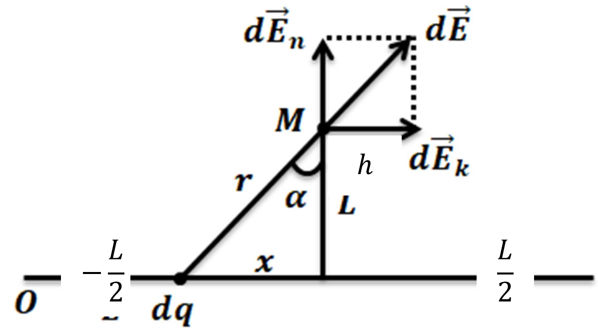
DẠNG 3

Câu 1. Xác định:

a) **Xác định vector cường độ điện trường tại điểm M nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng và cách đoạn thẳng một đoạn h, biết rằng đoạn thẳng mang điện tích có chiều dài 2L có mật độ điện dài λ đặt dọc theo trục Ox từ $x = -L/2 \rightarrow x = L/2$.**

Ta có:



$$\begin{cases} r^2 = x^2 + h^2 = (h.\tan\alpha)^2 + h^2 = \dfrac{h^2}{\cos^2\alpha} \\ x = h.\tan\alpha \rightarrow dx = \dfrac{h}{\cos^2\alpha}d\alpha \rightarrow dq = \lambda dl = \lambda dx = \dfrac{\lambda h}{\cos^2\alpha}d\alpha \end{cases}$$

$$\vec{E} = \int_{dây} d\vec{E} = \int_{dây} d\vec{E}_n + \int_{dây} d\vec{E}_k = \int_{dây} d\vec{E}_n = \int_{dây} dE_n = \int_{dây} dE\,.\cos\alpha$$

$$= \int_{dây} \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}.\frac{dq}{r^2}.\cos\alpha = \int_{dây} \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}.\frac{\lambda h}{\cos^2\alpha}d\alpha.\frac{\cos^2\alpha}{h^2}.\cos\alpha$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 h}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\alpha\, d\alpha = \frac{\lambda\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 h}$$

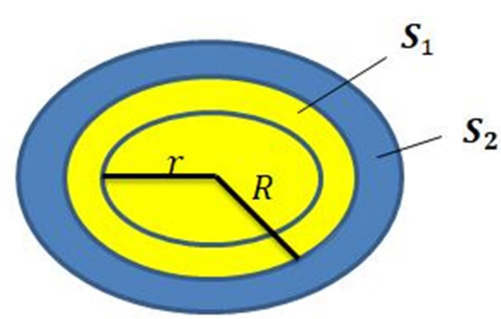
b) **Điện thế tại một điểm bất kỳ trong không gian của phân bố điện tích đối xứng cầu với mật độ $\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 \text{ nếu } 0 \le r \le R \\ 0 \text{ nếu } r > R \end{cases}$ (R là bán kính quả cầu). Xác định cường độ điện trường và điện thế bên trong và bên ngoài quả cầu.**

Giải

$Ta\ có: \phi_e = \oint_S \vec{D}\,d\vec{S} = \sum_i q_i$

Chọn S_1 là mặt cầu nằm trong quả cầu tích điện $(r < R)$.

Chọn S_2 là mặt cầu nằm ngoài quả cầu tích điện $(r > R)$.



➢ Bên trong quả cầu tích điện $(r < R)$. Áp dụng định lý $O - G$ ta có:

$$\begin{cases} \oint\limits_{S_1} \vec{D}_1 d\vec{S} = \int\limits_{V_1} \rho dV \\ \oint\limits_{S_1} \vec{D}_1 d\vec{S} = D_1 S_1 = D_1 . 4\pi r^2 \;\; \rightarrow D_1 = \dfrac{\rho_0 r}{3} \rightarrow E_1 = \dfrac{D_1}{\varepsilon\varepsilon_0} = \dfrac{\rho_0 r}{3\varepsilon\varepsilon_0} \\ \int\limits_{V_1} \rho dV = \int\limits_{V_1} \rho_0 dV = \rho_0 . \dfrac{4}{3}\pi r^3 \end{cases}$$

➢ Bên ngoài quả cầu tích điện $(r > R)$. Áp dụng định lý $O - G$ ta có:

$$\begin{cases} \oint\limits_{S_2} \vec{D}_2 d\vec{S} = \int\limits_{V} \rho dV \\ \oint\limits_{S_2} \vec{D}_2 d\vec{S} = D_2 S_2 = D_2 . 4\pi r^2 \;\; \rightarrow D_2 = \dfrac{\rho_0 R^3}{3r^2} \rightarrow E_2 = \dfrac{D_2}{\varepsilon\varepsilon_0} = \dfrac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0 r^2} \\ \int\limits_{V} \rho dV = \int\limits_{V} \rho_0 dV = \rho_0 . \dfrac{4}{3}\pi R^3 \end{cases}$$

➢ Thế điện bên trong quả cầu:

$$\varphi_1(r) = \int_r^\infty \vec{E}\, d\vec{r} = \int_r^R \vec{E}_1\, d\vec{r} + \int_R^\infty \vec{E}_2\, d\vec{r} = \int_r^R E_1\, dr + \int_R^\infty E_2\, dr$$

$$= \int_r^R \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon\varepsilon_0} dr + \int_R^\infty \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho_0}{6\varepsilon\varepsilon_0} r^2\Big|_r^R - \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0} \frac{1}{r}\Big|_R^\infty = \frac{\rho_0}{6\varepsilon\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)$$

➢ Thế điện bên ngoài quả cầu:

$$\varphi_2(r) = \int_r^\infty \vec{E}\, d\vec{r} = \int_r^\infty \vec{E}_2\, d\vec{r} = \int_r^\infty E_2\, dr = \int_r^\infty \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r}\Big|_\infty^r = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0 r}$$

$$W_e = \frac{1}{2}\int\limits_V \varphi_1\, \rho_0 dV = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{R} \frac{\rho_0}{12\varepsilon\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)\rho_0 r^2 sin\theta dr d\theta d\varphi$$

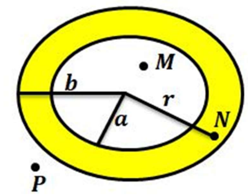
$$= \frac{\rho_0}{12\varepsilon\varepsilon_0}\left(R^2 r^3 - \frac{r^5}{5}\right)\Big|_0^R . (-cos\theta)|_0^\pi . \varphi|_0^{2\pi} = \frac{\rho_0}{12\varepsilon\varepsilon_0} . \frac{4}{5} R^5 . 2 . 2\pi = \frac{4\pi R^5}{15\varepsilon\varepsilon_0}$$

<u>Câu 2.</u> Xác định:

a) Vector cường độ điện trường tạo bởi một lớp hình cầu đồng tâm có bán kính lần lượt là a,b (a<b), tích điện với mật độ khối $\boldsymbol{\rho = -\frac{\rho_0}{r^2}(a < r < b)}$

<u>Giải</u>

Chọn S_1là mặt cầu bán kính $r < a$, S_2là mặt cầu bán kính $a < r < b$, S_3là mặt cầu bán kính $r > b$



$$Cường\ độ\ điện\ trường\ tại\ điểm\ M: \oint\limits_{S_1} \vec{D}_1 d\vec{S} = \int\limits_{V_1} \rho dV = 0 \rightarrow D_1 = 0$$

$$\rightarrow E_1 = 0$$

$$Cường\ độ\ điện\ trường\ tại\ điểm\ N$$

$$\begin{cases} \oint\limits_{S_2} \vec{D}_2 d\vec{S} = \int\limits_{V_2} \rho dV \\ \oint\limits_{S_2} \vec{D}_2 d\vec{S} = D_2 S_2 = D_2 . 4\pi r^2 \qquad \rightarrow D_2 = \dfrac{\rho_0(a-r)}{r^2} \rightarrow E_2 \\ \int\limits_{V_2} \rho dV = \int\limits_{V_2} \dfrac{-\rho_0}{r^2} . 4\pi r^2 dr = \rho_0 . 4\pi(a-r) \end{cases}$$

$$= \frac{D_2}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\rho_0(a-r)}{r^2 \varepsilon\varepsilon_0}$$

$$Cường\ độ\ điện\ trường\ tại\ điểm\ P:$$

$$\oint\limits_{S_3} \vec{D}_3 d\vec{S} = \int\limits_{V} \rho dV \rightarrow D_3 . 4\pi r^2 = \int\limits_a^b -\frac{\rho_0}{r^2} . 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho_0 r|_b^a$$

$$= 4\pi\rho_0(a-b)$$

$$\rightarrow D_3 = \frac{\rho_0(a-b)}{r^2} \rightarrow E_3 = \frac{\rho_0(a-b)}{\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$$

b) Mật độ điện tích $\rho(r)$ của phân bố điện tích đối xứng cầu quanh tâm O tạo ra một trường tĩnh điện có điện thế tại điểm M là:

$$\boldsymbol{\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{-\lambda r}}{r}, (\lambda, q > 0)} \textbf{ với } \boldsymbol{OM = r.}$$

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} : phương\ trình\ Poisson, \rho = 0 \rightarrow \Delta\varphi = 0$$

$$\Delta\varphi = \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} \rightarrow \rho(r) = \Delta\varphi\varepsilon_0$$

Hệ tọa độ cầu (r, θ, ϕ)

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\right)$$

$$\rightarrow \Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = \Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\left(\frac{e^{-\lambda r}}{r}\right)}{\partial r}\right)$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}(-\lambda r.e^{-\lambda r} - e^{-\lambda r}) = \frac{1}{r^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\lambda e^{-\lambda r} + \lambda^2 r.e^{-\lambda r} + e^{-\lambda r}\right)$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.\lambda^2 r.e^{-\lambda r} = \frac{q\lambda^2.e^{-\lambda r}}{4\pi r\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \rho(r) = \Delta\varphi.\varepsilon_0 = \frac{q\lambda^2.e^{-\lambda r}}{4\pi r}$$

Câu 11. Một mặt cầu kim loại mỏng bán kính r mang điện tích Q. Tính:

a. Điện dung của quả cầu.

b. Mật độ năng lượng điện trường tại khoảng cách r tính từ tâm quả cầu.

Giải

a. Ta có:

$$\begin{cases} U = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}.\dfrac{Q}{r} \\ C = \dfrac{Q}{U} \end{cases} \rightarrow C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r (C)$$

b. Ta có:

$$\begin{cases} E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} \\ w = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} \end{cases} \rightarrow w = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^4}\left(\frac{J}{m^3}\right)$$