng (γ = 0) bao quanh môi trường dẫn mang dòng điện không đổi.

- Các phương trình (3.3), (3.7), (3.8): trường điện dừng trong môi trường dẫn có dòng điện không đổi.

3.2 TRƯỜNG ĐIỆN DỪNG TRONG MÔI TRƯỜNG DẪN

Các phương trình cơ bản:

- Dạng vi phân:

$$rot\vec{E} = 0 \tag{3.9}$$

$$div\vec{J} = 0 \tag{3.10}$$

- Dạng tích phân:

$$\oint_C \vec{E}\overrightarrow{dl} = 0 \tag{3.11}$$

$$\oint_S \vec{J}\overrightarrow{ds} = 0 \tag{3.12}$$

$div\vec{J} = 0 \rightarrow$ các đường sức là các đường cong khép kín $\rightarrow$ các đường sức là các đường cong khép kín. Do hiện tượng tiêu tán năng lượng nên cần nguồn cung cấp để dòng điện không đổi. Như vậy, môi trường dẫn phải khép kín qua một nguồn và nguồn phải cung cấp năng lượng thường xuyên.

Trong miền không nguồn:

$$\vec{J} = \gamma\vec{E} \tag{3.13}$$

Trong miền có nguồn:

$$\vec{J} = \gamma\left(\vec{E} + \overrightarrow{E_s}\right) \tag{3.14}$$

$\vec{E}_s = \frac{\vec{F}_s}{q}$: vector cường độ trường ngoài. Trường lực ngoài phải là trường lực không có tính chất thế (không có nguồn gốc tĩnh điện) như pic, accu, máy phát điện, …

Do $rot\vec{E} = 0$, tương tự như (2.7) và (2.10):

$$\vec{E} = -grad\phi \tag{3.15}$$

$$\phi(M) = -\int_M^{M_0} \vec{E}\overrightarrow{dl} \text{ (M}_0\text{: gốc điện thế)} \quad (3.16)$$

$$U_{PQ} = \phi(P) - \phi(Q) = \int_P^Q \vec{E}\overrightarrow{dl} \quad [V] \quad (3.17)$$

Nếu môi trường dẫn đồng nhất, tuyến tính, đẳng hướng, ta có phương trình Laplace:

$$\Delta\phi = \nabla^2\phi = 0 \quad (3.18)$$

Khi đó, bài toán trường điện dừng có thể quay về giải phương trình Laplace.

Điều kiện biên:

Xét trên mặt S phân cách hai môi trường:

$$\phi_1 = \phi_2 \quad (3.19)$$

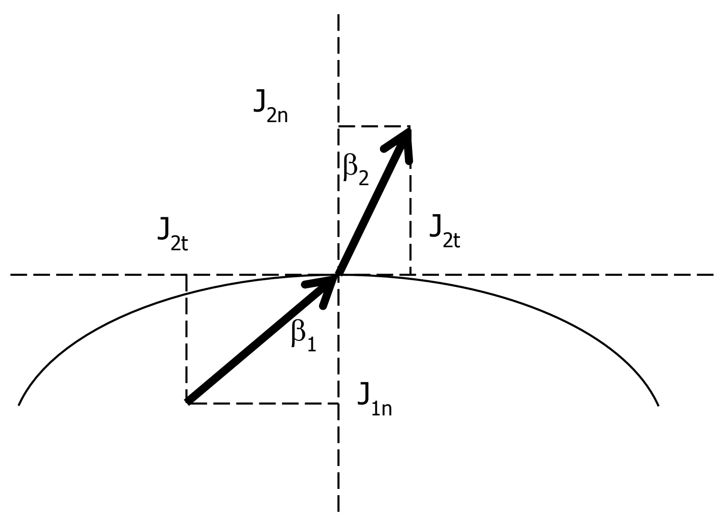
Theo phương pháp tuyến:

$$J_{1n} = J_{2n} \quad (3.20)$$

Hay:
$$\gamma_1 E_{1n} = \gamma_2 E_{2n} \quad (3.21)$$

Hay:
$$\gamma_1 \frac{\partial\phi_1}{\partial n} = \gamma_2 \frac{\partial\phi_2}{\partial n} \quad (3.22)$$

∂n: đạo hàm theo phương pháp tuyến.



Hình 3.1 – Điều kiện biên trong trường điện dừng

Theo phương tiếp tuyến:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \tag{3.23}$$

Hay:
$$\frac{J_{1\tau}}{\gamma_1} = \frac{J_{2\tau}}{\gamma_2} \tag{3.24}$$

Hay:
$$\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} = \frac{\partial\phi_2}{\partial\tau} \tag{3.25}$$

$\partial\tau$: đạo hàm theo phương tiếp tuyến.

Các đường sức dòng điện bị gãy khúc khi qua mặt phân cách như **Hình 3.1**.

$$\frac{tg\beta_2}{tg\beta_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \tag{3.26}$$

- Nếu môi trường dẫn tiếp xúc điện môi lý tưởng:

Môi trường 2 là điện môi lý tưởng: $\overrightarrow{J_2} = 0$. Từ (3.20), (3.21) và (3.22):

$$J_{1n} = 0 \tag{3.27}$$

$$E_{1n} = 0 \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial n} = 0 \tag{3.29}$$

- Nếu $\gamma 1 >> \gamma 2$:

$$J_{2t} \approx 0 \tag{3.30}$$

$$E_{1t} \approx 0 \tag{3.31}$$

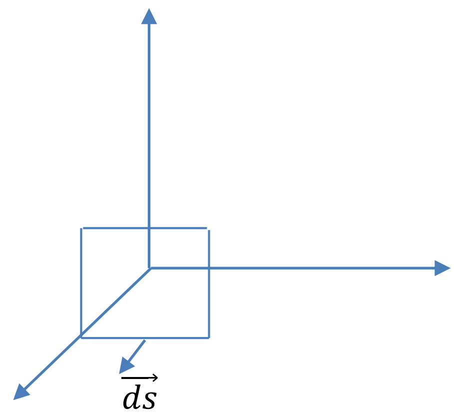
$$\phi_2(S) \approx 0 \tag{3.32}$$

Ví dụ 3.1: Điện thế trong môi trường dẫn $\gamma = 10^{-4}$ S/m có $\phi = x^2 - y^2 + 2$. Tính $\vec{J}$ và dòng điện chạy qua diện tích hình vuông cạnh $y_0 = 50$cm, $z_0 = 50$cm nằm song song và cách mặt phẳng yOz một khoảng $x_0 = 10$cm.

<u>**Giải**</u>

$$\vec{E} = -grad\phi = -2x\overrightarrow{\imath_x} + 2y\overrightarrow{\imath_y}$$

$$\vec{J} = \gamma\vec{E} = \gamma\left(-2x\overrightarrow{\imath_x} + 2y\overrightarrow{\imath_y}\right)$$



$$I = \oint_S \vec{J}\overrightarrow{ds} = \oint_S \gamma\left(-2x\vec{i_x} + 2y\vec{i_y}\right) ds\vec{i_x} = \oint_S -\gamma 2x_0 ds = -\gamma 2x_0 S = -10^{-4}.2.0{,}1.0{,}5.0{,}5$$
$$= -5.10^{-6}\,A$$

Điện trở:

Xét môi trường dẫn đặt giữa hai điện cực (độ dẫn điện của điện cực lớn hơn nhiều so với môi trường dẫn). Có thể xem bề mặt của điện cực tiếp xúc môi trường dẫn là đẳng thế. Nếu đặt một hiệu điện thế không đổi vào 2 điện cực: trong môi trường dẫn tồn tại một trường điện từ dừng.

Điều kiện biên:

$$\phi(S_1) = const = \phi_1 \qquad (3.33)$$

$$\phi(S_2) = const = \phi_2 \qquad (3.34)$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial n}(S_0) = 0 \qquad (3.35)$$

S_1, S_2: bề mặt điện cực 1, 2 tiếp xúc với môi trường dẫn; S_0: bề mặt còn lại của môi trường dẫn tiếp xúc điện môi.

Gọi I là dòng điện chạy từ cực 1 sang cực 2 qua môi trường dẫn:

$$I = \oint_{S_1} \vec{J}\overrightarrow{ds} = \oint_{S_2} \vec{J}\overrightarrow{ds} = \oint_S \vec{J}\overrightarrow{ds} \qquad (3.36)$$

S: bề mặt bất kỳ trong môi trường dẫn cắt tất cả các đường sức điện.

Nếu môi trường dẫn tuyến tính (γ không phụ thuộc $\vec{E}, \vec{J}$):

$$u = \phi_1 - \phi_2 = ri \text{ hay } i = gu \qquad (3.37)$$

r: điện trở, g = 1/r: điện dẫn.

Công suất tiêu tán:

Theo định luật Joule – Lenz, mật độ công suất tiêu tán trong môi trường dẫn:

$$p_{tt} = \vec{J}\vec{E} \tag{3.38}$$

$$P_{tt} = \int_V p_{tt} dV = \int_V \vec{J}\vec{E} dV \tag{3.39}$$

Thay $\vec{E} = -grad\phi$ vào (3.38):

$$p_{tt} = -\vec{J} grad\phi \tag{3.40}$$

Áp dụng (1.50) $div(\phi\vec{J}) = \vec{J} grad\phi + \phi div\vec{J}$ vào (3.40):

$$p_{tt} = \phi div\vec{J} - div(\phi\vec{J}) \tag{3.41}$$

Theo (3.10):

$$p_{tt} = -div(\phi\vec{J}) \tag{3.42}$$

Thế vào (3.39):

$$P_{tt} = -\int_V div(\phi\vec{J}) dV \tag{3.43}$$

Áp dụng định lý divergence:

$$P_{tt} = \int_\Sigma \phi\vec{J}\overrightarrow{ds} \tag{3.44}$$

Σ: bao gồm 3 mặt S_0, S_1, S_2.

Chọn hướng $\overrightarrow{ds}$ theo chiều dòng điện:

$$P_{tt} = \int_{S_1} \phi_1\vec{J}\overrightarrow{ds} - \int_{S_2} \phi_2\vec{J}\overrightarrow{ds} + \int_{S_0} \phi\vec{J}\overrightarrow{ds} \tag{3.45}$$

Theo (3.27):

$$\vec{J}\overrightarrow{ds} = J_n ds = 0 \tag{3.46}$$

$$P_{tt} = \int_{S_1} \phi_1\vec{J}\overrightarrow{ds} - \int_{S_2} \phi_2\vec{J}\overrightarrow{ds} \tag{3.47}$$

$$P_{tt} = (\phi_1 - \phi_2)i = ui = ri^2 = gu^2 \tag{3.48}$$

So sánh trường điện dừng trong môi trường dẫn với trường điện tĩnh:

Trường điện dừng trong môi trường dẫn	Trường điện tĩnh ở miền ρ = 0
$rot\vec{E} = 0$ $\vec{E} = -grad\phi$ $\Delta\phi = \nabla^2\phi = 0$ $div\vec{J} = 0$ $\vec{J} = \gamma\vec{E}$ $I = \int_S \vec{J}\overrightarrow{ds}$	$rot\vec{E} = 0$ $\vec{E} = -grad\phi$ $\Delta\phi = \nabla^2\phi = 0$ $div\vec{D} = 0$ $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ $q = \int_S \vec{D}\overrightarrow{ds}$
g = I/U $\phi_1 = \phi_2$ $J_{1n} = J_{2n}$ $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ Bề mặt điện cực là đẳng thế	C = q / U $\phi_1 = \phi_2$ $D_{1n} = D_{2n}$ $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ Bề mặt vật dẫn là đẳng thế

Bảng 3.1 So sánh trường điện tĩnh và trường điện dừng trong môi trường dẫn

$$\begin{gathered} \vec{E} \leftrightarrow \vec{E} \\ \phi \leftrightarrow \phi \\ \vec{J} \leftrightarrow \vec{D} \\ I \leftrightarrow Q \\ g \leftrightarrow C \end{gathered} \tag{3.49}$$

Về mô tả toán học, trường điện dừng trong môi trường dẫn và trường điện tĩnh trong vùng không có phân bố điện tích tương tự nhau:

- Có thể áp dụng các phương pháp tính trường điện tĩnh để tính trường điện dừng.
- Biết kết quả của bài toán trường điện tĩnh thì có thể suy ra kết quả của bài toán trường điện dừng bằng cách biến đổi như (3.49).

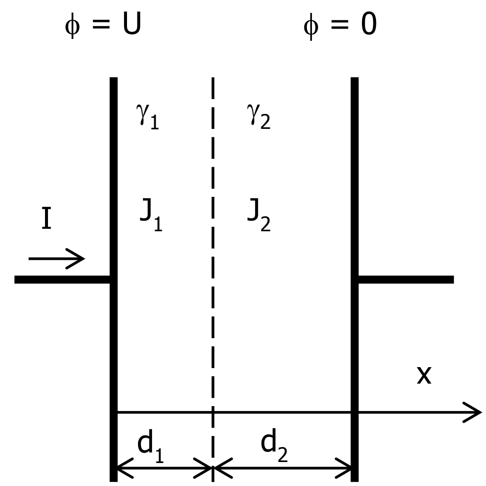
Ví dụ 3.2: Tụ điện phẳng có hai lớp cách điện γ_1 = const dày d_1, γ_2 = const dày d_2 đặt dưới hiệu điện thế U = const, diện tích mỗi bản tụ là S. Xác định E, J, dòng điện rò chảy qua tụ, điện trở rò, điện trở cách điện của tụ.

Giải

Do tính đối xứng → $\vec{E}$ theo hướng x → $\vec{E} = E\vec{i_x}, \vec{J} = \gamma\vec{E} = J\vec{i_x}$.

$$div\vec{J} = 0 \rightarrow \frac{\partial J}{\partial x} = 0$$

$\rightarrow J_1 = \text{const}, J_2 = \text{const} \rightarrow E_1 = \text{const}, E_2 = \text{const}.$



Điều kiện biên: $J_{1n} = J_{2n} \rightarrow J_1 = J_2 = J$.

$$U = \phi(0) - \phi(d_1 + d_2) = \int_0^{d_1+d_2} \vec{E}\overrightarrow{dl} = \int_0^{d_1} E_1 dx + \int_{d_1}^{d_1+d_2} E_2 dx$$

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{J}{\gamma_1} d_1 + \frac{J}{\gamma_2} d_2$$

$$J = \frac{\gamma_1 \gamma_2 U}{d_1 \gamma_2 + d_2 \gamma_1}$$

$$E = \frac{J}{\gamma} = \begin{cases} \dfrac{\gamma_2 U}{d_1\gamma_2 + d_2\gamma_1} & 0 < x < d_1 \\ \dfrac{\gamma_1 U}{d_1\gamma_2 + d_2\gamma_1} & d_1 < x < d_1 + d_2 \end{cases}$$

Dòng điện chạy qua tụ điện:

$$I = \oint_S \vec{J}\overrightarrow{ds} = \int_S J ds = J \int_S ds = JS = \frac{\gamma_1\gamma_2 U}{d_1\gamma_2 + d_2\gamma_1} S$$

Điện trở của tụ điện:

$$r = \frac{U}{I} = \frac{d_1\gamma_2 + d_2\gamma_1}{\gamma_1\gamma_2 S} = \frac{\dfrac{d_1}{\gamma_1} + \dfrac{d_2}{\gamma_2}}{S}$$

Điện dẫn của tụ điện:

$$g = \frac{I}{U} = \frac{\gamma_1\gamma_2 S}{d_1\gamma_2 + d_2\gamma_1}$$

3.3 TRƯỜNG ĐIỆN DỪNG TRONG ĐIỆN MÔI LÝ TƯỞNG BAO QUANH VẬT DẪN CÓ DÒNG KHÔNG ĐỔI

Trong điện môi lý tưởng:

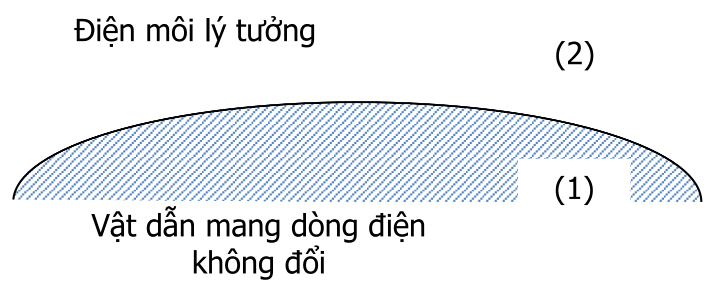
$$\vec{J} = 0 \tag{3.50}$$

Các phương trình:

$$rot\vec{E} = 0 \tag{3.51}$$

$$div\vec{D} = 0 \tag{3.52}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \tag{3.53}$$



Hình 3.2 – Điện môi lý tưởng bao quanh vật dẫn

Các phương trình này giống phương trình trường điện tĩnh trong vùng không có phân bố điện tích nên có thể dùng các phương pháp giải bài toán trường điện tĩnh để xác định trường điện dừng trong điện môi lý tưởng.

Trường điện dừng trong điện môi lý tưởng bao quanh vật dẫn có dòng không đổi là trường thế, biểu diễn qua điện thế:

$$\vec{E} = -grad\phi \tag{3.54}$$

Nếu ε = const, ta có phương trình Laplace:

$$\Delta\phi = \nabla^2\phi = 0 \tag{3.55}$$

Từ (3.28): $E_{1n} = 0$

$$E_{2n} = E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{3.56}$$

Ví dụ 3.3: Cáp đồng trục bán kính lõi a, bán kính trong của vỏ là b, bán kính ngoài của vỏ là c, dòng điện chạy trong lõi và vỏ có cùng cường độ I nhưng ngược chiều. Xác định điện thế và cường độ điện trường.

<u>Giải</u>

Chọn hệ tọa độ trụ có trục Oz trùng với trục của cáp đồng trục.

Trong vỏ và lõi:

$$\vec{J} = \begin{cases} -\frac{I}{\pi a^2}\vec{\iota_z} & lõi \\ \frac{I}{\pi(c^2-b^2)}\vec{\iota_z} & vỏ \end{cases} \tag{3.57}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\gamma} = \begin{cases} E_1\vec{\iota_z} = -\frac{I}{\gamma\pi a^2}\vec{\iota_z} & lõi \\ E_2\vec{\iota_z} = \frac{I}{\gamma\pi(c^2-b^2)}\vec{\iota_z} & vỏ \end{cases} \tag{3.58}$$

Mặt đẳng thế là các mặt z = const. Chọn thế trên mặt z = 0 của lõi có $\phi = 0$ và thế trên mặt z = 0 của vỏ có $\phi = U$.

$$\phi = \begin{cases} \frac{I}{\gamma\pi a^2}z & lõi \\ -\frac{I}{\gamma\pi(c^2-b^2)}z + U & vỏ \end{cases} \tag{3.59}$$

Trong lớp điện môi, do tính chất đối xứng nên điện thế không phụ thuộc vào φ.

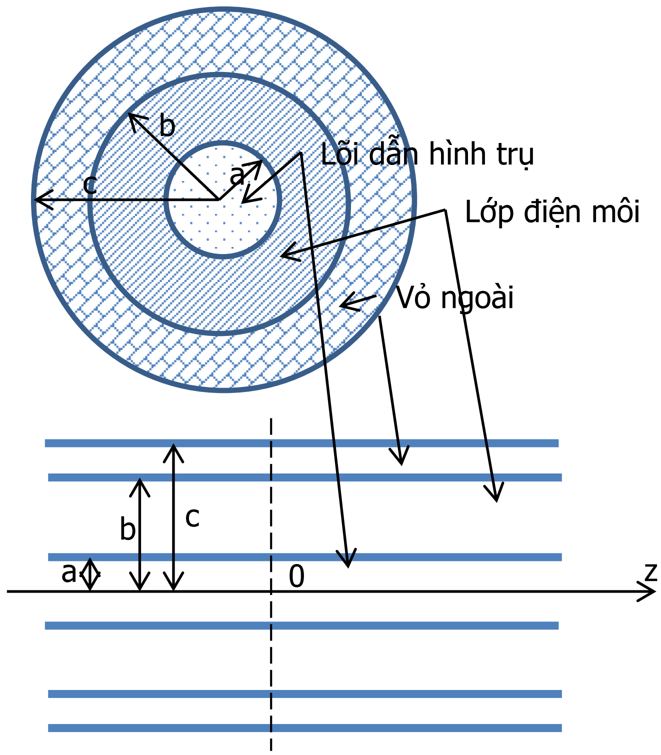
$$\phi = \phi_r(r)\phi_z(z) \tag{3.60}$$

Phương trình Laplace:

$$\Delta\phi = \phi_z(z)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi_r(r)}{\partial r}\right) + \phi_r(z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi_z(z)}{\partial z}\right) = 0 \tag{3.61}$$

Chia 2 vế cho $\phi_r(r)\phi_z(z)$:

$$\frac{1}{\phi_r(z)}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi_r(r)}{\partial r}\right) + \frac{1}{\phi_z(z)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi_z(z)}{\partial z}\right) = 0 \tag{3.62}$$



Hình 3.3 – Cáp đồng trục

(3.62) đúng với mọi r, z nếu:

$$\frac{1}{\phi_r(r)}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi_r(r)}{\partial r}\right) = 0 \quad (3.63)$$

$$\frac{1}{\phi_z(z)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi_z(z)}{\partial z}\right) = 0 \quad (3.64)$$

Nghiệm của hệ phương trình trên:

$$\phi_z(z) = A_1 z + A_2 \quad (3.65)$$

$$\phi_r(r) = B_1 lnr + B_2 \quad (3.66)$$

Từ đó:

$$\phi = \phi_R(r)\phi_z(z) = (K_1 lnr + K_2)z + K_3 lnr + K_4 \quad (3.67)$$

Điều kiện biên:

$$\phi(r = a) = \phi(lõi) \quad (3.68)$$

$$\phi(r = b) = \phi(vỏ) \quad (3.69)$$

Giải (3.59), (3.68), (3.69) và thế vào (3.67):

$$\phi = \frac{1}{ln\frac{b}{a}}\left[\left(E_1 ln\frac{r}{b} - E_2 ln\frac{r}{a}\right)z + U ln\frac{r}{a}\right] \quad (3.70)$$

Trong đó:

$$E_1 = -\frac{I}{\gamma\pi a^2}$$
$$E_2 = \frac{I}{\gamma\pi(c^2-b^2)} \quad (3.71)$$

Cường độ điện trường:

$$\vec{E} = -grad\phi = E_r\vec{i_r} + E_z\vec{i_z} \quad (3.72)$$

$$E_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{rln\frac{b}{a}}[(E_2 - E_1)z - U]$$
$$E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{1}{ln\frac{b}{a}}\left[-E_1 ln\frac{r}{b} + E_2 ln\frac{r}{a}\right] \quad (3.73)$$

3.4 TRƯỜNG TỪ DỪNG

Trường từ dừng là trường từ gây ra bởi dòng điện không đổi theo thời gian, các đại lượng đặc trưng của trường từ không thay đổi theo thời gian.

Các phương trình cơ bản:

- Dạng vi phân:

$$rot\vec{H} = \vec{J} \quad (3.74)$$

$$div\vec{B} = 0 \quad (3.75)$$

- Dạng tích phân:

$$\oint_C \vec{H}\overrightarrow{dl} = \Sigma i \quad (3.76)$$

$$\oint_S \vec{B}\overrightarrow{ds} = 0 \quad (3.77)$$

- Điều kiện biên:

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (3.78)$$

$$\vec{n} \times \overrightarrow{H_2} - \vec{n} \times \overrightarrow{H_1} = \overrightarrow{J_s}\ hay\ \overrightarrow{H_{2\tau}} - \overrightarrow{H_{1\tau}} = \overrightarrow{J_s} \quad (3.79)$$

3.4.1 Khảo sát trường từ dừng ở miền không có dòng dẫn bằng từ thế vô hướng

Khi không có dòng điện, (3.74) và (3.75) trở thành:

$$rot\vec{H} = 0 \tag{3.80}$$

$$div\vec{B} = 0 \tag{3.81}$$

$rot\vec{H} = 0 \rightarrow$ Có thể biểu diễn $\vec{H}$ qua gradient của một hàm vô hướng.

$$\vec{H} = -grad\phi_m \tag{3.82}$$

ϕ_m [A]: từ thế vô hướng, thông thường là hàm đa trị, kể cả khi chọn từ thế gốc có $\phi_m = 0$ (chỉ đơn trị khi khảo sát trong miền đơn liên).

Nếu miền khảo sát không có dòng dẫn và μ = const:

$$div\vec{H} = div\frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{1}{\mu}div\vec{B} = 0 \tag{3.83}$$

Thế (3.82) vào (3.83), ta được phương trình Laplace:

$$\Delta\phi_m = 0 \tag{3.84}$$

Điều kiện biên:

$$\phi_{m1} = \phi_{m2} \tag{3.85}$$

$$B_{1n} = B_{2n}\ hay\ \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}\ hay\ \mu_1\frac{\partial\phi_{m1}}{\partial n} = \mu_2\frac{\partial\phi_{m2}}{\partial n} \tag{3.86}$$

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}\ hay\ \frac{B_{1\tau}}{\mu_1} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_2} hay\ \frac{\partial\phi_{m1}}{\partial\tau} = \frac{\partial\phi_{m2}}{\partial\tau} \tag{3.87}$$

- Có thể áp dụng các phương pháp tính trường điện tĩnh, trường điện dừng để tính trường từ dừng ở miền không có dòng.
- Nếu biết nghiệm của bài toán trường điện tĩnh hay trường điện dừng, có thể tìm được nghiệm của bài toán trường từ dừng ở miền không có dòng dùng (3.88).

Trường điện dừng trong môi trường dẫn	Trường điện tĩnh ở miền ρ = 0	Trường từ dừng ở miền không có dòng
$rot\vec{E} = 0$ $\vec{E} = -grad\phi$ $\Delta\phi = \nabla^2\phi = 0$ $div\vec{J} = 0$ $\vec{J} = \gamma\vec{E}$ $I = \int_S \vec{J}\vec{ds}$	$rot\vec{E} = 0$ $\vec{E} = -grad\phi$ $\Delta\phi = \nabla^2\phi = 0$ $div\vec{D} = 0$ $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ $q = \int_S \vec{D}\vec{ds}$	$rot\vec{H} = 0$ $\vec{H} = -grad\phi_m$ $\Delta\phi_m = \nabla^2\phi_m = 0$ $div\vec{B} = 0$ $\vec{B} = \mu\vec{H}$ $\Phi = \int_S \vec{B}\vec{ds}$
$\phi_1 = \phi_2$ $J_{1n} = J_{2n}$ $E_{1\tau} = E_{2\tau}$	$\phi_1 = \phi_2$ $D_{1n} = D_{2n}$ $E_{1\tau} = E_{2\tau}$	$\phi_{m1} = \phi_{m2}$ $B_{1n} = B_{2n}$ $H_{1\tau} = H_{2\tau}$

Bảng 3.2 – So sánh trường điện tĩnh, trường điện dừng trong môi trường dẫn và trường từ dừng ở miền không có dòng

$$\begin{gathered}\vec{E} \leftrightarrow \vec{E} \leftrightarrow \vec{H} \\ \phi \leftrightarrow \phi \leftrightarrow \phi_m \\ \vec{J} \leftrightarrow \vec{D} \leftrightarrow \vec{B} \\ I \leftrightarrow Q \leftrightarrow \Phi \\ \gamma \leftrightarrow \varepsilon \leftrightarrow \mu\end{gathered} \tag{3.88}$$

3.4.2 Khảo sát trường từ dừng dùng thế vector

Nếu miền khảo sát có dòng dẫn $\vec{J}$: $rot\vec{H} = \vec{J} \neq 0$ nên không thể biểu diễn qua ϕ_m.

Ta có:

$$div\vec{B} = 0 \tag{3.89}$$

Theo (1.50):

$$div\left(rot\vec{A}\right) = 0 \tag{3.90}$$

Đặt:

$$\vec{B} = rot\vec{A} \tag{3.91}$$

$\vec{A}$ gọi là thế vector. Từ $\vec{B}$ cho trước sẽ có vô số vector $\vec{A}$ thỏa mãn nên phải chọn thêm điều kiện phụ. Đối với trường từ dừng, điều kiện phụ:

$$div\vec{A} = 0 \tag{3.92}$$

Nếu môi trường đồng nhất tuyến tính và đẳng hướng có μ = const:

$$rot\vec{B} = rot(\mu\vec{H}) = \mu rot\vec{H} = \mu\vec{J} \tag{3.93}$$

Mà:

$$\Delta\vec{A} = grad(div\vec{A}) - rot(rot\vec{A}) \tag{3.94}$$

$$\vec{B} = rot\vec{A} \rightarrow rot\vec{B} = rot(rot\vec{A}) \tag{3.95}$$

Từ (3.92), (3.93), (3.94) và (3.95):

$$\Delta\vec{A} = -\mu\vec{J} \tag{3.96}$$

Đây là phương trình Poisson cho trường từ dừng. Nếu môi trường không có dòng dẫn, (3.96) trở thành phương trình Laplace:

$$\Delta\vec{A} = 0 \tag{3.97}$$

Xét trong hệ tọa độ Descartes:

$$\vec{A} = A_x\vec{\iota_x} + A_y\vec{\iota_y} + A_z\vec{\iota_z} \tag{3.98}$$

$$\vec{J} = J_x\vec{\iota_x} + J_y\vec{\iota_y} + J_z\vec{\iota_z} \tag{3.99}$$

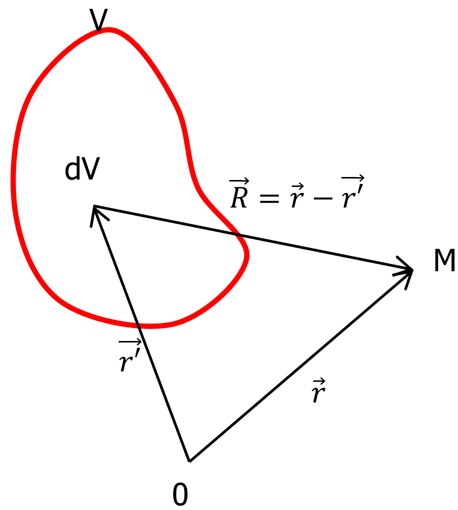
$$\Delta\vec{A} = \Delta A_x\vec{\iota_x} + \Delta A_y\vec{\iota_y} + \Delta A_z\vec{\iota_z} \tag{3.100}$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} \Delta A_x &= \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \Delta A_y &= \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \Delta A_z &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{3.101}$$

Phương trình Poisson (3.96) trở thành:

$$\begin{aligned} \Delta A_x &= -\mu J_x \\ \Delta A_y &= -\mu J_y \\ \Delta A_z &= -\mu J_z \end{aligned} \qquad (3.102)$$



Hình 3.4 – Các vector vị trí trong trường từ dừng

Tương tự như trường điện tĩnh, phương trình Poisson:

$$\Delta\phi = -\rho/\varepsilon \qquad (3.103)$$

Nghiệm của phương trình:

$$\phi = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\varepsilon r} \qquad (3.104)$$

So sánh (3.103), (3.104) với (3.102):

$$\begin{aligned} \Delta A_x &= \mu \int_V \frac{J_x dV}{4\pi r} \\ \Delta A_y &= \mu \int_V \frac{J_y dV}{4\pi r} \\ \Delta A_z &= \mu \int_V \frac{J_z dV}{4\pi r} \end{aligned} \qquad (3.105)$$

Vậy:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r'})}{R} dV \qquad (3.106)$$

Với $\vec{A}(\infty) = 0$.

$$\vec{B} = rot\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V rot\left[\frac{\vec{J}(\overrightarrow{r'})}{R}\right]dV \tag{3.107}$$

Ta chứng minh được:

$$rot\left[\frac{\vec{J}(\overrightarrow{r'})}{R}\right] = \frac{\vec{J}\times\vec{R}}{R^3} \tag{3.108}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}\times\vec{R}}{R^3}dV \tag{3.109}$$

Nếu dòng điện chạy trong vòng dây dẫn khép kín, dây có tiết diện ngang rất nhỏ so với khoảng cách tới điểm tính trường, dòng điện được gọi là dòng điện dây.

$$\vec{A} = \frac{\mu i}{4\pi}\oint_C \frac{1}{R}\overrightarrow{dl} \tag{3.110}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu i}{4\pi}\oint_C \frac{\overrightarrow{dl}\times\vec{R}}{R^3} \tag{3.111}$$

(3.109) và (3.111) là phương trình của định luật Biot – Savart.

Ta có:

$$d\vec{A} = \frac{\mu\vec{J}dV}{4\pi R}\ hay\ d\vec{A} = \frac{\mu i\overrightarrow{dl}}{4\pi R} \tag{3.112}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu\vec{J}dV\times\vec{R}}{R^3}\ hay\ d\vec{A} = \frac{\mu i\overrightarrow{dl}\times\vec{R}}{R^3} \tag{3.113}$$

Từ đó:

$$d\vec{A} \parallel \vec{J}dV\ hay\ d\vec{A} \parallel i\overrightarrow{dl} \tag{3.114}$$

$$d\vec{B} \perp \vec{J}dV\ hay\ d\vec{B} \perp i\overrightarrow{dl} \tag{3.115}$$

Ví dụ 3.4: Tính $\vec{A}, \vec{B}, \vec{H}$ gây ra bởi một trục thẳng dài vô hạn mang dòng điện I đặt trong môi trường đồng nhất vô hạn có μ = const.

<u>Giải</u>

Chọn hệ tọa độ trụ, trục z trùng với trục dòng điện. Giả sử dòng điện chạy theo chiều dương trục z.

$d\vec{A} \parallel \vec{J}dV \rightarrow$ thế vector $\vec{A}$ song song với dòng điện:

$$\vec{A} = A\overrightarrow{\iota_z}$$

Do tính đối xứng, A chỉ phụ thuộc r: A = A(r).

$$\vec{B} = rot\vec{A} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \vec{\iota_r} & r\vec{\iota_\varphi} & \vec{\iota_z} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A(r) \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial A(r)}{\partial \varphi}\vec{\iota_r} - r\frac{\partial A(r)}{\partial r}\vec{\iota_\varphi}\right] = -\frac{\partial A(r)}{\partial r}\vec{\iota_\varphi}$$

$$\vec{B} = -\frac{\partial A(r)}{\partial r}\vec{\iota_\varphi} = B(r)\vec{\iota_\varphi}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = H(r)\vec{\iota_\varphi}$$

Áp dụng định luật Ampère cho đường tròn bán kính r, tâm nằm trên trục dòng điện:

$$\oint_C \vec{H}\vec{dl} = \sum_k I_k$$

$$\oint_C \vec{H}\vec{dl} = \oint_C Hdl = H.2\pi r = I$$

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r}\vec{\iota_\varphi}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu I}{2\pi r}\vec{\iota_\varphi}$$

$$-\frac{\partial A(r)}{\partial r} = B(r) \rightarrow A(r) = \int -B(r)dr = -\frac{\mu I}{2\pi}lnr + C$$

Chọn $A(r_0) = 0$:

$$C = \frac{\mu I}{2\pi}lnr_0$$

$$A(r) = \frac{\mu I}{2\pi}ln\frac{r_0}{r}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu I}{2\pi} ln \frac{r_0}{r} \vec{\iota_z}$$

3.4.3 Năng lượng trường từ dừng

Mật độ năng lượng trường từ:

$$w_M = \frac{1}{2}\vec{B}\vec{H} \quad (3.116)$$

Năng lượng toàn phần của trường từ:

$$W_M = \int w_M dV = \int_{toàn\ không\ gian} \frac{1}{2}\vec{B}\vec{H}dV \quad (3.117)$$

Thay $\vec{B} = rot\vec{A}$:

$$W_M = \int_{toàn\ không\ gian} \frac{1}{2}\vec{H}rot\vec{A}dV \quad (3.118)$$

Từ (1.50): $div(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B}.rot\vec{A} - \vec{A}.rot\vec{B}$ nên:

$$\vec{H}rot\vec{A} = div(\vec{A} \times \vec{H}) + \vec{A}rot\vec{H} \quad (3.119)$$

Thế (3.119) vào (3.118):

$$W_M = \int_{toàn\ không\ gian} \frac{1}{2}\left(div(\vec{A} \times \vec{H}) + \vec{A}rot\vec{H}\right)dV \quad (3.120)$$

$$W_M = \int_{toàn\ không\ gian} \frac{1}{2} div(\vec{A} \times \vec{H})dV + \int_{toàn\ không\ gian} \frac{1}{2}\vec{A}rot\vec{H}dV \quad (3.121)$$

$$W_M = \frac{1}{2}\oint_{S_\infty}(\vec{A} \times \vec{H})\overrightarrow{ds} + \frac{1}{2}\int_{toàn\ không\ gian} \vec{A}\vec{J}dV \quad (3.122)$$

Bên ngoài V thì $\vec{J} = 0$ nên:

$$\int_{toàn\ không\ gian} \vec{A}\vec{J}dV = \int_{ngoài\ V} \vec{A}\vec{J}dV + \int_V \vec{A}\vec{J}dV = \int_V \vec{A}\vec{J}dV \quad (3.123)$$

Ngoài ra, tại S_∞: $r \to \infty$ nên:

$$\oint_{S_\infty}(\vec{A} \times \vec{H})\overrightarrow{ds} \to 0 \quad (3.124)$$

Từ (3.122), (3.123) và (3.124):

$$W_M = \frac{1}{2}\int_V \vec{A}\vec{J}dV \tag{3.125}$$

3.4.4 Hệ số hỗ cảm, hệ số tự cảm

Xét trường từ gây bởi n vòng dây dẫn, mỗi vòng dây mang dòng điện không đổi:

$$W_M = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{V_k}\overrightarrow{A}\overrightarrow{J_k}dV = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k\psi_k \tag{3.126}$$

Trong đó:

$$\psi_k = \frac{1}{I_k}\int_{V_k}\overrightarrow{A}\overrightarrow{J_k}dV \tag{3.127}$$

Là từ thông móc vòng trên vòng dây thứ k do tất cả n dòng điện chảy trong n vòng dây tạo ra.

Nếu môi trường là tuyến tính:

$$\psi_k = \sum_{l=1}^{n}\psi_{kl} \tag{3.128}$$

Trong đó:

$$\psi_{kl} = \frac{1}{I_k}\int_{V_k}\overrightarrow{A_l}\overrightarrow{J_k}dV \tag{3.129}$$

Là từ thông móc vòng trên vòng dây thứ k gây ra bởi dòng điện chạy trong vòng dây thứ *l*.

$$\frac{1}{I_k}\int_{V_k}\overrightarrow{A_l}\overrightarrow{J_k}dV = \begin{cases} M_{kl}I_l & k \neq l \\ L_l I_l & k = l \end{cases} \tag{3.130}$$

$$M_{kl} = \int_{V_k}\frac{\overrightarrow{A_l}}{I_l}\frac{\overrightarrow{J_k}}{I_k}dV \tag{3.131}$$

Là hệ số hỗ cảm của vòng dây thứ *l* đối với vòng dây thứ k.

$$L_l = \int_{V_l}\frac{\overrightarrow{A_l}}{I_l}\frac{\overrightarrow{J_l}}{I_l}dV \tag{3.132}$$

Là hệ số tự cảm của vòng dây thứ *l*.

$$\psi_k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} I_l M_{kl} \tag{3.133}$$

Trong đó $M_{ll} = L_l$.

Thế vào (3.126):

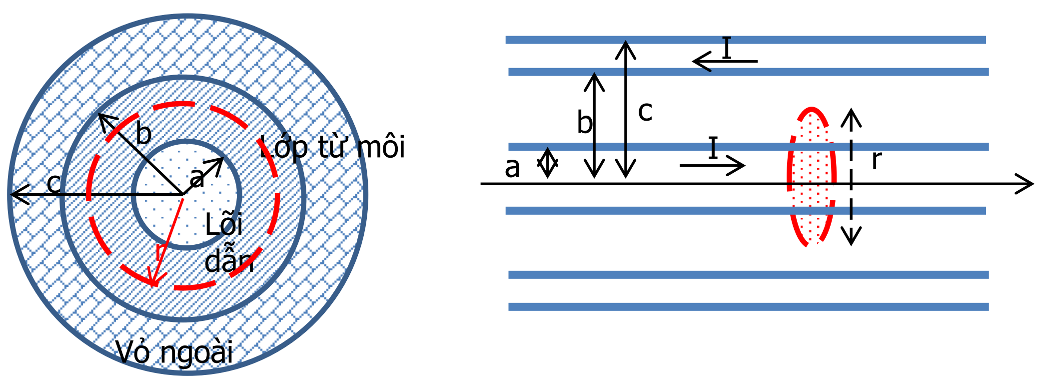
$$W_M = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} I_k I_l M_{kl} \tag{3.134}$$

Nếu chỉ có 1 vòng dây:

$$W_M = \frac{1}{2}LI^2 \tag{3.135}$$

Ví dụ 3.5: Cáp đồng trục thẳng rất dài, bán kính lõi a, bán kính trong của vỏ là b, bán kính ngoài của vỏ là c, dòng điện chạy trong lõi và vỏ có cùng cường độ I nhưng ngược chiều. Độ thẩm từ của lõi và vỏ là μ_0, của lớp từ môi là μ_1. Xác định năng lượng trường từ và hệ số tự cảm ứng với một đơn vị dài.

Giải



Hình 3.5 – Cáp đồng trục

Chọn trục z của hệ trục tọa độ trùng với trục cáp:

$$\oint_C \vec{H}\vec{dl} = \sum_k I_k \tag{3.136}$$

$$H.2\pi r = \begin{cases} \pi r^2 \frac{I}{\pi a^2} & r \le a \\ I & a < r < b \\ I - \frac{\pi(r^2-b^2)}{\pi(c^2-b^2)} I & b \le r \le c \\ 0 & r > c \end{cases} \tag{3.137}$$

Trường từ đối xứng trụ quanh trục z $\rightarrow$ các đại lượng trường từ có dạng:

$$\vec{B} = B(r)\vec{\iota_\varphi}, \vec{H} = H(r)\vec{\iota_\varphi} \tag{3.138}$$

Áp dụng định luật Ampère cho vòng tròn bán kính r:

$$H = \begin{cases} I\frac{r}{2\pi a^2} & r \leq a \\ \frac{I}{2\pi r} & a < r < b \\ \frac{I}{2\pi r}\left(1 - \frac{r^2-b^2}{c^2-b^2}\right) & b \leq r \leq c \\ 0 & r > c \end{cases} \tag{3.139}$$

$$\vec{B}\vec{H} = \mu\vec{H}\vec{H} = \mu H\overrightarrow{\iota_\varphi}H\overrightarrow{\iota_\varphi} = \mu H^2 \tag{3.140}$$

Mật độ năng lượng từ trường:

$$w_M = \frac{1}{2}\vec{B}\vec{H} = \frac{1}{2}\mu H^2 \tag{3.141}$$

Năng lượng từ trường ứng với 1 đơn vị dài:

$$W_M = \int_V \ w_M dV = \underbrace{\int_0^a w_M 2\pi r dr}_{W_1(l\tilde{o}i)} + \underbrace{\int_a^b w_M 2\pi r dr}_{W_2(t\grave{u}\ m\hat{o}i)} + \underbrace{\int_b^c w_M 2\pi r dr}_{W_3(v\mathring{o})} \tag{3.142}$$

$$W_1 = \int_0^a \frac{1}{2}\mu_0\left(I\frac{r}{2\pi a^2}\right)^2 2\pi r dr = \frac{\mu_0}{16\pi}I^2 \tag{3.143}$$

$$W_2 = \int_a^b \frac{1}{2}\mu_1\left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2 2\pi r dr = \frac{\mu_1}{4\pi}I^2 ln\frac{b}{a} \tag{3.144}$$

$$W_3 = \int_b^c \frac{1}{2}\mu_0\left(\frac{I}{2\pi r}\left(1 - \frac{r^2-b^2}{c^2-b^2}\right)\right)^2 2\pi r dr = \frac{\mu_0}{4\pi}I^2\left[\frac{c^4}{(c^2-b^2)^2}ln\frac{c}{b} - \frac{3c^2-b^2}{4(c^2-b^2)}\right] \tag{3.145}$$

Hệ số tự cảm ứng trên 1 đơn vị dài:

$$L = \frac{2W_M}{I^2} = \frac{2W_1+2W_2+2W_3}{I^2} \tag{3.146}$$

$$L = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_1}{2\pi}ln\frac{b}{a} + \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\frac{c^4}{(c^2-b^2)^2}ln\frac{c}{b} - \frac{3c^2-b^2}{4(c^2-b^2)}\right] \tag{3.147}$$

3.4.5 Lực từ

Lực từ tác dụng lên vật dẫn mang dòng điện với mật độ $\vec{J}$ nằm trong trường từ với cảm ứng từ $\vec{B}$:

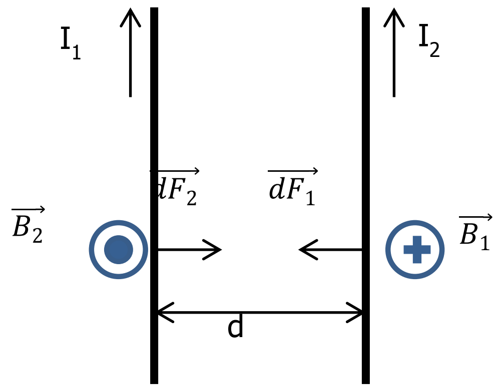
$$\vec{F} = \int_V \ \overrightarrow{dF} = \int_V \left(\vec{J}dV \times \vec{B}\right) \tag{3.148}$$

Nếu dòng điện dây:

$$\vec{F} = \oint_C \overrightarrow{dF} = \oint_C \left(I\overrightarrow{dl} \times \vec{B}\right) \tag{3.149}$$

Ví dụ 3.6: Xác định lực từ tác dụng lên 2 dây dẫn mang dòng điện cùng chiều I_1, I_2 cách nhau khoảng d.

<u>Giải</u>



Hình 3.6 – Lực từ tác dụng lên 2 dây dẫn có dòng điện chạy cùng chiều

$\overrightarrow{B_1}, \overrightarrow{B_2}$: cảm ứng từ gây ra bởi dòng I_1 trên dây 2 và dòng I_2 trên dây 1.

$$\overrightarrow{dF_1} = I_2\overrightarrow{dl_2} \times \overrightarrow{B_1} \rightarrow F_1 = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi d} dl_2 \tag{3.150}$$

Lực từ tác dụng trên 1 đơn vị dài:

$$\frac{dF_1}{dl_2} = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi d} \tag{3.151}$$

TÓM TẮT

- *Bài này giới thiệu về trường điện từ dừng, là trường điện từ tạo ra bởi dòng điện không đổi, chia thành hai phần: trường điện dừng và trường từ dừng.*
- *Trường điện dừng được khảo sát trong môi trường dẫn và trong điện môi lý tưởng bao quanh vật dẫn. Giải bài toán trường điện dừng dựa trên phương trình Laplace và các điều kiện biên.*
- *Bài toán trường từ dừng được khảo sát dựa trên thế từ vô hướng và thế vector. Nghiệm của trường từ được tìm kiếm cũng tương tự như trường điện.*

CÂU HỎI ÔN TẬP

Câu 1: Trong môi trường dẫn $\gamma = 3.10^7$ S/m có thế điện $\phi = -4.10^{-2}x - 3.10^{-2}y$. Xác định dòng điện chạy qua diện tích chữ nhật dài 2cm, rộng 1cm đặt song song trục z và tạo với trục x góc $\alpha = 300$.

Câu 2: Tụ điện phẳng có hai bản tụ đặt tại x = 0 và x = d, giữa hai bản tụ là điện môi thực có ε = const, $\gamma = \gamma_0 \frac{d}{d+x}$. Hiệu điện thế giữa hai bản tụ là U_0. Xác định cường độ trường điện và mật độ điện tích tự do giữa hai bản tụ.

Câu 3: Tụ điện phẳng có hai bản tụ đặt tại x = 0 và x = d, giữa hai bản tụ là điện môi thực có $\varepsilon = b\varepsilon_0 e^{\alpha x}$, $\gamma = ae^{\alpha x}$. Hiệu điện thế giữa hai bản tụ là U_0. Xác định cường độ trường điện và mật độ điện tích tự do giữa hai bản tụ.

Câu 4: Xác định cường độ từ trường gây ra bởi một đoạn dây dẫn thẳng mang dòng điện I.

Câu 5: Cáp đồng trục bán kính lõi R_1, bán kính trong và ngoài của vỏ là R_2 và R_3. Dòng điện chảy trong lõi và vỏ song song với trục cáp có cùng cường độ I nhưng ngược chiều. Lõi và vỏ có hằng số từ thẩm μ_0, điện môi giữa lõi và vỏ có hằng số từ thẩm μ. Xác định thế vector trong lõi, vỏ, điện môi giữa lõi và vỏ. Chọn thế vector = 0 tại r = R_1.

BÀI 4: TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN

Sau khi học xong bài này, người học có thể:

- *Biết các phương trình của trường điện từ biến thiên.*
- *Tính toán cho sóng phẳng đơn sắc.*

4.1 KHÁI NIỆM

Phương trình mô tả:

$$rot\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{4.1}$$

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{4.2}$$

$$div\vec{B} = 0 \tag{4.3}$$

$$div\vec{D} = \rho \tag{4.4}$$

Môi trường đẳng hướng, tuyến tính:

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \tag{4.5}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \tag{4.6}$$

$$\vec{J} = \gamma\left(\vec{E} + \overrightarrow{E_{ng}}\right) = \gamma\vec{E} + \overrightarrow{J_{ng}} \tag{4.7}$$

$$div\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{4.8}$$

$\overrightarrow{E_{ng}}, \overrightarrow{J_{ng}}$: đặc trưng cho nguồn ban đầu gây ra trường điện từ. Đối với miền bên ngoài nguồn: $\overrightarrow{E_{ng}} = 0, \overrightarrow{J_{ng}} = 0$.

Vector mật độ dòng công suất (vector Poynting):

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} \tag{4.9}$$

Công suất gởi qua mặt S:

$$P = \int_S \vec{P}\overrightarrow{ds} \tag{4.10}$$

- Quy luật biến thiên của điện trường theo thời gian xác định quy luật phân bố của từ trường theo không gian và ngược lại. Điều này làm dẫn tới sự lan truyền của sóng điện từ trong không gian, vận tốc lan truyền bằng vận tốc ánh sáng trong chân không c = 3.10^8 m/s.
- Điện trường có thể có nguồn, từ trường không có nguồn.

4.2 CÁC PHƯƠNG TRÌNH SÓNG

Từ (4.3): $div\vec{B} = 0$ và (1.50): $div(rot\vec{A}) = 0$ nên:

$$\vec{B} = rot\vec{A} \tag{4.11}$$

$\vec{A}$ gọi là thế vector. Thay (4.11) vào (4.2):

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial rot\vec{A}}{\partial t} = -rot\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{4.12}$$

$$rot\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \tag{4.13}$$

Theo (1.50): rot(gradf) = 0 (f là một hàm vô hướng) nên có thể biểu diễn vector $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ qua một hàm vô hướng:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -grad\phi \tag{4.14}$$

ϕ: điện thế vô hướng. (4.14) chứng tỏ trường điện từ biến thiên không phải là trường thế, công thực hiện khi di chuyển điện tích giữa hai điểm phụ thuộc vào đường đi.

Thế vector và điện thế định nghĩa như trên không đơn trị nên chọn thêm điều kiện phụ (điều kiện phụ Lorentz):

$$div\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{4.15}$$

Từ (4.1), (4.5), (4.6) và ε = const, μ = const:

$$rot\frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{J} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{4.16}$$

Thay (4.11), (4.14) vào (4.16):

$$rot\left(rot\vec{A}\right) = \mu\vec{J} + \varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(-grad\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) \tag{4.17}$$

Theo (1.50): $\Delta\vec{A} = grad\left(div\vec{A}\right) - rot\left(rot\vec{A}\right)$. Thế vào (4.17):

$$\Delta\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J} + grad\left(div\vec{A} + +\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \tag{4.18}$$

Từ điều kiện phụ Lorentz (4.15):

$$\boxed{\Delta\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J}} \tag{4.19}$$

Từ (4.4): $div\vec{D} = \rho$. Thay $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$:

$$div\vec{E} = \rho/\varepsilon \tag{4.20}$$

Từ (4.14):

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - grad\phi \tag{4.21}$$

Thay (4.21) vào (4.20):

$$div\left(-grad\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \rho/\varepsilon \tag{4.22}$$

$$\Delta\phi + \frac{\partial div\vec{A}}{\partial t} = -\rho/\varepsilon \tag{4.23}$$

Từ điều kiện phụ Lorentz (4.15):

$$\boxed{\Delta\phi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\rho/\varepsilon} \tag{4.24}$$

(4.19), (4.24) là các phương trình d'Alembert. Các phương trình này xác định trường điện từ biến thiên có khả năng lan truyền ra không gian xung quanh với vận tốc $\vartheta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

Nếu môi trường xung quanh V (thể tích chứa nguồn) đồng nhất vô hạn thì nghiệm của các phương trình d'Alembert là:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}\left(\overrightarrow{r'},t-\frac{R}{\vartheta}\right)dV}{R} \tag{4.25}$$

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho\left(\overrightarrow{r'},t-\frac{R}{\vartheta}\right)dV}{R} \tag{4.26}$$

Trong đó:

$$\vartheta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\text{: vận tốc truyền sóng} \tag{4.27}$$

$$R = \left|\vec{R}\right| = \left|\vec{r} - \overrightarrow{r'}\right| \tag{4.28}$$

$\overrightarrow{r'}$: vector vị trí của vi phân thể tích dV.

$\vec{r}$: vector vị trí của điểm khảo sát.

Nếu miền ngoài là điện môi lý tưởng không có phân bố dòng dẫn và điện tích tự do với ε = const, μ = const :

$$\Delta\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0 \tag{4.29}$$

$$\Delta\phi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \tag{4.30}$$

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{4.31}$$

$$\Delta\vec{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0 \tag{4.32}$$

4.3 CÁC PHƯƠNG TRÌNH ĐIỀU HÒA DẠNG PHỨC

Đối với trường điện từ biến thiên điều hòa, các thành phần theo ba trục tọa độ của $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \ldots$ biến thiên theo quy luật điều hòa.

$$\vec{E}(x,y,z,t) = E_{mx}(x,y,z)\cos\left(\omega t + \psi_x(x,y,z)\right)\overrightarrow{\iota_x} + E_{my}(x,y,z)\cos\left(\omega t + \psi_y(x,y,z)\right)\overrightarrow{\iota_y} + E_{mz}(x,y,z)\cos\left(\omega t + \psi_z(x,y,z)\right)\overrightarrow{\iota_z} \tag{4.33}$$

Hay: $$\vec{E}(x,y,z,t) = Re\left\{\dot{\vec{E}}(x,y,z)e^{j\omega t}\right\} \quad (4.34)$$

$\dot{\vec{E}}$: vector biên độ phức của cường độ điện trường.

$$\dot{\vec{E}} = E_{mx}e^{j\psi_x}\overrightarrow{i_x} + E_{my}e^{j\psi_y}\overrightarrow{i_y} + E_{mz}e^{j\psi_z}\overrightarrow{i_z} \quad (4.35)$$

Các đại lượng điều hòa khác cũng biểu diễn tương tự. Đối với các đại lượng vô hướng, ta cũng định nghĩa tương tự:

$$\rho(x,y,z,t) = \rho_m(x,y,z)\cos(\omega t + \varphi) \quad (4.36)$$

Hay: $$\rho(x,y,z,t) = Re\{\dot{\rho}(x,y,z)e^{j\omega t}\} \quad (4.37)$$

$$\dot{\rho} = \rho_m e^{j\psi} \quad (4.38)$$

Khi biểu diễn như trên, các đạo hàm riêng theo thời gian được tính như sau:

$$\frac{\partial\dot{\vec{E}}}{\partial t} = j\omega\dot{\vec{E}} \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial^2\dot{\vec{E}}}{\partial t^2} = j\omega j\omega\dot{\vec{E}} = -\omega^2\dot{\vec{E}} \quad (4.40)$$

Hệ phương trình Maxwell:

$$rot\dot{\vec{H}} = \dot{\vec{J}} + j\omega\dot{\vec{D}} \quad (4.41)$$

$$rot\dot{\vec{E}} = j\omega\dot{\vec{B}} \quad (4.42)$$

$$div\dot{\vec{B}} = 0 \quad (4.43)$$

$$div\dot{\vec{D}} = \dot{\rho} \quad (4.44)$$

Các phương trình chất:

$$\dot{\vec{B}} = \mu\dot{\vec{H}} \quad (4.45)$$

$$\dot{\vec{D}} = \varepsilon\dot{\vec{E}} \quad (4.46)$$

$$\dot{\vec{J}} = \gamma\left(\dot{\vec{E}} + \overrightarrow{\dot{E}_{ng}}\right) = \gamma\dot{\vec{E}} + \overrightarrow{\dot{J}_{ng}} \quad (4.47)$$

$$div\dot{\vec{J}} = -j\omega\dot{\rho} \quad (4.48)$$

Nếu không có nguồn ngoài: $\overrightarrow{E_{ng}}^{\cdot} = 0, \overrightarrow{\dot{J}_{ng}} = 0$. (4.41) trở thành:

$$rot\vec{\dot{H}} = \vec{\dot{J}} + j\omega\vec{\dot{D}} = \gamma\vec{\dot{E}} + j\omega\varepsilon\vec{\dot{E}} = j\omega\left(\varepsilon - j\frac{\gamma}{\omega}\right)\vec{\dot{E}} \quad (4.49)$$

$$rot\vec{\dot{H}} = j\omega\tilde{\varepsilon}\vec{\dot{E}} \quad (4.50)$$

$\tilde{\varepsilon}$: độ thẩm điện phức.

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - j\frac{\gamma}{\omega} \quad (4.51)$$

(4.44) trở thành:

$$div\left(\varepsilon\vec{\dot{E}}\right) = \dot{\rho} = \frac{j}{\omega}(-j\omega\dot{\rho}) = \frac{j}{\omega}div\vec{\dot{J}} = div\left(\frac{j}{\omega}\vec{\dot{J}}\right) = div\left(j\frac{\gamma}{\omega}\vec{\dot{E}}\right) \quad (4.52)$$

$$div\left(\tilde{\varepsilon}\vec{\dot{E}}\right) = div\left(\varepsilon - j\frac{\gamma}{\omega}\right)\vec{\dot{E}} = 0 \quad (4.53)$$

Như vậy, hệ phương trình Maxwell khi không có nguồn ngoài là:

$$rot\vec{\dot{H}} = j\omega\tilde{\varepsilon}\vec{\dot{E}} \quad (4.54)$$

$$rot\vec{\dot{E}} = j\omega\mu\vec{\dot{H}} \quad (4.55)$$

$$div\left(\mu\vec{\dot{H}}\right) = 0 \quad (4.56)$$

$$div\left(\tilde{\varepsilon}\vec{\dot{E}}\right) = 0 \quad (4.57)$$

Điều kiện biên:

$$\dot{H}_{1\tau} = \dot{H}_{2\tau} \quad (4.58)$$

$$\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{2\tau} \quad (4.59)$$

$$\mu_1\dot{H}_{1n} = \mu_2\dot{H}_{2n} \quad (4.60)$$

$$\tilde{\varepsilon}_1\dot{E}_{1n} = \tilde{\varepsilon}_2\dot{E}_{2n} \quad (4.61)$$

Nếu môi trường đồng nhất (μ = const, $\tilde{\varepsilon}$ = const):

$$\Delta\vec{\dot{E}} + \omega^2\tilde{\varepsilon}\mu\vec{\dot{E}} = 0 \quad (4.62)$$

$$\Delta\vec{\dot{H}} + \omega^2\tilde{\varepsilon}\mu\vec{\dot{H}} = 0 \quad (4.63)$$

Vector Poynting phức:

$$\tilde{\vec{P}} = \frac{1}{2}\dot{\vec{E}} \times \overrightarrow{\dot{H}^*} \quad (4.64)$$

Công suất trung bình:

$$\langle \vec{P}(t) \rangle = Re\tilde{\vec{P}} \quad (4.65)$$

Năng lượng trường điện:

$$\langle W_E(t) \rangle = \frac{1}{4}\varepsilon\dot{\vec{E}}\overrightarrow{\dot{E}^*} = \frac{1}{4}\varepsilon E_m^2 \quad (4.66)$$

Năng lượng trường từ:

$$\langle W_M(t) \rangle = \frac{1}{4}\mu\dot{\vec{H}}\overrightarrow{\dot{H}^*} = \frac{1}{4}\mu H_m^2 \quad (4.67)$$

Công suất tiêu hao:

$$\langle P_{th}(t) \rangle = \frac{1}{2}\dot{\vec{E}}\overrightarrow{\dot{J}^*} = \frac{1}{2}\gamma E_m^2 = \frac{1}{2}\frac{J_m^2}{\gamma} \quad (4.68)$$

Định lý Poynting phức:

$$\oint_S \tilde{\vec{P}}\overrightarrow{ds} = \int_V \langle P_{th}(t) \rangle dV + j2\omega \int_V \left(\langle W_M(t) \rangle - \langle W_E(t) \rangle\right) dV \quad (4.69)$$

$$Re\oint_S \tilde{\vec{P}}\overrightarrow{ds} = \oint_S Re\tilde{\vec{P}}\overrightarrow{ds} = \oint_S \langle \vec{P}(t) \rangle \overrightarrow{ds} = \int_V \langle P_{th}(t) \rangle dV \quad (4.70)$$

→ Công suất trung bình truyền qua mặt S bằng công suất tiêu hao trong thể tích V.

4.4 SÓNG ĐIỆN TỪ PHẲNG ĐƠN SẮC

Sóng điện từ phẳng: sóng điện từ có mặt đồng pha là mặt phẳng, phương truyền của sóng ở mọi nơi đều vuông góc với một mặt phẳng xác định.

Sóng điện từ đơn sắc (điều hòa): sóng điện từ có vector cường độ điện trường, từ trường biến đổi hình sin theo thời gian với tần số ω xác định.

Sóng điện từ phẳng đồng nhất: sóng điện từ phẳng có vector cường độ điện trường, từ trường chỉ phụ thuộc vào một tọa độ không gian (x, y hay z).

Xét sóng điện từ phẳng đơn sắc đồng nhất trong môi trường đẳng hướng, tuyến tính, đồng nhất. Giả sử môi trường không có nguồn ngoài và nguồn gây ra trường điện từ ở cách xa vùng khảo sát. Chọn hệ trục tọa độ Descartes có trục z vuông góc với các mặt đồng pha của sóng. Khi đó các vector trường chỉ phụ thuộc z.

$$rot\dot{\vec{H}} = \begin{vmatrix} \vec{\imath_x} & \vec{\imath_y} & \vec{\imath_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{H}_x & \dot{H}_y & \dot{H}_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z}\vec{\imath_x} + \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z}\vec{\imath_y} = j\omega\tilde{\varepsilon}\dot{\vec{E}} \tag{4.71}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} = -j\omega\tilde{\varepsilon}\dot{E}_x \\ \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} = j\omega\tilde{\varepsilon}\dot{E}_y \\ \dot{E}_z = 0 \end{cases} \tag{4.72}$$

$$rot\dot{\vec{E}} = \begin{vmatrix} \vec{\imath_x} & \vec{\imath_y} & \vec{\imath_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{E}_x & \dot{E}_y & \dot{E}_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z}\vec{\imath_x} + \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z}\vec{\imath_y} = -j\omega\mu\dot{\vec{H}} \tag{4.73}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = j\omega\mu\dot{H}_x \\ \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} = -j\omega\mu\dot{H}_y \\ \dot{H}_z = 0 \end{cases} \tag{4.74}$$

Đạo hàm hai vế phương trình thứ hai của (4.74):

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2} = -j\omega\mu\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} \tag{4.75}$$

Thay phương trình thứ nhất của (4.72) vào (4.75):

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2} + \omega^2\tilde{\varepsilon}\mu\dot{E}_x = 0 \tag{4.76}$$

Tương tự:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial z^2} + \omega^2\tilde{\varepsilon}\mu\dot{E}_y = 0 \tag{4.77}$$

Giải hai phương trình vi phân trên:

$$\begin{cases} \dot{E}_x = m_x e^{-\alpha z} e^{j(-\beta z+\psi_x)} + n_x e^{\alpha z} e^{j(\beta z+\varphi_x)} \\ \dot{E}_y = m_y e^{-\alpha z} e^{j(-\beta z+\psi_y)} + n_y e^{\alpha z} e^{j(\beta z+\varphi_y)} \end{cases} \tag{4.78}$$

Trong đó:

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}-1\right)} \tag{4.79}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}+1\right)} \tag{4.80}$$

Hệ số truyền:

$$K = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\tilde{\varepsilon}\mu} \tag{4.81}$$

Thay (4.78) vào (4.74):

$$\begin{cases} \dot{H}_x = -\frac{m_y}{z_c}e^{-\alpha z}e^{j(-\beta z+\psi_y-\theta)} + \frac{n_y}{z_c}e^{\alpha z}e^{j(\beta z+\varphi_y-\theta)} \\ \dot{H}_y = \frac{m_x}{z_c}e^{-\alpha z}e^{j(-\beta z+\psi_x-\theta)} - \frac{n_x}{z_c}e^{\alpha z}e^{j(\beta z+\varphi_x-\theta)} \end{cases} \tag{4.82}$$

Trong đó Z_c gọi là trở kháng sóng của môi trường.

$$Z_c = z_c e^{j\theta} = \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{\varepsilon}}} \tag{4.83}$$

$$z_c = \sqrt[4]{\frac{\omega^2\mu^2}{\gamma^2+\omega^2\varepsilon^2}} \tag{4.84}$$

$$tg\theta = \frac{\alpha}{\beta} \tag{4.85}$$

$$cos\theta = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \tag{4.86}$$

m_x, m_y, n_x, n_y, ψ_x, ψ_y, φ_x, φ_y là các hằng số. Như vậy:

$$\begin{cases} E_x(t) = m_x e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \psi_x) + n_x e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z + \varphi_x) \\ E_y(t) = m_y e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \psi_y) + n_y e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z + \varphi_y) \\ E_z(t) = 0 \end{cases} \tag{4.87}$$

$$\begin{cases} H_x(t) = -\frac{m_y}{z_c}e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \psi_y - \theta) + \frac{n_y}{z_c}e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z + \varphi_y - \theta) \\ H_y(t) = \frac{m_x}{z_c}e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \psi_x - \theta) - \frac{n_x}{z_c}e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z + \varphi_x - \theta) \\ H_z(t) = 0 \end{cases} \tag{4.88}$$

Nhận xét:

- $E_z = 0$, $H_z = 0 \rightarrow$ vector Poynting $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$ song song trục z $\rightarrow$ năng lượng sóng điện từ lan truyền theo trục z $\rightarrow \vec{E}, \vec{H}$ vuông góc với phương truyền: sóng điện từ ngang TEM.
- $\dot{E}_x = m_x e^{-\alpha z} e^{j(-\beta z + \psi_x)} + n_x e^{\alpha z} e^{j(\beta z + \varphi_x)}$ bao gồm 2 phần:
  - Số hạng thứ nhất trong biên độ có $e^{-\alpha z}$: sóng lan truyền theo phương và chiều dương trục z, biên độ sóng khi lan truyền suy giảm theo quy luật hàm mũ. Các mặt đẳng pha là các mặt phẳng vuông góc với phương truyền sóng có $\omega t - \beta z = const \rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}$ (mặt đẳng pha dịch chuyển theo chiều dương trục z với vận tốc $\frac{\omega}{\beta}$).
  - Số hạng thứ hai trong biên độ có $e^{\alpha z}$: sóng lan truyền theo phương và chiều âm trục z, biên độ sóng khi lan truyền suy giảm theo quy luật hàm mũ. Các mặt đẳng pha là các mặt phẳng vuông góc với phương truyền sóng có $\omega t + \beta z = const \rightarrow \frac{dz}{dt} = -\frac{\omega}{\beta}$ (mặt đẳng pha dịch chuyển theo chiều âm trục z với vận tốc $\frac{\omega}{\beta}$).

Vận tốc dịch chuyển này được gọi là vận tốc pha:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \tag{4.89}$$

α: hệ số tắt dần (hấp thụ) [nep/m], β: hệ số pha [rad/m].

Gọi $\dot{\vec{E}}_0 = M_x\vec{\iota_x} + M_y\vec{\iota_y}$ là giá trị của $\dot{\vec{E}}$, $\dot{\vec{H}}_0$ là giá trị của $\dot{\vec{H}}$ tại mặt z = 0.

Sóng phẳng lan truyền theo trục dương z:

$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_0 e^{-K\vec{r}.\vec{\iota_z}} \tag{4.90}$$

$$\dot{\vec{H}} = \dot{\vec{H}}_0 e^{-K\vec{r}.\vec{\iota_z}} \tag{4.91}$$

Trong đó: $\vec{r} = x\vec{\iota_x} + y\vec{\iota_y} + z\vec{\iota_z}$ là vector vị trí của điểm khảo sát.

Ta tính được:

$$\dot{\overrightarrow{H_0}} = \frac{1}{Z_c}\vec{\iota_z} \times \dot{\vec{E}}_0 \tag{4.92}$$

$$\dot{\overrightarrow{E_0}} = Z_c\left(\dot{\overrightarrow{H_0}} \times \vec{\iota_z}\right) \tag{4.93}$$

Từ đó:

$$\vec{\dot{E}} = Z_c\left(\vec{\dot{H}} \times \vec{\iota_z}\right) \tag{4.94}$$

$$\vec{\dot{H}} = \frac{1}{Z_c}\left(\vec{\iota_z} \times \vec{\dot{E}}\right) \tag{4.95}$$

$$z_c = \frac{E_m}{H_m} \tag{4.96}$$

Vector Poynting phức:

$$\vec{\tilde{P}} = \frac{1}{2} Z_c H_m^2 \vec{\iota_z} = \frac{1}{2Z_c^*} E_m^2 \vec{\iota_z} \tag{4.97}$$

Phân cực của sóng phẳng đơn sắc:

Xét sóng truyền theo chiều dương trục z.

$$\begin{cases} E_x(t) = m_x e^{-\alpha z} cos(\omega t - \beta z + \psi_x) \\ E_y(t) = m_y e^{-\alpha z} cos\left(\omega t - \beta z + \psi_y\right) \\ E_z(t) = 0 \end{cases} \tag{4.98}$$

$$\begin{cases} H_x(t) = -\frac{m_y}{z_c} e^{-\alpha z} cos\left(\omega t - \beta z - \theta + \psi_y\right) \\ H_y(t) = \frac{m_x}{z_c} e^{-\alpha z} cos(\omega t - \beta z - \theta + \psi_x) \\ H_z(t) = 0 \end{cases} \tag{4.99}$$

- $\psi_x - \psi_y = k\pi$:

$$\frac{E_x(t)}{E_y(t)} = -\frac{H_y(t)}{H_x(t)} = \pm\frac{m_x}{m_y} = const \tag{4.100}$$

$\vec{E}, \vec{H}$ có phương cố định trong không gian → sóng phân cực thẳng.

$$\vec{E}\vec{H} = E_x H_x + E_y H_y = 0 \rightarrow \vec{E} \perp \vec{H}$$

Các vector $\vec{E}, \vec{H}$ có phương cố dịnh, vuông góc nhau và vuông góc với phương truyền. Do đó, ta có thể chọn hệ trục tọa độ sao cho trục x cùng phương với $\vec{E}$ và trục y cùng phương với $\vec{H}$.

$$\begin{cases} \vec{E} = E_x \vec{\iota_x} = m'_x e^{-\alpha z} cos(\omega t - \beta z + \psi'_x) \vec{\iota_x} \\ \vec{H} = H_y \vec{\iota_y} = \frac{m'_x}{z_c} e^{-\alpha z} cos(\omega t - \beta z - \theta + \psi'_x) \vec{\iota_y} \end{cases} \tag{4.101}$$

- $\psi_x - \psi_y = \pi/2 + k\pi$ và $|m_x| = |m_y|$:

$$E_x^2(t) + E_y^2(t) = (m_x e^{-\alpha z})^2 \tag{4.102}$$

$$H_x^2(t) + H_y^2(t) = \left(\frac{m_x e^{-\alpha z}}{z_c}\right)^2 \tag{4.103}$$

Khi t thay đổi, đầu mút các vector $\vec{E},\vec{H}$ sẽ tạo thành hình tròn → sóng phân cực tròn.

- Trường hợp khác:

$$\frac{E_x^2(t)}{E_1} + \frac{E_y^2(t)}{E_2} - 2\frac{E_x(t)}{E_1}\frac{E_y(t)}{E_2}cos(\psi_x - \psi_y) = sin^2(\psi_x - \psi_y) \tag{4.104}$$

Với:

$$E_1 = m_x e^{-\alpha z}, E_2 = m_y e^{-\alpha z} \tag{4.105}$$

Khi t thay đổi, đầu mút các vector $\vec{E},\vec{H}$ sẽ tạo thành hình ellip → sóng phân cực ellip.

Sóng phân cực tròn và phân cực ellip gọi chung là sóng phân cực quay và có thể được phân tích thành tổng của hai sóng phân cực thẳng trực giao nhau.

4.4.1 Sóng điện từ phẳng đơn sắc trong điện môi lý tưởng

Điện môi lý tưởng có $\gamma = 0$. Nếu điện môi thực, nếu $\gamma << \omega\varepsilon$, có thể xem là điện môi lý tưởng. Thay vào (4.51):

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \tag{4.106}$$

Thay vào (4.79), (4.80), (4.81), (4.83) và (4.85):

$$K = j\omega\sqrt{\varepsilon\mu} \tag{4.107}$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{4.108}$$

$$\alpha = 0, \beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \tag{4.109}$$

$$\theta = 0, z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{4.110}$$

Vận tốc pha:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{4.111}$$

Trong chân không: $\varepsilon = \frac{1}{4\pi.9.10^{-9}}$ F/m, $\mu = 4\pi.10^{-7}$ H/m → $v_p = 3.10^8$ m/s.

Thay vào (4.87) và (4.88):

$$\vec{E}(t) = m_x cos(\omega t - \beta z + \psi_x)\overrightarrow{\iota_x} + m_y cos\left(\omega t - \beta z + \psi_y\right)\overrightarrow{\iota_y} \quad (4.112)$$

$$\vec{H}(t) = -\frac{m_y}{z_c} cos\left(\omega t - \beta z + \psi_y\right)\overrightarrow{\iota_x} + \frac{m_x}{z_c} cos(\omega t - \beta z + \psi_x)\overrightarrow{\iota_y} \quad (4.113)$$

Nhận xét:

- Biên độ sóng không tắt dần.
- Vận tốc pha không phụ thuộc tần số.
- $\vec{E}, \vec{H}$ vuông góc với nhau và vuông góc với phương truyền.
- Mật độ năng lượng trường điện bằng mật độ năng lượng trường từ.
- Trở kháng sóng là số thực chỉ phụ thuộc môi trường.
- Vận tốc truyền năng lượng sóng điện từ bằng vận tốc pha.

$$\vec{v}_{nl} = \frac{\vec{P}(t)}{w(t)} = \frac{\vec{E}(t)\times\vec{H}(t)}{\frac{1}{2}\varepsilon\vec{E}^2(t)+\frac{1}{2}\mu\vec{H}^2(t)} = \vec{v}_p = v_p\overrightarrow{\iota_z} \quad (4.114)$$

- Bước sóng λ: khoảng cách sóng lan truyền trong một chu kỳ.

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{2\pi}{\beta} \quad (4.115)$$

- Vector sóng:

$$\vec{\beta} = \beta\overrightarrow{\iota_z} \quad (4.116)$$

4.4.2 Sóng điện từ phẳng đơn sắc trong môi trường dẫn tốt

Trong môi trường dẫn tốt, dòng điện dịch << dòng điện dẫn ($\gamma >> \omega\varepsilon$). Khi đó:

$$\tilde{\varepsilon} \approx -j\frac{\gamma}{\omega} \quad (4.117)$$

$$K \approx \sqrt{j\omega\mu\gamma} \quad (4.118)$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}e^{j\frac{\pi}{4}} \quad (4.119)$$

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} \quad (4.120)$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}, z_c = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} \quad (4.121)$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\gamma}} \quad (4.122)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \sqrt{\frac{8\pi^2}{\omega\mu\gamma}} \quad (4.123)$$

$$\vec{E}(t) = m_x e^{-\alpha z} cos(\omega t - \beta z + \psi_x)\overrightarrow{\iota_x} + m_y e^{-\alpha z} cos\left(\omega t - \beta z + \psi_y\right)\overrightarrow{\iota_y} \quad (4.124)$$

$$\vec{H}(t) = -\frac{m_y}{z_c} e^{-\alpha z} cos\left(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{4} + \psi_y\right)\overrightarrow{\iota_x} + \frac{m_x}{z_c} e^{-\alpha z} cos\left(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{4} + \psi_x\right)\overrightarrow{\iota_y} \quad (4.125)$$

Nhận xét:

- $\vec{E}, \vec{H}$ vuông góc với phương truyền.
- Bước sóng trong môi trường dẫn rất nhỏ so với điện môi ở cùng tần số.
- Biên độ sóng có biên độ tắt dần rất nhanh.
- Độ xuyên sâu của sóng: khoảng cách tính từ mặt môi trường dẫn theo hướng truyền sóng trên đó biên độ sóng giảm e lần.

$$\Delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}} \quad (4.126)$$

- Năng lượng sóng chủ yếu tập trung ở dạng trường từ.

$$\frac{W_m}{W_e} = \frac{\frac{1}{4}\mu H_m^2}{\frac{1}{4}\varepsilon E_m^2} = \frac{\mu}{\varepsilon}\frac{1}{Z_C^2} = \frac{\gamma}{\omega\varepsilon} \quad (4.127)$$

Do $\gamma >> \omega\varepsilon$ nên $W_m >> W_e$.

4.4.3 Phản xạ và khúc xạ của sóng phẳng đơn sắc

Mặt phẳng tới: mặt phẳng chứa phương pháp tuyến với mặt phân cách và sóng tới. Mặt phẳng phân cực: mặt phẳng chứa $\vec{E}$ và phương sóng tới.

Nếu mặt phẳng phân cực vuông góc với mặt phẳng tới: sóng phân cực ngang, mặt phẳng phân cực trùng với mặt phẳng tới: sóng phân cực đứng.

4.4.3.1 Sóng tới vuông góc với mặt phân cách

Sóng tới lan truyền theo chiều dương trục z từ môi trường 1 có trở kháng sóng Z_{c1} sang môi trường 2 có trở kháng sóng Z_{c2}:

$$\overrightarrow{\dot{E}_t} = \overrightarrow{\dot{E}_{t_0}} e^{-K_1 z} \quad (4.128)$$

$$\overrightarrow{\dot{H}_t} = \overrightarrow{\dot{H}_{t_0}} e^{-K_1 z} \quad (4.129)$$

Trong đó $\overrightarrow{\dot{E}_{t_0}}, \overrightarrow{\dot{H}_{t_0}}$ là giá trị các vector trường trên mặt phân cách.

Sóng phản xạ và khúc xạ lan truyền trong môi trường :

$$\overrightarrow{\dot{E}_p} = R_{p1} \overrightarrow{\dot{E}_{t_0}} e^{-K_1 z} \quad (4.130)$$

$$\overrightarrow{\dot{H}_p} = R_{p2} \overrightarrow{\dot{H}_{t_0}} e^{-K_1 z} \quad (4.131)$$

$$\overrightarrow{\dot{E}_k} = R_{k1} \overrightarrow{\dot{E}_{t_0}} e^{-K_2 z} \quad (4.132)$$

$$\overrightarrow{\dot{H}_k} = R_{k2} \overrightarrow{\dot{H}_{t_0}} e^{-K_2 z} \quad (4.133)$$

Trong đó R_p và R_k lần lượt là hệ số phản xạ và khúc xạ.

$$R_{p1} = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}} \quad (4.134)$$

$$R_{p2} = \frac{Z_{c1} - Z_{c2}}{Z_{c2} + Z_{c1}} \quad (4.135)$$

$$R_{k1} = \frac{2Z_{c2}}{Z_{c2} + Z_{c1}} \quad (4.136)$$

$$R_{k2} = \frac{2Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}} \quad (4.137)$$

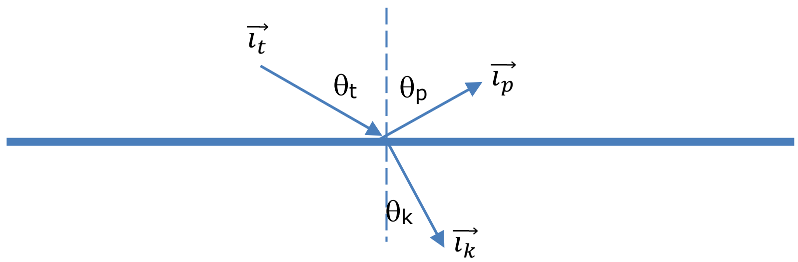
- Nếu $Z_{c1} = Z_{c2}$ (hai môi trường được phối hợp trở kháng sóng):

$R_{p1} = 0$, $R_{p2} = 0$, $R_{k1} = 1$, $R_{k2} = 1$ → không có sóng phản xạ, sóng tới toàn bộ truyền qua mặt phân cách.

- Nếu $|Z_{c1}| >> |Z_{c2}|$:

$R_{p1} \approx -1$, $R_{p2} \approx 1$, $R_{k1} \approx 0$, $R_{k2} \approx 2$ → năng lượng sóng điện từ gần như bị phản xạ trở lại môi trường 1.

4.4.3.2 Sóng tới nghiêng so với mặt phân cách



Hình 4.1 – Phương sóng tới và sóng phản xạ

$$\dot{\overrightarrow{E_t}} = \dot{\overrightarrow{E_{t_0}}} e^{-K_1 \vec{r} \vec{\iota_t}} \quad (4.138)$$

$$\dot{\overrightarrow{H_t}} = \dot{\overrightarrow{H_{t_0}}} e^{-K_1 \vec{r} \vec{\iota_t}} \quad (4.139)$$

Sóng phản xạ và khúc xạ lan truyền trong môi trường :

$$\dot{\overrightarrow{E_p}} = R_{p1} \dot{\overrightarrow{E_{t_0}}} e^{-K_1 \vec{r} \vec{\iota_p}} \quad (4.140)$$

$$\dot{\overrightarrow{H_p}} = R_{p2} \dot{\overrightarrow{H_{t_0}}} e^{-K_1 \vec{r} \vec{\iota_p}} \quad (4.141)$$

$$\dot{\overrightarrow{E_k}} = R_{k1} \dot{\overrightarrow{E_{t_0}}} e^{-K_2 \vec{r} \vec{\iota_k}} \quad (4.142)$$

$$\dot{\overrightarrow{H_k}} = R_{k2} \dot{\overrightarrow{H_{t_0}}} e^{-K_2 \vec{r} \vec{\iota_k}} \quad (4.143)$$

Gọi θ_t, θ_p, θ_k là góc tới, góc phản xạ và góc khúc xạ.

$$\theta_p = \theta_t \quad (4.144)$$

Nếu hai môi trường đều là điện môi lý tưởng:

$$sin\theta_k = \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} sin\theta_t \quad (4.145)$$

Nếu $|K_2| >> |K_1|$:

$$\theta_k \approx 0 \quad (4.146)$$

Đối với sóng phân cực ngang:

$$R_{p1} = \frac{Z_{c2}cos\theta_t - Z_{c1}cos\theta_k}{Z_{c2}cos\theta_t + Z_{c1}cos\theta_k} \tag{4.147}$$

$$R_{k1} = \frac{2Z_{c2}cos\theta_t}{Z_{c2}cos\theta_t + Z_{c1}cos\theta_k} \tag{4.148}$$

Đối với sóng phân cực đứng:

$$R_{p2} = \frac{Z_{c1}cos\theta_t - Z_{c2}cos\theta_k}{Z_{c1}cos\theta_t + Z_{c2}cos\theta_k} \tag{4.149}$$

$$R_{k2} = \frac{2Z_{c1}cos\theta_t}{Z_{c1}cos\theta_t + Z_{c}cos\theta_k} \tag{4.150}$$

Nếu hai môi trường là điện môi lý tưởng có $\mu_1 = \mu_2$:

$$R_{p2} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}cos\theta_t - \sqrt{1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\sin^2\theta_t}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}cos\theta_t + \sqrt{1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\sin^2\theta_t}} \tag{4.151}$$

$$R_{k2} = \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}cos\theta_t}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}cos\theta_t - \sqrt{1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\sin^2\theta_t}} \tag{4.152}$$

Khi đó, sẽ có một góc tới $\theta_t = \theta_c$ nào đó làm cho hệ số phản xạ bằng không. Góc θ_c được gọi là góc khúc xạ toàn phần (góc Bruster):

$$tan\theta_c = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \tag{4.153}$$

TÓM TẮT

- *Bài này giới thiệu về trường điện từ biến thiên, được tạo ra từ các nguồn ngoài. Các phương trình sóng của trường điện từ biến thiên dựa trên thế vector và điện thế vô hướng.*
- *Sóng điện từ khảo sát trong bài này chủ yếu là sóng điện từ phẳng, là loại sóng phổ biến trong thực tế. Các môi trường khảo sát là điện môi lý tưởng và dẫn tốt. Ngoài ra, tính chất phản xạ và khúc xạ của sóng khi đi đến mặt phân cách hai môi trường cũng được xét đến.*

CÂU HỎI ÔN TẬP

Câu 1: Trong nửa không gian z > 0 là môi trường dẫn điện với $\sigma = 5,7.10^7$ S/m, $\mu = \mu_0$ được truyền một sóng điện phẳng theo phương trục z với tần số $f = 10^5$ Hz.

Xác định vận tốc pha, bước sóng, trở sóng và độ thấm sâu của trường trong môi trường trên. Biên độ cường độ trường sẽ giảm đi bao nhiêu lần so với ở trên bề mặt của nó ở độ sâu d = 1mm.

Câu 2: Sóng phẳng truyền từ không khí vào môi trường có $\varepsilon = 2,3\varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 0$ với góc tới $\theta_t = 45^0$. Tìm góc khúc xạ và hệ số khúc xạ đối với trường hợp phân cực đứng và ngang của sóng tới.

Câu 3: Sóng điện từ phẳng đơn sắc truyền trong môi trường $\varepsilon = 2,53\varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\gamma = 0$ có cường độ trường điện $\vec{E} = 10\cos(10\pi.10^9 t - \beta z)\vec{i_z}$.

a. Xác định vận tốc truyền sóng v, bước sóng λ, hệ số pha β, trở kháng sóng của môi trường.

b. Viết biểu thức cường độ từ trường.

BÀI 5: BỨC XẠ ĐIỆN TỪ

Sau khi học xong bài này, người học có thể:

- *Biết được bức xạ của một số nguyên tố bức xạ cơ bản.*
- *Tính chất định hướng của anten.*

5.1 KHÁI NIỆM

- Trường điện từ biến thiên có khả năng lan truyền trong không gian dưới dạng sóng điện từ từ những vùng có điện tích hay dòng điện biến thiên coi như là nguồn. Đó là hiện tượng bức xạ điện từ. Khi lan truyền, trường điện từ mang năng lượng tín hiệu.
- Độ lớn năng lượng bức xạ phụ thuộc vào độ lớn và tần số biến thiên của dòng điện, điện tích trong nguồn, cấu trúc của nguồn, tính chất của môi trường xung quanh nguồn.
- Hiện tượng bức xạ năng lượng điện từ được áp dụng nhiều trong kỹ thuật thông tin, liên lạc vô tuyến điện, radar.
- Các thiết bị dùng để bức xạ sóng điện từ và thu sóng điện từ được gọi là anten.
- Để tìm trường bức xạ, ta cần tìm thế vector, điện thế vô hướng thỏa mãn các phương trình:

$$\Delta\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J} \tag{5.1}$$

$$\Delta\phi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\rho/\varepsilon \tag{5.2}$$

Xét trường điện từ biến thiên điều hòa với tần số ω. Gọi $\dot{\vec{A}}, \dot{\phi}, \dot{\vec{B}}, \dot{\vec{E}}$ là các biên độ phức của $\vec{A}, \phi, \vec{B}, \vec{E}$. Khi đó:

$$\frac{\partial^2\dot{\vec{A}}}{\partial t^2} = -\omega^2\dot{\vec{A}} \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial^2\dot{\phi}}{\partial t^2} = -\omega^2\dot{\phi} \tag{5.4}$$

Thay vào (5.1) và (5.2), với $k^2 = \omega^2\varepsilon\mu$:

$$\Delta\dot{\vec{A}} + k^2\dot{\vec{A}} = -\mu\dot{\vec{J}} \tag{5.5}$$

$$\Delta\dot{\phi} + k^2\dot{\phi} = -\rho/\varepsilon \tag{5.6}$$

Thay vào các công thức sau để tìm điện trường và từ trường:

$$\dot{\vec{E}} = -grad\dot{\phi} - j\omega\dot{\vec{A}} \tag{5.7}$$

$$\dot{\vec{H}} = \frac{1}{\mu}rot\dot{\vec{A}} \tag{5.8}$$

Dùng phương pháp vector Hertz, đặt:

$$\dot{\vec{A}} = j\omega\varepsilon\mu\dot{\overrightarrow{Z_e}} \tag{5.9}$$

$$\dot{\vec{H}} = j\omega\varepsilon rot\dot{\overrightarrow{Z_e}} \tag{5.10}$$

Điều kiện phụ Lorentz:

$$div\dot{\vec{A}} + j\omega\varepsilon\mu\dot{\phi} = 0 \tag{5.11}$$

So sánh (5.9) và (5.11):

$$\dot{\phi} = -div\dot{\overrightarrow{Z_e}} \tag{5.12}$$

Thế vào (5.7):

$$\dot{\vec{E}} = grad\left(div\dot{\overrightarrow{Z_e}}\right) + k^2\dot{\overrightarrow{Z_e}} \tag{5.13}$$

Thay (5.9) vào (5.5):

$$\Delta\dot{\overrightarrow{Z_e}} + k^2\dot{\overrightarrow{Z_e}} = -\frac{1}{j\omega\varepsilon}\dot{\vec{J}} \tag{5.14}$$

Giải (5.14) xác định $\dot{\overrightarrow{Z_e}}$, thế vào (5.13) và (5.10) để xác định $\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}$.

Phương trình sóng viết ở dạng tổng quát:

$$\Delta\vec{F} + k^2\vec{F} = -\vec{X} \tag{5.15}$$

Nguồn đặt tại O, xét trường đặt tại P. Nghiệm của phương trình sóng:

$$\vec{F}(P) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\vec{X}}{r} e^{-jkr} dV \tag{5.16}$$

Nếu xét $\vec{F}$ là hàm điều hòa với tần số góc ω:

$$\vec{F}(P,t) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\vec{X}}{r} e^{-j\omega\left(t-\frac{kr}{\omega}\right)} dV \tag{5.17}$$

$$\vec{F}(P) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\vec{X}}{r} e^{-j\omega(t-t')} dV \tag{5.18}$$

5.2 BỨC XẠ ĐIỆN TỪ CỦA NGUYÊN TỐ BỨC XẠ THẲNG (LƯỠNG CỰC ĐIỆN)

Nguyên tố anten thẳng là một đoạn dây dẫn thẳng, hở hai đầu, rất mảnh, mang dòng điện biến thiên điều hòa tần số ω, có độ dài l << λ = c/f = 2πc/ω sao cho có thể xem như pha và biên độ của dòng điện tại mỗi điểm trên đoạn dây là như nhau.

Giả sử môi trường chứa lưỡng cực là điện môi lý tưởng (γ = 0), đồng nhất vô hạn, đẳng hướng. Giải hệ phương trình Maxwell bằng phương pháp vector Hertz.

$$\Delta\dot{\overrightarrow{Z_e}} + k^2\dot{\overrightarrow{Z_e}} = -\frac{1}{j\omega\varepsilon}\dot{\vec{J}}_{ng} \tag{5.19}$$

Với:

$$\dot{\vec{E}} = rot\left(rot\dot{\overrightarrow{Z_e}}\right) - \frac{1}{j\omega\varepsilon}\dot{\vec{J}}_{ng} \tag{5.20}$$

$$\dot{\vec{H}} = j\omega\varepsilon rot\dot{\overrightarrow{Z_e}} \tag{5.21}$$

Theo (5.17):

$$\dot{\overrightarrow{Z_e}}(P,t) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\dot{\vec{J}}_{ng}}{j\omega\varepsilon} e^{-j\omega\left(t-\frac{kr}{\omega}\right)} dV \tag{5.22}$$

$$\dot{\overrightarrow{Z_e}}(P) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\dot{\vec{J}}_{ng}}{j\omega\varepsilon}\frac{e^{-jkr}}{r} dV \tag{5.23}$$

$$\dot{\overrightarrow{Z_e}}(P) = \frac{1}{4\pi j\omega\varepsilon}\frac{e^{-jkr}}{r}\int_S \dot{J}_{ng} ds \int_l dl\,\overrightarrow{\iota_{z_e}} \tag{5.24}$$

$$\dot{\overrightarrow{Z_e}}(P) = \frac{1}{4\pi j\omega\varepsilon}\frac{e^{-jkr}}{r}\dot{I}l\overrightarrow{\iota_{z_e}} = \dot{P}\overrightarrow{\iota_{z_e}} \tag{5.25}$$

Ta có:

$$rot\dot{\vec{Z_e}}(P) = \dot{P}.rot\overrightarrow{\iota_{z_e}} + grad\dot{P} \times \overrightarrow{\iota_{z_e}} = grad\dot{P} \times \overrightarrow{\iota_{z_e}} \tag{5.26}$$

$$grad\dot{P} = \frac{\partial \dot{P}}{\partial r} = \frac{1}{4\pi j\omega\varepsilon}\dot{I}l\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)\overrightarrow{\iota_r} \tag{5.27}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) = -\frac{e^{-jkr}}{r^2}(1+jkr)\overrightarrow{\iota_r} \tag{5.28}$$

$$\overrightarrow{\iota_{z_e}} \times \overrightarrow{\iota_r} = -sin\theta\overrightarrow{\iota_\varphi} \tag{5.29}$$

Ta được:

$$\dot{\vec{E}} = \dot{E}_r\overrightarrow{\iota_r} + \dot{E}_\theta\overrightarrow{\iota_\theta} \tag{5.30}$$

Với:

$$\dot{E}_r = \dot{I}l\frac{k^2}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[\frac{2}{(kr)^2} + \frac{2}{j(kr)^3}\right]cos\theta e^{-jkr} \tag{5.31}$$

$$\dot{E}_\theta = \dot{I}l\frac{k^2}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[\frac{j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} + \frac{1}{j(kr)^3}\right]sin\theta e^{-jkr} \tag{5.32}$$

$$\dot{\vec{H}} = \dot{H}_\varphi\overrightarrow{\iota_\varphi} \tag{5.33}$$

Với:

$$\dot{H}_\varphi = \dot{I}l\frac{k^2}{4\pi}\left[\frac{j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2}\right]sin\theta e^{-jkr} \tag{5.34}$$

Xét trường vùng gần:

$r << \lambda \rightarrow kr = 2\pi r/\lambda << 1$ hay $1/kr >> 1$.

Khi đó chỉ giữ lại các số hạng bậc cao của 1/kr:

$$\dot{E}_r = -j\dot{I}l\frac{1}{2\pi kr^3}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}cos\theta e^{-jkr} \tag{5.35}$$

$$\dot{E}_\theta = -j\dot{I}l\frac{1}{4\pi kr^3}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}sin\theta e^{-jkr} \tag{5.36}$$

$$\dot{H}_\varphi = \dot{I}l\frac{1}{4\pi r^2}sin\theta e^{-jkr} \tag{5.37}$$

Lưu ý rằng kr << 1 nên $e^{-jkr} \approx 1 \rightarrow$ có thể bỏ qua hệ số e^{-jkr}.

$\vec{E}$ và $\vec{H}$ lệch pha nhau một góc $\pi/2$ nên $P_{tb} = 0$: trường vùng gần là trường dao động không bức xạ.

Xét trường vùng xa:

$r >> \lambda \rightarrow kr = 2\pi r/\lambda >> 1$ hay $1/kr << 1$.

Khi đó chỉ giữ lại các số hạng 1/kr, bỏ qua các số hạng bậc cao:

$$\dot{E}_r \approx 0 \tag{5.38}$$

$$\dot{E}_\theta = j\dot{I}l\frac{k}{4\pi r}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}sin\theta e^{-jkr} = z_c\dot{H}_\varphi \tag{5.39}$$

$$\dot{H}_\varphi = j\dot{I}l\frac{k}{4\pi r}sin\theta e^{-jkr} \tag{5.40}$$

Giá trị tức thời:

$$\vec{H} = H_\varphi\vec{\iota_\varphi} = I_m l\frac{k}{4\pi r}sin\theta\cos\left(\omega t - kr + \psi + \frac{\pi}{2}\right)\vec{\iota_\varphi} \tag{5.41}$$

$$\vec{E} = E_\theta\vec{\iota_\theta} = z_c H_\varphi\vec{\iota_\theta} \tag{5.42}$$

z_c: trở kháng sóng của môi trường.

$$z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{5.43}$$

I_m: biên độ dòng điện, ψ: pha ban đầu của dòng điện.

Vector Poynting:

$$\vec{P}(t) = \vec{E}(t) \times \vec{H}(t) = P_r(t)\vec{\iota_r} \tag{5.44}$$

Với:

$$P_r(t) = z_c H_\varphi^2 = \frac{E_\theta^2}{z_c} \geq 0 \tag{5.45}$$

Giá trị trung bình của vector Poynting trong một chu kỳ:

$$\langle\vec{P}(t)\rangle = \langle P_r(t)\rangle\vec{\iota_r} \tag{5.46}$$

$$\langle P_r(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P_r(t)dt = \frac{z_c I_m^2 l^2 \sin^2\theta}{8\lambda^2 r^2} \tag{5.47}$$

Công suất bức xạ trung bình:

$$P_{bx} = \oint_S \langle P_r(t) \rangle ds \tag{5.48}$$

Trong đó S là mặt cầu tâm O, bán kính r >> λ.

$$P_{bx} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z_c I_m^2 l^2 \sin^2\theta}{8\lambda^2 r^2} r^2 \sin^2\theta \, d\theta d\varphi \tag{5.49}$$

$$P_{bx} = \frac{\pi z_c I_m^2}{3} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \tag{5.50}$$

Điện trở bức xạ:

$$R_{bx} = \frac{2P_{bx}}{I_m^2} = \frac{2\pi z_c}{3} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \tag{5.51}$$

Nếu môi trường là chân không, $z_c = 120\pi$:

$$P_{bx} = 40\pi^2 I_m^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \tag{5.52}$$

$$R_{bx} = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \tag{5.53}$$

Nhận xét:

- $P_r(t) \geq 0$: trong miền xa, năng lượng sóng điện từ luôn truyền từ nguồn ra không gian xung quanh theo phương $\vec{\iota_r}$. Miền xa được gọi là miền bức xạ.
- Từ (5.41), (5.42), mặt đẳng pha của $\vec{E}, \vec{H}$ có phương trình:

$$\omega t - kr + \psi + \frac{\pi}{2} = const \tag{5.54}$$

$\rightarrow$ trường miền xa có dạng sóng cầu, các mặt đẳng pha là các mặt cầu r = const, lan truyền với vận tốc pha:

$$v_p = \frac{dr}{dt} = v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{5.55}$$

- Các vector $\vec{E}(t), \vec{H}(t)$ cùng pha, vuông góc nhau và vuông góc với phương truyền.

$$\vec{H}(t) = \frac{1}{z_c} \vec{\iota_r} \times \vec{E}(t) \tag{5.56}$$

$$\vec{E}(t) = z_c \vec{H}(t) \times \vec{\iota_r} \tag{5.57}$$

- Biên độ của $\vec{E}(t), \vec{H}(t)$ giảm tỷ lệ nghịch với khoảng cách r.
- Công suất bức xạ tỷ lệ nghịch với bình phương bước sóng, tỷ lệ thuận với bình phương tần số nên muốn công suất bức xạ lớn phải dùng tần số cao.
- Biên độ trường phụ thuộc vào góc θ, đạt cực đại khi $\theta = 90^0$ (mặt phẳng xOy), = 0 khi $\theta = 0$, $\theta = 180^0$ (nằm trên trục z). Trường bức xạ có tính định hướng theo θ. Tính định hướng này được biểu diễn bằng đồ thị phương hướng.

5.3 BỨC XẠ ĐIỆN TỪ CỦA NGUYÊN TỐ ANTEN VÒNG

Nguyên tố anten vòng là anten có dạng tròn, phẳng, bán kính a sao cho $2\pi a << \lambda$ nên tại mỗi thời điểm, dòng điện trên toàn vòng dây như nhau.

Gọi i(t) = I=m=cos(ωt + ψ) là dòng điện trên vòng dây, biên độ phức là:

$$\dot{I} = I_m e^{j\psi} \tag{5.58}$$

Giả sử môi trường xung quanh là điện môi lý tưởng đồng nhất vô hạn. Điểm khảo sát cách tâm O của vòng dây một khoảng r >> a. Chọn hệ tọa độ có gốc tọa độ tại O, trục z trùng với trục của vòng dây (vuông góc với vòng dây và đi qua tâm vòng dây).

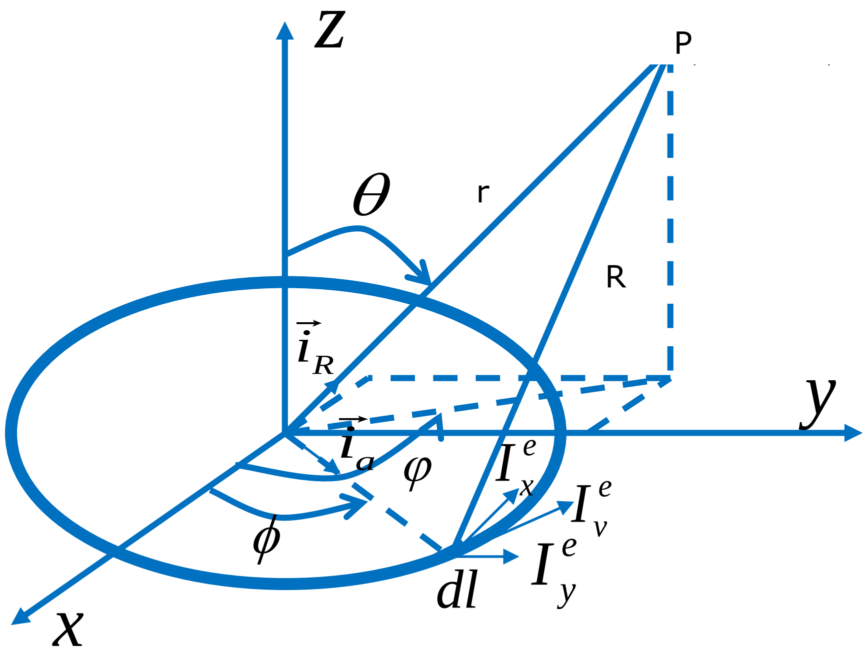
Do tính chất đối xứng, trường bức xạ đối xứng qua trục Oz và thế vector không phụ thuộc vào φ. Để đơn giản, ta khảo sát điểm P nằm trong mặt phẳng xOy (φ = 0).

$$\dot{\vec{A}} = \frac{\mu}{4\pi}\oint_C \quad \int_C \frac{\dot{I}e^{-jkR}}{R} dV \tag{5.59}$$

$\dot{\vec{A}}$ chỉ có thành phần theo $\overrightarrow{i_\varphi}$:

$$\dot{\vec{A}} = \dot{A}_\varphi(r,\theta)\overrightarrow{i_\varphi} \tag{5.60}$$

$$\dot{A}_\varphi(r,\theta) = \frac{\mu\dot{I}}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} a cos\phi d\phi \tag{5.61}$$



Hình 5.1 – Nguyên tố bức xạ vòng

Do R >> a:

$$R = r - asin\theta cos\phi \tag{5.62}$$

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} + \frac{a}{r^2} sin\theta cos\phi \tag{5.63}$$

Từ đó:

$$e^{-jkR} = e^{-jk(r - asin\theta cos\phi)} = e^{-jkr} e^{jkasin\theta cos\phi} \tag{5.64}$$

Mà 2πa << λ → ka = 2πa/λ << 1:

$$e^{jkasin\theta cos\phi} \approx 1 + jkasin\theta cos\phi \tag{5.65}$$

$$e^{-jkR} = e^{-jkr}(1 + jkasin\theta cos\phi) \tag{5.66}$$

Thế vào (5.61):

$$\dot{A}_\varphi(r,\theta) = \frac{\mu \dot{I}}{4\pi} \int_0^{2\pi} e^{-jkr}(1 + jkasin\theta cos\phi)\left(\frac{1}{r} + \frac{a}{r^2} sin\theta cos\phi\right) acos\phi d\phi \tag{5.67}$$

$$\dot{A}_\varphi(r,\theta) = j\frac{\mu S k \dot{I}}{4\pi r}\left(1 - \frac{j}{kr}\right) sin\theta e^{-jkr} \tag{5.68}$$

Trong đó S là diện tích vòng dây:

$$S = \pi a^2 \tag{5.69}$$

$$\dot{\vec{H}} = \frac{1}{\mu} rot\dot{\vec{A}} = \frac{1}{\mu} rot\left(\dot{A}_\varphi(r,\theta)\overrightarrow{\iota_\varphi}\right) = \dot{H}_r\overrightarrow{\iota_r} + \dot{H}_\theta\overrightarrow{\iota_\theta} \quad (5.70)$$

$$\dot{H}_r = \frac{k^3 S\dot{I}}{2\pi}\left(\frac{j}{(kr)^2} + \frac{1}{(kr)^3}\right) cos\theta e^{-jkr} \quad (5.71)$$

$$\dot{H}_\theta = \frac{k^3 S\dot{I}}{4\pi}\left(-\frac{1}{kr} + \frac{j}{(kr)^2} + \frac{1}{(kr)^3}\right) sin\theta e^{-jkr} \quad (5.72)$$

$$\dot{\vec{E}} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} rot\dot{\vec{H}} = \dot{E}_\varphi\overrightarrow{\iota_\varphi} \quad (5.73)$$

$$\dot{E}_\varphi = j\frac{\omega\mu k^2 S\dot{I}}{4\pi}\left(\frac{j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2}\right) sin\theta e^{-jkr} \quad (5.74)$$

Ta thấy, $\dot{\vec{H}}$ của nguyên tố vòng có dạng giống với $\dot{\vec{E}}$ của nguyên tố thẳng và $\dot{\vec{E}}$ của nguyên tố vòng có dạng giống với $\dot{\vec{H}}$ của nguyên tố thẳng. Như vậy, cấu trúc trường của nguyên tố anten thẳng và vòng giống nhau, chỉ khác là $\vec{E}$ và $\vec{H}$ hoán vị cho nhau.

Đối với trường vùng xa (r << λ), tương tự như nguyên tố thẳng:

$$\vec{H} = H_\theta\overrightarrow{\iota_\theta} = -\frac{\pi S I_m}{\lambda^2 r} sin\theta\cos(\omega t - kr + \psi)\overrightarrow{\iota_\theta} \quad (5.75)$$

$$\vec{E} = E_\varphi\overrightarrow{\iota_\varphi} = -z_c H_\theta\overrightarrow{\iota_\varphi} \quad (5.76)$$

Công suất bức xạ:

$$P_{bx} = \frac{\pi z_c I_m^2}{3}\left(\frac{l_{td}}{\lambda}\right)^2 \quad (5.77)$$

Chiều dài tương đương:

$$l_{td} = \frac{2\pi S}{\lambda} = \frac{2\pi^2 a^2}{\lambda} \quad (5.78)$$

Điện trở bức xạ:

$$R_{bx} = \frac{2P_{bx}}{I_m^2} = \frac{2\pi z_c}{3}\left(\frac{l_{td}}{\lambda}\right)^2 \quad (5.79)$$

Nếu môi trường là chân không, $z_c = 120\pi$:

$$P_{bx} = 40\pi^2 I_m^2\left(\frac{l_{td}}{\lambda}\right)^2 \quad (5.80)$$

$$R_{bx} = 80\pi^2 \left(\frac{l_{td}}{\lambda}\right)^2 \quad (5.81)$$

So sánh điện trở bức xạ của nguyên tố bức xạ thẳng dài l_1 với nguyên tố bức xạ vòng dài $l_2 = l_1 = 2\pi a$ cùng các điều kiện thì nguyên tố thẳng sẽ bức xạ với công suất lớn hơn nhiều so với nguyên tố vòng.

$$\frac{P_{bxthẳng}}{P_{bxvòng}} = \left(\frac{l}{l\_td}\right)^2 = \left(\frac{\lambda}{\pi a}\right)^2 \gg 1 \quad (5.82)$$

5.4 TÍNH CHẤT ĐỊNH HƯỚNG CỦA BỨC XẠ ĐIỆN TỪ

Bức xạ điện từ có một tính chất quan trọng là tính định hướng. Bằng cách bố trí các nguồn bức xạ thích hợp, ta có thể hướng cường độ bức xạ mạnh theo một số hướng nào đó và yếu theo các hướng khác. Tính chất định hướng của nguồn bức xạ được đánh giá thông qua:

- Hàm phương hướng $F(\theta,\varphi)$.
- Hệ số định hướng $D(\theta,\varphi)$.

5.4.1 Hàm phương hướng

Biên độ phức của cường độ điện trường của một nguồn bức xạ sóng điện từ tại một điểm ở vùng xa có thể viết dưới dạng:

$$\dot{E} = \frac{I_A}{r} f(\theta,\varphi) e^{j\psi(\theta,\varphi)} e^{-jkr} \quad (5.83)$$

Trong đó:

$$\dot{f}(\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi) e^{j\psi(\theta,\varphi)} \quad (5.84)$$

Là một hàm phụ thuộc vào cấu trúc anten. Hàm $f(\theta,\varphi)$ xác định sự phụ thuộc của biên độ cường độ trường điện do anten bức xạ tại một điểm nằm trong vùng xa được gọi là hàm phương hướng của anten. Biểu diễn hình học của hàm phương hướng là một mặt cong. Trong thực tế, các hàm phương hướng thường có hình xuyến, hình kim, hình quạt. Để thuận tiện khi so sánh tính chất định hướng của các anten khác nhau, người ta thường dùng hàm phương hướng chuẩn hóa:

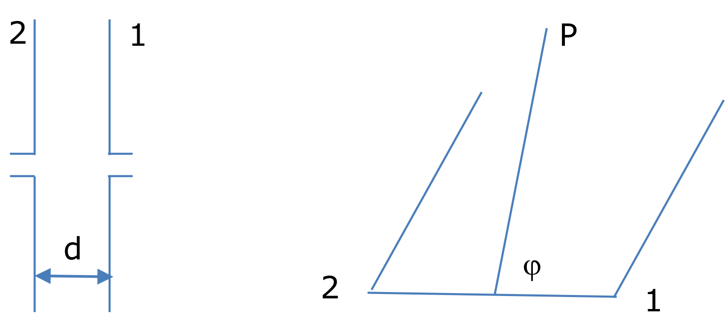
$$F(\theta,\varphi) = \frac{f(\theta,\varphi)}{f_{max}} \tag{5.85}$$

Ngoài hàm phương hướng chuẩn hóa tính theo trường điện, ta còn dùng hàm phương hướng theo công suất:

$$F_P(\theta,\varphi) = F^2(\theta,\varphi) \tag{5.86}$$

Loại anten	Hàm phương hướng chuẩn hóa
Lưỡng cực điện	$\sin\theta$
Chấn tử đối xứng dài 2l	$\frac{cos(klcos\theta) - coskl}{(1 - coskl)sin\theta}$
Chấn tử nửa sóng 2l = $\lambda/2$	$\frac{cos\left(\frac{\pi}{2}cos\theta\right)}{sin\theta}$
Hai chấn tử ghép với quan hệ dòng $I_{02} = I_{01}$ đặt cách nhau một khoảng d	$cos\left(\frac{kd}{2}cos\varphi\right)$
Hai chấn tử ghép với quan hệ dòng $I_{02} = -I_{01}$ đặt cách nhau một khoảng d	$sin\left(\frac{kd}{2}cos\varphi\right)$
Hai chấn tử ghép với quan hệ dòng $I_{02} = I_{01}e^{j\pi/2}$ đặt cách nhau một khoảng d	$cos\left(\frac{kd}{2}cos\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$

Bảng 7.1 – Hàm phương hướng chuẩn hóa của một số loại anten.



φ: góc giữa đường nối tâm hai chấn tử và phương tới điểm khảo sát

Hình 5.2 – Hai chấn tử ghép

5.4.2 Cường độ bức xạ, hệ số định hướng

Cường độ bức xạ của một anten trong một hướng cho trước là công suất bức xạ trên một đơn vị góc khối trong hướng đó.

$$U = \langle P_r \rangle r^2 \tag{5.87}$$

Do P_r tỷ lệ nghịch với r^2 nên U chỉ phụ thuộc vào θ, φ mà không phụ thuộc vào r.

Cường độ bức xạ chuẩn hóa:

$$U_n = \frac{U(\theta,\varphi)}{U_{max}} \tag{5.88}$$

Ngoài ra, để so sánh tính chất định hướng giữa các anten, người ta dùng thêm mộ tham số gọi là hệ số định hướng. Hệ số định hướng chỉ rõ phải tăng công suất bức xạ của anten khi thay anten định hướng bằng anten vô hướng lên bao nhiêu lần để cường độ điện trường tại điểm thu không thay đổi.

$$D(\theta,\varphi) = \frac{4\pi f^2(\theta,\varphi)}{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(\theta,\varphi) sin\theta d\theta d\varphi} \tag{5.89}$$

Hay:

$$D(\theta,\varphi) = \frac{4\pi F^2(\theta,\varphi)}{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F^2(\theta,\varphi) sin\theta d\theta d\varphi} \tag{5.90}$$

$$D_{max} = \frac{4\pi}{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F^2(\theta,\varphi) sin\theta d\theta d\varphi} \tag{5.91}$$

$$D(\theta,\varphi) = D_{max} F^2(\theta,\varphi) \tag{5.92}$$

TÓM TẮT

- *Bài này trình bày các khái niệm về bức xạ điện từ, tìm cường độ điện trường và cường độ từ trường của trường biến thiên điều hòa. Hai nguyên tố bức xạ cơ bản được khảo sát là nguyên tố bức xạ thẳng và bức xạ vòng. Dựa vào giải phương trình sóng để tính các giá trị cường độ điện trường và từ trường ở miền gần và miền xa.*
- *Phần cuối của bài giới thiệu về tính chất định hướng của bức xạ điện từ: hàm phương hướng và hệ số định hướng.*

CÂU HỎI ÔN TẬP

Câu 1: Một lưỡng cực điện dài l = 1m đặt trong không gian tự do kích thích bằng dòng điện có I_m = 1A bức xạ sóng điện từ với tần số f = 30 MHz. Xác định biên độ cường độ điện trường và từ trường ở khoảng cách r = 10km theo phương $\theta = 30^0$, 90^0.

Câu 2: Tại khoảng cách r = 10 km trong không khí ở phương $\theta = 30^0$ đo được cường độ điện trường bức xạ của một lưỡng cực điện nửa sóng là $E_m = 3.10^{-6}$ V/m. Xác định công suất bức xạ và dòng điện trên lưỡng cực.

Câu 3: Nguyên tố thẳng dài l = 20 cm có dòng điện biên độ I_m = 0,1A, tần số f = 15 MHz, môi trường xung quanh là không khí.

a. Xác định cường độ điện trường, từ trường, vector Poynting tại $P(r,\theta)$ với r = 1km, $\theta = 90^0$.

b Xác định điện trở bức xạ, công suất bức xạ của nguyên tố.

Câu 4: Tính công suất và điện trở bức xạ của nguyên tố anten vòng có chu vi 1m, trên đó có dòng điện 1A, tần số f = 300 KHz đặt trong môi trường không khí.

BÀI 6: SÓNG ĐIỆN TỪ TRONG CÁC HỆ ĐỊNH HƯỚNG

Sau khi học xong bài này, người học có thể:

- *Khái niệm về hệ định hướng.*
- *Tìm nghiệm phương trình sóng trong các hệ định hướng.*
- *Biết cách tính toán trường điện và trường từ trong ống dẫn sóng.*

6.1 KHÁI NIỆM

Đường truyền là các thiết bị hay hệ để giới hạn đường truyền lan các dao động điện từ hay các dòng năng lượng điện từ theo hướng đã cho. Đường truyền dùng để truyền dẫn năng lượng siêu cao tần hay sóng siêu cao gọi là đường truyền năng lượng siêu cao tần (đường truyền siêu cao). Đường truyền siêu cao được gọi là đường truyền đồng nhất nếu như dọc theo hướng truyền sóng tiết diện ngang không thay đổi và môi trường chứa trong nó là đồng nhất. Trong kỹ thuật siêu cao tần, đường truyền đồng nhất được sử dụng là chủ yếu. Người ta có thể phân loại đường truyền đồng nhất ra các loại sau: đường truyền hở và đường truyền kín.

Trong đường truyền hở, tại tiết diện ngang không có vòng kim loại bao bọc vùng truyền năng lượng siêu cao tần. Đường truyền hở có nhiều dạng khác nhau như: đường dây đôi, mạch dải, đường truyền sóng mặt … Đối với đường truyền kín, trong nó phải có ít nhất một mặt vật dẫn kim loại bao bọc hoàn toàn vùng truyền năng lượng siêu cao tần. Đường truyền kín là các ống kim loại rỗng có tiết diện khác nhau, bên trong có thể nhét đầy các chất điện môi đồng nhất khác nhau hoặc không khí hay chân không. Chúng được gọi là ống dẫn sóng. Có nhiều loại ống dẫn sóng được dùng trong kỹ thuật siêu cao tần như: ống dẫn sóng đồng trục, ống dẫn sóng chữ nhật, ống dẫn sóng trụ tròn …

Ở dải sóng mét, người ta ứng dụng đường dây đôi (song hành) và cáp đồng trục hay ống dẫn sóng đồng trục để truyền dẫn năng lượng siêu cao. Đường dây đôi có cấu trúc đơn giản và cho kích thước ngang khá gọn, dễ điều chỉnh phối hợp. Nhưng ở dải sóng decimet, ống dẫn sóng đồng trục hay cáp đồng trục được dùng phổ biến để truyền dẫn năng lượng siêu cao. Đường dây đôi không được sử dụng rộng rãi trong dải sóng này vì tổn hao do bức xạ và hiệu ứng bề mặt. Trong dải sóng centimet, đường truyền siêu cao phổ biến là các ống dẫn sóng chữ nhật và trụ tròn vì nó cho tiêu hao nhỏ, kích thước phù hợp, ống dẫn sóng đồng trục hay cáp đồng trục ít được dùng vì tổn hao do hiệu ứng bề mặt ở lõi trong và tổn hao trong điện môi rất lớn. Nó chỉ dùng ở khoảng cách ngắn và công suất nhỏ. Trong dải milimet, các ống dẫn sóng chữ nhật và tròn không được dùng phổ biến do kích thước nhỏ, khó chế tạo và tiêu hao lớn. Ở dải sóng này, đường truyền siêu cao phổ biến là mạch dải, đường truyền sóng mặt như: ống dẫn sóng điện môi, dây dẫn đơn có phủ chất điện môi.

Trong bài này, chúng ta sẽ tìm hiểu trường điện từ tồn tại và lan truyền trong các dạng đường truyền siêu cao phổ biến như: ống dẫn sóng chữ nhật, ống dẫn sóng trụ tròn, ống dẫn sóng hoặc cáp đồng trục, ống dẫn sóng điện môi, đường dây đôi, mạch giải … Chúng ta cũng tiến hành xét điều kiện truyền lan các dạng trường TEM, TE, TM trong chúng và nghiên cứu các đại lượng đặc trưng cho trường và cho đường truyền để từ đó áp dụng chúng có hiệu quả nhất khi truyền dẫn năng lượng siêu cao.

6.2 TÌM NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH SÓNG TRONG HỆ ĐỊNH HƯỚNG TỔNG QUÁT

Với đường truyền đồng nhất có cấu trúc tương đối đơn giản, ta có thể áp dụng phương pháp lý thuyết trường điện từ để tìm phân bố trường điện từ truyền lan trong đó. Tức là ta có thể tìm nghiệm hệ phương trình Maxwell với các điều kiện biên cụ thể của các dạng đường truyền trên. Để đơn giản, ta xét trường điện từ điều hòa với tần số góc ω đặt trong môi trường điện môi đồng nhất và đẳng hướng. Khi xét các quá trình sóng truyền trong đường truyền đồng nhất, ta không tính đến vai trò của nguồn.

Với điều kiện trên, hệ phương trình Maxwell cho trường điều hòa trong đường truyền đồng nhất không tiêu hao có dạng:

$$rot\vec{H}_m = j\omega\varepsilon\vec{E}_m \tag{6.1}$$

$$rot\vec{E}_m = -j\omega\mu\vec{H}_m \tag{6.2}$$

$$div\vec{E}_m = 0 \tag{6.3}$$

$$div\vec{H}_m = 0 \tag{6.4}$$

Với điều kiện biên:

$$E_\tau = \Psi \tag{6.5}$$

$\vec{E}_m, \vec{H}_m$ là các vector biên độ phức của cường độ điện trường và từ trường. E_τ là thành phần tiếp tuyến của cường độ điện trường.

Chuyển các phương tình trên về dạng các phương trình sóng cho các vector $\vec{E}_m, \vec{H}_m$, ta được các phương trình thuần nhất sau:

$$\Delta\vec{E}_m + k^2\vec{E}_m = 0 \tag{6.6}$$

$$\Delta\vec{H}_m + k^2\vec{H}_m = 0 \tag{6.7}$$

Với:

$$\mathrm{k} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \tag{6.8}$$

Như vậy, bài toán tìm trường điện từ trong đường truyền đồng nhất là bài toán tìm nghiệm của hệ phương trình sóng thuần nhất (6.6), (6.7) với điều kiện biên (6.5).

6.2.1 Phương pháp tìm nghiệm

Ta có thể tìm nghiệm phương trình sóng theo các phương pháp khác nhau. Ta nhận thấy rằng: đường truyền siêu cao đồng nhất có trục truyền sóng là thẳng và tiết diện ngang không đổi dọc theo trục tuyền sóng. Vì vậy, khi áp dụng hệ tọa độ trụ tổng quát, ta có thể tìm nghiệm của các phương trình sóng (6.6), (6.7) theo phương pháp chung rất thuận tiện cho các dạng khác nhau của đường truyền siêu cao đồng nhất.

Chọn hệ tọa độ sao cho trục Oz song song với trục của ống dẫn sóng. Hai trục ngang khác có tọa độ là q_1, q_2 nằm trong mặt phẳng tiết diện ngang của đường truyền đồng nhất. Mặt giới hạn vùng truyền dẫn ký hiệu là S_{bk} (k = 1, 2, 3, …) và các đường bao ngang ký hiệu là L_{nk} (k = 1, 2, 3, …).

Áp dụng phương pháp phân ly biến số, ta có thể tìm nghiệm của các phương trình sóng (6.6), (6.7) trong hệ tọa độ trụ tổng quát dưới dạng sau:

$$\vec{E}_m(q_1, q_2, z) = \vec{E}_n(q_1, q_2)F(z) \tag{6.9}$$

$$\vec{H}_m(q_1, q_2, z) = \vec{H}_n(q_1, q_2)F(z) \tag{6.10}$$

Trong đó hàm F(z) có dạng:

$$F(z) = e^{\pm\gamma z} \tag{6.11}$$

Với:

$$\gamma = \alpha + j\beta \tag{6.12}$$

Là hằng số truyền của sóng dọc theo trục z của đường truyền, α là hệ số tiêu hao, β là hệ số pha của sóng. Như vậy các quá trình sóng truyền dọc trục z của đường truyền phụ thuộc vào tọa độ đều có thể biểu diễn qua hàm mũ $e^{\pm\gamma z}$. Dấu trừ ở số mũ ứng với sóng truyền theo hướng trục z dương, còn dấu cộng ứng với sóng truyền theo hướng ngược lại. Ta quy ước chỉ sử dụng hàm $e^{-\gamma z}$. Tức là chọn hàm F(z) có dạng:

$$F(z) = e^{-\gamma z} \tag{6.13}$$

$\vec{E}_n, \vec{H}_n$ là các vector cường độ điện, từ trường phụ thuộc vào các tọa độ ngang q_1, q_2. Đặt:

$$\vec{E}_n(q_1, q_2) = \vec{E}_q(q_1, q_2) + E_z(q_1, q_2)\vec{i}_z \tag{6.14}$$

$$\vec{H}_n(q_1, q_2) = \vec{H}_q(q_1, q_2) + H_z(q_1, q_2)\vec{i}_z \tag{6.15}$$

$\vec{E}_q, \vec{H}_q$ là các thành phần ngang của trường, còn E_z, H_z là các thành phần dọc theo trục z của trường. Vì trường phụ thuộc vào tọa độ z có dạng của (6.13) nên toán tử Laplace trong tọa độ trụ tổng quát có thể viết:

$$\Delta = \Delta_\mathrm{q} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta_\mathrm{q} + \gamma^2 \tag{6.16}$$

Δ_q là toán tử Laplace tác động chỉ lên các tọa độ q_1, q_2. Các phương trình sóng chuyển về dạng đơn giản hơn như sau:

$$\Delta_q \vec{E}_q + \chi^2 \vec{E}_q = 0 \tag{6.17}$$

$$\Delta_q \vec{H}_q + \chi^2 \vec{H}_q = 0 \tag{6.18}$$

$$\Delta_q E_z + \chi^2 E_z = 0 \tag{6.19}$$

$$\Delta_q H_z + \chi^2 H_z = 0 \tag{6.20}$$

Trong đó:

$$\chi^2 = k^2 + \gamma^2 \tag{6.21}$$

Được gọi là hệ số sóng ngang, nó liên quan đến hình dạng của tiết diện ngang của đường truyền đồng nhất.

Từ hệ phương trình Maxwell, các thành phần ngang của cường độ điện trường và từ trường có thể biểu diễn qua các thành phần dọc của chúng theo biểu thức sau:

$$\chi^2 \vec{E}_q = -\gamma \nabla_q E_z + j\omega\mu\left[\vec{i}_z \times \nabla_q H_z\right] \tag{6.22}$$

$$\chi^2 \vec{H}_q = -\gamma \nabla_q H_z - j\omega\varepsilon\left[\vec{i}_z \times \nabla_q E_z\right] \tag{6.23}$$

Trong đó:

$$\nabla = \nabla_q + \vec{i}_z \gamma \tag{6.24}$$

là toán tử gradient, ∇_q là các thành phần ngang trong tọa độ trụ tổng quát. Như vậy việc tìm nghiệm của các phương trình sóng (6.6), (6.7) chuyển về việc tìm nghiệm của các phương trình sóng (6.19), (6.20) cho các thành phần dọc của trường E_z, H_z và áp dụng (6.22), (6.23). Nghiệm của các phương trình (6.19), (6.20) sẽ được tìm tùy theo dạng cụ thể tiết diện ngang của đường truyền.

Xét điều kiện biên (6.5). Tại một điểm M bất kỳ trên chu vi tiết diện ngang của đường truyền L_n ta xây dựng ba vector: vector đơn vị $\vec{i}_n$ là vector pháp tuyến với mặt giới hạn S_b, vector đơn vị $\vec{i}_l$ tiếp tuyến với chu vi L_n, vector đơn vị $\vec{i}_z$ hướng theo trục z. Một thành phần tiếp tuyến bất kỳ của trường đều có thể biểu diễn như sau:

$$\vec{E}_\tau = E_l \vec{i}_l + E_z \vec{i}_z = E_\tau \vec{i}_\tau \tag{6.25}$$

$\vec{i}_\tau$ là vector đơn vị tiếp tuyến với mặt S_b tại điểm M.

Từ (6.22), (6.23) và (6.25), điều kiện biên (6.5) cho dưới dạng tương đương sau:

$$E_z|_{L_n} = \Psi_1 \tag{6.26}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} H_z\Big|_{L_n} = \Psi_2 \tag{6.27}$$

Ψ_1, Ψ_2 phụ thuộc vào các tọa độ ngang q_1, q_2.

Đến đây, các phương trình sóng (6.19), (6.20) cho các thành phần dọc E_z, H_z của trường và điều kiện biên (6.5) có thể tách làm hai bài toán như sau:

1) Bài toán Dirickle đối với E_z có dạng:

$$\Delta_q E_z + \chi^2 E_z = 0 \tag{6.28}$$

$$E_z|_{L_n} = \Psi_1 \tag{6.29}$$

2) Bài toán Neumann đối với H_z có dạng:

$$\Delta_q H_z + \chi^2 H_z = 0 \tag{6.30}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} H_z\Big|_{L_n} = \Psi_2 \tag{6.31}$$

Việc tìm các thành phần của cường độ trường điện từ trong đường truyền đồng nhất thực chất là tìm nghiệm của hai bài toán Dirickle và Neumann. Nghiệm của chúng bao gồm vô số các hàm riêng ứng với các giá trị riêng khác nhau có phân bố gián đoạn trong miền xác định.

Trong đường truyền thống nhất, trường điện từ tồn tại có cấu trúc và tính chất khác nhau. Ta có thể phân loại trường dựa trên đặc trưng phân bố của nó dọc theo trục đường truyền và dựa trên các thành phần của trường.

6.2.2 Các dạng trường truyền lan và tại chỗ

Các thành phần của cường độ điện trường và từ trường phân bố theo tọa độ dọc z dưới dạng hàm mũ $e^{-\gamma z}$ nên ta có thể viết γ dưới dạng:

$$\gamma = j\sqrt{k^2 - \chi^2} \tag{6.32}$$

Gọi λ_{th}, f_{th} là bước sóng tới hạn, tần số tới hạn.

$$\lambda_{th} = \frac{2\pi}{\chi} \tag{6.33}$$

$$f_{th} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}\lambda_{th}} \tag{6.34}$$

Thay vào (6.32):

$$\gamma = j\sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_{th}}\right)^2} \tag{6.35}$$

Ta xét các trường hợp sau:

- ✓ $\chi^2 < k^2 \leftrightarrow \lambda < \lambda_{th} \leftrightarrow f > f_{th}$:

Hằng số truyền γ là một số thuần ảo, $\gamma = j\beta$.

$$\alpha = 0, \beta = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{th}}\right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1 - \left(\frac{f_{th}}{f}\right)^2} \tag{6.36}$$

Trường điện từ trong đường truyền có dạng sóng chạy với biên độ không đổi dọc theo trục z. Ta gọi trường điện từ có tính chất truyền lan. Nó được đặc trưng với các đại lượng sau:

- Bước sóng trong đường truyền, ký hiệu là λ:

$$\lambda_t = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{th}}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{th}}{f}\right)^2}} \tag{6.37}$$

- Vận tốc pha:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{th}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{th}}{f}\right)^2}} \tag{6.38}$$

- Vận tốc nhóm:

$$v_{nh} = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{th}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{1 - \left(\frac{f_{th}}{f}\right)^2} \tag{6.39}$$

Ta thấy rằng vận tốc pha của sóng (vận tốc dịch chuyển mặt đồng pha của sóng dọc theo phương z) là hàm của tần số hay bước sóng. Ta gọi sự phụ thuộc này là đặc trưng tán sắc của sóng trong đường truyền.

✓ $\chi^2 > k^2 \leftrightarrow \lambda > \lambda_{th} \leftrightarrow f < f_{th}$:

Hằng số truyền γ là một số thực.

$$\gamma = \alpha = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_{th}}\right)^2 - 1} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\left(\frac{f_{th}}{f}\right)^2 - 1} \quad (6.40)$$

Trường hợp này trường điện từ không truyền lan dọc theo trục z của đường truyền, nó có phân bố với biên độ suy giảm theo hàm mũ $e^{-\alpha z}$ dọc theo trục z. Trường lúc này gọi là trường tại chỗ hay trường địa phương. Biên độ trường suy giảm càng nhanh khi λ càng khác xa λ_{th}. Từ đây có thể thấy được ý nghĩa vật lý của bước sóng tới hạn λ_{th} và tần số tới hạn. λ_{th} chính là giới hạn trên đối với bước sóng công tác λ của trường điện từ có thể truyền trong đường truyền, còn f_{th} là giới hạn dưới về tần số của trường truyền lan trong đường truyền.

6.2.3 Các dạng trường TM(E), TE(H), TEM

6.2.3.1 TM(E)

Trường được gọi là từ ngang hay điện dọc khi $E_z \neq 0$, $H_z = 0$. Nó được ký hiệu là TM hay E. Trong trường hợp chung, trường TM(E) trong đường truyền có 5 thành phần của trường. Thành phần dọc E_z được tìm từ bài toán Dirickle (6.28), (6.29), còn các thành phần khác suy ra từ (6.22), (6.23), ta được:

$$\vec{E}_q = -\frac{\gamma}{\chi^2}\nabla_q E_z \quad (6.41)$$

$$\vec{H}_q = -\frac{j\omega\varepsilon}{\chi^2}\left[\vec{i}_z \times \nabla_q E_z\right] \quad (6.42)$$

$$\frac{E_q}{H_q} = \frac{\gamma}{j\omega\varepsilon} = Z_c^{TM} \quad (6.43)$$

Z_c^{TM} gọi là trở kháng sóng ngang của trường TM(E) trong đường truyền. Nó bằng tỷ số của thành phần ngang của điện trường trên thành phần ngang của từ trường.

Với sóng truyền lan thì $Z_c^{TM} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon}$ là một số thực, tức là các thành phần ngang của điện trường và từ trường của sóng đồng pha, vector Poynting trung bình chỉ sự truyền năng lượng của sóng trong đường truyền khác không.

Với trường tại chỗ thì $Z_c^{TM} = \frac{\alpha}{j\omega\varepsilon}$ là một số thuần ảo, các thành phần ngang của điện trường lệch pha với các thành phần ngang của từ trường một góc $\pi/2$, do đó vector Poynting trung bình của trường bằng không, có nghĩa là không có sự truyền năng lượng dọc theo đường truyền.

6.2.3.2 TE(H)

Trường gọi là trường điện ngang hay từ dọc khi $E_z = 0$, $H_z \neq 0$ và có ký hiệu TE hay H. Thành phần dọc của từ trường Hz của trường này được tìm từ bài toán Neumann (6.30), (6.31).

Các thành phần ngang của trường TE(H) được suy ra từ (6.22), (6.23):

$$\vec{E}_q = \frac{j\omega\mu}{\chi^2}\left[\vec{i}_z \times \nabla_q H_z\right] \tag{6.44}$$

$$\vec{H}_q = -\frac{\gamma}{\chi^2}\nabla_q H_z \tag{6.45}$$

$$\frac{E_q}{H_q} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = Z_c^{TE} \tag{6.46}$$

Z_c^{TE} được gọi là trở kháng sóng ngang của trường TE(H). Nó bằng tỷ số của các thành phần ngang của điện trường trên các thành phần ngang của từ trường. Khi trường TE(H) truyền lan dọc trục z thì Z_c^{TE} là một số thực, còn khi TE(H) là tại chỗ thì Z_c^{TE} là một số thuần ảo.

6.2.3.3 TEM

Ngoài hai loại trường TM(E) và TE(H), còn tồn tại dạng trường mà cả thành phần dọc của điện trường E_z và từ trường H_z đều = 0. Ta gọi trường này là trường điện từ ngang và ký hiệu là TEM. Từ (6.22), (6.23) ta thấy rằng điều kiện để các thành phần ngang của trường này khác không khi các thành phần dọc của nó bằng không là số sóng ngang $\chi = 0$.

Các thành phần ngang của trường TEM sẽ được tìm từ các phương trình sóng (6.17), (6.18) khi cho $\chi = 0$:

$$\Delta_q \vec{E}_q = 0 \tag{6.47}$$

$$\Delta_q \vec{H}_q = 0 \tag{6.48}$$

Hai phương trình trên là phương trình Laplace. Phương trình này cũng mô tả trường điện từ tĩnh. Từ đó ta rút ra kết luận rằng trường điện từ TEM chỉ tồn tại trong các dạng đường truyền mà trong đó có khả năng tồn tại các trường tĩnh. Hơn nữa, sự phân bố giá trị tức thời của trường biến đổi TEM sẽ trùng với phân bố của bài toán trường tĩnh tương ứng. Từ đó ta suy ra rằng trường TEM sẽ tồn tại trong các đường truyền mà tiết diện ngang của nó là vùng không đơn liên, được giới hạn bởi nhiều (ít nhất là hai) chu vi kín không giao nhau hoặc đường đi ra vô cùng. Chẳng hạn trường TEM tồn tại trong đường dây song hành có hai hay nhiều dây dẫn, trong ống dẫn sóng đồng trục, cáp đồng trục … Trong những đường truyền dạng trên, khi truyền sóng TEM, ta có thể áp dụng các khái niệm về điện áp và dòng điện.

Vì $\chi = 0$ nên bước sóng tới hạn của nó $\lambda_{th} = \infty$, suy ra $\lambda_{th} = \lambda$, $\beta = k$, $v_{nh} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, sự tán sắc trong đường truyền TEM không xảy ra. Trường TEM có thể truyền dọc theo đường truyền với tần số bất kỳ, trở kháng sóng ngang của trường TEM cho bởi công thức:

$$Z_C^{TEM} = \frac{E_q}{H_q} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_C \tag{6.49}$$

Nếu môi trường là chân không hoặc không khí thì:

$$Z_C^{TEM} = Z_C^0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377\Omega \tag{6.50}$$

Trường hợp chung trong đường truyền đồng nhất tồn tại cả sáu thành phần của trường điện từ, thì tùy theo thành phần dọc của E_z hay H_z chiếm ưu thế mà gọi là trường EH hay HE. Ta gọi chúng là trường lai ghép.

6.3 ỐNG DẪN SÓNG CHỮ NHẬT

Ống dẫn sóng chữ nhật là một ống kim loại rỗng, thẳng, có tiết diện ngang hình chữ nhật, bên trong có chứa điện môi đồng nhất hoặc không khí. Để tìm trường điện từ trong ống dẫn sóng chữ nhật, ta chọn hệ tọa độ Descartes như sau: trục z trùng với trục của ống dẫn sóng, trục x hướng theo thành rộng, trục y hướng theo thành hẹp. Lúc này các tọa độ ngang $q_1 = x$, $q_2 = y$. Ống dẫn sóng chữ nhật được dùng phổ biến trong dải sóng cm. Trong nó tồn tại các trường TM(E) và TE(H).

Để đơn giản ta xét với trường hợp ống dẫn sóng chữ nhật có dạng lý tưởng, có thành làm bằng kim loại dẫn điện lý tưởng với $\gamma = \infty$ và bên trong là chân không hoặc không khí có $\gamma = 0$. Ta lần lượt tìm các trường TM(E) và TE(H) trong ống dẫn sóng.

6.3.1 Trường từ ngang TM(E)

Bài toán Dirickle cho thành phần dọc E_z đối với ống dẫn sóng chữ nhật trong hệ tọa độ Descartes có dạng:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \chi^2 E_z = 0 \tag{6.51}$$

Tìm nghiệm E_z bằng phương pháp phân ly biến số, đặt:

$$E_z = X(x)Y(y) \tag{6.52}$$

Thế (6.52) vào (6.51):

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \chi_x^2 X = 0 \tag{6.53}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \chi_y^2 Y = 0 \tag{6.54}$$

Trong đó:

$$\chi^2 = \chi_x^2 + \chi_y^2 \tag{6.55}$$

Tại x = 0, x = a, y = 0, y = b: $E_z = 0$ nên ta có điều kiện biên:

$$X|_{x=0,x=a} = 0 \tag{6.56}$$

$$Y|_{y=0,y=a} = 0 \tag{6.57}$$

Phương trình (6.53), (6.54) có nghiệm tổng quát:

$$X(x) = Asin(\chi_x x) + Bcos(\chi_x x) \tag{6.58}$$

$$Y(y) = Csin(\chi_y y) + Dcos(\chi_y y) \tag{6.59}$$

Thay điều kiện biên (6.56) vào (6.58) và (6.57) vào (6.59):

$$\begin{cases} B = D = 0 \\ sin(\chi_x a) = 0 \\ sin(\chi_y b) = 0 \end{cases} \tag{6.60}$$

$$\begin{cases} \chi_x = \frac{m\pi}{a} & m = 1,2,3, \dots \\ \chi_y = \frac{n\pi}{b} & n = 1,2,3 \dots \end{cases} \tag{6.61}$$

Thế vào (6.52):

$$E_z = C_e sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \tag{6.62}$$

Các thành phần điện và từ trường ngang của trường TE(H) được tính qua H_z:

$$E_x = -\frac{\gamma}{\chi^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\gamma}{\chi^2} C_e \frac{m\pi}{a} cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \tag{6.63}$$

$$E_y = -\frac{\gamma}{\chi^2}\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\gamma}{\chi^2} C_e \frac{n\pi}{b} sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \tag{6.64}$$

$$H_x = -\frac{E_y}{Z_c^e} \tag{6.65}$$

$$H_y = \frac{E_x}{Z_c^e} \tag{6.66}$$

Bước sóng tới hạn của trường TM(E) trong ống dẫn sóng này có dạng:

$$\lambda_{th} = \frac{2\pi}{\chi} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \tag{6.67}$$

6.3.2 Trường điện ngang TE(H)

Đối với trường TE(H) thì thành phần dọc của từ trường H_z được tìm từ bài toán Neumann, quá trình thực hiện tương tự như trên:

$$H_z = C_h cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \tag{6.68}$$

$$H_x = -\frac{\gamma}{\chi^2} C_h \frac{m\pi}{a} sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \tag{6.69}$$

$$H_y = -\frac{\gamma}{\chi^2} C_e \frac{n\pi}{b} cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \tag{6.70}$$

$$E_x = H_y Z_c^h \tag{6.71}$$

$$E_y = -H_x Z_c^h \tag{6.72}$$

$$\lambda_{th} = \frac{2\pi}{\chi} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \tag{6.73}$$

6.4 ỐNG DẪN SÓNG HÌNH TRỤ TRÒN

Ngoài ống dẫn sóng chữ nhật, người ta còn sử dụng ống dẫn sóng trụ tròn để truyền sóng siêu cao. Ống dẫn sóng trụ tròn là một ống làm bằng kim loại dẫn điện tốt, tiết diện ngang hình tròn, bên trong chứa điện môi đồng nhất. Để tìm trường điện từ trong ống dẫn sóng trụ tròn, ta xét trường hợp ống dẫn sóng là lý tưởng tức có độ dẫn điện của kim loại $\gamma = \infty$ và của điện môi $\gamma = 0$. Chọn hệ tọa độ có trục z trùng với trục của ống dẫn sóng còn hai trục toa độ ngang nằm trong tiết diện ngang của ống $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$. R_0 là bán kính ống dẫn sóng tròn. Cũng giống như ống dẫn sóng chữ nhật, trong ống dẫn sóng tròn tồn tại hai dạng trường là TM(E) và TE(H).

6.4.1 Trường từ ngang TM(E)

Trường TM(E) được tìm từ nghiệm của bài toán Dirickle đối với thành phần dọc của điện trường E_z. Trong tọa độ trụ:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial E_z}{\partial \varphi}\right)+\chi^2 E_z=0 \tag{6.74}$$

Mà: $\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_z}{\partial r}\right)=r\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2}+\frac{\partial E_z}{\partial r}$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial E_z}{\partial \varphi}\right)+\chi^2 E_z=0 \tag{6.75}$$

Tìm nghiệm E_z bằng phương pháp phân ly biến số, đặt:

$$E_z=E_{zr}(r)E_{z\varphi}(\varphi) \tag{6.76}$$

Thay vào (6.75):

$$\frac{d^2 E_{z\varphi}}{d\varphi^2}+m^2 E_{z\varphi}=0 \tag{6.77}$$

$$\frac{d^2 E_{zr}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E_{zr}}{\partial r}+\left(\chi^2-\frac{m^2}{r^2}\right)E_{zr}=0 \tag{6.78}$$

Điều kiện biên:

$$E_z|_{r=R_0}=0 \tag{6.79}$$

(6.77) có nghiệm là:

$$E_{z\varphi}=Acos(m\varphi)+Bsin(m\varphi)=Ccos(m\varphi-\varphi_0) \tag{6.80}$$

A, B, C là các hằng số. (6.78) là phương trình Bessel bậc m, có nghiệm tổng quát dạng:

$$E_{zr} = D.J_m(\chi r) + E.N_m(\chi r) \tag{6.81}$$

D, E là các hằng số, J_m là hàm Bessel bậc m, N_m là hàm Neumann bậc m. Trường điện từ ở trục ống dẫn sóng (R = 0) hữu hạn trong khi đó hàm $N_m(0) \to \infty$: chọn E = 0.

$$E_z = C_e J_m(\chi r)\cos(m\varphi - \varphi_0) \tag{6.82}$$

Điều kiện biên:

$$E_z|_{r=R_0} = 0 \to J_m(\chi r)|_{r=R_0} = J_m(\chi R_0) = 0 \tag{6.83}$$

Gọi ε_{mn} là nghiệm thứ n của hàm Bessel bậc m:

$$J(\varepsilon_{mn}) = 0 \tag{6.84}$$

$$\chi = \frac{\varepsilon_{mn}}{R_0} \tag{6.85}$$

Bước sóng tới hạn:

$$\lambda_{th} = \frac{2\pi}{\chi} = \frac{2\pi R_0}{\varepsilon_{mn}} \tag{6.86}$$

Các thành phần ngang của trường TM(E):

$$E_r = -\gamma\frac{C_e}{\chi}\frac{dJ_m}{d(\chi r)}\cos(m\varphi - \varphi_0) \tag{6.87}$$

$$E_\varphi = \gamma\frac{C_e m}{\chi^2 r}J_m(\chi r)\sin(m\varphi - \varphi_0) \tag{6.88}$$

$$H_r = -\frac{E_\varphi}{Z_c^e} \tag{6.89}$$

$$H_\varphi = \frac{E_r}{Z_c^e} \tag{6.90}$$

6.4.2 Trường điện ngang TE(H)

Tương tự như trên:

$$H_z = C_h J_m(\chi r)\cos(m\varphi - \varphi_0) \tag{6.91}$$

$$\chi = \frac{\mu_{mn}}{R_0} \tag{6.92}$$

Trong đó μ_{mn} là nghiệm thứ n của đạo hàm bậc một của hàm Bessel bậc m, nghĩa là:

$$\frac{dJ_m(\mu_{mn})}{d(\chi r)} = 0 \tag{6.93}$$

$$\lambda_{th} = \frac{2\pi}{\chi} = \frac{2\pi R_0}{\mu_{mn}} \tag{6.94}$$

$$H_r = -\gamma \frac{C_h}{\chi} \frac{dJ_m}{d(\chi r)} cos(m\varphi - \varphi_0) \tag{6.95}$$

$$E_\varphi = \gamma \frac{C_h m}{\chi^2 r} J_m(\chi r) sin(m\varphi - \varphi_0) \tag{6.96}$$

$$E_r = Z_c^h H_\varphi \tag{6.97}$$

$$E_\varphi = -Z_c^h H_r \tag{6.98}$$

6.5 CÁP ĐỒNG TRỤC

Ống dẫn sóng đồng trục gồm hai ống kim loại rỗng dẫn điện tốt lồng đồng trục với nhau. Môi trường đồng nhất thường là không khí. Còn cấu tạo của cáp đồng trục có lõi trong là một sợi kim loại hay nhiều sợi kim loại xoắn lại hình trụ, có lớp điện môi với hằng số tương đối ε′ bao bọc hình trụ và bên ngoài có lớp lưới kim loại bao quanh tạo nên thành phần ngoài của cáp. Trong cáp đồng trục có tồn tại trường điện từ ngang TEM có bước sóng tới hạn $\lambda_{thTEM} = \infty$ nên nó là trường cơ bản. Ngoài ra trong ống dẫn sóng và cáp đồng trục còn tồn tại các trường bậc cao TM(E) và TE(H).

6.5.1 Trường cơ bản TEM

Các thành phần ngang của trường TEM trong ống dẫn sóng hay cáp đồng trục có thể tìm từ phương trình Laplace trong hệ tọa độ trụ. Tuy nhiên, ta có thể tìm chúng dễ dàng hơn qua phương trình cho điện thế ϕ của trường này. Từ hệ phương trình Maxwell và điều kiện $E_z = H_z = 0$, ta có:

$$\nabla_q \times \vec{E}_q = 0 \tag{6.99}$$

$$\nabla_q \vec{E}_q = 0 \tag{6.100}$$

Từ (6.99), đặt:

$$\vec{E}_q = -grad\phi = -\nabla_q \phi \tag{6.101}$$

Thay vào (6.100):

$$\nabla_q\left(-\nabla_q \phi\right) = \Delta_q \phi = 0 \tag{6.102}$$

Đây là phương trình Laplace cho thế ϕ của trường TEM. Vì trường cơ bản TEM có tính đối xứng trụ nên hàm ϕ không phụ thuộc vào tọa độ φ, và phương trình (6.102) viết trong hệ tọa độ trụ có dạng đơn giản hơn như sau:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) = 0 \tag{6.103}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{C_1}{r} \rightarrow \phi = C_1 lnr + C_2 \tag{6.104}$$

Từ điều kiện biên $\phi(a) = 0$ và $\phi(b) = U$:

$$\phi = \frac{U}{ln\frac{b}{a}} lnr \tag{6.105}$$

U là hiệu điện thế giữa hai lõi của ống dẫn sóng hay cáp đồng trục. Điện trường ngang của trường TEM được tính từ (6.101):

$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{U}{ln\frac{b}{a}}\frac{1}{r} \tag{6.106}$$

Từ trường chỉ có thành phần ngang H_φ có dạng:

$$H_\varphi = -\frac{U}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} ln\frac{b}{a}}\frac{1}{r} = \frac{E_r}{Z_C} \tag{6.107}$$

Dòng điện chảy trong lõi trong hay lõi ngoài có giá trị bằng nhau và chiều ngược nhau:

$$I = 2\pi r H_\varphi = \frac{2\pi U}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} ln\frac{b}{a}} \tag{6.108}$$

Trở kháng sóng đặc tính:

$$Z_{CT} = \frac{U}{I} = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} ln\frac{b}{a}}{2\pi} = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon'}} ln\frac{b}{a} = \frac{138}{\sqrt{\varepsilon'}} lg\frac{b}{a} \tag{6.109}$$

Trong kỹ thuật các cáp đồng trục được chế tạo theo tiêu chuẩn có trở sóng đặc tính 50 Ω và 75 Ω.

6.5.2 Trường bậc cao TM, TE

Trong ống dẫn sóng hay cáp đồng trục, ngoài trường cơ bản TEM ra còn tồn tại các trường đơn vị bậc cao loại trường từ ngang và điện ngang. Việc tìm các thành phần cường độ trường của chúng có thể tiến hành tương tự như đã làm trong ống dẫn sóng tròn với các bài toán Dirickle và Neumann. Nhưng điều kiện biên ở đây phải kể với các chu vi kín ở hai lõi trong và ngoài.

TÓM TẮT

- *Bài này trình bày các môi trường khác nhau dùng để truyền dẫn sóng điện từ được gọi là các hệ định hướng. Phần đầu giới thiệu về sóng điện từ định hướng và hệ định hướng, kế tiếp là các phương pháp tìm nghiệm (tức là tìm phân bố của sóng điện từ) ở các hệ định hướng và các dạng trường trong kỹ thuật.*
- *Từ các phần trên, bài này đi vào tìm phân bố của sóng điện từ ở các hệ định hướng được sử dụng trong thực tiễn hiện nay, bao gồm ống dẫn sóng chữ nhật và trụ tròn, cáp đồng trục.*

CÂU HỎI ÔN TẬP

Câu 1. Tính và biểu diễn lên trục số các bước sóng tới hạn và bước sóng của các dạng sóng trong ống dẫn sóng chữ nhật bên trong chứa không khí có kích thước tiết diện ngang a = 7,2 cm; b = 3,4 cm, bước sóng hoạt động λ = 3,9 cm với điều kiện $\lambda_{th} \geq 3,2$ cm.

Câu 2. Tính và biểu diễn lên trục số khoảng cách Δz dọc theo ống dẫn sóng chữ nhật bên trong chứa không khí của các trường tại chỗ mà trên khoảng cách này biên độ của trường suy giảm đi 10 lần. Biết rằng kích thước ống dẫn sóng chữ nhật a = 7,2 cm; b = 3,4 cm, bước sóng hoạt động λ = 7 cm và chỉ xét với dạng trường có $\lambda_{th} \geq 3,2$ cm.

Câu 3. Tính và biểu diễn lên trục số các bước sóng tới hạn và bước sóng trong ống dẫn sóng trụ tròn chứa không khí cho các dạng sóng có $\lambda_{th} \geq 4,8$ cm. Biết rằng bước sóng công tác λ = 6 cm, bán kính ống dẫn sóng tròn R = 4 cm.

Câu 4. Tính và biểu diễn lên trục số các khoảng cách Δz dọc theo ống dẫn sóng tròn bên trong chứa không khí mà trên khoảng cách này biên độ các trường tại chỗ giảm đi 10 lần. Biết rằng bước sóng hoạt động λ = 10 cm, bán kính ống dẫn sóng R = 4 cm, và ứng với các trường có $\lambda_{th} \geq 4,8$ cm.

BÀI 7: HỘP CỘNG HƯỞNG

Sau khi học xong bài này, người học có thể:

- *Biết phát triển của các mạch điện từ tần số thấp đến tần số cao, có cái nhìn tổng quát cần thiết đối với các kỹ thuật mới để thiết kế và tối ưu các mạch siêu cao tần.*

Ở dải tần số siêu cao, ta không thể dùng mạch LC cho hiện tượng cộng hưởng, do các nguyên nhân sau:

1. Để nhận được tần số cộng hưởng f_0 lớn, ta phải giảm nhỏ các giá trị L và C của cuộn cảm hay tụ điện. Do kích thước chế tạo, ta không thể có các giá trị L và C nhỏ như yêu cầu được.

2. Ở dải sóng siêu cao, kích thước của các cuộn cảm hay tụ điện so sánh được với bước sóng nên tại các tần số này, bản thân mạch dao động cũng đóng vai trò như các phần tử bức xạ năng lượng điện từ làm tăng tiêu hao năng lượng đáng kể trong mạch dao động và mạch không duy trì được dao động ở dải này.

3. Khi tần số tăng, tiêu hao do hiệu ứng bề mặt và tiêu hao trong điện môi của cuộn cảm và tụ điện tăng đáng kể làm giảm phẩm chất của mạch dao động LC, làm cho nó mất tính chọn lọc cộng hưởng.

Vì vậy, ở dải sóng siêu cao, người ta sử dụng các mạch dao động có tham số phân bố, thường gọi là mạch cộng hưởng. Hộp cộng hưởng là một vùng không gian hữu hạn mà ở trong nó sau khoảng thời gian lớn hơn nhiều chu kỳ dao động siêu cao tần có sự tích lũy năng lượng điện từ. Hộp cộng hưởng thường có dạng kín, tức là được bao bọc bởi thành kim loại. Tuy nhiên cũng có hộp cộng hưởng dạng không kín như hộp cộng hưởng điện môi, hộp cộng hưởng hở ở dải mm hay dải quang học bao gồm hai bản phản xạ đặt song song cách nhau một khoảng nhất định. Các hộp cộng hưởng kín lại chia làm hai loại:

1. Các hộp cộng hưởng có cấu trúc tương đối đơn giản được tạo nên từ các đoạn ống dẫn sóng đồng nhất rỗng như: hộp cộng hưởng chữ nhật, hộp cộng hưởng trụ tròn, hộp cộng hưởng đồng trục, hộp cộng hưởng xuyên tâm …
2. Các hộp cộng hưởng có cấu trúc phức tạp hơn như: hộp cộng hưởng hình xuyến, hộp cộng hưởng dạng một khâu của đèn Manhetron, hộp cộng hưởng đồng trục có khe hở …

Đối với các hộp cộng hưởng từ đoạn ống dẫn sóng rỗng, do cấu trúc đơn giản nên ta có thể tìm được trường điện từ các dạng tồn tại bên trong chúng bằng cách tìm nghiệm của các phương trình Maxwell với các điều kiện biên đã cho rồi từ đó tìm được các đại lượng đặc trưng cơ bản là bước sóng cộng hưởng riêng hay tần số cộng hưởng riêng và độ phẩm chất của hộp cộng hưởng ứng với các dạng dao động khác nhau trong hộp.

Đối với các hộp cộng hưởng phức tạp thì do cấu trúc điều kiện biên phức tạp, ta chỉ xét cấu trúc của trường điện từ của các dao động hay sóng trong chúng, kết hợp với tìm biểu thức cho bước sóng hay tần số cộng hưởng riêng của dạng dao động được sử dụng và nêu ứng dụng của chúng.

Khác với các mạch cộng hưởng LC chỉ có một tần số cộng hưởng riêng f_0 khi đã cho các giá trị của L và C, trong hộp cộng hưởng với kích thước đã cho có thể tồn tại vô số các dao động riêng có cấu trúc trường khác nhau và tương ứng cho các bước sóng cộng hưởng hay tần số cộng hưởng và độ phẩm chất khác nhau.

Các hộp cộng hưởng được ứng dụng trong kỹ thuật siêu cao làm mạch dao động trong các lĩnh vực như: trong chế độ dao động tự do nó được dùng làm hộp tiếng vọng để kiểm tra các trạm phát xung. Trong chế độ dao động cưỡng bức, hộp cộng hưởng đóng vai trò của hệ cộng hưởng chọn lọc cho các thiết bị thu, phát, đo lường. Trong các dụng cụ điện tử và bán dẫn siêu cao, hộp cộng hưởng tạo ra không gian tương tác và trao đổi năng lượng giữa trường điện từ và các điện tử hoặc lỗ trống để tạo hoặc khuếch đại các dao động siêu cao tần.

7.1 HỆ SỐ PHẨM CHẤT CỦA HỘP CỘNG HƯỞNG

Hệ số phẩm chất của hộp cộng hưởng là một tham số cơ bản, nó đặc trưng cho khả năng duy trì các dao động tự do trong hộp và dải thông của hộp. Nếu hộp cộng hưởng được sử dụng làm mạch dao động cộng hưởng trong máy thu thì hệ số phẩm chất của nó đánh giá khả năng chọn lọc tần số của máy thu.

Hệ số phẩm chất của mạch cộng hưởng đối với một dạng mạch dao động riêng được xác định bởi biểu thức sau:

$$Q = \omega_0 \frac{W}{P_{th}} \qquad (7.1)$$

Hay:
$$Q = 2\pi \frac{W}{W_{th}}\bigg|_{\omega=\omega_0} \qquad (7.2)$$

W là năng lượng của trường điện từ tích lũy trong hộp. W_{th} là năng lượng điện từ tiêu hao trong hộp sau một chu kỳ của trường, P_{th} là công suất tiêu hao của trường trong hộp, ω_0 là tần số cộng hưởng của dao động. Vì trong hộp cộng hưởng tồn tại vô số các dao động riêng, mỗi dạng có cấu trúc trường riêng nên có năng lượng tích lũy, năng lượng tiêu hao hay công suất tiêu hao riêng, do đó hộp cộng hưởng cũng có vô số hệ số phẩm chất. Khi xét độ phẩm chất của hộp cộng hưởng, ta hiểu ngầm là chỉ cho một dạng dao động riêng không suy biến tồn tại trong hộp.

Tiêu hao năng lượng của trường điện từ trong hộp cộng hưởng do các nguyên nhân: tiêu hao trên bề mặt bên trong của hộp do hiệu ứng bề mặt, tiêu hao trong chất điện môi chứa trong hộp, tiêu hao do ghép với tải bên ngoài của hộp nên ta có thể viết:

$$P_{th} = P_{thkl} + P_{thdm} + P_{tht} \qquad (7.3)$$

Hay:
$$\frac{1}{Q_t} = \frac{P_{th}}{\omega_0 W} = \frac{1}{Q_{kl}} + \frac{1}{Q_{dm}} + \frac{1}{Q_{ng}} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{ng}} \qquad (7.4)$$

Hệ số phẩm chất của hộp khi chỉ tính đến tiêu hao do hiệu ứng bề mặt trong hộp:

$$Q_{kl} = \omega_0 \frac{W}{P_{thkl}} \qquad (7.5)$$

Hệ số phẩm chất của hộp khi chỉ tính đến tiêu hao trong điện môi chứa trong hộp:

$$Q_{dm} = \omega_0 \frac{W}{P_{thdm}} \tag{7.6}$$

Hệ số phẩm chất ngoài khi chỉ tính đến tiêu hao do ghép tải ở ngoài hộp:

$$Q_{ng} = \omega_0 \frac{W}{P_{tht}} \tag{7.7}$$

Trong trường hợp chung thì hệ số phẩm chất của hộp cộng hưởng là hệ số phẩm chất tải Q_t. Q_0 được gọi là hệ số phẩm chất không tải hay hệ số phẩm chất riêng của hộp. Nó chỉ liên quan đến tiêu hao xảy ra trong bản thân hộp mà không tính đến ảnh hưởng của tải. Ta có:

$$\frac{1}{Q_0} = \frac{1}{Q_{kl}} + \frac{1}{Q_{dm}} \tag{7.8}$$

Để chỉ mức độ liên kết giữa hộp cộng hưởng và tải bên ngoài, người ta còn đưa vào khái niệm hiệu suất của hộp cộng hưởng xác định bởi biểu thức sau:

$$\eta_{th} = \frac{P_{tht}}{P_{th}} \tag{7.9}$$

Từ (7.4), (7.8), (7.9):

$$\eta_{th} = \frac{Q_t}{Q_{ng}} = \frac{Q_0}{Q_0+Q_{ng}} = 1 - \frac{Q_t}{Q_0} \tag{7.10}$$

Khi $Q_0 = Q_{ng}$ ta có sự ghép giữa hộp cộng hưởng và tải ở chế độ tới hạn. Khi $Q_{ng} < Q_0$ ta có chế độ ghép chặt, ngược lại chế độ ghép lỏng ứng với trường hợp $Q_{ng} > Q_0$.

Ta có thể tính được biểu thức của Q_{kl} khi biết biểu thức các thành phần trường điện từ của dạng dao động đã cho theo (7.5). Năng lượng tích lũy của trường điện từ W có thể tính qua điện năng cực đại hay từ năng cực đại. Ở đây ta tính qua từ năng cực đại. Do đó ta có thể viết:

$$W = W_M = \frac{1}{2}\int_V \mu |H_m|^2 dV \tag{7.11}$$

Công suất tiêu hao do hiệu ứng bề mặt:

$$P_{th} = \frac{1}{2} R_s \int_{S_h} |H_\tau|^2 dS \tag{7.12}$$

H_m là biên độ của từ trường H trong hộp cộng hưởng. H_τ là thành phần tiếp tuyến của trường tại thành phần bên trong hộp cộng hưởng. R_s là điện trở mặt riêng của kim loại làm thành hộp cộng hưởng:

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu_{kl}}{2\sigma_{kl}}} \tag{7.13}$$

$$Q_{kl} = \omega_0 \frac{\int_V \mu|H_m|^2 dV}{R_s \int_{S_h} |H_\tau|^2 dS} = \frac{2\mu}{\delta\mu_{kl}} \frac{\int_V |H_m|^2 dV}{\int_{S_h} |H_\tau|^2 dS} \tag{7.14}$$

Với δ là độ sâu thâm nhập của trường, μ_{kl}, σ_{kl} là độ từ thẩm và độ dẫn riêng của kim loại thành hộp, μ là độ từ thẩm của điện môi chứa trong hộp, S_h là diện tích thành hộp.

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega_0\mu_{kl}\sigma_{kl}}} \tag{7.15}$$

Việc tính chính xác Q_{kl} khó vì trong trường hợp chung, dạng hộp cộng hưởng rất phức tạp và khó tìm được nghiệm của phương trình sóng qua biểu thức giải tích. Tuy nhiên ta có thể đánh giá sơ bộ giá trị của Q_{kl} khi áp dụng kết quả của định lý trung bình:

$$\int_V |H_m|^2 dV \approx H_{mtb}^2 V \tag{7.16}$$

$$\int_{S_h} |H_\tau|^2 dS \approx H_{\tau tb}^2 S_h \tag{7.17}$$

Đối với kim loại làm hộp cộng hưởng thường có $\mu_{kl} \approx \mu_0$ và điện môi trong hộp cũng có $\mu \approx \mu_0$. Ở đây, H_{mtb} và $H_{\tau tb}$ là giá trị trung bình của biên độ từ trường và thành phần tiếp tuyến của nó ở trên hộp và trên thành hộp. Khi đó:

$$Q_{kl} = k\frac{V}{S}\frac{1}{\delta} \tag{7.18}$$

$$k = \frac{2H_{mtb}^2}{H_{\tau tb}^2} \tag{7.19}$$

Nhận xét: Q_{kl} phụ thuộc vào tỉ số của thể tích và diện tích mặt hộp V/S, phụ thuộc vào dạng dao động riêng trong hộp và tỉ lệ nghịch với độ thấm sâu của trường δ. Thông thường ở dải sóng cm thì tỉ số V/S_h cỡ bước sóng, hệ số k cỡ đơn vị, còn độ thấm sâu cỡ một phần của micromet nên hệ số phẩm chất Q_{kl} có giá trị vào khoảng 10^3 đến 10^4, lớn gấp nhiều lần hệ số phẩm chất của khung dao động tập trung. Muốn cho Q_{kl} của hộp lớn, ta phải chọn dạng hộp và dạng dao động thích hợp và đặc biệt giảm trở mặt riêng R_s bằng cách chọn kim loại có độ dẫn điện cao làm thành hộp và gia công mặt bên trong hộp cho thật nhẵn. Hộp cộng hưởng tiếng vọng ở dải sóng cm dùng trong đài radar đạt được Q_0 cỡ hàng trăm nghìn. Nếu trong hộp cộng hưởng chứa đầy chất điện môi có độ dẫn σ_{dm} thì công suất tiêu hao trong nó được tính theo công thức:

$$P_{thdm} = \frac{1}{2}\int_V JEdV = \frac{1}{2}\sigma_{dm}\int_V |E_m|^2 dV \tag{7.20}$$

Năng lượng của trường tích lũy trong hộp bằng năng lượng điện trường cực đại trong nó:

$$W = W_E = \frac{1}{2}\varepsilon_{dm}\int_V |E_m|^2 dV \tag{7.21}$$

E_m là biên độ điện trường trong hộp, ε_{dm} là độ điện thẩm của điện môi chứa bên trong hộp. Từ đó:

$$Q_{dm} = \omega_0\frac{\varepsilon_{dm}}{\sigma_{dm}} = \frac{1}{tg\delta_e} \tag{7.22}$$

(7.22) cho thấy hệ số phẩm chất Q_{dm} của hộp chỉ do tính chất của bản thân chất điện môi chứa bên trong hộp quyết định, không phụ thuộc vào dạng của hộp. Từ (7.4), (7.8) và (7.22), ta xác định được hệ số phẩm chất riêng Q_0 của hộp.

Việc tính biểu thức Q_{ng} liên quan đến bài toán kích thích hay ghép của trường và phụ thuộc vào dạng của hộp và phần tử kích thích hay ghép. Ở đây ta không xét đến bài toán này.

Bây giờ ta xác định Q_t. Do khó khăn của việc tính Q_{ng} nên tính Q_t theo (7.4) là không nên. Phương pháp thuận tiện hơn để xác định Q_t của hộp cộng hưởng là qua đo đạc bằng thực nghiệm dựa trên mối quan hệ giữa Q_t với hằng số thời gian τ của dao động tự do trong hộp và độ rộng dải thông $2\Delta\omega$ (hoặc $2\Delta f$) của hộp trong chế độ cưỡng bức. Nếu ta kích thích hộp cộng hưởng bằng một xung đơn thì trong hộp có dao động tự do với tần số cộng hưởng ω_0 nhưng do có tiêu hao nên dao động tự do tắt dần. Năng lượng tích lũy của nó giảm theo hàm mũ. Từ đó ta có:

$$\frac{dW}{dt} = -P_{th} = -\omega_0\frac{W}{Q_t} \tag{7.23}$$

Dấu (-) chỉ sự giảm năng lượng của dao động tự do trong hộp. Từ phương trình vi phân trên ta tìm được quy luật giả của năng lượng W:

$$W = W_0 e^{-\frac{\omega_0}{Q_t}t} \tag{7.24}$$

W_0 là năng lượng ban đầu của dao động trong hộp. Vì biên độ trường tỷ lệ với căn bậc hai của năng lượng nên ta có thể viết:

$$E_m = E_{m0} e^{-\frac{\omega_0}{2Q_t}t} = E_{m0} e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{7.25}$$

$$\tau = \frac{2Q_t}{\omega_0} \tag{7.26}$$

Tại thời điểm t = τ:

$$E_m = E_{m0} e^{-1} \tag{7.27}$$

Tức sau khoảng thời gian bằng hằng số τ thì biên độ trường của dao động tự do trong hộp giảm đi e lần so với giá trị ban đầu E_{m0}. Nếu ta đo được τ thì từ (7.26) xác định được Q_t của hộp.

Bây giờ ta tìm mối quan hệ giữa Q_t và dải thông của hộp: ứng với mỗi dạng dao động riêng, hộp cộng hưởng trong chế độ dao động cưỡng bức ở vùng tần số xung quanh tần số cộng hưởng, đường cong cộng hưởng của hộp có dạng tương tự như dạng của mạch dao động LC tập trung. Cụ thể ta có thể tìm được dạng đường cong cộng hưởng của hộp như sau:

$$E_m = \frac{E_{m0}}{\sqrt{1+\left(2Q_t\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}\right)^2}} \tag{7.28}$$

E_{m0} là biên độ của trường ở tần số cộng hưởng. Nếu gọi các tần số ω_1, ω_2 là giới hạn của dải thông của hộp mà tại đây biên độ trường giảm đi $1/\sqrt{2}$ so với giá trị cực đại E_{m0} thì ta có:

$$E_m(\omega_1, \omega_2) = \frac{E_{m0}}{\sqrt{1+\left(2Q_t\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{E_{m0}}{\sqrt{2}} \tag{7.29}$$

Hay:

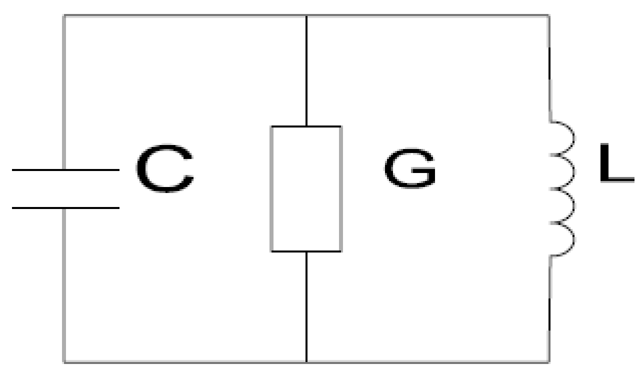
$$2Q_t\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 1 \tag{7.30}$$

$$Q_t = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega} = \frac{f_0}{2\Delta f} \tag{7.31}$$

$2\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, $2\Delta f = f_2 - f_1$ là dải thông của hộp cộng hưởng. Từ (7.31) ta có thể xác định được hệ số phẩm chất tải Q_t của hộp nếu đo được dải thông của nó.

Biểu diễn sơ đồ tương đương của hộp cộng hưởng:

Khi nghiên cứu các mạch có sử dụng hộp cộng hưởng như trong mạch dao động của máy phát, máy thu, thiết bị đo, các bộ lọc siêu cao, việc biểu diễn hộp cộng hưởng qua sơ đồ tương đương rất tiện lợi. Khi hộp cộng hưởng làm việc với một dạng dao động riêng không suy biến và khi các tần số cộng hưởng của các dạng dao động riêng lân cận khác cách tần số cộng hưởng của dạng dao động công tác một khoảng không nhỏ hơn một nửa độ rộng dải thông của hộp ứng với dạng dao động công tác thì ta có thể biểu diễn hộp cộng hưởng dưới dạng sơ đồ tương đương như một mạch dao động tập trung mắc song song.



Hình 7.1 – Sơ đồ tương đương của hộp cộng hưởng

Dẫn nạp của hộp:

$$Y = G + jB = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad (7.32)$$

Điện dẫn:

$$G = G_h + G_t \quad (7.33)$$

G_h là điện dẫn của bản thân hộp và G_t là điện dẫn phản ánh từ tải qua phần tử ghép vào hộp, còn C và L là điện dung và điện cảm của hộp khi có phản ánh của tải vào hộp. vì ở siêu cao tần, ta có thể đo đạc được điện dẫn G và điện nạp B của hộp nên ta có thể tính được hệ số phẩm chất Q_t và Q_0 của hộp.

Điện nạp B của hộp có dạng:

$$B = \omega C\left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right) = \frac{C}{\omega}(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) \tag{7.34}$$

Ở tần số cộng hưởng ta có thể coi $\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$ nên:

$$B|_{\omega \approx \omega_0} = 2C(\omega - \omega_0) = 2C\Delta\omega \tag{7.35}$$

$$C = \frac{1}{2}\frac{dB}{d\omega}\Big|_{\omega \approx \omega_0} \tag{7.36}$$

Từ biểu thức tính hệ số phẩm chất mạch có thông số tập trung hay nối tiếp (trong Giáo trình Giải tích mạch điện), ta có công thức xác định hệ số phẩm chất Q_t và Q_0 của hộp cộng hưởng:

$$Q_t = \frac{\omega_0}{2(G_h + G_t)}\left(\frac{dB}{d\omega}\right)\Big|_{\omega \approx \omega_0} \tag{7.37}$$

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{2G_h}\left(\frac{dB}{d\omega}\right)\Big|_{\omega \approx \omega_0} \tag{7.38}$$

Từ thực nghiệm, đã rút ra các kết luận sau:

- Điện dẫn của bản thân hộp cộng hưởng G_h xung quanh tần số cộng hưởng ω_0 không thay đổi.
- Điện nạp B của hộp phụ thuộc tuyến tính vào tần số và có độ dốc càng lớn khi độ phẩm chất Q_0 của hộp lớn, đạo hàm $dB/d\omega > 0$.
- Điện nạp B của hộp sẽ đổi dấu khi qua tần số cộng hưởng ω_0.

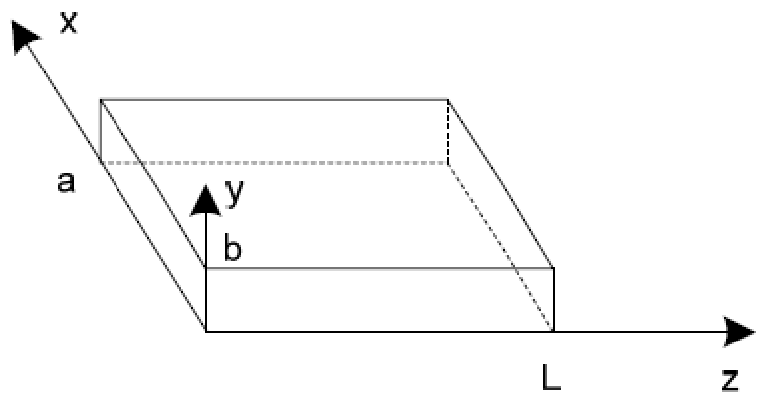
7.2 CÁC HỘP CỘNG HƯỞNG ĐƠN GIẢN

7.2.1 Hộp cộng hưởng chữ nhật

Hộp cộng hưởng chữ nhật được hình thành từ một ống dẫn sóng chữ nhật rỗng, được bịt kín hai đầu bởi hai vách kim loại làm ống dẫn sóng. Để tìm trường điện từ tồn tại trong hộp cộng hưởng, ta chọn hệ tọa độ Descartes có trục z hướng theo chiều dài L của hộp, còn trục x và y nằm trùng với tiết diện ngang. Hộp cộng hưởng có kích thước a, b và L. Như vậy hai mặt đáy của hộp có phương trình là z = 0, z = L.

Để đơn giản ta xét với trường hợp cộng hưởng chữ nhật lý tưởng, tức là kim loại làm thành hộp có $\gamma_{kl} = \infty$ và trong hộp là điện môi lý tưởng $\gamma_{dm} = 0$. Như vậy việc tìm trường điện từ trong hộp cộng hưởng sẽ là tìm nghiệm của phương trình Maxwell hay phương trình sóng với điều kiện biên là thành phần tiếp tuyến của điện trường trên thành bên trong hộp bằng không.

$$E_\tau|_{S_h} = 0 \tag{7.39}$$



Hình 7.2 –Hộp cộng hưởng chữ nhật

Để tìm nghiệm của các phương trình sóng cho hộp cộng hưởng từ đoạn ống dẫn sóng nói chung và hộp cộng hưởng chữ nhật nói riêng, ta áp dụng phương pháp phân ly biến số giống như đối với ống dẫn sóng:

$$\vec{E}_m(q_1,q_2,z) = \vec{E}_n(q_1,q_2)F(z) \tag{7.40}$$

$$\vec{H}_m(q_1,q_2,z) = \vec{H}_n(q_1,q_2)F(z) \tag{7.41}$$

$$\vec{E}_n(q_1,q_2) = \vec{E}_q(q_1,q_2) + E_z(q_1,q_2)\vec{\iota}_z \tag{7.42}$$

$$\vec{H}_n(q_1,q_2) = \vec{H}_q(q_1,q_2) + H_z(q_1,q_2)\vec{\iota}_z \tag{7.43}$$

Ở đây, $\vec{E}_q, \vec{H}_q$ là các vector ngang chỉ phụ thuộc vào các tọa độ ngang q_1, q_2 của điện trường và từ trường, E_z và H_z là các thành phần dọc của điện trường và từ trường. Nếu đặt (7.40), (7.41), (7.42), (7.43) vào các phương trình sóng, ta được các phương trình xác định hàm F(z), E_z, H_z và $\vec{E}_q, \vec{H}_q$:

$$\frac{d^2F}{dz^2} - \gamma^2 F = 0 \tag{7.44}$$

$$\Delta_q E_z + \chi^2 E_z = 0 \tag{7.45}$$

$$\Delta_q H_z + \chi^2 H_z = 0 \tag{7.46}$$

$$\Delta_q\vec{E}_q + \chi^2\vec{E}_q = 0 \quad (7.47)$$

$$\Delta_q\vec{H}_q + \chi^2\vec{H}_q = 0 \quad (7.48)$$

Phương trình (7.44) cho nghiệm dạng:

$$F(z) = A.e^{-\gamma z} + B.e^{\gamma z} \quad (7.49)$$

Phương trình (7.45), (7.46) cho các thành phần dọc E_z, H_z được giải bằng phương pháp phân ly biến số trong các hệ tọa độ cụ thể cho các dạng hộp đã cho. Các thành phần ngang của trường $\vec{E}_q, \vec{H}_q$ được tìm từ (7.47), (7.48). Nhưng đơn giản hơn, ta có thể tìm chúng từ các thành phần dọc đã biết thông qua các phương trình Maxwell. Trong hệ tọa độ trụ tổng quát, ta nhận được các biểu thức sau:

$$E_1 = \frac{1}{\chi^2}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial E_z}{\partial q_1}\right) - j\omega\mu\frac{1}{h_2}\frac{\partial H_z}{\partial q_2}\right\} \quad (7.50)$$

$$E_2 = \frac{1}{\chi^2}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial E_z}{\partial q_2}\right) + j\omega\mu\frac{1}{h_1}\frac{\partial H_z}{\partial q_1}\right\} \quad (7.51)$$

$$H_1 = \frac{1}{\chi^2}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial H_z}{\partial q_1}\right) + j\omega\mu\frac{1}{h_2}\frac{\partial E_z}{\partial q_2}\right\} \quad (7.52)$$

$$H_2 = \frac{1}{\chi^2}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial H_z}{\partial q_2}\right) - j\omega\mu\frac{1}{h_1}\frac{\partial E_z}{\partial q_1}\right\} \quad (7.53)$$

Với h_1, h_2 là hệ số Larmor của hệ tọa độ. Trong hệ tọa độ Descartes thì $h_1 = h_2 = 1$, q_1 là x, q_2 là y.

Trong hộp cộng hưởng chữ nhật chỉ tồn tại hai loại trường TM và TE nên ta sẽ tìm dạng của hàm F(z) cho các trường này. Ta có thể tách điều kiện biên ra thành hai dạng sau:

$$E_\tau|_{S_{xq}} = 0 \quad (7.54)$$

$$E_\tau|_{z=0,z=L} = 0 \quad (7.55)$$

Điều kiện biên (7.54) hoàn toàn tương tự như điều kiện biên đối với ống dẫn sóng có cùng tiết diện ngang với hộp cộng hưởng. Từ đây ta rút ra kết luận là việc tìm các hàm phân bố theo các tọa độ ngang của E_z và H_z trong hộp cộng hưởng từ đoạn ống dẫn sóng có dạng tương tự như các hàm phân bố theo các tọa độ ngang của các thành phần dọc của trường trong ống dẫn sóng có cùng dạng tiết diện ngang. Do vậy ta có thể áp dụng các kết quả đã nhận được khi nghiên cứu trong phần ống dẫn sóng.

Điều kiện biên (7.55) cho phép xác định được phân bố của trường dọc theo tọa độ trong hộp cộng hưởng, tức là tìm dạng cụ thể của hàm F(z) đối với các dạng trường.

Phân bố của trường dọc theo trục z:

Đối với trường TM(E) thì từ điều kiện biên (7.55) và (7.50), (7.51), (7.52), (7.53), ta suy ra điều kiện:

$$\left.\frac{dF}{dz}\right|_{z=0,z=L} = 0 \tag{7.56}$$

Cho z = 0, từ (7.56) và (7.49) ta được: A = B.

Cho z = L: $-\gamma Ae^{-\gamma L} + \gamma Be^{\gamma L} = 0 = \gamma A(e^{\gamma L} - e^{-\gamma L}) = \gamma A sh(\gamma L)$ hay $sh(\gamma L) = 0$. Phương trình này chỉ có nghiệm khi $\gamma = j\beta$ tức là chuyển sang dạng:

$$sh(\gamma L) = sh(j\beta L) = 2jsin(\beta L) \tag{7.57}$$

$$\beta = \frac{p\pi}{L} \quad p = 0,1,2,\ldots \tag{7.58}$$

Hàm phân bố F của trường có dạng:

$$F(z) = A.e^{-j\beta z} + A.e^{j\beta z} = 2Acos(\beta z) \tag{7.59}$$

Đối với trường TE(H) thì từ điều kiện biên (7.55) và (7.50), (7.51), (7.52), (7.53):

$$F(0) = F(L) = 0 \tag{7.60}$$

Từ (7.60) và (7.49) ta cũng rút ra được biểu thức cho $\gamma = j\beta$ và β có dạng như (7.59) và cho hàm phân bố F(z) có dạng sau:

$$F(z) = 2jAsin(\beta z) \tag{7.61}$$

Trường TM(E):

Áp dụng kết quả của phân bố trường theo tọa độ ngang trong ống dẫn sóng chữ nhật, hàm F(z) từ (7.59) và (7.50), (7.51), (7.52), (7.53) ta nhận được biểu thức sau cho trường TM trong hộp cộng hưởng chữ nhật:

$$E_z = E_m \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{L}z\right) \tag{7.62}$$

$$E_x = -\frac{E_m}{\chi^2}\frac{p\pi}{L}\frac{m\pi}{a}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{L}z\right) \tag{7.63}$$

$$E_y = -\frac{E_m}{\chi^2}\frac{p\pi}{L}\frac{n\pi}{b}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{L}z\right) \quad (7.64)$$

$$H_x = \frac{E_m j\omega\varepsilon}{\chi^2}\frac{n\pi}{b}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{L}z\right) \quad (7.65)$$

$$H_y = -\frac{E_m j\omega\varepsilon}{\chi^2}\frac{m\pi}{a}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{L}z\right) \quad (7.66)$$

E_m = 2A là một hằng số tùy ý, được xác định từ kết quả của việc kích thích trường. χ được tính từ (6.55) và (6.61).

Bước sóng cộng hưởng riêng trong hộp cộng hưởng chữ nhật được tính từ biểu thức sau:

$$\chi^2 = k^2 + \gamma^2 \quad (7.67)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad (7.68)$$

$$\gamma = j\beta = j\frac{p\pi}{L} \quad (7.69)$$

$$\chi^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad (7.70)$$

Từ đó:

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{p}{L}\right)^2}} \quad (7.71)$$

Từ biểu thức của các thành phần trường, ta thấy các thành phần ngang của trường điện và trường từ lệch pha nhau 90^0. Do đó vector mật độ công suất trung bình theo phương trục z bằng 0. Ngoài ra, thành phần dọc E_z đồng pha với các thành phần ngang E_x, E_y, điểm cực đại của chúng lại lệch nhau theo trục z đi một khoảng $\lambda_t/4$. Trong ống dẫn sóng chữ nhật, ta đã biết hệ số pha β biểu thị qua bước sóng trong ống dẫn sóng λ_t có dạng:

$$\beta = 2\pi/\lambda_t \quad (7.72)$$

Mà $\beta = p\pi/L$ nên:

$$L = p\lambda_t/2 \quad (7.73)$$

(7.73) gọi là điều kiện cộng hưởng của hộp cộng hưởng chữ nhật. Điều kiện (7.73) mô tả hiện tượng là từ một tiết diện z bất kỳ, sóng truyền dọc theo trục z và và sóng phản xạ liên tiếp hai lần tại hai đáy z = 0, z = L có pha cách nhau 2pπ tức là chúng đồng pha. Dạng dao động đơn vị nào thỏa mãn điều kiện cộng hưởng sẽ có biên độ rất lớn trong hộp, còn các dạng dao động khác sẽ bị tiêu hao nên tắt rất nhanh.

Trường TE(H)

Nếu bây giờ ta áp dụng kết quả cho hai hàm phân bố theo các tọa độ ngang của trường TE trong ống dẫn sóng chữ nhật dạng (6.68) và dạng hàm F(z) từ (7.61) và (7.50), (7.51), (7.52), (7.53) sẽ nhận được các thành phần trường TE trong hộp cộng hưởng chữ nhật sau:

$$H_z = H_m \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{L}z\right) \qquad (7.74)$$

$$H_x = -\frac{H_m}{\chi^2}\frac{p\pi}{L}\frac{m\pi}{a}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{L}z\right) \qquad (7.75)$$

$$H_y = -\frac{H_m}{\chi^2}\frac{p\pi}{L}\frac{n\pi}{b}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{L}z\right) \qquad (7.76)$$

$$E_x = \frac{H_m j\omega\mu}{\chi^2}\frac{n\pi}{b}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{L}z\right) \qquad (7.77)$$

$$H_y = -\frac{H_m j\omega\mu}{\chi^2}\frac{m\pi}{a}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{L}z\right) \qquad (7.78)$$

Ở đây H_m = -2jA, χ cũng có dạng như đối với ống dẫn sóng chữ nhật theo (6.55) và (6.61).

Bước sóng cộng hưởng riêng của dạng trường TE_{mnp} trong hộp này cũng được biểu thị bởi (7.71). Điều kiện cộng hưởng cho dạng trường TE trong hộp cộng hưởng chữ nhật cũng tuân theo (7.73). Từ các biểu thức (7.66) đến (7.71) và (7.74) đến (7.78), ta thấy ứng với một cặp ba số nguyên (m, n, p) trong hộp cộng hưởng chữ nhật tồn tại các dạng trường đơn vị dạng $TM_{mnp}(E_{mnp})$ và $TE_{mnp}(H_{mnp})$. Chúng được gọi là các dạng dao động riêng trong hộp cộng hưởng. Mỗi dạng dao động riêng có bước sóng cộng hưởng riêng theo (7.73). Khi đã cho kích thước của hộp, dao động riêng có bước sóng cộng hưởng lớn nhất gọi là dạng dao động cơ bản, các dạng dao động khác gọi là dạng dao động bậc cao. Chẳng hạn nếu ta có kích thước của hộp: L > a > b > 0 thì:

$$\lambda_0(H_{101}) = \frac{2aL}{\sqrt{a^2+L^2}} max \tag{7.79}$$

Nên dạng dao động H_{101} là cơ bản trong hộp cộng hưởng chữ nhật.

Các dạng dao động riêng trong hộp cộng hưởng chữ nhật có cấu trúc trường khác nhau, nhưng có cùng tần số hay bước sóng cộng hưởng riêng gọi là dạng dao động suy biến. Chẳng hạn các dạng dao động TM_{mnp} và TE_{mnp} khi có cùng chỉ số là các dạng suy biến. Dạng dao động cơ bản trong hộp cộng hưởng không đóng vai trò quan trọng như trường cơ bản trong ống dẫn sóng.

7.2.2 Hộp cộng hưởng trụ tròn

Trường TM(E) và TE(H)

Hộp cộng hưởng trụ tròn được hình thành từ một đoạn ống dẫn sóng tròn được bịt kín hai đầu bởi thành kim loại làm ống dẫn sóng. Để tìm trường điện từ trong hộp cộng hưởng trọ tròn, ta dùng hệ tọa độ có trục Oz trùng với trục của hộp, tâm O đặt tại tậm của một trong hai đáy. Như vậy nếu hộp có bán kính R_0 và chiều dài L thì mặt xung quanh và hai đáy có phương trình là: $r = R_0$, $z = 0$, $z = L$. Để đơn giản ta cũng xét với hộp cộng hưởng dạng lý tưởng tức là thành hộp làm bằng kim loại dẫn điện lý tưởng, bên trong chứa không khí hoặc chân không có độ dẫn điện bằng không.

Các biểu thức của trường điện từ trong hộp cộng hưởng trụ tròn được tìm bằng cách tính nghiệm của các phương trình sóng với điều kiện biên (7.39). Cũng tương tự như trường hợp với hộp cộng hưởng chữ nhật, khi phân tích điều kiện biên ta có thể tách thành hai trường hợp cho mặt xung quanh và cho hai đáy tương tự như (7.54) và (7.55):

$$E_\tau|_{r=R_0} = 0 \tag{7.80}$$

$$E_\tau|_{z=0,z=L} = 0 \tag{7.81}$$

Điều kiện biên (7.80) hoàn toàn tương tự như điều kiện biên trong ống dẫn sóng tròn có cùng tiết diện. Do đó ta có thể áp dụng các kết quả về các hàm phân bố của trường theo tọa độ ngang r, φ trong ống dẫn sóng tròn cho hàm phân bố của trường cũng theo các tọa độ r, φ trong hộp cộng hưởng trụ tròn mà không cần phải tìm nghiệm của các phương trình sóng nữa.

Điều kiện biên (7.81) hoàn toàn tương tự như điều kiện biên (7.55) trong hộp cộng hưởng chữ nhật có cùng chiều dài L. Do vậy ta có thể lấy hàm phân bố của trường dọc theo tọa độ z trong hộp cộng hưởng chữ nhật làm hàm phân bố theo tọa độ này trong hộp cộng hưởng trụ tròn mà không cần giải các phương trình cho hàm F. Tương tự hộp cộng hưởng chữ nhật, trong hộp cộng hưởng trụ tròn cũng tồn tại các trường loại TM(E) và TE(H).

Trường TM(E)

Thành phần dọc của điện trường E_z khi áp dụng các kết quả từ hàm phân bố theo tọa độ ngang trong ống dẫn sóng tròn của trường TM(E) và hàm phân bố theo tọa độ z trong hộp cộng hưởng chữ nhật cho trường này:

$$E_z(r,\varphi,z) = E_m J_m(\chi r)\cos(m\varphi-\varphi_0)\cos\left(\frac{p\pi}{L}z\right) \tag{7.82}$$

Các thành phần ngang của trường được tìm từ (7.50), (7.51), (7.52), (7.53) qua thành phần dọc E_z vừa tìm. Trong hệ tọa độ trụ: $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $h_1 = 1$, $h_2 = r$. Ta có các kết quả cho các thành phần ngang trường TM(E) như sau:

$$E_R = \frac{1}{\chi^2}\frac{\delta}{\delta z}\left(\frac{\delta E_z}{\delta r}\right) = -\frac{E_m p\pi}{\chi L}\frac{dJ_m(\chi r)}{d(\chi r)}\cos(m\varphi-\varphi_0)\sin\left(\frac{p\pi}{L}z\right) \tag{7.83}$$

$$E_\varphi = \frac{1}{\chi^2}\frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta z}\left(\frac{\delta E_z}{\delta\varphi}\right) = \frac{E_m m p\pi}{\chi^2 r L}J_m(\chi r)\sin(m\varphi-\varphi_0)\sin\left(\frac{p\pi}{L}z\right) \tag{7.84}$$

$$H_R = \frac{j\omega\varepsilon}{\chi^2 r}\frac{\delta E_z}{\delta\varphi} = -\frac{jE_m\omega\varepsilon m}{\chi^2 r}J_m(\chi r)\sin(m\varphi-\varphi_0)\cos\left(\frac{p\pi}{L}z\right) \tag{7.85}$$

$$H_\varphi = -\frac{j\omega\varepsilon}{\chi^2}\frac{\delta E_z}{\delta r} = -\frac{jE_m\omega\varepsilon}{\chi}\frac{dJ_m(\chi r)}{d(\chi r)}\cos(m\varphi-\varphi_0)\cos\left(\frac{p\pi}{L}z\right) \tag{7.86}$$

χ như ở biểu thức trong ống dẫn sóng tròn, E_m là hằng số.

Trường TE(H)

Thành phần từ trường dọc H_z của trường TE trong hộp cộng hưởng trụ tròn được tìm khi sử dụng các kết quả đã nhận được về hàm phân bố theo các tọa độ ngang r, φ trong ống dẫn sóng tròn và hàm phân bố theo tọa độ z trong hộp cộng hưởng chữ nhật đối với trường TE. Kết quả ta nhận được biểu thức cho H_z:

$$H_z(r,\varphi,z) = H_m J_m(\chi r)\cos(m\varphi - \varphi_0)\sin\left(\frac{p\pi}{L}z\right) \quad (7.87)$$

Từ (7.50), (7.51), (7.52), (7.53) và (7.87), ta có các biểu thức cho các thành phần ngang của trường trong hộp cộng hưởng trụ tròn:

$$H_r = \frac{1}{\chi^2}\frac{\delta}{\delta z}\left(\frac{\delta H_z}{\delta r}\right) = -\frac{H_m p\pi}{\chi L}\frac{dJ_m(\chi r)}{d(\chi r)}\cos(m\varphi - \varphi_0)\cos\left(\frac{p\pi}{L}z\right) \quad (7.88)$$

$$H_\varphi = \frac{1}{\chi^2}\frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta z}\left(\frac{\delta H_z}{\delta \varphi}\right) = \frac{H_m m p\pi}{\chi^2 r L}J_m(\chi r)\sin(m\varphi - \varphi_0)\cos\left(\frac{p\pi}{L}z\right) \quad (7.89)$$

$$E_r = -\frac{j\omega\mu}{\chi^2 r}\frac{\delta H_z}{\delta\varphi} = -\frac{jH_m\omega\mu m}{\chi^2 r}J_m(\chi r)\sin(m\varphi - \varphi_0)\sin\left(\frac{p\pi}{L}z\right) \quad (7.90)$$

$$H_\varphi = \frac{j\omega\mu}{\chi^2}\frac{\delta H_z}{\delta r} = -\frac{jH_m\omega\mu}{\chi}\frac{dJ_m(\chi r)}{d(\chi r)}\cos(m\varphi - \varphi_0)\sin\left(\frac{p\pi}{L}z\right) \quad (7.91)$$

χ như ở biểu thức trong ống dẫn sóng tròn, H_m là hằng số.

Điều kiện cộng hưởng

Điều kiện cộng hưởng trong hộp cộng hưởng trụ tròn được tìm tương tự như trong hộp cộng hưởng chữ nhật. Nghĩa là:

$$\beta = 2\pi/\lambda_t \quad (7.92)$$

Mà $\beta = p\pi/L$ nên:

$$L = p\lambda_t/2 \quad (7.93)$$

Bước sóng cộng hưởng hay tần số cộng hưởng của các dạng dao động riêng trong hộp cộng hưởng trụ tròn được tìm từ biểu thức sau:

$$\chi^2 = k^2 + \gamma^2 = -\left(\frac{p\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 \quad (7.94)$$

Ở đây χ được tính theo (6.85) đối với trường TM(E) và (6.92) đối với trường TE(H). Từ đó ta có được bước sóng cộng hưởng của các dạng dao động riêng:

$$\lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{\varepsilon mn;\mu mn}{\pi R_0}\right)^2 + \left(\frac{P}{L}\right)^2}} \quad (7.95)$$

7.2.3 Hộp cộng hưởng đồng trục và xuyên tâm

Hộp cộng hưởng đồng trục được tạo ra từ một đoạn ống dẫn sóng đồng trục được bịt kín hai đầu bởi thành kim loại làm ống dẫn sóng. Dạng dao động cơ bản trong hộp cộng hưởng đồng trục khi $L > R_2 - R_1$ là dạng dao động TEM_1. Nó có bước sóng cộng hưởng:

$$\lambda_0(TEM_1) = 2L \quad (7.96)$$

Đối với các dạng dao động TEM_p, p = 1, 2, 3,… bước sóng cộng hưởng riêng được tính từ điều kiện cộng hưởng:

$$\lambda_{0p} = 2L/p \quad (7.97)$$

Khi $R_2 - R_1 > L$, bước sóng cộng hưởng của dạng dao động riêng E_{010} trong hộp cộng hưởng đồng trục lại bằng $2(R_2 - R_1)$ và rõ ràng là lớn hơn bước sóng cộng hưởng của dạng TEM_1 nên trong trường hợp này dạng dao động riêng E_{010} là dạng dao động cơ bản. Trường của dạng dao động này có một số đặc điểm sau:

- Do m = 0 nên trường không phụ thuộc φ.
- Do p = 0 nên điện trường chỉ có thành phần dọc hướng theo trục z.
- Từ trường chỉ có thành phần ngang H_φ dạng các vòng tròn đồng tâm.
- Do n = 1 nên dọc theo bán kính r chỉ có một chu kỳ biến thiên của điện và từ trường.

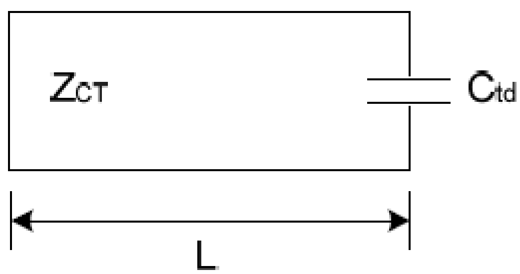
Từ các đặc điểm trên của trường dạng E_{010} ta thấy nó có đặc tính ngang theo phương của bán kính hộp cộng hưởng. Hộp cộng hưởng đồng trục trong trường hợp này được gọi là hộp cộng hưởng xuyên tâm.

7.3 CÁC HỘP CỘNG HƯỞNG PHỨC TẠP

7.3.1 Hộp cộng hưởng đồng trục có khe

Hộp cộng hưởng đồng trục có khe được hình thành từ một đoạn ống dẫn sóng đồng trục, một đầu ngắn mạch, còn đầu kia để hở giữa lõi trong và vách kim loại bên ngoài tạo thành một khe. Hộp cộng hưởng đồng trục có khe thuộc loại hộp có hình dáng phức tạp. Vùng khe hẹp của hộp cộng hưởng hình thành một điện dung, trong vùng này tập trung điện trường, còn trong vùng còn lại trường có dạng TEM_p. Chiều dài của lõi giữa hộp đồng trục là L, bán kính lõi trong là R_1, lõi ngoài là R_2, độ rộng của khe là d.

Để tìm tần số hoặc bước sóng cộng hưởng của dạng dao động TEM_p trong hộp cộng hưởng này ta sử dụng sơ đồ tương đương sau:



Hình 7.3 –Sơ đồ tương đương của hộp cộng hưởng đồng trục có khe

Phần khe của hộp được xem như có điện dung của một tụ điện phẳng:

$$C_{td} = \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{\varepsilon \pi R_1^2}{d} \tag{7.98}$$

Phần đồng trục ngắn mạch một đầu được coi là một đoạn đường truyền có trở sóng đặc tính Z_{CT}, dài L, ngắn mạch đầu cuối. Đầu hở mạch của đường truyền gắn với điện dung C_{td}. Điều kiện cộng hưởng được cho bởi biểu thức là tổng điện nạp hay kháng thuần tại điểm mắc điện dung bằng không.

$$\omega_0 C_{td} - \frac{1}{Z_{CT}} cotan \frac{\omega_0 L}{c} = 0 \tag{7.99}$$

$$cotan\left(\frac{\omega_0 L}{c} + p\pi\right) = \omega_0 C_{td} Z_{CT} \tag{7.100}$$

$$cotan(x + p\pi) = k' x \tag{7.101}$$

Trong đó $x = \frac{\omega_0 L}{c}, k' = \frac{C_{td} Z_{CT}}{L} c$, c là vận tốc ánh sáng trong chân không.

Giải phương trình (7.101) ta được các nghiệm x_{01}, x_{02} …

$$0 < x_{01} < \pi/2;\ \pi < x_{02} < 3\pi/2;\ \ldots;\ (p-1)\pi < x_{0p} < (2p-1)\pi/2$$

Từ $\lambda_0 = c/f_0 = 2\pi c/\omega_0$:

$$(p-1)\lambda_{0p}/2 < L_{0p} < (2p-1)\lambda_{0p}/4 \quad (7.102)$$

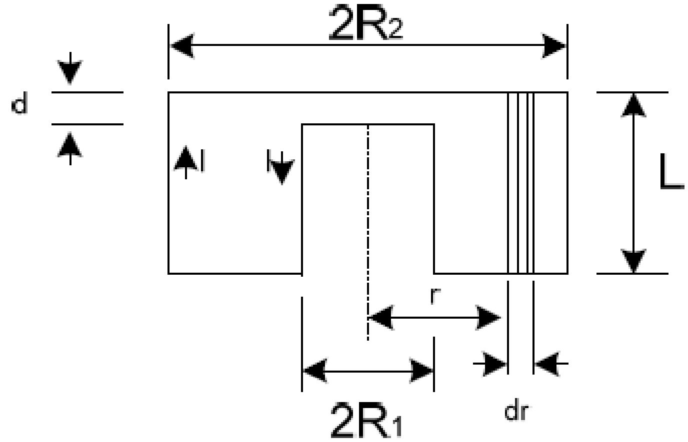
Trong thực tế, người ta hay dùng dạng dao động với chỉ số p = 1 để rút gọn kích thước của hộp cộng hưởng ở các dải sóng met và decimet. Từ (7.102):

$$0 < L_{01} < \lambda_{0p}/4 \quad (7.103)$$

So sánh (7.103) và (7.97), ta thấy khi đưa một khe vào đã làm cho chiều dài của hộp giảm đi một nửa. Tất nhiên do tồn tại khe hẹp nên dòng mặt có biên độ lớn gây tổn hao làm cho phẩm chất của hộp giảm.

Hộp cộng hượng đồng trục có khe còn được gọi là hộp cộng hưởng đồng trục mắc tải điện dung. Nó được sử dụng làm mạch cộng hưởng trong tần kế hay mạch dao động trong các bộ dao động dải sóng dm và cuối sóng met. Việc điều chỉnh cộng hưởng của hộp được thực hiện bằng cách thay đổi chiều dài L nhờ một pittông.

7.3.2 Hộp cộng hưởng hình xuyến



Hình 7.4 –Hộp cộng hưởng hình xuyến

Các điều kiện:

$$R_2 \ll \frac{\lambda}{4}; L \ll \frac{\lambda}{4}; d \ll L \quad (7.104)$$

Sự biến thiên của điện trường và từ trường của dạng dao động trong hộp theo các tọa độ R, φ và z là không đáng kể. Trong điều kiện như vậy, hộp cộng hưởng hình xuyến có dạng chuẩn dừng, tức có thể tách khá rõ rệt ra vùng điện và vùng từ. Vùng khe hẹp ở giữa xuyến với độ rộng của khe là d, tập trung chủ yếu đường sức điện trường tương đương với điện dung C_{td}. Vùng không gian xuyến hai bên tập trung chính đường sức từ trường tương đương như một điện cảm L_{td}. Hộp cộng hưởng hình xuyến có thể coi như là một mạch dao động tập trung với L_{td} và C_{td}. Do đó tần số cộng hưởng của mạch tính theo công thức:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_{td}C_{td}}} \tag{7.105}$$

Nếu bỏ qua hiệu ứng mép thì điện dung C_{td} có thể tính là điện dung của tụ điện phẳng:

$$C_{td} = \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{\varepsilon \pi R_1^2}{d} \tag{7.106}$$

Điện cảm của xuyến được tính theo công thức:

$$L_{td} = \frac{\emptyset}{I} \tag{7.107}$$

ϕ là từ thông đi qua xuyến, I là dòng điện chảy trên thành bên trong của hộp vùng xuyến. Theo định luật dòng điện toàn phần:

$$I = 2\pi r H \tag{7.108}$$

H là cường độ từ trường trong xuyến tại điểm cách tâm hộp với bán kính r. Từ thông đi qua một yếu tố của tiết diện xuyến có độ rộng là dr, dài L được tính:

$$d\emptyset = Bds = \mu \frac{IL}{2\pi}\frac{dr}{r} \tag{7.109}$$

Từ thông qua cả tiết diện xuyến:

$$\emptyset = \int_{R_1}^{R_2} d\emptyset = \mu \frac{IL}{2\pi} ln\frac{R_2}{R_1} \tag{7.110}$$

Tần số cộng hưởng của hộp:

$$\omega_0 = \frac{1}{R_1}\sqrt{\frac{2d}{\varepsilon\mu L ln\frac{R_2}{R_1}}} \tag{7.111}$$

Bước sóng cộng hưởng của hộp:

$$\lambda_0 = \pi R_1 \sqrt{\frac{2L}{d} ln\frac{R_2}{R_1}} \tag{7.112}$$

Như phần tính C_{td} ta đã giả thiết bỏ qua hiệu ứng biên, muốn có giá trị chính xác hơn về ω_0 hoặc λ_0 ta phải bổ sung phần điện dung phụ ở bên trong xuyến. Lúc ấy ta phải thay vào C_{td} bằng C'_{td} theo công thức sau:

$$C'_{td} = C_{td}\left\{1 + \frac{4d}{\pi R_1} ln \frac{min(L_1, R_2 - R_1)}{d}\right\} \tag{7.113}$$

Việc điều chỉnh tần số hay bước sóng cộng hưởng của hộp cộng hưởng hình xuyến được thực hiện bằng hai phương pháp điện dung và điện cảm. Phương pháp điều chỉnh cộng hưởng bằng điện cảm được tiến hành bằng các vít kim loại đưa ngang qua mặt trụ ngoài của hộp với chiều dài của các vít có thể thay đổi. Khi các vít kim loại đi sâu vào trong vùng xuyến của hộp thì làm cho bước sóng cộng hưởng λ_0 nhỏ đi hay tần số cộng hưởng ω_0 tăng.

Phương pháp điều chỉnh cộng hưởng bằng điện dung là làm thay đổi độ rộng d của khe hộp. Người ta có hai cách làm thay đổi độ rộng d là chế tạo thành đáy trên của hộp dưới dạng màng kim loại mỏng có thể làm biến dạng độ rộng d hoặc có thể làm dịch chuyển hình trụ tạo thành lõi trong cửa xuyến cũng làm cho mặt dưới của khe nâng hạ xuống. Khi độ rộng d của khe nhỏ đi làm cho điện dung của C_{td} tăng và do đó bước sóng cộng hưởng tăng.

Hộp cộng hưởng hình xuyến được sử dụng làm mạch dao động cộng hưởng cho đèn Klystron trong mạch khuếch đại hay tạo dao động siêu cao tần.

7.4 ĐIỀU CHỈNH TẦN SỐ CỘNG HƯỞNG

Từ các mục trước, chúng ta đã biết rằng tần số cộng hưởng có liên quan đến kích thước của hộp cộng huởng qua biểu thức của điều kiện cộng hưởng. Do vậy, khi thay đổi kích thước của hộp ta nhận được các giá trị khác nhau của tần số cộng hưởng hay bước sóng cộng hưởng. Điều này thường hay thực hiện bởi pittông dịch chuyển được. Tuy nhiên trong một số trường hợp chỉ cần điều chỉnh tần số cộng hưởng của một dạng dao động đã cho trong hộp ở phạm vi nhỏ, mà cấu trúc của hộp đỡ phức tạp và giảm tiêu hao do có dòng mặt ở chỗ tiếp xúc của pittông với thành hộp, người ta không dùng pittông mà dùng phương pháp nhiễu loạn nhỏ. Việc điều chỉnh tần số cộng hưởng của hộp theo phương pháp này được thực hiện bằng cách đưa vào bên trong hộp một vật thể có kích thước nhỏ hơn nhiều so với kích thước hộp. Vật thể đưa vào trong hộp có thể là điện môi, ferit hay kim loại dẫn điện lý tưởng. Phương pháp điều chỉnh cộng hưởng này cho phép ta khắc phục được các nhược điểm khi chế tạo hộp không chính xác và bù được một số sai sót do bất đồng nhất gây ra làm ảnh hưởng đến điều kiện cộng hưởng và cách thực hiện khá đơn giản. Vì thể tích của vật thể đưa vào rất nhỏ so với thể tích của hộp nên nó không gây ra méo đáng kể đến cấu trúc trường của dạng dao động trong hộp, từ đó ta coi vật thể đưa vào như một nhiễu loạn nhỏ.

Giả sử ta có hộp cộng hưởng dạng tùy ý có thể tích V, bên trong chứa không khí với hằng số ε_0, μ_0 đang làm việc với một dạng dao động nào đó ở tần số ω. Bây giờ ta đưa vào trong hộp một vật thể rất nhỏ có thể tích là V_0 với hằng số ε, μ, γ.

Thay đổi tần số tương đối trong hộp được xác định bởi biểu thức sau:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta W_H - \Delta W_E}{2W(V)} \quad (7.114)$$

$$W(V) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V E^2 dV = \frac{1}{2}\mu_0 \int_V H^2 dV \quad (7.115)$$

là năng lượng tích lũy cực đại của điện trường hoặc từ trường trong hộp cộng hưởng không nhiễu (chưa đưa vật thể vào).

Trường hợp vật thể đưa vào là kim loại:

$$\begin{aligned} \Delta W_E &= W_E(V_0) \\ \Delta W_H &= W_H(V_0) \end{aligned} \quad (7.116)$$

$W_E(V_0)$, $W_H(V_0)$ là điện năng và từ năng cực đại trong thể tích V_0 đã có trước đây của hộp khi chưa đưa vật thể vào.

Nếu vật đưa vào là điện môi hay ferit:

$$\begin{aligned} \Delta W_E &= \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} W_E(V_0) \\ \Delta W_H &= \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} W_H(V_0) \end{aligned} \quad (7.117)$$

Xét ví dụ như sau: Giả sử có hộp cộng hưởng hình trụ tròn làm việc với dạng dao động H_{mnp}. Ta đưa vào trong hộp một đĩa điện môi mỏng có độ dày d << λ vào vị trí bụng của điện trường trong hộp. Đĩa này không làm méo cấu trúc trường của dạng dao động và trường trong đĩa coi như đồng nhất. Từ biểu thức trường của dạng dao động trong hộp cộng hưởng trụ tròn, ta tìm được:

$$W(V) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{S_n} \int_0^L E_q^2(r,\varphi) \sin^2\left(\frac{p\pi}{L} z\right) dzds = \frac{1}{4}\varepsilon_0 L \int_{S_n} E_q^2(r,\varphi) ds \qquad (7.118)$$

Trong đó:

$$E_q^2(r,\varphi) = E_r^2(r,\varphi) + E_\varphi^2(r,\varphi) \qquad (7.119)$$

$$\Delta W_E = \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{S_n} \int_0^d E_q^2(r,\varphi) dzds = \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{2}\varepsilon_0 d \int_{S_n} E_q^2(r,\varphi) ds \qquad (7.120)$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{d}{L}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1\right) \qquad (7.121)$$

Nghĩa là khi đưa điện môi vào trong hộp, tần số cộng hưởng giảm đi.

TÓM TẮT

Bài này tập trung vào một loại mạch dao động có tham số phân bố sử dụng trong kỹ thuật siêu cao tần đó là hộp cộng hưởng. Hộp cộng hưởng trong mạch siêu cao tần có chức năng tương đương như mạch dao động cộng hưởng LC trong các mạch điện tần số thấp. Có nhiều loại hộp cộng hưởng khác nhau, mỗi loại làm việc với một số loại sóng điện từ khác nhau (TEM, TE(H), TM(E)). Đối với mỗi loại hộp cộng hưởng, cần biết các yếu tố sau:

- *Cấu tạo.*
- *Loại sóng tồn tại.*
- *Tần số cộng hưởng.*
- *Điều kiện cộng hưởng.*
- *Hệ số phẩm chất của mạch.*

Đồng thời bài này cũng nêu lên cách hiệu chỉnh tần số cộng hưởng của hộp cộng hưởng.

CÂU HỎI ÔN TẬP

Câu 1: Tính và lập bảng các bước sóng cộng hưởng riêng trong hộp cộng hưởng chữ nhật rỗng có kích thước a = 7,2 cm; b = 3,4 cm; L = 10 cm với các dạng dao động hoạt động có trong dải sóng có $\lambda \geq 5,3$ cm.

Câu 2: Xác định số các dạng dao động riêng và các tần số cộng hưởng tương ứng với chúng trong hộp cộng hưởng trụ tròn rỗng (chứa đầy không khí) có kích thước: bán kính R_0 = 7,5 cm; chiều dài L = 10 cm khi tần số hoạt động f thay đổi từ 1500 MHz đến 3000 MHz.

Câu 3: Xác định số các dạng dao động riêng và chiều dài cộng hưởng tương ứng với chúng trong hộp cộng hưởng trụ tròn rỗng có kích thước: bán kính R = 7,5 cm; chiều dài L thay đổi từ 7,5 cm đến 15 cm, bước sóng công tác λ = 10 cm.

Câu 4: Xác định độ phẩm chất riêng của hộp cộng hưởng chữ nhật rỗng cho dạng dao động riêng H_{101} và bước sóng cộng hưởng của nó. Hộp cộng hưởng làm bằng đồng có độ dẫn điện riêng $\gamma = 5,7.10^7$ S/m với kích thước: L = a = 23 cm; b = 10 cm.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ngô Nhật Ảnh, Trương Trọng Tuấn Mỹ, *Trường điện từ,* ĐH Quốc gia TPHCM.
2. Ngô Nhật Ảnh, Trương Trọng Tuấn Mỹ, *Bài tập Trường điện từ,* ĐH Quốc gia TP.HCM.
3. Nguyễn Đức Chánh, *Bài giảng Trường điện từ,* Học viện Hàng Không Việt Nam.
4. Tôn Thất Bảo Đạt, Dương Hiển Thuận, *Lý thuyết Trường điện từ và Siêu cao tần*, Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông.
5. Thái Hồng Nhị, *Trường điện từ, Truyền sóng và anten,* NXB Khoa Học Kỹ thuật, 2006.
6. John R.Reitz, Frederich J.Milford, Robert W.Christy- Addision**,** "*Foundations of Electromagnetic Theory*", Addison - Wesley Publishing Company, USA, 1993.
7. Clayton R. Paul, Keith W. Whites, Syed A. Nasar, "*Introduction to Electromagnetic Fileds*", Mc GrawHill - International Edition , 1998.
8. Robert Plonsey, Robert E. Collin, *Principles and Applications of Electromagnetic Fields*, Mc GrawHill, 1961.