Chương I. HÀM SỐ BIẾN SỐ PHỨC

§1. Hàm biến phức.

1.1 Số phức, mặt phẳng phức, dạng cực của số phức. Định lý Moivre.

a. Định nghĩa.

Số phức là số có dạng $z = x + iy$ trong đó $x, y \in \mathbb{R}$ và i là đơn vị ảo ($i^2 + 1 = 0$), x được gọi là phần thực của số phức z, ký hiệu $\operatorname{Re} z$; y được gọi là phần ảo của số phức z ký hiệu là $\operatorname{Im} z$.

Nếu $y = 0$ thì số phức $z = x + i0$ là số thực. Nếu $x = 0$ thì số $z = iy$ gọi là số thuần ảo.

Hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$ gọi là bằng nhau nếu $x_1 = x_2$ và $y_1 = y_2$.

Số phức $\overline{z} = x - iy$ được gọi là số phức liên hợp của số phức $z = x + iy$.

b. Các phép toán trên số phức.

➢**Phép cộng** : Tổng của hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$ là số phức :

$$z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{1.1.1}$$

ký hiệu : $z = z_1 + z_2$.

Tính chất :

* Giao hoán : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

* Kết hợp : $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

➢ **Phép trừ** : Cho hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$, ta có thể tìm được một số phức z sao cho $z_2 + z = z_1$. Số phức này gọi là hiệu của hai số phức z_1 và z_2, ký hiệu là $z = z_1 - z_2$. Từ đó ta có :

$$z = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \tag{1.1.2}$$

➢ **Phép nhân** : Ta gọi tích của hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$ là số phức z xác định bởi :

$$z = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \tag{1.1.3}$$

ký hiệu là : $z = z_1.z_2$.

Tính chất :

* Giao hoán : $z_1.z_2 = z_2.z_1$

* Kết hợp : $z_1.(z_2.z_3) = (z_1.z_2).z_3$

* Phân phối đối với phép cộng : $z_1.(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3$

Khi cho $z_1 = z_2 = i$, từ (1.1.3) ta có :

$$i.i = i^2 = -1 \tag{1.1.4}$$

Như thế, công thức (1.1.3) sẽ nhận được bằng cách thực hiện phép nhân thông thường và thay $i^2 = -1$.

➢ **Phép chia** : Cho hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$. Nếu $z_2 \neq 0$ thì có thể tìm được một số phức $z = x + iy$ sao cho : $z_2.z = z_1$. Từ định nghĩa của phép nhân, ta được hệ phương trình cho x, y như sau :

$$\begin{cases} x_2x - y_2y = x_1 \\ y_2x + x_2y = y_1 \end{cases} \tag{1.1.5}$$

Giải hệ này ta được : $$x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \; ; \; y = \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \tag{1.1.6}$$

ký hiệu : $z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

Chú ý :

* Hệ thức (1.1.6) có thể nhận được bằng cách nhân $\dfrac{z_1}{z_2}$ với $\dfrac{\overline{z}_2}{\overline{z}_2}$.

* Tập hợp tất cả các số phức với hai phép toán cộng và nhân như trên tạo thành một trường số phức, ký hiệu $\mathbb{C}$.

➢ **Luỹ thừa bậc** n: Tích của n số phức z được gọi là luỹ thừa bậc n của số phức z. Ký hiệu z^n.

➢ **Căn bậc** n : Số phức w được gọi là căn bậc n của số phức z nếu $w^n = z$. Ký hiệu $w = \sqrt[n]{z}$.

➢ **Định lý 1** : Với các số phức z, z_1, z_2 ta có :

- $\overline{\overline{z}} = z$; $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$; $\overline{z_1.z_2} = \overline{z}_1.\overline{z}_2$.
- $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z = 2x$; $z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im} z = 2iy$.
- $z.\overline{z} = x^2 + y^2 \geq 0$.
- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$.

c. Dạng lượng giác của số phức.

Xét mặt phẳng với hệ toạ độ Descartes xOy và ta biểu diễn một số phức $z = x + iy$ bởi một điểm có toạ độ (x, y) Như vậy, các số thực sẽ được biểu diễn bằng các điểm trên trục Ox, nó được gọi là trục thực; các số thuần ảo được biểu diễn bởi các điểm trên trục Oy, nó được gọi là trục ảo.

Nếu sử dụng hệ toạ độ cực (r, φ) thì mỗi điểm có toạ độ (x, y) ứng với một một điểm có bán kính vector $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ và góc cực φ. Do đó mỗi số phức $z = x + iy$ có thể biểu diễn dưới dạng :

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1.1.7}$$

trong đó r, φ lần lượt là bán kính cực và góc cực của số phức z. Bán kính r được gọi là modul của số phức z, ký hiệu $r = | z |$. Góc cực φ gọi là argument của số phức z, ký hiệu $\varphi = Argz$.

Modul của số phức được xác định một cách duy nhất :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \qquad (1.1.8)$$

còn argument của số phức được xác định sai khác một bội của 2π:

$$\varphi = Argz = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) & z \text{ thuộc góc phần tư thứ I,IV} \\ arctg\,\dfrac{y}{x} + (2k+1)\pi \quad (k & z \text{ thuộc góc phần tư thứ II,III} \end{cases}$$

trong đó $arctg\,\dfrac{y}{x} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ là giá trị chính của hàm arctg.

✦ **Tính chất của modul và argument** :

• **Định lý 2**.

* $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$ * $|z| \geq \operatorname{Re} z$
* $|z| \geq \operatorname{Im} z$ * $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$
* $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ * $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

• **Định lý 3** : Cho hai số phức $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ và $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Khi đó ta có các hệ thức sau :

* $$z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right] \qquad (1.1.10)$$

* $$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1}(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)$$

Tổng quát, ta có công thức sau : $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ (1.1.11)

Đặc biệt, khi $r = 1$ ta nhận được công thức Moivre :

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \qquad (1.1.12)$$

Giả sử $w = \sqrt[n]{z}$. Khi đó ta có : $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ và $Argw = \dfrac{Argz}{n}$ (1.1.13)

1.2 Hàm biến phức, hàm liên tục, khả vi, điều kiện Cauchy – Riemann.

a. Khái niệm miền và biên của miền.

✦ **Điểm trong của một tập hợp** : Giả sử E là một tập hợp điểm trong mặt phẳng phức z và $z_0 \in E$. Nếu tồn tại một ε lân cận của z_0 nằm hoàn toàn trong E thì z_0 được gọi là điểm trong của E.

✦ **Biên của một tập hợp** : điểm ξ hoặc thuộc E hoặc không thuộc E được gọi là điểm biên của tập E nếu mọi hình tròn tâm ξ đều chứa cả những điểm thuộc E và những điểm không thuộc E.

Tập hợp các điểm biên của E được gọi là biên của E. Nếu điểm γ không thuộc E và tồn tại một hình tròn tâm γ không chứa một điểm nào của E thì γ được gọi là điểm ngoài của E.

Ví dụ : E là hình tròn $|z| < 1$. Mọi điểm của E đều là điểm trong. Biên của E là đường tròn $|z| = 1$, mọi điểm γ mà $|\gamma| > 1$ đều là điểm ngoài của E.

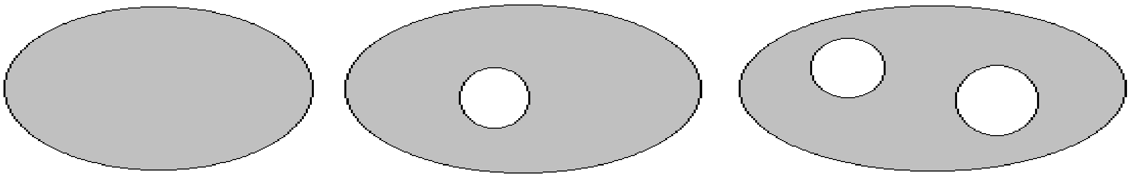
✦ **Miền** : Một tập G trên mặt phẳng phức được gọi là một miền nếu có 2 tính chất sau :

• G là một tập mở, nghĩa là một tập chỉ gồm các điểm trong.

• G là một tập liên thông, nghĩa là qua hai diểm bất kỳ của G ta luôn có thể nối chúng với nhau bằng một đường cong nằm hoàn toàn trong G.

✦Tập G hợp thêm với các điểm biên của nó được gọi là một miền kín và ký hiệu là $\overline{G}$.

✦ Miền G được gọi là bị chặn nếu tồn tại một hình tròn bán kính R chứa G ở trong. Dưới đây ta chỉ xét các miền G mà biên của nó là một số hữu hạn các đường cong kín. Số các đường cong này là cấp liên thông của miền.



Miền đơn liên Miền nhị liên Miền tam liên

✦ **Quy ước** : hướng dương trên biên L của miền là hướng mà khi một người đi dọc theo biên theo hướng đó thì phần của miền G kề người đó luôn nằm bên trái.

b. Định nghĩa hàm biến phức.

✦ **Định nghĩa** :

Giả sử E là một tập hợp điểm trên mặt phẳng phức, nếu có một quy luật cho ứng với mỗi số phức $z \in E$ với một số phức xác định w thì ta nói rằng w là một hàm đơn trị của biến số phức z xác định trên E và ký hiệu : $w = f(z)$, $z \in E$ (1.2.1)

Tập E được gọi là miền xác định của hàm số. Nếu ứng với mỗi số phức $z \in E$ ta có nhiều giá trị w thì ta nói w là một hàm đa trị.

Ví dụ : $w = \dfrac{z}{z^2+1}$; $w = \sqrt{z+1}$ (lưỡng trị)

✦ **Phần thực và phần ảo của một hàm phức** :

Việc cho hàm $w = f(z)$ cũng có nghĩa là cho biết phần thực u và phần ảo v của nó. Nếu $z = x + iy$ thì u, v là các hàm thực của các biến thức độc lập x, y. Tức là :

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \tag{1.2.2}$$

Ví dụ : $w = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - \dfrac{iy}{x^2+y^2} \Rightarrow u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$; $v = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$

✦ **Phép biến hình được thực hiện bởi một hàm phức**.

Cho hàm phức $w = f(z),\ z \in E$. Lấy hai mặt phẳng phức xOy(mặt phẳng z) và mặt phẳng phức uO_1v (mặt phẳng w), ứng với mỗi điểm $z_0 \in E$ hàm $w = f(z)$ sẽ xác định một điểm $w_0 = f(z_0)$ trong mặt phẳng w. Do đó về mặt hình học hàm $w = f(z)$ xác định một phép biến hình từ mặt phẳng z sang mặt phẳng w.

Điểm w_0 được gọi là ảnh của điểm z_0, điểm z_0 được gọi là nghịch ảnh của w_0.

Cho đường cong L có phương trình tham số $x = x(t), y = y(t)$, ảnh của L qua phép biến hình $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ là tập các điểm trong mặt phẳng w có toạ độ là :

$$u = u[x(t), y(t)] \ ; \ v = v[x(t), y(t)] \tag{1.2.3}$$

thường ảnh của L là một đường cong Γ nhận (1.2.3) là phương trình tham số.

Để tìm ảnh của miền G nào đó ta làm như sau : Coi G như được quét nên bởi một họ đường cong L nào đó, sau đó ta tìm ảnh G của L. Khi L quét nên toàn bộ miền G nếu ảnh Γ của nó quét nên một miền Δ thì Δ là ảnh của G.

Ví dụ : Cho hàm $w = z^2$. Tìm ảnh của : Điểm $z_0 = 2 + 3i$, đường tròn $|z| = 2$, tia $\arg z = \alpha(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$, miền G =$G = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$.

✦ **Hàm ngược**. Cho hàm $w = f(z)$ xác định và đơn trị trong miền E. Nếu phép biến hình $\omega = f(z)$ là tương ứng một – một thì hàm $\omega = f(z)$ được gọi là đơn diệp trên E.

Nếu phép biến hình $w = f(z)$ từ E lên Δ là đơn diệp thì với mỗi điểm $w \in \Delta$ có thể cho tương ứng với một điểm $z \in E$ sao cho $w = f(z)$. Như vậy trên tập Δ xác định hàm số $z = \varphi(w)$. Ta gọi nó là hàm ngược của hàm $w = f(z)$. Hàm này cũng là hàm đơn diệp.

c. Giới hạn của hàm biến phức.

✦**Định nghĩa 1**. Giả sử $f(z)$ là hàm xác định trong một lân cận của z_0. Ta nói số phức A là giới hạn của $f(z)$ khi z dần tới z_0 nếu khi $|z - z_0| \to 0$ thì $|f(z) - A| \to 0$. Nói cách khác, $\forall \varepsilon > 0$ nhỏ tuỳ ý luôn tồn tại $\delta > 0$ sao cho khi $|z - z_0| < \delta$ thì $|f(z) - A| < \varepsilon$.

Ký hiệu : $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$. Từ đó ta thấy rằng : nếu $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $A = \alpha + i\beta$ thì : $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = \alpha$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = \beta$.

✦**Định nghĩa 2.** Ta nói số phức A là giới hạn của hàm $w = f(z)$ khi z dần tới vô cực nếu khi $|z| \to +\infty$ thì $|f(z) - A| \to 0$. Nói cách khác , $\forall \varepsilon > 0$ nhỏ tuỳ ý luôn tồn tại $R > 0$ sao cho khi $|z| > R$ thì $|f(z) - A| < \varepsilon$. Ký hiệu : $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = A$

✦**Định nghĩa 3.** Ta nói hàm $w = f(z)$ dần ra vô cực khi z dần tới z_0 nếu khi $|z - z_0| \to 0$ thì $|f(z)| \to +\infty$. Nói cách khác , với mọi số $M > 0$ lớn tuỳ ý luôn tồn tại $\delta > 0$ sao cho khi $|z - z_0| < \delta$ thì $|f(z)| > M$. Ký hiệu : $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$

✦**Định nghĩa 4.** Ta nói hàm $w = f(z)$ dần ra vô cực khi z dần tới ∞ nếu khi $|z| \to +\infty$ thì $|f(z)| \to +\infty$. Nói cách khác , với mọi số $M > 0$ lớn tuỳ ý luôn tồn tại $R > 0$ sao cho khi $|z| > R$ thì $|f(z)| > M$ .Ký hiệu : $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$

d. Hàm liên tục. Đạo hàm của hàm biến phức.

✦**Định nghĩa 1** . Giả sử $w = f(z)$ là hàm xác định trong miền G và $z_0 \in G$. Hàm $w = f(z)$ được gọi là liên tục tại z_0, nếu : $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Nếu $w = f(z)$ liên tục tại mọi điểm của G thì được gọi là liên tục trong miền G.

✦**Định nghĩa 2** . Cho hàm $w = f(z)$ xác định trong miền chứa điểm $z = x + iy$. Cho z một số gia $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Gọi $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$ là số gia tương ứng của hàm.

Nếu khi $\Delta z \to 0$ tỷ số $\dfrac{\Delta\omega}{\Delta z}$ dần tới một giới hạn xác định thì giới hạn đo được gọi là đạo hàm của hàm $w = f(z)$ tại điểm z và ký hiệu là $f'(z)$, $w'(z)$ hay $\dfrac{dw}{dz}$.Như vậy ta có :

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \qquad (1.2.4)$$

Ví dụ 1 : Tính đạo hàm của $\omega(z) = z^2$ tại điểm z.

Ví dụ 2 : Tính đạo hàm của hàm $\omega(z) = \overline{z} = x - iy$.

Ta có : $\Delta\omega = \overline{z+\Delta z} - \overline{z} = \overline{z} + \overline{\Delta z} - \overline{z} = \overline{\Delta z} = \Delta x - i\Delta y$.

Nếu $\Delta y = 0$ thì $\Delta z = \Delta x$, khi đó $\Delta\omega = \Delta x$ do đó : $\dfrac{\Delta\omega}{\Delta z} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{\Delta y = 0 \\ \Delta x \to 0}} \dfrac{\Delta\omega}{\Delta x} = 1$

Nếu $\Delta x = 0$ thì $\Delta z = i\Delta y$, khi đó $\Delta\omega = -i\Delta y$ do đó : $\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \dfrac{\Delta w}{i\Delta y} = -1 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{\Delta y \to 0 \\ \Delta x = 0}} \dfrac{\Delta w}{i\Delta y} = -1$

Như vậy, khi cho $\Delta z \to 0$ theo hai hướng khác nhau thì tỷ số $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ có những giới hạn khác nhau. Vậy hàm số đã cho không có đạo hàm tại mọi điểm z.

✦**Định lý** (Điều kiện Cauchy – Riemann). Nếu hàm số $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ có đạo hàm tại điểm $z = x + iy$ thì phần thực và phần ảo của nó có các đạo hàm riêng tại điểm (x,y) và các đạo hàm riêng đó thoả mãn các hệ thức sau :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ ; \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (1.2.5)$$

hệ thức (5) được gọi là điều kiện Cauchy – Riemann (điều kiện C- R).

Ngược lại, nếu các hàm $u(x,y), v(x,y)$ có các đạo hàm riêng liên tục tại điểm (x,y), thoả mãn điều kiện C–R thì hàm $\omega = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ có đạo hàm $f'(z)$ tại điểm $z = x + iy$ và đạo hàm này được xác định bởi công thức : $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = u_x + iv_x$

Chứng minh :

• *Điều kiện cần* : Giả sử $f'(z)$ tồn tại, nghĩa là giới hạn của tỷ số : $\dfrac{\Delta\omega}{\Delta z} = \dfrac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}$ bằng $f'(z)$ khi $\Delta z \to 0$ theo mọi cách. Ta xét hai cách đặc biệt sau

- Cho $\Delta z = \Delta x$ $(\Delta y = 0)$, khi đó : $\dfrac{\Delta\omega}{\Delta z} = \dfrac{\Delta_x u + i\Delta_x v}{\Delta x} = \dfrac{\Delta_x u}{\Delta x} + i\dfrac{\Delta_x v}{\Delta x}$. Cho $\Delta x \to 0$, theo giả thiết, vế phải dần tới $f'(z)$ do đó vế phải cũng phải dần tới giới hạn $f'(z)$; ngoài ra $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x u}{\Delta x} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x v}{\Delta x} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$. Từ đó suy ra : $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$ (*)

- Cho $\Delta z = i\Delta y$ $(\Delta x = 0)$, khi đó : $\dfrac{\Delta\omega}{\Delta z} = \dfrac{\Delta_y u + i\Delta_y v}{i\Delta y} = -\dfrac{\Delta_y u}{\Delta y} + \dfrac{\Delta_y v}{\Delta y}$. Cho $\Delta y \to 0$, theo giả thiết, vế phải dần tới $f'(z)$ do đó vế phải cũng phải dần tới giới hạn $f'(z)$; ngoài ra $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y u}{\Delta y} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y v}{\Delta y} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$. Từ đó suy ra : $f'(z) = \dfrac{\partial v}{\partial y} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$ (**)

Từ (*) và (**) ta suy ra : $\dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$; so sánh phần thực và phần ảo của hai vế, ta nhận được : $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$, đây chính là điều kiện C - R

• *Điều kiện đủ* : Giả sử $u(x,y), v(x,y)$ có các đạo hàm riêng liên tục tại (x,y) và các đạo hàm riêng này thoả mãn điều kiện C – R. Ta cần chứng minh $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ có giới hạn duy nhất khi $\Delta z \to 0$ theo mọi cách. Ta có : $\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \dfrac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}$. Vì u, v là các hàm khả vi nên :

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y \quad ; \quad \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \beta_1 \Delta x + \beta_2 \Delta y$$

trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \to 0$ khi $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ (tức là khi $\Delta z \to 0$). Từ đó ta được :

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y + i\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \beta_1 \Delta x + \beta_2 \Delta y\right)}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$= \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\Delta y + i\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{(\alpha_1 + i\beta_1)\Delta x + (\alpha_2 + i\Delta\beta_2)\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

Do điều kiện C – R ta có thể lấy $\Delta x + i\Delta y$ làm thừa số chung cho tử số ở số hạng đầu tiên trong vế phải của biểu thức trên và do đó :

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{(\alpha_1 + i\beta_1)\Delta x + (\alpha_2 + i\Delta\beta_2)\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \text{(***)}$$

Vì rằng : $\left|\dfrac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y}\right| = \dfrac{|\Delta x|}{|\Delta x + i\Delta y|} = \dfrac{|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \le 1$ nên $\left|\dfrac{(\alpha_1 + i\beta_2)\Delta x}{\Delta x + i\Delta y}\right| \le |\alpha_1 + i\beta_2|$

Mặt khác, khi $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ thì $\alpha_1, \beta_1 \to 0$ do đó : $\dfrac{(\alpha_1 + i\beta_2)\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} \to 0$ khi $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$. Tương tự ta cũng có : $\dfrac{(\alpha_1 + i\beta_2)\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} \to 0$ khi $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$. Từ đó ta thấy, nếu cho $\Delta z \to 0$ theo mọi cách thì vế phải của (***) sẽ có giới hạn là : $\dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Do đó vế trái cũng dần tới giới hạn đó, tức là tồn tại đạo hàm $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}$. Do điều kiện C – R ta có thể tính đạo hàm bằng nhiều biểu thức khác nhau :

$$f'(z)=u_x+iv_x=v_y-iu_y=u_x-iu_y=v_y+iv_x\ .$$

✦**Các quy tắc tính đạo hàm** :

Giả sử các hàm $f(z),g(z)$ có đạo hàm tại z. Khi đó :

- $\left[f(x)+g(z)\right]'=f'(z)+g'(z)$
- $\left[f(z).g(z)\right]'=f'(z).g(z)+f(z).g'(z)$
- $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]'=\dfrac{f'(z).g(z)-f(z).g'(z)}{g(z)^2}\quad (g(z)\neq 0)$

Giả sử $w=f(z)$, $z=\varphi(\zeta)$ đều là những hàm có đạo hàm thì đạo hàm của hàm hợp $w=f\left[\varphi(\zeta)\right]$ là : $\dfrac{dw}{d\zeta}=\dfrac{dw}{dz}\dfrac{dz}{d\zeta}$.

Nếu $f(z)$ là hàm đơn diệp có hàm ngược là $h(\omega)$ thì : $f'(z)=\dfrac{1}{h'(w)}$, $h'(w)\neq 0$.

✦ **Ý nghĩa hình học của** $|\,f'(z)\,|$ **và** $Argf'(z)$:

Giả sử M_0 là một điểm có toạ độ z_0 thuộc đường cong L trong mặt phẳng z, P_0 là điểm tương ứng trên đường cong Γ là ảnh của L qua phép biến hình $w=f(z)$ trong mặt phẳng ω với toạ độ $f(z_0)$. Khi đó $Argf'(z_0)$ là góc mà ta cần quay tiếp tuyến của L tại M_0 để được hướng của tiếp tuyến với Γ tại P_0 còn $|\,f'(z_0)\,|$ là hệ số co dãn của phép biến hình $w=f(z)$ tại z_0.

e. Hàm giải tích

✦ **Định nghĩa 1**. Giả sử G là một miền mở. Nếu $w=f(z)$ có đạo hàm $f'(z)$ tại mọi điểm thuộc G thì nó được gọi là giải tích trong miền G.

Hàm $w=f(z)$ được gọi là giải tích tại điểm z nếu nó giải tích trong một lân cận nào đó của z.

✦**Định nghĩa 2**. Những điểm mà tại đó hàm $w=f(z)$ không giải tích được gọi là các điểm bất thường của hàm đó.

✦**Các tính chất của hàm giải tích** : Tổng, tích của các hàm giải tích là một hàm giải tích; thương của hai hàm giải tích là một hàm giải tích ngoại trừ các điểm là mẫu số triệt tiêu. Hợp của hai hàm giải tích là một hàm giải tích. Hàm ngược của một hàm giải tích đơn diệp có đạo hàm khác không là hàm giải tích đơn diệp.

✦**Quan hệ giữa hàm giải tích và hàm điều hoà**.

• Nếu $w=f(z)$ là hàm giải tích trong một miền đơn liên G thì phần thực $u(x,y)$ và phần ảo $v(x,y)$ của nó là những hàm điều hoà, trong G, tức là chúng thoả mãn phương trình Laplace trong G : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$; $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$. Các hàm $u(x,y), v(x,y)$ là các hàm điều hoà liên hợp.

• Nếu cho trước hai hàm điều hoà $u(x,y), v(x,y)$ bất kỳ thì nói chung hàm $w=u(x,y)+iv(x,y)$ không giải tích. Muốn $w=u(x,y)+iv(x,y)$ là hàm giải tích thì chúng phải là các hàm điều hoà liên hợp, nghĩa là phải thoả mãn điều kiện C - R. Giả sử $u(x,y)$ là hàm điều hoà đã biết trong G thì hàm điều hoà liên hợp với nó $v(x,y)$ được xác định bởi công thức : $v(x,y)=-\int_{x_0}^{x}u_y(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}u_x(x_0,y)dy+C$, trong đó C là hằng số tuỳ ý và (x_0,y_0) là một điểm bất kỳ của G.

1.3. Các hàm giải tích sơ cấp cơ bản.

❶. Hàm luỹ thừa. $w=z^n \ (n\in\mathbb{N})$

• Nếu $z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ thì $w=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$. Vậy ảnh của tia $Argz=\varphi$ là tia $Argw=n\varphi$ thu được bằng phép quay tia $Argz=\varphi$ quanh gốc tọa độ một góc bằng $(n-1)\varphi$

• Hàm $w=z^n$ giải tích trong toàn mặt phẳng vì ta có : $\frac{dw}{dz}=nz^{n-1} \quad (\forall z\in\mathbb{C})$. Phép biến hình $w=z^n$ bảo giác tại mọi điểm $z\neq 0$.

❷Hàm $w=\sqrt[n]{z}$.

• Hàm $w=\sqrt[n]{z}$ là hàm ngược của hàm $w=z^n$. Nó là một hàm đa trị vì mỗi số phức $z=r(\sin\varphi+i\cos\varphi)\neq 0$ có n căn bậc n cho bởi công thức :

$$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right] \ (k=0,1,...,n-1) \qquad (1.3.1)$$

• Muốn chọn ra một nhánh xác định trong n nhánh trên ta có thể buộc nhánh này phải lấy một giá trị w_0 khi $z=z_0$ với w_0 là một căn bậc n nào đó của z_0.

Mỗi nhánh đơn trị $w=\sqrt[n]{z}$ có đạo hàm : $(\sqrt[n]{z})'=\frac{1}{(w^n)'}=\frac{1}{nw^{n-1}}=\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}$ (1.3.2)

❸ Hàm mũ.

✦Định nghĩa : Ta gọi hàm phức có phần thực $u(x,y)=e^x\cos y$ và phần ảo là $v(x,y)=e^x\sin y$ là hàm mũ biến phức và ký hiệu là e^z :

$$w=e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y) \qquad (1.3.3)$$

Từ định nghĩa , ta có : $|w|=e^x$, $Argw=y+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$.

✦ Các phép tính trên hàm mũ :

$$e^{z_1}.e^{z_2}=e^{z_1+z_2} \quad ; \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1-z_2} \qquad (1.3.4)$$

✦ **Chu kỳ của hàm mũ** : Theo định nghĩa, ta có : $e^{2ik\pi} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$ do đó : $e^{z+2ik\pi} = e^z.e^{2ik\pi} = e^z$. Điều này có nghĩa là hàm $w = e^z$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ ảo $2\pi i$.

✦ **Công thức Euler**. Trong (1.3.3) cho $x = 0$ ta được công thức gọi là công thức Euler :

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y \qquad (1.3.5)$$

Thay y bởi $-y$ ta có : $e^{-iy} = \cos y - i\sin y$. Từ đó ta nhận được :

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \text{ và } \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \qquad (1.3.6)$$

Nhờ công thức Euler mà số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ có thể viết dưới dạng mũ $z = re^{i\varphi}$.

✦ **Tính giải tích** . Hàm $w = e^z$ giải tích trong toàn mặt phẳng vì với mọi $z = x + iy$ điều kiện C – R được thỏa mãn : $\frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y) = \frac{\partial}{\partial y}(e^x\sin y)$; $\frac{\partial}{\partial y}(e^x\cos y) = -\frac{\partial}{\partial x}(e^x\sin y)$.

Khi đó : $$w'(z) = \frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y) + i\frac{\partial}{\partial x}(e^x\sin y) = e^z$$

❹ **Hàm logarithm**.

✦ **Định nghĩa**: Hàm ngược của $z = e^w$ được gọi là hàm loga, ký hiệu: $w = \ln z$ (1.3.7)

✦ **Phần thực và phần ảo** của hàm $w = \ln z$. Đặt $w = \ln z = u + iv$ thì theo định nghĩa, ta phải có : $e^{u+iv} = z$. Do đó $e^u = | z |$ hay $u = \ln | z |$ và $v = Argz$. Tóm lại :

$$w = \ln z = \ln | z | + iArgz \text{ hay } w = \ln | z | + i(argz + 2k\pi) \qquad (1.3.8)$$

Từ đó ta thấy hàm $w = \ln z$ là hàm đa trị.

✦ **Tách nhánh đơn trị**. Trong công thức (1.3.8) chọn $k = 0$ ta được một nhánh đơn trị được gọi là nhánh chính của hàm đa trị $w = \ln z$. Nhánh này thường được ký hiệu là $\mathrm{Ln}z$ và ta có :

$$\mathrm{Ln}z = \ln | z | + i\arg z \qquad (1.3.9)$$

Khi $z = x > 0$ thì $\arg z = 0$, $|z| = x$ nên $\ln z = \ln x$. Điều này có nghĩa là $\ln z$ là thác triển của $\ln x$ từ nửa trục thực $x > 0$ ra toàn bộ mặt phẳng phức z.

Ví dụ : Tính $\mathrm{Ln}(-1)$, $\ln(-1)$, $\mathrm{Ln}(1+i)$, $\mathrm{Ln}(i)$.

- $\mathrm{Ln}(-1) = \ln | -1 | + i\arg(-1) = i\pi$;
- $\ln(-1) = \ln | -1 | + i\left[\arg(-1) + 2k\pi\right] = i(2k+1)\pi$
- do $| 1 + i | = \sqrt{2}$; $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ nên $\mathrm{Ln}(1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}$
- do $| i | = 1$; $\arg i = \frac{\pi}{2}$ nên $\mathrm{Ln}i = \frac{i\pi}{2}$.

✦**Tính chất giải tích**. Nhánh đơn trị $w = \mathrm{Ln}z$ là một hàm giải tích trong mặt phẳng phức z bỏ đi nhát cắt dọc theo nửa trụ $x < 0$. Theo công thức tính đạo hàm hàm ngược ta có :

$$\left(\mathrm{Ln}z\right)' = \frac{1}{(e^\omega)'} = \frac{1}{e^\omega} = \frac{1}{z} \qquad (1.3.10)$$

✦ **Các phép toán**. Hàm $\omega = \ln z$ có các tính chất sau :

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_1$$

$$\ln\frac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2 \qquad (1.3.11)$$

$$\ln(z^n) = n\ln z + 2ik\pi \quad (n \in \mathbb{N})$$

❺ Các hàm lượng giác.

✦Định nghĩa. Các hàm lượng giác biến phức được định nghĩa theo các công thức sau đây

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \;;\; \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \;;\; tgz = \frac{\sin z}{\cos z} \;;\; \cot gz = \frac{\cos z}{\sin z} \qquad (1.3.12)$$

Vì e^{iz}, e^{-iz} là các hàm đơn trị nên các hàm lượng giác cũng là các hàm đơn trị

✦ Đạo hàm của hàm lượng giác. Vì các hàm e^{iz} và e^{-iz} là các hàm giải tích trong $\mathbb{C}$ nên $\omega = \sin z$ và $w = \cos z$ cũng là những hàm giải tích trong $\mathbb{C}$. Ta có :

$$(\sin z)' = \cos z \;;\; (\cos z)' = -\sin z \qquad (1.3.13)$$

Hàm $w = tgz = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ giải tích tại mọi điểm $z \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ và : $(tgz)' = \dfrac{1}{\cos^2 z}$. (1.3.14)

✦ Tính chất. Các hàm lượng giác phức cũng có tính chẵn lẻ và tuần hòan tương tự như hàm lượng giác thực :

$$\cos(-z) = \cos z \;;\; \sin(-z) = -\sin z \;;\; tg(-z) = -tgz$$
$$\cos(z + 2\pi) = \cos z \;;\; \sin(z + 2\pi) = \sin z \;;\; tg(z + \pi) = tgz$$

✦ Các phép toán. Ta có các công thức tương tự như các công thức cho các hàm lượng giác biến số thực :

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \;;\; \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z \;;\; \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \,....$$

❻. Hàm hyperbolic.

✦ Định nghĩa. Các hàm hyperbolic biến phức được định nghĩa như sau :

$$chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \;;\; shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \;;\; thz = \frac{shz}{chz} \;;\; \coth z = \frac{chz}{shz} \qquad (1.3.15)$$

những hàm này là thác triển của hàm hyperbolic biến thực từ trục thực ra mặt phẳng phức. Vì hàm e^z tuần hoàn với chu kỳ 2π nên các hàm chz và shz cũng là các hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π. Các hàm thz và $\coth z$ tuần hoàn với chu kỳ π.

✦ Các phép toán. Ta có các công thức tương tự như giải tích thực :

$$e^z = chz + shz$$
$$e^{-z} = chz - shz$$
$$sh(z_1 + z_2) = shz_1 chz_2 + chz_1 shz_2$$
$$ch2z = ch^2 z + sh^2 z \quad ...$$

✦ Quan hệ với các hàm lượng giác :

$$\sin iz = ishz$$
$$\cos iz = chz$$

✦ Phần thực và phần ảo của các hàm lượng giác và hyperbolic :

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x\cos(iy) + \cos x\sin(iy) = \sin x ch y + i sh y \cos x$$
$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x\cos(iy) - \sin x\sin(iy) = \cos x ch y - i\sin x sh y$$
$$shz = sh(x+iy) = shx ch(iy) + ch(x)sh(iy) = shx\cos y + ichx\sin y$$
$$chz = ch(x+iy) = chx ch(iy) - sh(x)sh(iy) = chx\cos y + i\sin x sh y$$

✦ **Đạo hàm của hàm hyperbolic**. Các hàm $\omega = shz$ và $\omega = shz$ giải tích trong toàn mặt phẳng và có đạo hàm :

$$(shz)' = chz \; ; \; (chz)' = shz \tag{1.3.16}$$

Hàm $\omega = thz$ giải tích trong toàn mặt phẳng trừ các điểm $z = i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$ và có đạo hàm $(thz)' = \frac{1}{ch^2 z}$.

❼ **Hàm lượng giác ngược**.

✦ Hàm ngược của hàm $z = \sin w$ là hàm $w = Arc\sin z$. Hàm này có thể biểu diễn qua hàm logarith như sau :

Từ $z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2} = \frac{e^{2iw} - 1}{2e^{iw}}$ ta có : $e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$. Giải ra theo e^{iw} ta được :

$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}$. Do đó : $iw = Ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$ hay : $w = \frac{1}{i}Ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$. Cuối cùng ta nhận được :

$$w = Arc\sin z = -iLn\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) \tag{1.3.17}$$

Tính đa trị của hàm $w = Arc\sin z$ được suy ra từ tính đa trị của hàm logarith và tính lưỡng trị của hàm căn thức.

Tương tự ta tìm được :

✦ $w = Arc\cos z$ là hàm ngược của hàm $z = \cos w$ và : $Arc\cos z = -iLn\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$

✦ $w = Arctgz$ là hàm ngược của hàm $z = tgw$ và : $Arctgz = -\frac{i}{2}Ln\frac{1 + iz}{1 - iz}$

✦ $w = Arccotgz$ là hàm ngược của hàm $z = cotgw$ và : $Arccotgz = \frac{i}{2}Ln\frac{z - i}{z + i}$

❽ **Hàm Hyperbol ngược** :

✦ $w = Arshz$ là hàm ngược của hàm $z = shw$ và : $Arshz = Ln\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right)$

✦ $w = Archz$ là hàm ngược của hàm $z = chw$ và : $Archz = Ln\left(z + \sqrt{z^2 - 11}\right)$

✦ $w = Arthz$ là hàm ngược của hàm $z = thw$ và : $Arthz = \frac{1}{2}Ln\frac{1 + z}{1 - z}$

❾ **Hàm phức luỹ thừa tổng quát** $w = z^a$.

Giả sử, a là một số phức bất kỳ $a = \alpha + i\beta$. Ta định nghĩa : $z^a = e^{a\ln z}$. Đặt $z = re^{i\varphi}$, ta được : $Lnz = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$, do đó :

$$z^a = e^{a\ln r - \beta(\varphi+2k\pi)}.e^{i\left[\alpha(\varphi+2k\pi)+\beta\ln r\right]}$$

trong đó k là một số nguyên tuỳ ý.

Từ đó ta thấy : nếu $\beta \neq 0$ thì hàm z^a có vô số trị, toạ vị của chúng nằm trên các vòng tròn :

$$| w |= e^{\alpha\ln r - \beta(\varphi+2k\pi)} \quad (k = 0, \pm1, \pm2, ...)$$

còn argument của chúng là :

$$\alpha(\varphi + 2k\pi) + \beta\ln r \quad (k = 0, \pm1, \pm2, ...)$$

Nếu $\beta = 0\,(a \in \mathbb{R})$ thì các toạ vị của z^a nằm trên đường tròn $| w |= e^{\alpha\ln r} = r^\alpha$ còn argument của z^a là $\alpha P + 2k\pi\alpha$. Điều này có nghĩa là : nếu $\alpha = \dfrac{p}{q}$ thì chỉ có q toạ vị khác nhau của z^α và hàm $w = z^a$ là hữu hạn trị, còn nếu α là một số vô tỷ thì hàm $w = z^a$ là vô số trị.

§2.Tích phân hàm biến phức.

2.1 Tích phân phức.

a. Định nghĩa. Giả sử trong mặt phẳng z cho một đường cong trơn L nối hai điểm z_0, z. Giả sử $f(z)$ là một hàm biến phức xác định trên L. Ta chia L thành n phần bởi các điểm $z_0, z_1, ..., z_n = z$ theo hướng từ z_0 đến z. Đặt $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. Trên cung nối hai điểm z_{k-1}, z_k lấy một điểm ζ_k tuỳ ý và lập tổng : $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$. Nếu khi $\max | \Delta z_k |\to 0$ tổng này dần đến một giới hạn là một số phức I không phụ thuộc vào cách chia L và cách chọn ζ_k trên các cung nhỏ thì I được gọi là tích phân của hàm $f(z)$ dọc theo L theo hướng từ z_0 đến z.

Nếu A, B là toạ vị của z_0 và z thì ta ký hiệu tích phân đó là $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz$. Do đó :

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = \lim_{max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \qquad (2.1.2)$$

b. Sự tồn tại của tích phân của hàm biến phức.

Giả sử $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_k = x_k + iy_k$, $z_{k-1} = x_{k-1} + iy_{k-1}$. Khi đó : $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$ trong đó $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$. Đặt $\zeta_k = \alpha_k + i\beta_k$., khi đó tổng (2.1) sẽ được viết dưới dạng :

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}\left[u(\alpha_k, \beta_k) + iv(\alpha_k, \beta_k)\right].\left(\Delta x_k + i\Delta y_k\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[u(\alpha_k, \beta_k)\Delta x_k - v(\alpha_k, \beta_k)\Delta y_k\right] + i\sum_{k=1}^{n}\left[u(\alpha_k, \beta_k)\Delta y_k + v(\alpha_k, \beta_k)\Delta x_k\right]$$

Các tổng ở vế phải là các tổng tích phân của các tích phân đường loại hai. Vì đường cong L là trơn, các hàm biến thực $u(x,y), v(x,y)$ là liên tục trên L nên tồn tại các tích phân đường loại 2 :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} u(x,y)dx - v(x,y)dy = \lim_{max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \left[u(\alpha_k,\beta_k)\Delta x_k - v(\alpha_k,\beta_k)\Delta y_k \right]$$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} v(x,y)dx + u(x,y)dy = \lim_{max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \left[v(\alpha_k,\beta_k)\Delta x_k + u(\alpha_k,\beta_k)\Delta y_k \right]$$

do đó tích phân $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz$ tồn tại và ta có công thức :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = \int_{\overset{\frown}{AB}} u(x,y)dx - v(x,y)dy + \int_{\overset{\frown}{AB}} v(x,y)dx + u(x,y)dy \qquad (2.1.3)$$

Nếu đường cong L có phương trình tham số $x = x(t), y = y(t)$ và t_0, t_1 là các giá trị của tham số t ứng với các mút A, B thì :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} u(x,y)dx - v(x,y)dy = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ u\left[x(t),y(t)\right]x'(t) - v\left[x(t),y(t)\right]y'(t) \right\} dt$$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} v(x,y)dx + u(x,y)dy = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ v\left[x(t),y(t)\right]x'(t) + u\left[x(t),y(t)\right]y'(t) \right\} dt$$

Thay vào (2.1.3) ta được : $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ u\left[x(t),y(t)\right] + iv\left[x(t),y(t)\right] \right\} \left[x'(t) + iy'(t)\right] dt$

Đặt $z(t) = x(t) + iy(t) \to z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ và do đó công thức trên có thể viết gọn lại là :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f\left[z(t)\right]z'(t)dt \qquad (2.1.4)$$

c. Các tính chất .

Từ công thức (2.1.3) suy ra rằng, tích phân của một hàm phức dọc theo một đường cong có tất cả các tính chất thông thường của tích phân đường loại 2, cụ thể là :

✦ $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(\zeta)d\zeta$

✦ $\int_{\overset{\frown}{AB}} \left[f(z) + g(z)\right]dz = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz + \int_{\overset{\frown}{AB}} g(z)dz$

✦ $\int_{\overset{\frown}{AB}} af(z)dz = a\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz \quad (a : const)$

✦ $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = -\int_{\overset{\frown}{BA}} f(z)dz$

✦ $\int\limits_{\overset{\frown}{AC}} f(z)dz = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz + \int\limits_{\overset{\frown}{BC}} f(z)dz \ \ (A, B, C \in L)$

✦ $\int\limits_{z_0}^{z_1} dz = z_1 - z_0$

d. Công thức ước lượng tích phân.

Nếu M là giá trị lớn nhất của $|f(z)|$ trên L nghĩa là : $|f(z)| \le M \ (\forall z \in L)$ và l là độ dài của đường cong L thì :

$$\left| \int\limits_L f(z)dz \right| \le \int\limits_L |f(z)||dz| \le M.l \qquad (2.1.5)$$

e. Định lý Cauchy cho miền đơn liên.

✦**Phát biểu** : Giả sử G là một miền đơn liên giới hạn bởi đường cong kín L. Nếu $f(z)$ giải tích trong $\overline{G}$ thì : $\oint\limits_L f(z)dz = 0$

✦**Chứng minh** : Ta giả sử $f'(z)$ liên tục trong $\overline{G}$. Do đó $u(x,y), v(x,y)$ liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong $\overline{G}$. Theo (2.1.3) ta có :

$$\oint\limits_L f(z)dz = \oint\limits_L udx - vdy + \oint\limits_L vdx + udy$$

Vì $f(z)$ giải tích trong $\overline{G}$ nên nó thoả mãn điều kiện C – R trong $\overline{G}$, tức là :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ ; \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Mặt khác, ta biết rằng : nếu các hàm $P(x,y), \ Q(x,y)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng của nó trong $\overline{G}$ thì điều kiện cần và đủ để tích phân đường loại hai $\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0$ là : $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Sử dụng kết quả này, ta thấy ngay rằng : $\oint\limits_L udx - vdy = 0$ và $\oint\limits_L vdx + udy = 0 \ \Rightarrow$ **đpcm**

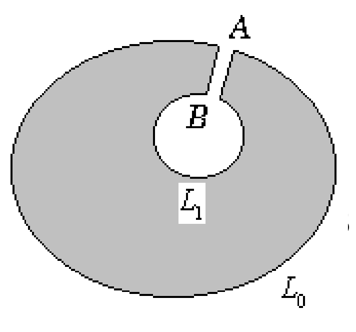
f. Định lý Cauchy cho miền đa liên.

✦**Phát biểu** : Giả sử G là miền đa liên L gồm : Biên ngoài L_0 và các biên trong $L_1, L_2, ..., L_n$. Nếu $f(z)$ là hàm giải tích trong $\overline{G}$ thì :

$$\oint\limits_{L_0} f(z)dz = \oint\limits_{L_1} f(z)dz + \oint\limits_{L_2} f(z)dz + ... + \oint\limits_{L_n} f(z)dz \qquad (2.1.6)$$

Các tích phân lấy theo hướng dương của các đường cong.

➢**Chứng minh** : Xét trường hợp G là miền nhị liên gồm hai biên L_0 và L_1 (hình vẽ)



Giả sử A, B là lát cắt nối A trên L_0 với điểm B trên L_1. Do lát cắt AB miền G trở thành miền đơn liên, do đó có thể áp dụng định lý Cauchy ở trên, ta có :

$$\oint_{L_0} f(z)dz + \oint_{AB} f(z)dz + \oint_{L_1^-} f(z)dz + \oint_{BA} f(z)dz = 0$$

Ký hiệu $\oint_{L_1^-} f(z)dz$ chỉ tích phân lấy theo chiều thuận của kim đồng hồ. Theo tính chất của tích phân ta có :

$$\oint_{AB} f(z)dz = -\oint_{BA} f(z)dz \quad ; \quad \oint_{L_1^-} f(z)dz = -\oint_{L_1} f(z)dz$$

Thay vào trên ta nhận được : $\oint_{L_0} f(z)dz - \oint_{L_1} f(z)dz = 0$ hay $\oint_{L_0} f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz$.

Ví dụ : Tính $I_n = \int_L \frac{dz}{(z-z_0)^n}$. Trong đó $n \in \mathbb{N}, L$ là đường cong kín không đi qua z_0.

Giải : Gọi G là miền giới hạn bởi L.

✦ Nếu $z_0 \notin G$ khi đó $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n}$ là hàm giải tích trong $\overline{G}$ và theo định lý Cauchy thì $I_n = 0$.

✦Nếu $z_0 \in G$. Ta loại khỏi miền G một đường tròn γ tâm z_0 bán kính a. Như vậy $f(z)$ sẽ giải tích trong miền nhị liên còn lại. Theo (2.1.6) thì : $\oint_L \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \oint_\gamma \frac{dz}{(z-z_0)^n}$, ở đây γ là đường tròn $|z - z_0| = a$.

- Nếu $n = 1$ thì $I_1 = 2\pi i$
- Nếu $n \neq 1$ ta có : khi $z \in \gamma$ thì $z = z_0 + ae^{it}, \quad dz = iae^{it}dt \ , \quad 0 \le t \le 2\pi$. Do đó :

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{iae^{it}dt}{a^n e^{int}} = \frac{i}{a^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t}dt = \frac{i}{a^{n-1}} \frac{1}{i(n-1)} e^{i(1-n)t}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

Tóm lại : $$\oint_L \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i & \text{khi } n = 1, \ L \text{ bao quanh } z_0 \\ 0 & \text{trong các trường hợp còn lại} \end{cases} \quad (2.1.7)$$

g. Tích phân không phụ thuộc đường đi.

✦**Định lý** : Giả sử $f(z)$ là một hàm giải tích trong miền đơn liên G và z_0 là một điểm cố định thuộc G. Khi đó tích phân của hàm $f(z)$ dọc theo một đường cong nằm trọn trong G đi từ điểm z_0 tới điểm z : $\int_{z_0}^{z} f(z)dz$ không phụ thuộc vào đường lấy tích phân.

Nếu cận trên z thay đổi thì tích phân đó là một hàm giải tích của z trong G và có đạo hàm cho bởi công thức :

$$\frac{d}{dz}\left(\int_{z_0}^{z} f(z)dz\right) = f(z) \tag{2.1.8}$$

✦**Chứng minh** :

•Việc $\int_{z_0}^{z} f(z)dz$ không phụ thuộc vào đường lấy tích phân có thể thấy dễ dàng nhờ định lý Cauchy cho miền đơn liên ở trên.

• Đặt $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz$, cần chứng minh $F'(z) = f(z)$. Ta có :

$$\Delta F = F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = \int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta$$

Vì $f(\zeta)$ giải tích nên nó liên tục tại z do đó ta có thể viết $f(\zeta) = f(z) + \alpha(\zeta)$ trong đó $\alpha(\zeta) \to 0$ khi $\zeta \to z$.Suy ra : $\Delta F = \int_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\zeta + \int_{z}^{z+\Delta z} \alpha(\zeta)d\zeta = f(z)\Delta z + \int_{z}^{z+\Delta z} \alpha(\zeta)d\zeta$

Do đó :

$$\frac{\Delta F}{\Delta z} = f(z) + \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} \alpha(\zeta)d\zeta \tag{2.1.9}$$

Từ công thức ước lượng tích phân ta có : $\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} \alpha(\zeta)d\zeta \le \left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} \alpha(\zeta)d\zeta\right| \le \max\left|\alpha(\zeta)\right|$

Vì $\alpha(\zeta) \to 0$ khi $\zeta \to z$ do đó : $\lim_{\zeta \to z} \max\left|\alpha(\zeta)\right| = 0 \Rightarrow \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} \alpha(\zeta)d\zeta \to 0$. Từ (2.1.9) ta suy ra : $F'(z) = f(z)$.

2.2. Công thức tích phân Cauchy.

a. Tích phân bất định.

Hàm $F(z)$ được gọi là nguyên hàm của hàm $f(z)$ nếu $F'(z) = f(z)$. Từ đây ta thấy rằng, nếu $F(z)$ là một nguyên hàm của $f(z)$ thì $F(z) + C$ với C là một hằng số tuỳ ý cũng là một nguyên hàm của $f(z)$. Ngược lại, nếu $\Phi(z)$ và $F(z)$ cùng là nguyên hàm của $f(z)$ thì $\Phi(z) - F(z) = C$. Như vậy nếu $F(z)$ là nguyên hàm của $f(z)$ thì họ hàm $F(z) + C$ sẽ chứa tất cả các nguyên hàm của $f(z)$. Họ hàm này được gọi là tích phân bất định của hàm $f(z)$ và ký hiệu là $\int f(z)dz$. Tóm lại : $\int f(z)dz = F(z) + C$.

Từ bảng đạo hàm của các hàm , ta suy ra bảng nguyên hàm tương tự như trong giải tích thực :

$\bullet \int e^z dz = e^z + C$

$\bullet \int z^n dz = \dfrac{z^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \in \mathbb{N}, n \neq -1)$

$\bullet \int \sin z dz = \cos z + C$

$\bullet \int \dfrac{dz}{z} = \mathrm{Ln} z + C \quad ; (-\pi < \arg z < \pi)$ .....

b. Công thức Newton-Leibnitz.

✦**Định lý** : Giả sử $f(z)$ là hàm giải tích trong miền đơn liên G và có nguyên hàm $F(z)$.

Khi đó nếu z_0, z_1 là hai điểm thuộc G thì : $\displaystyle\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$ (2.2.1)

(Tích phân ở vế trái có thể lấy theo một đường bất kỳ nằm trọn trong G).

✦**Chứng minh** : Trong (2.1.8) ta đã chứng minh rằng $\displaystyle\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ có đạo hàm là $f(z)$ điều này có nghĩa là nó là nguyên hàm của $f(z)$. Do đó : $\displaystyle\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = F(z) + C$. Thay $z = z_0$ ở hai vế, ta được : $0 = F(z_0) + C \Rightarrow C = -F(z_0)$. Do đó : $\displaystyle\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = F(z) - F(z_0)$. Cho $z = z_1$, ta được : $\displaystyle\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta = F(z_1) - F(z_0) = F(z)\Big|_{z_0}^{z_1}$

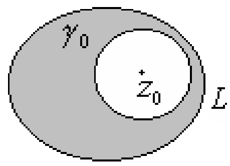
c. Công thức tích phân Cauchy.

✦**Định lý**. Giả sử G là miền đơn liên hoặc đa liên giới hạn bởi biên L và z là một điểm trong của miền G. Nếu $f(z)$ giải tích trong $\overline{G}$ thì :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \qquad (2.2.2)$$

Tích phân ở vế phải của (2.2.2) được gọi là tích phân Cauchy.

✦**Chứng minh** : Lấy z_0 bất kỳ bên trong G, ta cần chứng minh : $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_L \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_0}$.



Đặt $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$. Hàm $\varphi(z)$ giải tích trong $\overline{G} \setminus \{z_0\}$. Loại bỏ khỏi G một hình tròn tâm z_0 bán kính r đủ nhỏ thì $\varphi(z)$ sẽ giải tích trong miền đa liên còn lại . Sử dụng định lý Cauchy cho miền đa liên, ta có : $\displaystyle\oint_L \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_0} = \oint_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_0}$

trong đó γ_r là đường tròn $\left|\zeta - z_0\right| = r$. Vì công thức đúng cho r đủ nhỏ (để γ_r nằm hoàn toàn trong G nên ta có thể viết : $\oint_L \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_0} = \lim_{r\to 0}\oint_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_0}$. Mặt khác, ta lại có :

$$\oint_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_0} = \oint_{\gamma_r}\frac{\left[f(\zeta) - f(z_0)\right]d\zeta}{\zeta - z_0} + f(z_0)\oint_{\gamma_r}\frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \oint_{\gamma_r}\frac{\left[f(\zeta) - f(z_0)\right]d\zeta}{\zeta - z_0} + 2\pi i.f(z_0)$$

Vì $f(z)$ liên tục tại z_0 nên $\forall\varepsilon > 0$ có thể chọn r đủ nhỏ sao cho $\left|f(\zeta) - f(z_0)\right| < \varepsilon$. Khi đó $\forall\zeta\in\gamma_r$ ta có $\left|\zeta - z_0\right| = r$ vã : $\left|\frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0}\right| < \frac{\varepsilon}{r}$. Sử dụng công thức ước lượng tích phân ta được : $\left|\oint_{\gamma_r}\frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0}dz\right| \le \frac{\varepsilon}{r}2\pi r = 2\pi\varepsilon$. Vì ε nhỏ tuỳ ý nên từ đây ta có :

$\lim_{r\to 0}\oint_{\gamma_r}\frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0}d\zeta = 0$. Do đó ta tìm được : $\lim_{r\to 0}\oint_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_0} = 2\pi i f(z_0)$ (đpcm)

Ví dụ : Tính $I = \oint_L \frac{e^z}{z(z-3)}dz$ với :

① L là đường tròn tâm tại $z = 2$ bán kính $\frac{3}{2}$ ĐS : $2\pi i\frac{e^3}{3}$

② L là đường tròn tâm tại $z = 0$ bán kính $\frac{1}{4}$ ĐS : $-\frac{2\pi i}{3}$

③ là đường tròn tâm tại $z = \frac{1}{2}$ bán kính 5 ĐS : $\frac{2\pi i}{3}(e^3 - 1)$

d. Tích phân loại Cauchy.

✦**Định nghĩa**. Giả sử L là một đường cong trơn và $f(\zeta)$ là một hàm số lien tục trên L. Xét hàm $\Phi(z)$ xác định bởi tích phân :

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}dz \quad (\forall z \notin L) \tag{2.2.3}$$

Nếu $z \notin L$ thì hàm số dưới dấu tích phân là hàm liên tục do đó tích phân tồn tại và cho ta một hàm của z xác định tại mọi điểm $\notin L$.Tích phân ở vế phải được gọi là tích phân loại Cauchy.

✦**Định lý**. Hàm $\Phi(z)$ xác định bởi tích phân loại Cauchy là một hàm giải tích tại mọi điểm $z \notin L$. Đạo hàm cấp n của nó được tính theo công thức :

$$\Phi^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \quad (z \notin L) \tag{2.2.4}$$

Chứng minh. Trước tiên ta chứng minh rằng : $\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^2}$, $(z \notin L)$

Lấy $z+\Delta z$ thuộc lân cận của z và lập tỷ số :

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta z}=\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\Delta z}\int_L f(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta-z-\Delta z}-\frac{1}{\zeta-z}\right]d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)}$$

Cho $\Delta z\to 0$, chuyển qua giới hạn dưới dấu tích phân một cách hình thức, ta được :

$$\Phi'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2}\ ,\ (z\notin L)$$

Tương tự như vậy, ta chứng minh được : $\Phi''(z)=\dfrac{2}{2\pi i}\displaystyle\int_L\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^3}$, $(z\notin L)$ và bằng quy nạp, ta chứng minh được (2.2.4).

e. Đạo hàm cấp cao của một hàm giải tích.

✦**Định lý**. Nếu $f(z)$ giải tích trong miền $\overline{G}$ thì tại mọi điểm $z\in G$ nó có đạo hàm mọi cấp và các đạo hàm này được xác định theo công thức : $f^{(n)}(z)=\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\oint_L\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}$ (2.2.5)

với L là biên của G.

✦**Chứng minh**. Theo công thức tích phân Cauchy, ta có : $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)}$, $\forall z\in G$

Do đó theo (2.2.4) ta có : $f^{(n)}(z)=\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\oint_L\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}$, $(\forall z\in G)$

Định lý này có thể được sử dụng để tính một số tích phân.

Ví dụ : Tính $I=\displaystyle\oint_L\frac{\cos z}{(z-i)^3}dz$, $C=\left\{z,\left|z-i\right|=1\right\}$

Chọn $f(z)=\cos z$ theo công thức (2.11) ta có thể viết lại tích phân trên như sau :

$$I=\oint_L\frac{\cos z}{(z-i)^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}\cos^{(2)}(i)=\pi i\cos^{(2)}(i)=-\pi i ch1$$

f. Bất đẳng thức Cauchy và định lý Liouville.

✦**. Bất đẳng thức Cauchy**. Giả sử G là một miền có biên L và $f(z)$ là một hàm giải tích trong $\overline{G}$. Gọi M là giá trị lớn nhất của $\left|f(z)\right|$ trong $\overline{G}$, R là khoảng cách từ điểm $z_0\in G$ tới biên, l là độ dài của L, thì từ (2.2.5) ta suy ra :

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right|\le\frac{n!}{2\pi}\left|\oint_L\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right|\le\frac{n!Ml}{2\pi R^{n+1}}$$

Nếu G là hình tròn $\left|z-z_0\right|<R$ thì $l=2\pi R$ và công thức trên trở thành :

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right|\le\frac{n!M}{R^n}\quad(n=0,1,2,...)\qquad(2.2.6)$$

Bất đẳng thức (2.2.6) được gọi là bất đẳng thức Cauchy.

✦ **Định lý Liouville**. Nếu hàm $f(z)$ giải tích trong toàn mặt phẳng và bị chặn thì nó là một hằng số.

•**Chứng minh**. Giả sử $\left|f(z)\right| \le M$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Lấy z bất kỳ thuộc $\mathbb{C}$, theo (2.2.6) ta suy ra $\left|f'(z)\right| \le \dfrac{M}{R}$ với R đủ lớn. Vì vế trái không phụ thuộc R và vế phải có thể làm nhỏ tuỳ ý với R khá lớn nên $\left|f'(z)\right| = 0$, $\forall z$. Tóm lại $f'(z) = 0$ trong toàn mặt phẳng phức. Chọn z_0 cố định, từ công thức Newton – Leibnitz ta có ngay :

$$f(z) - f(z_0) = \int_{z_0}^{z} f'(z)dz = 0 \Rightarrow f(z) = f(z_0) \ , \forall z$$

§3. Chuỗi hàm biến phức.

3.1 Đại cương về chuỗi hàm biến phức.

a. Định nghĩa 1. Cho dãy hàm biến phức $u_1(z), u_2(z), ..., u_n(z), ...$ xác định trong miền E.

Ta gọi biểu thức : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + ... + u_n(z) + ...$ (3.1.1)

là chuỗi hàm của biến phức.

Tổng của n số hạng đầu tiên : $S_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + ... + u_n(z)$ được gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi hàm (3.1.1). $S_n(z)$ là một hàm của biến phức z xác định trong E.

Nếu tại $z = z_0$ chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z_0)$ hội tụ thì điểm z_0 được gọi là điểm hội tụ của chuỗi hàm (3.1.1). Nếu tại $z = z_0$ chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z_0)$ phân kỳ thì điểm z_0 được gọi là điểm phân kỳcủa chuỗi hàm (3.1.1). Tập hợp các điểm hội tụ của chuỗi hàm được gọi là miền hội tụ của nó. Nếu gọi $f(z)$ là tổng của chuỗi (3.1.1) tại điểm hội tụ z thì $f(z)$ là một hàm biến phức xác định trong miền hội tụ G.

b. Khái niệm hội tụ đều.

Theo định nghĩa, ta có : $\forall z \in G$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z) = f(z)$ (3.1.2)

Nếu đặt $R(z) = f(z) - S_n(z)$ thì đẳng thức trên tương đương với : $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(z) = 0$ (3.1.3)

Điều đó có nghĩa là : $\forall \varepsilon > 0$ nhỏ tuỳ ý $\exists N(\varepsilon, z) > 0$ sao cho khi $n > N(\varepsilon, z)$ thì $\left|R_n(z)\right| < \varepsilon$.

✦**Định nghĩa 2**. Chuỗi hàm (3.1) được gọi là hội tụ đều trên $G_0 \subset G$, nếu $\forall \varepsilon > 0$ cho trước $\exists N(\varepsilon)$ sao cho khi $n > N(\varepsilon)$ thì $\left|R_n(x)\right| < \varepsilon$, $\forall z \in G_0$.

c. Tiêu chuẩn Weierstrass : Nếu $\left|u_n(z)\right| \le a_n$,$\forall z \in G$ và nếu chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì chuỗi hàm (3.1.1) hội tụ đều trong G.

Chứng minh : Vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nên $\forall \varepsilon > 0$ nhỏ tuỳ ý $\exists N(\varepsilon) > 0$: nếu $n > N(\varepsilon)$ thì $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$. Vì $\left|u_n(z)\right| \le a_n$ nên :

$$\left|R_n(z)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(z)\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|u_k(z)\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon, \forall z \in G$$

d. Tính chất của chuỗi hàm hội tụ đều .

✦**Định lý 1**. Nếu tất cả các số hạng $u_n(z)$ của chuỗi hàm (3.1) đều liên tục trong miền G và nếu chuỗi hàm (3.1.1) hội tụ đều trong G thì tổng $f(z)$ của nó cũng liên tục trong G.

✦**Định lý 2**. Nếu tất cả các số hạng của chuỗi hàm (3.1.1) đều liên tục trên cung L và chuỗi hàm (3.1) hội tụ đều trên cung đó thì ta có thể tích phân từng số hạng của chuỗi hàm (3.1) dọc theo L, nghĩa là nếu $f(z)$ là tổng của chuỗi hàm (3.1.1) thì :

$$\int_L f(z)dz = \int_L u_1(z)dz + \int_L u_2(z)dz + ... + \int_L u_n(z)dz + ... \qquad (3.1.4)$$

✦**Định lý 3. (định lý Weierstrass).**

Nếu các số hạng của chuỗi hàm (3.1) là giải tích trong miền G và chuỗi hàm (3.1) hội tụ đều trong miền đó thì tổng $f(z)$ của chuỗi cũng là một hàm giải tích trong G. Đối với chuỗi hàm (3.1.1) ta có thể đạo hàm từng số hạng tới cấp tuỳ ý, nghĩa là :

$$f^{(m)}(z) = u_1^{(m)}(z) + u_2^{(m)}(z) + ... + u_n^{(m)}(z) + ... \quad (z \in G, m \in \mathbb{N}) \qquad (3.1.5)$$

3.2. Chuỗi luỹ thừa.

a. Định nghĩa . Chuỗi luỹ thừa là chuỗi hàm mà các số hạng của chuỗi là các hàm luỹ thừa và có dạng :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + ... + c_n(z-a)^n + ... \qquad (3.2.1)$$

trong đó $c_n (n = 0,1,2,...)$ và a là những hằng số phức, a được gọi là tâm của chuỗi.

Bằng cách đặt $\zeta = z - a$ ta đưa chuỗi (3.2.1) về dạng :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\zeta^n = c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + ... + c_n\zeta^n + ... \qquad (3.2.2)$$

với tâm tại $\zeta = 0$.

b. Định lý Abel. Nếu chuỗi luỹ thừa (3.2.2) hội tụ tại $\zeta_0 \neq 0$ thì nó hội tụ đều và tuyệt đối trong hình tròn $\left|\zeta\right| < \left|\zeta_0\right|$. Trong mọi hình tròn $\left|\zeta\right| \le \rho$ bán kính $\rho < \left|\zeta_0\right|$ chuỗi (3.2.2) hội tụ đều.

✦ **Hệ quả** : Nếu chuỗi (3.2.1) phân kỳ tại ζ_1 thì nó phân kỳ trong miền $\left|\zeta\right| > \left|\zeta_1\right|$.

c. Bán kính hội tụ.

Tương tự như giải tích thực, bán kính hội tụ của chuỗi (3.2.2) có thể được tìm bằng công thức : $$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \qquad (3.2.3)$$

hoặc $$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \qquad (3.2.4)$$

3.3. Chuỗi Taylor của các hàm giải tích.

Giả sử, chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ có bán kính hội tụ R. Theo kết quả ở trên chuỗi sẽ hội tụ đều trong hình tròn $|z-a| \le \rho < R$. Vì mỗi số hạng của chuỗi đều là hàm giải tích và vì chuỗi hội tụ đều nên theo định lý Weierstrass, tổng $f(z)$ của chuỗi cũng là một hàm giải tích trong miền $|z-a| \le \rho$.

Bài toán : Cho hàm $f(z)$ giải tích trong một lân cận của điểm a. Tìm chuỗi dạng $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ có tổng là $f(z)$ trong một lân cận của a.

a.Định lý 1. Mọi hàm $f(z)$ giải tích trong hình tròn $|z-a| < R$ đều có thể khai triển một cách duy nhất thành chuỗi luỹ thừa của $z-a$.

Chứng minh : Lấy z bất kỳ thuộc hình tròn $|z-a| < R$. Ta vẽ đường tròn $C' = \{|z-a| = \rho\}$ $(\rho < R)$ bao điểm z ở bên trong. Gọi C là đường tròn $|z-a| = R$, theo công thức tích phân Cauchy ta có : $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$. Ta sẽ khai triển hàm dưới dấu tích phân thành chuỗi luỹ thừa của $z-a$ hội tụ đều khi ζ ở trên C'. Ta có:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z-a)} = \frac{1}{\zeta - a}\frac{1}{\left(1 - \frac{z-a}{\zeta - a}\right)}.$$

Khi $\zeta \in C'$ thì $|z-a| < |\zeta - a| \Rightarrow \left|\frac{z-a}{\zeta - z}\right| < 1$. Do đó, theo công thức tính tổng của chuỗi nhân, ta có :

$$\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}} = 1 + \frac{z-a}{\zeta-a} + \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^2 + ... + \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n + ...$$

Do đó : $$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta-a} + \frac{1}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right) + \frac{1}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^2 ... + \frac{1}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n + ...$$

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta-a} + \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right) + \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^2 ... + \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n + ... \qquad (3.3.1)$$

Khi z cố định và $\zeta \in C'$ thì $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ là một hàm liên tục theo ζ do đó nó bị chặn, tức là : $\left|\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right| \le M$. Ngoài ra $\left|\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right| = \dfrac{|z-a|}{|\zeta-a|} = \dfrac{|z-a|}{\rho} = q < 1$, do đó: $\left|\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right)^n\right| \le Mq^n$.

Vì vậy theo tiêu chuẩn Weierstrass chuỗi ở vế phải của (3.3.1) hội tụ đều tới tổng $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ $\forall \zeta \in C'$. Do đó ta có thể tích phân từng số hạng của chuỗi dọc theo C' và được :

$$\oint_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \oint_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta + \oint_{C'} \frac{z-a}{(\zeta-a)^2} f(\zeta) d\zeta + \oint_{C'} \frac{(z-a)^2}{(\zeta-a)^3} f(\zeta) d\zeta ... + \oint_{C'} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} f(\zeta) d\zeta + ... =$$

$$= \oint_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta + (z-a)\oint_{C'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^2} d\zeta + (z-a)^2 \oint_{C'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^3} d\zeta + ... + (z-a)^n \oint_{C'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta + ...$$

Từ đó, ta tìm được :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta + (z-a)\frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^2} d\zeta + ... + (z-a)^n \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta + ...$$

Như vậy, tại mọi điểm z thuộc hình tròn $|z-a| < R$ ta có thể viết :

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + ... + c_n(z-a)^n + ...$$

với : $$c_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta \quad (k = 0,1,2,...)$$

Nhưng theo công thức tính đạo hàm cấp k của một hàm giải tích, ta có :

$$f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i}\oint_{C} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta \quad (k = 0,1,2,...)$$

Từ đó ta tìm được : $c_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$. Tóm lại ta đã khai triển được hàm $f(z)$ thành chuỗi luỹ thừa của $z - a$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k \tag{3.3.2}$$

Chuỗi (3.3.2) được gọi là chuỗi Taylor của hàm $f(z)$ tại $z = a$.

b. Khai triển một số hàm sơ cấp thành chuỗi Taylor .

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ...$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + ...$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + ... + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + ...$$

$$\text{arctg}z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + ...$$

c. Không điểm của một hàm giải tích.

✦ **Định nghĩa**. Giả sử $f(z)$ là một hàm giải tích trong miền G. Điểm $a \in G$ được gọi là không điểm của $f(z)$ nếu $f(a) = 0$.

Nếu tại lân cận của điểm a, hàm $f(z)$ có khai triển Taylor :

$$f(z) = c_m(z-a)^m + c_{m+1}(z-a)^{m+1} + ... \quad (3.3.3)$$

với $c_m \neq 0$, thì a được gọi là không điểm cấp m của $f(z)$.

✦**Định lý**. Điều kiện cần và đủ để a là không điểm cấp m của hàm $f(z)$ là $f(z)$ có thể viết dưới dạng :

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z) \quad (3.3.4)$$

trong đó $\varphi(z)$ là hàm giải tích tại a và $\varphi(a) \neq 0$.

Chứng minh : Giả sử a là không điểm cấp m của $f(z)$, tức là :

$$\begin{aligned} f(z) &= c_m(z-a)^m + c_{m+1}(z-a)^{m+1} + ... \quad (c_m \neq 0) \\ &= (z-a)^m \left[c_m + c_{m+1}(z-a) + ... \right] \end{aligned}$$

Đặt $\varphi(z) = c_m + c_{m+1}(z-a) + ...$ thì $\varphi(z)$ sẽ là hàm giải tích tại a và $\varphi(a) = c_m \neq 0$.

Ngược lại, giả sử $f(z) = (z-a)^m \varphi(z)$ với $\varphi(z)$ giải tích tại a và $\varphi(a) \neq 0$. Khai triểm $\varphi(z)$ theo luỹ thừa của $z - a$, ta được : $\varphi(z) = b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + ...$ với $b_0 = \varphi(a) \neq 0$. Do đó : $f(z) = b_0(z-a)^m + b_1(z-a)^{m+1} + ...$

điều này chứng tỏ a là không điểm cấp m của $f(z)$.

§4. Chuỗi Laurent.

4.1. Định lý Laurent. Giả sử $f(z)$ là hàm giải tích, đơn trị trong hình vành khăn $G : r < \left| z - a \right| < R$ Khi đó ta có $\forall z \in G$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + ... + c_n(z-a)^n + ... + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + ... + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + ... \quad (4.1.1)$$

Trong đó các hệ số c_n được cho bởi công thức :

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \quad , (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \quad (4.1.2)$$

L là một đường cong kín bất kỳ bao quanh điểm a và nằm trọn trong hình vành khăn G. Chuỗi ở vế phải hội tụ đều tới $f(z)$ trong mọi hình vành khăn kín $r' \leq \left| z - a \right| < R'$ $(r < r', R' < R)$ và được gọi là chuỗi Laurent của hàm $f(z)$ với tâm tại a.

Chứng minh : Lấy z bất kỳ thuộc G. Bao giờ ta cũng vẽ được hai đường tròn $L_1 : \left| z - a \right| = r'$; $L_2 = \left| z - a \right| = R'$ mà $r < r' < R' < R$ sao cho z thuộc hình vành khăn

$G_0 : r' < |z-a| < R'$. Vì $f(z)$ giải tích trong G_0 nên theo công thức tích phân Cauchy cho miền nhị liên với các biên là L_1, L_2 ta có : $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$

Tích phân thứ nhất là hàm giải tích trong L_2 và có thể khai triển thành chuỗi luỹ thừa theo $z-a$ còn tích phân thứ hai là hàm giải tích bên ngoài hình tròn L_1 và dẫn tới 0 khi $z \to \infty$ nên ta có thể khai triển theo các luỹ thừa của $\frac{1}{z-a}$.

Khi $\zeta \in L_2$ ta có : $\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a)\left(1 - \frac{z-a}{\zeta - a}\right)} = \frac{1}{\zeta - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$ (vì $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| < 1$)

Từ đó ta tìm được : $\frac{1}{2\pi i}\frac{f(z)}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n = \frac{f(\zeta)}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$. Vì chuỗi ở vế phải hội tụ đều với các $\zeta \in L_2$ nên ta có thể tích phân từng số hạng dọc theo L_2:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

Nếu đặt : $$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \; (n = 0,1,2,...) \tag{4.1.3}$$

ta được : $$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \tag{4.1.4}$$

Khi $\zeta \in L_1$ thì $-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(z-a)\left(1 - \frac{\zeta - a}{z-a}\right)} = \frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta - a}{z-a}\right)^n$ (vì $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| > 1$)

Suy ra : $\frac{-f(\zeta)}{2\pi i(\zeta - z)} = \frac{f(\zeta)}{2\pi i(z-a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^n} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-1}^{-\infty}(z-a)^n\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}$ Vì chuỗi ở vế phải hội tụ đều với $\zeta \in L_1$ nên ta có thể tích phân từng số hạng của chuỗi, do đó :

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=-1}^{-\infty}(z-a)^n\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

Nếu đặt : $$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \; (n = -1,-2,...) \tag{4.1.5}$$

thì : $$-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_1}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta = \sum_{n=-1}^{-\infty}c_n(z-a)^n \tag{4.1.6}$$

Như vậy ta có : $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ (4.1.7)

Với : $c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}$ nếu $n = 0,1,2,...$ và $c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}$ nếu $n = -1,-2,...$

Nếu gọi L là một đường cong kín bất kỳ bao quanh a và nằm trọn trong G thì các tích phân tính dọc theo L_1, L_2 có thể thay bằng các tích phân dọc theo L và do đó :

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \quad , (n = 0,\pm1,\pm2,...) \tag{4.1.8}$$

Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ được gọi là phần đều của chuỗi Laurent còn chuỗi $\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n$ được gọi là phần chính của chuỗi.

Theo định lý Abel thì phần đều của chuỗi hội tụ đều trong hình tròn lớn $\left|z-a\right| < R$ còn phần chính hội tụ đều bên ngoài hình tròn nhỏ $\left|z-a\right| > r$.

Chú ý : Nếu hình tròn nhỏ không chứa điểm bất thường của $f(z)$, tức là $f(z)$ giải tích trong hình tròn lớn $\left|z-a\right| < R$ thì cũng giải tích trong miền này và do đó, theo định lý Cauchy, ta có : $c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} = 0$ nếu $n = -1,-2,...$. Tức là phần chính sẽ triệt tiêu và ta nhận được chuỗi Taylor.

4.2. Một số phương pháp khai triển thành chuỗi Laurent.

Trong một số trường hợp có thể dùng những phương pháp khác để khai triển thành chuỗi Laurent đơn giản hơn việc sử dụng công thức (4.1.2).

Chẳng hạn, nếu $f(z)$ giải tích trong miền $r <| z-a |< R$ ta có thể biểu diễn $f(z)$ dưới dạng tổng : $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ hoặc dạng tích : $f(z) = f_1(z)f_2(z)$, trong đó: $f_1(z)$ giải tích bên trong hình tròn lớn $| z-a |< R$ còn $f_2(z)$ giải tích bên ngoài hình tròn nhỏ $| z-a |> r$. Khi đó ta sẽ khai triển $f_1(z)$ thành chuỗi luỹ thừa của $z-a$ và khai triển $f_2(z)$ thành chuỗi luỹ thừa của $\frac{1}{z-a}$.

Ngoài ra ta có thể dựa vào các khai triển Taylor của các hàm sơ cấp như $e^z, \sin z, \cos z, ...$ để khai triển một số hàm siêu việt thành chuỗi Laurent.

Ví dụ 1. Khai triển hàm $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ thành chuỗi Laurent tâm tại 1 trong các miền sau :

a) hình tròn bỏ tâm : $0 \leq| z-1 |< 1$

b) miền ngoài của hình tròn nói trên $| z-1 |> 1$.

Giải. a) Ta viết $f(z) = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1}$.

Khi $|z-1|<1$: $f_1(z) = \dfrac{1}{z-2} = \dfrac{-1}{1-(z-1)} = -\left[1+(z-1)+(z-1)^2+...+(z-1)^n+...\right]$

Vậy, trong miền $0 \le |z-1|<1$, ta có :

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} - 1 - (z-1) - (z-1)^2 - ... - (z-1)^n - ...$$

b) Trong miền $|z-1|>1$, ta có : $\dfrac{1}{z-2} = \dfrac{1}{z-1-1} = \dfrac{1}{z-1}\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{z-1}\right)}$.

Vì $\dfrac{1}{|z-1|}<1$ nên : $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{z-1}} = 1 + \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{(z-2)^2} + ...$. Vậy :

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-1}\left[1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+...\right] = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + ... + \frac{1}{(z-1)^n} + ...$$

Do đó: $$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} + ... + \frac{1}{(z-1)^n} + ...$$

Ví dụ 2. Viết khai triển của hàm $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z-1)}$ theo các luỹ thừa của z trong các miền sau :

a) Hình tròn $|z|<1$.

b) Hình vành khăn $1<|z|<2$

c) Miền ngoài $|z|>2$

Giải. a) Trong hình tròn $|z|<1$, hàm $f(z)$ giải tích, do đó nó khai triển được thành chuỗi Taylor . Ta viết $f(z) = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1}$ và khai triển từng số hạng :

- $\dfrac{1}{z-2} = \dfrac{1}{2\left(\dfrac{z}{2}-1\right)} = \dfrac{-1}{2\left(1-\dfrac{z}{2}\right)} = -\dfrac{1}{2}\left[1+\dfrac{z}{2}+\dfrac{z^2}{2^2}+...\right]$

- $\dfrac{-1}{z-1} = \dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + ...$

$\Rightarrow$

$$f(z) = -\frac{1}{2}\left[1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+...\right] + \left[1+z+z^2+...\right] = \frac{1}{2} + \left(1-\frac{1}{2^2}\right)z + \left(1-\frac{1}{2^3}\right)z^2 + ... + \left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

.

b) Trong miền $1 <| z |< 2$: hàm $\dfrac{1}{z-2}$ giải tích trong miền $| z |< 2$ nên nó khai triển được thành chuỗi Taylor đối với z: $\dfrac{1}{z-2} = -\dfrac{1}{2}\left[1 + \dfrac{z}{2} + \dfrac{z^2}{2^2} + ...\right]$. Mặt khác :

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z\left(\dfrac{1}{z-1}\right)} = -\frac{1}{z\left(1-\dfrac{1}{z}\right)} = -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + ...\right) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + ...(\text{vì } \frac{1}{|z|} < 1)$$

Kết quả ta được :

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2}\left[1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + ... + \frac{z^n}{2^n} + ...\right] - \left[\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + ... + \frac{1}{z^n} + ...\right]$$

c) Trong miền $| z |> 2$, ta có :

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{z}\right)} = -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + ... + \frac{1}{z^n} + ...\right) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - ... - \frac{1}{z^n} - ...$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z\left(1-\dfrac{2}{z}\right)} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} + ... + \frac{2^n}{z^n} + ...\right) = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^3} + ... + \frac{2^{n-1}}{z^n} + ...$$

Do đó : $f(z) = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1} = \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{2^2-1}{z^3} + ... + \dfrac{2^{n-1}-1}{z^n} + ...$

4.3. Chuỗi Laurent và điểm bất thường.

a. Phân loại. Giả sử a là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$, nghĩa là tồn tại một lân cận khá bé của a trong đó chỉ có a là một điểm bất thường. Như vậy $f(z)$ sẽ giải tích trong hình vành khăn nhỏ tâm a. Khi đó ta có thể khai triển $f(z)$ thành chuỗi Laurent trong hình vành khăn trênvà dựa vào đó để phân loại tính bất thường của a.

✦Nếu khai triển Laurent không chứa phần chính, tức là $c_n = 0 \ \forall n < 0$, khi đó :

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + ... \tag{4.1.9}$$

thì a được gọi là điểm bất thường bỏ được. Khi a là điểm bất thường bỏ được thì theo (4.1.9), ta có : $\lim\limits_{z\to a} f(z) = c_0$. Lúc đó nếu đặt $f(a) = c_0$ thì hàm $f(z)$ sẽ giải tích trong cả lân cận nói trên của a.

✦ Nếu trong phần chính chỉ có một số hữu hạn số hạng thì a được gọi là cực điểm. Khi đó khai triển có dạng :

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + ... + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + ... \tag{4.1.10}$$

trong đó $c_{-n} \neq 0$. Chỉ số n được gọi là cấp của cực điểm.

Nếu a là cực điểm thì từ (4.1.10) ta suy ra : $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$

✦ Nếu phần chính của khai triển có vô số số hạng thì a gọi là điểm bất thường cốt yếu.

Ví dụ 1. Xét hàm $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$, nó nhận điểm $z = 0$ là điểm bất thường cô lập.

Khai triển của $f(z)$ theo các luỹ thừa của z, ta có :

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ...\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - ... \quad (z \neq 0)$$

Vậy $z = 0$ là điểm bất thường bỏ được của hàm $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$. Nếu bổ sung : $f(0) = 1$ thì $f(z)$ giải tích cả tại $z = 0$.

Ví dụ 2. Hàm $f(z) = \dfrac{e^z}{z^3}$ nhận $z = 0$ là điểm bất thường. Khai triển theo các luỹ thừa của z, ta có : $\dfrac{e^z}{z^3} = \dfrac{1}{z^3}(1 + \dfrac{z}{1!} + \dfrac{z^2}{2!} + ...) = \dfrac{1}{z^3} + \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{2!z} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{z}{4!} + ... \quad (z \neq 0)$

Do đó $z = 0$ là cực điểm cấp 3 của $f(z)$.

b. Định lý. Giả sử $f(z) = \dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ trong đó $f_1(z)$ và $f_2(z)$ là những hàm giải tích tại a. Nếu a không phải là không điểm của tử số, tức là $f_1(a) \neq 0$ và là không điểm cấp m của mẫu số thì a là cực điểm cấp m của $f(z)$.

Chứng minh. Theo giả thuyết, ta có : $f_2(z) = (z - a)^m \varphi(z)$ với $\varphi(z)$ là hàm giải tích tại a và $\varphi(a) \neq 0$. Khi đó hàm $\dfrac{f_1(z)}{\varphi(z)}$ giải tích tại a nên có thể khai triển thành chuỗi Taylor tại lân cận của a : $\dfrac{f_1(z)}{\varphi(z)} = b_0 + b_1(z - a) + b_2(z - a)^2 + ...$ với $b_0 = \dfrac{f_1(a)}{\varphi(a)} \neq 0$. Từ đó ta nhận được khai triểm Laurent của $f(z)$: $f(z) = \dfrac{f_1(z)}{(z - a)^m \varphi(z)} = \dfrac{b_0}{(z - a)^m} + \dfrac{b_1}{(z - a)^{m-1}} + ...$

Đẳng thức này chứng tỏ rằng a là cực điểm cấp m của $f(z)$.

§5. Lý thuyết thặng dư

5.1. Định nghĩa thặng dư.

Giả sử $f(z)$ là hàm giải tích trong một lân cận của a ngoại trừ điểm a. Nếu C là một đường cong kín bất kỳ bao quanh điểm a và nằm trong lân cận nói trên, khi đó theo định lý Cauchy, tích phân $\oint_C f(z)dz$ không phụ thuộc C. Ta gọi thặng dư của $f(z)$ tại a là kết quả của phép chia $\oint_C f(z)dz$ cho $2\pi i$ và ký hiệu là $\text{Res}\left[f(z), a\right]$. Như thế, theo định nghĩa ta có :

$$\text{Res}\left[f(z), a\right] = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz \qquad (5.1.1)$$

Ví dụ : $$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z - a}, a\right] = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{dz}{z-a} = \frac{2\pi i}{2\pi i} = 1$$

5.2. Cách tính thặng dư.

a. Công thức chung : $$\mathrm{Res}\left[f(z), a\right] = C_{-1}$$
(5.2.1)

trong đó C_{-1} là hệ số của $\dfrac{1}{z-a}$ trong khai triển Laurent của $f(z)$ tại lân cận điểm a.

✦**Chứng minh** : Từ công thức tính hệ số của khai triển Laurent của hàm $f(z)$:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$. Khi $n = -1$ ta có : $$C_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$$

b. Thặng dư tại cực điểm đơn. Nếu a là cực điểm đơn của $f(z)$ thì :

$$\mathrm{Res}[f(z), a] = \lim_{z\to a}\left[(z-a)f(z)\right] \tag{5.2.2}$$

✦**Chứng minh** : Vì a là cực điểm đơn nên khai triển Laurent tâm a có dạng : $f(z) = \dfrac{C_{-1}}{z-a} + g(z)$, trong đó $g(z)$ là phần đều của khai triển. Nhân hai vế với $(z-a)$ và cho $z \to a$ ta được **đpcm**.

Định lý 1. Nếu $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$,trong đó $\varphi(z)$ và $\psi(z)$ là các hàm giải tích tại a. Điểm a là không điểm đơn của $\psi(z)$ và không phải là không điểm của $\varphi(z)$.Khi đó :

$$\mathrm{Res}\left[f(z), a\right] = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \tag{5.2.3}$$

✦**Chứng minh**.

$$\mathrm{Res}\left[f(z), a\right] = \lim_{z\to a}\left[(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right] = \lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\lim\limits_{z\to a}\dfrac{\psi(z)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\lim\limits_{z\to a}\dfrac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

c. Thặng dư tại cực điểm cấp m. Nếu a là cực điểm cấp m của $f(z)$ thì :

$$\mathrm{Res}[f(z), a] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right] \tag{5.2.4}$$

✦**Chứng minh** . Vì a là cực điểm đơn nên khai triển Laurent tâm a có dạng :

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z-a)^m} + ... + \frac{C_{-1}}{z-a} + g(z)$$

trong đó $g(z)$ là phần đều của khai triển. Nhân hai vế với $(z-a)^m$, lấy đạo hàm cấp $m-1$ và cho $z \to a$ ta được **đpcm**

5.3. Thặng dư loga.

a. Định nghĩa : Giả sử G là miền có biên là đường cong kín L. Cho $f(z)$ là hàm giải tích trong $\overline{G}$ trừ tại một số hữu hạn cực điểm và trên biên L hàm $f(z)$ không có không điểm. Thặng dư loga của hàm $f(z)$ đối với đường cong kín L là giá trị của tích phân

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta \tag{5.3.1}$$

b. Định lý 2. Giả sử trong miền G, hàm $f(z)$ có các cực điểm $a_1, a_2, ..., a_s$ với các cấp tương ứng là $p_1, p_2, ..., p_s$ và các không điểm $b_1, b_2, ..., b_m$ với các cấp tương ứng là $n_1, n_2, ..., n_m$.

Khi đó : $\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = (n_1 + n_2 + ... + n_m) - (p_1 + p_2 + ... + p_s)$ (5.3.2)

5.4. Ứng dụng của lý thuyết thặng dư

a. Tính tích phân dọc theo một đường cong kín.

✦**Định lý 3**. Nếu $f(z)$ giải tích trong miền $\overline{G}$ giới hạn bởi đường cong kín L trừ tại một số hữu hạn các cực điểm $a_1, a_2, ..., a_n$ ở bên trong, thì :

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left[f(z), a_k\right] \tag{5.4.1}$$

Chứng minh : Loại đi khỏi miền G các hình tròn $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ tâm $a_1, a_2, ..., a_n$ có bán kính đủ nhỏ ta được một miền đa liên. áp dụng định lý Cauchy cho miền đa liên, ta được :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)dz = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_i} f(z)dz = \sum_{i=1}^{n}\operatorname{Res}\left[f(z), a_i\right] \Rightarrow \text{đpcm}$$

b. Tính tích phân thực dạng $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$, trong đó $R(x)$ là một phân thức hữu tỷ.

✦ **Bổ đề 1** : Gọi C_R là nửa đường tròn tâm O bán kính R và nằm trong nửa mặt phẳng $\operatorname{Im} z > 0$. Nếu (z) giải tích trong nửa m,ặt phẳng trên trừ một số hữu hạn điểm bất thường và thoả mãn điều kiện $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ $(0 \le \arg z \le \pi)$ thì $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0$.

Chứng minh : Chọn R đủ lớn để các điểm bất thường của $f(z)$ đều nằm trong miền $|z| < R$

Khi đó $f(z)$ liên tục trên C_R và : $\int_{C_R} f(z)dz = \int_0^{\pi} f(Re^{i\varphi})Re^{i\varphi}\, id\varphi$. Vì $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ nên $\forall\varepsilon > 0$ nhỏ tuỳ ý, luôn tồn tại một số $N > 0$ đủ lớn sao cho khi $|z| > N$ thì $|zf(z)| < \varepsilon$. Do đó, nếu $z \in C_R$ với $R > N$ thì : $|f(Re^{i\varphi})Re^{i\varphi}| = |zf(z)| < \varepsilon$. Từ đó ta có :

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \le \varepsilon\int_0^{\pi} d\varphi = \pi\varepsilon \Rightarrow \text{đpcm}$$

✦ **Định lý 4**. Giả sử $R(z)$ là một phân thức hữu tỷ mà đa thức mẫu số có bậc lớn hơn bậc của đa thức tử số ít nhất hai đơn vị. $R(z)$ có một số hữu hạn cực điểm $a_1, a_2, ..., a_n$ nằm trong nửa mặt phẳng trên và không có cực điểm trên trục thực. Khi đó :

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[R(z), a_k\right] \qquad (5.4.2)$$

Chứng minh. Vẽ đường tròn tâm O, bán kính R khá lớn sao cho nửa đường tròn trên chứa tất cả các điểm bất thường $a_1, a_2, ..., a_n$. Gọi L là đường cong kín gồm đoạn $[-R, R]$ của trục thực và nửa cung tròn C_R. Theo định lý 3 ở trên, ta có :

$$\oint_L R(z)dz = \int_{-R}^{R} R(x)dx + \int_{C_R} R(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[R(z), a_k] \qquad (5.4.3)$$

Vì bậc của đa thức ở mẫu số lớn hơn bậc của đa thức tử số ít nhất hai đơn vị nên $\lim_{z\to\infty} zR(z) = 0$. Do đó theo bổ đề 1 ở trên ta có : $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} R(z)dz = 0$. Trong (5.4.3) cho $R \to \infty$ ta được : $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} R(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[R(z), a_k]$

✦ **Định lý 5**. Giả sử $R(z)$ là một phân thức hữu tỷ mà đa thức mẫu số có bậc lớn hơn bậc của đa thức tử số ít nhất hai đơn vị. $R(z)$ có một số hữu hạn cực điểm $a_1, a_2, ..., a_n$ nằm trong nửa mặt phẳng trên và có m cực điểm đơn $b_1, b_2, ..., b_m$ trên trục thực. Khi đó ta có :

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[f(z), a_k\right] + \pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}\left[f(z), b_k\right] \qquad (5.4.4)$$

c. Tính tích phân thực dạng $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\alpha x dx$ **và** $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\alpha x dx \quad (\alpha > 0)$**.**

Ta có : $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\alpha x dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\alpha x}dx$ và $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\alpha x dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\alpha x}dx$. Do đó muốn tính các tích phân nêu trên ta chỉ cần tính tích phân $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\alpha x}dx$ rồi lấy phần thực và phần ảo của kết quả nhận được.

✦**Bổ đề Jordan**. Gọi C_R là cung tròn $|z| = R$, $\operatorname{Im} z > a$ (a là một số thực đã cho). Nếu $F(z) = e^{i\alpha z} f(z)$ trong đó α là một số dương cố định còn $f(z)$ giải tích trong nửa mặt phẳng $\operatorname{Im} z \geq a$ trừ tại một số hữu hạn điểm bất thường và thoả mãn $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ thì :

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} F(z)dz = \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z)dz = 0$$

✦**Định lý 6**. Giả sử $R(z)$ là một phân thức hữu tỷ thoả mãn các điều kiện sau :

- $R(z)$ giải tích trong nửa mặt phẳng trên, trừ tại một số hữu hạn cực điểm $a_1, a_2, ..., a_n$.

• $R(z)$ không có cực điểm trên trục thực.

• Trong biểu thức của $R(z)$, bậc của tử số lớn hơn bậc mẫu số ít nhất một đơn vị.

Khi đó : $$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\alpha x}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \text{Res}[R(z)e^{i\alpha z}, a_k] \tag{5.4.5}$$

✦ **Định lý 7**. Giả sử $R(z)$ là một phân thức hữu tỷ thoả mãn các điều kiện sau :

• $R(z)$ giải tích trong nửa mặt phẳng trên, trừ tại một số hữu hạn cực điểm $a_1, a_2, ..., a_n$

• $R(z)$ có m cực điểm $b_1, b_2, ..., b_m$ trên trục thực.

• Trong biểu thức của $R(z)$, bậc của tử số lớn hơn bậc mẫu số ít nhất một đơn vị.

Khi đó : $$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\alpha x}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \text{Res}[R(z)e^{i\alpha z}, a_k] + \pi i\sum_{k=1}^{n} \text{Res}[R(z)e^{i\alpha z}, b_k] \tag{5.4.6}$$

d. Tính tích phân thực dạng $\int_0^{2\pi} f(\sin t, \cos t)dt$.

Đặt $z = e^{it}$ thì $\sin t = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$, $\cos t = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, $dt = -i\frac{dz}{z}$. Khi $t \in [0, 2\pi]$ thì z chạy trên đường tròn đơn vị $|z| = 1$. Do đó : $\int_0^{2\pi} f(\sin t, \cos t)dt = -i\oint_{C_1} f\left[\frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}), \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})\right]\frac{dz}{z}$