CHƯƠNG 3: TÍCH PHÂN HÀM PHỨC

§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG CỦA HÀM BIẾN PHỨC

1. Định nghĩa: Cho đường cong C định hướng, trơn từng khúc và trên C cho một hàm phức f(z). Tích phân của f(z) dọc theo C được định nghĩa và kí hiệu là:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(z_k - z_{k-1}) = \int_C f(z)dz \qquad (1)$$

Trong đó $a = z_o$, $z_1,..,z_n = b$ là những điểm kế tiếp nhau trên C; a và b là hai mút, t_k là một điểm tuỳ ý của C nằm trên cung [z_k, z_{k-1}]. Giới hạn (1) thực hiện sao cho max l_k $\to 0$ với l_k là độ dài cung [z_k, z_{k-1}].

2. Cách tính: Đặt $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$, $z_k = x_k + jy_k$
$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$
$t_k = \alpha_k + j\beta_k$;
$u(\alpha_k , \beta_k) = u_k$; $v(\alpha_k , \beta_k) = v_k$

ta có: $$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + j\sum_{k=1}^{n}(u_k\Delta x_k + v_k\Delta y_k) \qquad (2)$$

Nếu đường cong C trơn từng khúc và f(z) liên tục từng khúc, giới nội thì khi $n\to\infty$ vế phải của (2) tiến tới các tích phân đường của hàm biến thực. Do đó tồn tại:

$$\int_C f(z) = \int_C (udx - vdy) + j\int_C (udy + vdx) \qquad (3)$$

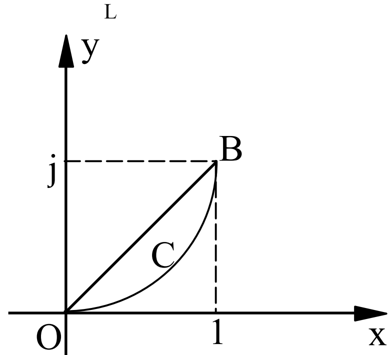
Nếu đường cong L có phương trình tham số là x = x(t), y = y(t) và $\alpha \le t \le \beta$ thì ta có thể viết dưới dạng hàm biến thực:

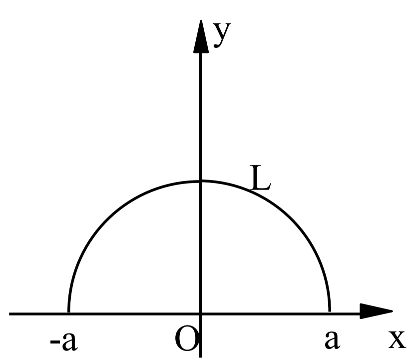
$$z = x(t) + jy(t) = z(t) \qquad \alpha \le t \le \beta$$

với $z(a) = \alpha$; $z(b) = \beta$. Khi đó ta có công thức tiện dụng:

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f\left[\,z(t)\,\right].z'(t)\,dt \qquad (4)$$

Ví dụ 1: Tính $I = \int_L \mathrm{Re}z dz$, L là đoạn thẳng nối 2 điểm 0 và 1 + j theo chiều từ 0 đến 1+j.





Phương trình tham số của L có thể lấy là:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \end{cases} \qquad \text{Vậy } z(t) = (1 + j)t, \text{ t thực } t \in [0, 1]$$

Điểm O ứng với t = 0 và điểm B ứng với t = 1. Theo (4):

$$I = \int_0^1 \mathrm{Re}(1+j)t.z'(t)dt = \int_0^1 (1+j)tdt = (1+j)\int_0^1 tdt = \frac{1+j}{2}$$

Ví dụ 2:Tính $I = \int_L \frac{dz}{z}$, L là nửa cung tròn nằm trong nửa mặt phẳng trên, nối điểm -a và a, chiều lấy tích phân từ -a đến a.

Phương trình tham số của đường cong L là:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$$

Vậy $z(t) = a(\cos t + j\sin t) = ae^{jt}$, $z'(t) = jae^{jt}$.

Điểm -a ứng với $t = \pi$, điểm a ứng với t = 0. Theo (4):

$$I = \int_L \frac{dz}{z} = \int_\pi^0 \frac{jae^{jt}dt}{ae^{jt}} = j\int_\pi^0 dt = -j\pi$$

Ví dụ 3: Tính $I = \int_C (1+j-2\bar{z})dz$, C là cung parabol $y = x^2$, nối gốc O và điểm B có toạ độ (1,1).

Hàm $f(z) = 1+j-2\bar{z} = 1+j-2(x-jy)$. Tách phần thực và phần ảo ta có u(x, y)=1-2x v(x, y) = 1 + 2y. Dùng (3) ta có:

$$I = \int_C (1-2x)dx - (1+2y)dy + j\int_C (1+2y)dx + (1-2x)dy$$

Chuyển mỗi tích phân đường loại 2 thành tích phân xác định ta có:

$$\int_C (1-2x)dx - (1+2y)dy = \int_0^1 (1-2x)dx - (1+2x^2)2xdx = \int_0^1 (-4x^3 - 4x + 1)dx = -2$$

$$\int_C (1+2y)dx + (1-2x)dy = \int_0^1 (1+2x^2)dx + (1-2x)2xdx = \int_0^1 (-2x^2 + 2x + 1)dx = \frac{4}{3}$$

Thay vào trên ta có:

$$I = -2 + \frac{4j}{3}$$

Ví dụ 4: Tính $I = \int_{AB} z^2 dz$, AB là đoạn thẳng nối điểm A là toạ vị của số phức 2 và điểm B là toạ vị của số phức j.

$f(z) = z^2 = (x + jy)^2 = (x^2 - y^2 + 2jxy)$ nên $u = x^2 - y^2$ và $v = 2xy$. Theo (3) ta có:

$$I = \int_{AB} (x^2 - y^2)dx - 2xydy + j\int_{AB} (x^2 - y^2)dy + 2xydx$$

Vì AB có phương trình x = 2 - 2y, dx = -2dy (chọn y làm tham số) nên:

$$\int_{AB} (x^2 - y^2)dx - 2xydy = \int_0^1 (4 + 4y^2 - 8y - y^2)(-2dy) - 2(2-2y)ydy = -\frac{8}{3}$$

$$\int_{AB} (x^2 - y^2)dy + 2xydx = \int_0^1 (4 + 4y^2 - 8y - y^2)dy + 2y(2-2y)(-2ydy) = -\frac{1}{3}$$

Thay vào ta có:

$$I = -\frac{8+j}{3}$$

Ví dụ 5: Tính $I_k = \int_C (\overline{z})^2 dz$ k = 1, 2

với C_1 là đoạn thẳng nối 0 và 1 + j và C_2 là đường gấp khúc nối 0, 1, 1 + j

Áp dụng (4) với C_1 ta có z = (1 + j)t, t đi từ 0 đến 1 nên:

$$I_1 = \int_{C_1} (\overline{z})^2 dz = \int_o^1 (1-j)^2 t^2 (1+j) dt = \frac{2}{3}(1-j)$$

Tương tự:

$$I_1 = \int_{C_2} (\overline{z})^2 dz = \int_o^1 t^2 dt + \int_o^1 (1-jt)^2 dt = \frac{2}{3}(2+j)$$

3. Các tính chất của tích phân: Từ công thức (3) ta suy ra rằng tích phân của hàm biến phức dọc theo một đường cong có tất cả các tính chất thông thường của một tích phân đường loại 2. Ta nêu lại các tính chất đó:

- Tích phân không phụ thuộc tên gọi biến số tích phân

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_{AB} f(\zeta)d\zeta$$

- $\int_{AB} [f(z) + g(z)]dz = \int_{AB} f(z)dz + \int_{AB} g(z)dz$

- Nếu a là hằng số phức thì:

$$\int_{AB} af(z)dz = a\int_{AB} f(z)dz$$

- $\int_{AB} f(z)dz = -\int_{BA} f(z)dz$

- Nếu A, B và C là 3 điểm cùng nằm trên một đường cong thì:

$$\int_{AC} f(z)dz = \int_{AB} f(z)dz + \int_{BC} f(z)dz$$

- $\int_{z_o}^{z} dz = z - z_o$

4. Các công thức ước lượng tích phân: Nếu M là giá trị lớn nhất của | f(z) | trên đường cong L (nghĩa là | f(z) | ≤ M ∀z ∈ L) thì ta có:

$$\left| \int_L f(z)dz \right| \le \int_L |f(z)dz|\,|dz| \le Ml \qquad (5)$$

Chứng minh: Vì môđun của một tổng nhỏ hoặc bằng tổng các môđun nên:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\,|\Delta z_k|$$

Nhưng theo giả thiết | f(ζ_k) | ≤ M nên:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} M\left|\Delta z_k\right| = M\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta z_k\right|$$

Vậy: $\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \le M\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta z_k\right|$

Chú ý là $\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta z_k\right|$ bằng chiều dài đường gấp khúc có các đỉnh tại z_o, z_1, z_2 ,..,z_n. Khi max | Δz_k | $\to$ 0 thì $\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta z_k\right|$ dần tới độ dài l của đường cong L. Chuyển qua giới hạn trong (6) ta có:

$$\left|\int_L f(z)dz\right| \le Ml \qquad (5)$$

§2. ĐỊNH LÍ CAUCHY CHO MIỀN ĐƠN LIÊN

1. Định lí: Nếu f(z) giải tích trong miền đơn liên D và C là một đường cong kín nằm trong D thì:

$$\oint_L f(z)dz = 0 \qquad (6)$$

Chứng minh: Giả thiết chỉ đòi hỏi f(z) giải tích trong D, nhưng với giả thiết này, cách chứng minh sẽ khó hơn. Để đơn giản cách chứng minh, ta giả thiết thêm f'(z) liên tục trong $\overline{D}$. Vậy u(x, y) và v(x, y) liên tục và có đạo hàm riêng liên tục trong $\overline{D}$. Theo (3) thì:

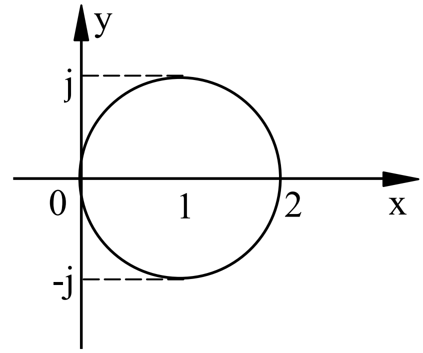
$$\oint_L f(z)dz = \oint_L udx - vdy + j\oint_L vdx + udy$$

Trong giải tích, nếu đã biết P(x, y), Q(x, y) liên tục và có đạo hàm riêng liên tục trong $\overline{D}$ thì điều kiện cần và đủ để $\oint_C Pdx + Qdy = 0\ \forall C \in \overline{D}$ là $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

Áp dụng kết quả đó cho, ta thấy $\oint_L udx - vdy = 0$. Thật vậy, ở đây P = u và Q = -v. Do giả thiết f(z) giải tích nên các điều kiện C - R được thoả mãn, vậy $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial(-v)}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

Tương tự ta chứng minh được $\oint_L vdx + udy = 0$. Do đó $\oint_L f(z)dz = 0$

Ví dụ 1: Nếu L là đường cong kín bất kì giới hạn một miền đơn liên G, thì $\oint_L e^z dz = 0$ vì f(z) = e^z giải tích trong cả mặt phẳng.



Ví dụ 2: Tính $I = \oint_L \frac{\sin z}{z^2+1}dz$, L là đường tròn | z - 1| = 1.

Hàm $f(z) = \frac{\sin z}{z^2+1}$ có hai điểm bất thường là nghiệm của phương trình $z^2 + 1 = 0$ là $\pm j$.

Vậy f(z) giải tích trong miền | z - 1 | ≤ 1 . Áp dụng định lí Cauchy ta có I = 0.

Ví dụ 3: Tính $I = \oint_L \frac{dz}{z - z_0}$, L là đường tròn tâm z_o, bán kính R, tích phân lấy theo chiều dương.

Phương trình tham số của L là:

$$\begin{cases} x = x_o + a\cos t \\ y = y_o + a\sin t \end{cases}$$

Vậy $z(t) = x(t) + jy(t) = z_o + ae^{jt}$; $z'(t) = jae^{jt}$.

Theo (4) ta có:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{jae^{tj}}{ae^{tj}}dt = 2\pi j$$

Sở dĩ $I \neq 0$ vì hàm $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$ có điểm bất thường tại $z = z_o$ và giả thiết của định lí Cauchy không được thoả mãn.

Qua ví dụ này ta thấy nếu f(z) có điểm bất thường trong G thì định lí Cauchy không còn đúng nữa.

Ví dụ 4: Tính $I = \int_o^j ze^z dz$

Ta có thể viết: $I = \int_o^j ze^z dz = ze^z\Big|_o^j - \int_o^j e^z dz = je^j - (e^j - 1) = 1 + (j-1)(\cos 1 + j\sin 1)$

$$= (1 - \cos 1 - \sin 1) + j(\cos 1 - \sin 1)$$

Ví dụ 5: Tính $I = \int_1^{j+1} (z-1)^{100} z dz$

Đặt t = z - 1 ta có:

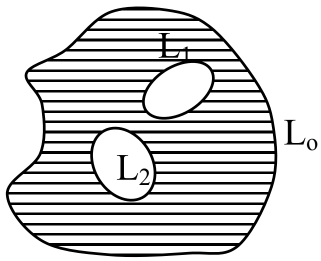
$$I = \int_o^j t^{100}(t+1)dt = \int_o^j (t^{101} + t^{100})dt = \left(\frac{t^{102}}{102} + \frac{t^{101}}{101}\right)\Bigg|_0^j = \frac{j^{102}}{102} + \frac{j^{101}}{101} = -\frac{1}{102} + \frac{j}{102}$$

§3. ĐỊNH LÍ CAUCHY CHO MIỀN ĐA LIÊN

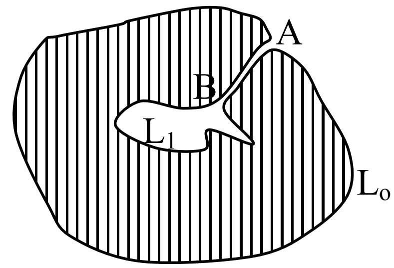
1. Định lí: Giả sử miền G là đa liên mà biên L gồm đường cong bên ngoài L_o, và các đường cong bên trong $L_1, L_2, .., L_n$.(hình a)

Nếu f(z) là một hàm giải tích trong $\overline{G}$ thì:

$$\oint_{L_o} f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz + \oint_{L2} f(z)dz + \cdots + \oint_{Ln} f(z)dz \qquad (7)$$



a



b

Các tích phân đều lấy theo hướng dương, nghĩa là ngược chiều kim đồng hồ.
Chứng minh: Ta sẽ chứng minh

$$\oint_{L_o} f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz$$

nếu biên bên trong chỉ có một đường cong kín L_1(hình b). Cách chứng minh tương tự nếu biên bên trong có nhiều đường.

Giả sử AB là lát cắt nối điểm A trên đường L_o và điểm B trên đường L_1. Do lát cắt AB, miền G trở thành đơn liên, do đó có thể áp dụng định lí Cauchy nêu ở phần trên. Ta có:

$$\oint_{L_o} f(z)dz + \oint_{AB} f(z)dz + \oint_{\bar{L}_1} f(z)dz + \oint_{BA} f(z)dz = 0$$

Kí hiệu $\oint_{\bar{L}_1} f(z)dz$ chỉ tích phân theo hướng thuận chiều kim đồng hồ.

Theo tính chất của tích phân ta có:

$$\oint_{\bar{L}_1} f(z)dz = -\oint_{L_1} f(z)dz$$

$$\oint_{AB} f(z)dz = -\oint_{BA} f(z)dz$$

Thay vào trên ta có:

$$\oint_{L_o} f(z)dz - \oint_{L_1} f(z)dz = 0$$

Đây là điều cần chứng minh.
Ghi chú: Công thức (7) có thể viết thành:

$$\oint_{L_o} f(z)dz - \oint_{L_1} f(z)dz - \oint_{L2} f(z)dz - \cdots - \oint_{Ln} f(z)dz = 0$$

hay: $$\oint_{L_o} f(z)dz + \oint_{\bar{L}_1} f(z)dz + \oint_{\bar{L}_2} f(z)dz + \cdots + \oint_{\bar{L}_n} f(z)dz = 0$$

hay gọn hơn:

$$\oint_{L_o + \bar{L}_1 + \cdots + \bar{L}_n} f(z)dz = 0$$

Gọi L là biên có hướng dương của miền G thì đẳng thức trên được viết là:

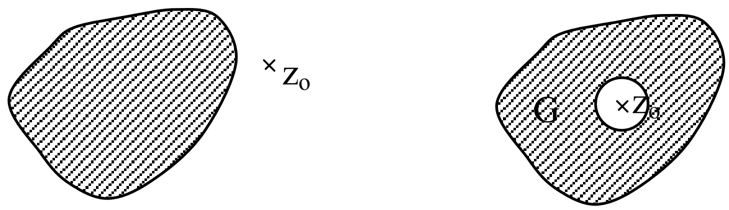
$$\oint_{L} f(z)dz = 0$$

Đây là công thức (1) suy rộng cho miền đa liên.

Hệ quả: Giả sử f(z) giải tích trong miền D có biên C và liên tục trong $\overline{D}$ thì với mọi $r_o \in D$ thì:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_o} = 2\pi j f(z_o)$$

Ví dụ :Tính $I = \int_L \frac{dz}{(z - z_o)^n}$ với n nguyên dương, z_o cho trước. L là đường cong kín không qua z_o



Gọi G là miền giới hạn bởi đường cong L.

Giả sử $z_o \notin G$. Khi đó $f(z) = \frac{1}{(z - z_o)^n}$ là hàm giải tích trong $\overline{G}$ nên theo định lí Cauchy thì I = 0

Giả sử $z_o \in G$. Loại khỏi G một miền là hình tròn tâm z_o , bán kính a. Như vậy f(z) sẽ giải tích trong miền nhị liên còn lại. Theo (8) thì:

$$I = \int_L \frac{dz}{(z - z_o)^n} = \int_\gamma \frac{dz}{(z - z_o)^n}$$

γ là đường tròn $| z - z_o | = a$.
Nếu n = 1 thì $I = 2j\pi$
Nếu $n \neq 1$, chú ý là khi $z \in \gamma$ thì: $z = z_o + ae^{jt}$, $dz = jae^{jt}dt$ $0 \leq t \leq 2\pi$
Vậy:

$$I = \int_L \frac{dz}{(z - z_o)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{jae^{jt}dt}{a^n e^{jnt}} = \frac{j}{a^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{j(1-n)t}dt = \frac{1}{(1-n)a^{n-1}} e^{j(1-n)t}\Big|_0^{2\pi} = 0 \text{ vì } e^{j(1-n)2\pi} = e^o = 1$$

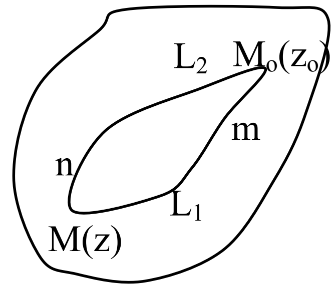
Ta tóm tắt kết quả để dùng sau này:

$$\oint_L \frac{dz}{(z - z_o)^n} = \begin{cases} 2j\pi & \text{khi } n = 1, \text{L bao } z_o \\ 0 & \forall z \neq \end{cases}$$

2. Tích phân không phụ thuộc đường đi:

Định lí: Giả sử f(z) là một hàm giải tích trên miền đơn liên G và z_o là một điểm cố định thuộc G. Khi đó tích phân của hàm f(z) dọc theo một đường cong kín nằm trọn trong G, đi từ điểm z_o đến điểm z $\int_{z_o}^{z} f(z)dz$ không phụ thuộc vào đường lấy tích phân

Nếu cận trên z thay đổi thì tích phân đó là một hàm giải tích của z trong G và có đạo hàm được xác định bởi công thức:



$$\frac{d}{dz}\left(\int_{z_o}^{z} f(z)dz\right) = f(z) \qquad (10)$$

Chứng minh: Lấy hai đường cong bất lì L_1 và L_2 nằm trong G và đi từ z_o đến z. Do f(z) giải tích nên áp dụng định lí Cauchy cho đường cong kín M_omMnM_o:

$$\int_{M_omM} f(z)dz + \int_{MnM_o} f(z)dz = 0$$

hay: $$\int_{M_omM} f(z)dz - \int_{M_onM} f(z)dz = 0$$

tức là: $$\int_{L_1} f(z)dz = \int_{L_2} f(z)dz$$

Vì L_1 và L_2 là bất kì nên ta có thể kết luận rằng tích phân đi từ z_o đến z không phụ thuộc đường lấy tích phân mà chỉ phụ thuộc cận trên z.

Bây giờ ta còn phải chứng minh rằng nếu đặt $F(z) = \int_{z_o}^{z} f(z)dz$ thì F'(z) = f(z). Vì tích phân không phụ thuộc đường đi nên ứng với mỗi z tích phân có một giá trị hoàn toàn xác định. Vậy F(z) là một hàm đơn trị. Ta có:

$$\Delta F = F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{z_o}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_o}^{z} f(\zeta)d\zeta = +\int_{z}^{z_o} f(\zeta)d\zeta = \int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta$$

Vì f(ζ) giải tích, nên nó liên tục tại z. Do đó có thể viết f(ζ) = f(z) + α(ζ) với α(ζ) là hàm giải tích, dần tới 0 khi $\zeta \to 0$. Vậy:

$$\Delta F = \int_{z}^{z+\Delta z} [f(z) + \alpha(\zeta)]d\zeta = \int_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\zeta + \int_{z}^{z+\Delta z} \alpha(\zeta)d\zeta = f(z)\int_{z}^{z+\Delta z} d\zeta + \int_{z}^{z+\Delta z} \alpha(\zeta)d$$

$$= f(z)\Delta z + \int_{z}^{z+\Delta z} \alpha(\zeta)d\zeta$$

hay $$\frac{\Delta F}{\Delta z} = f(z) + \frac{\int_{z}^{z+\Delta z} \alpha(\zeta)d\zeta}{\Delta z} \qquad (11)$$

Cho $\Delta z \to 0$ thì $z + \Delta z \to z$. Số hạng thứ hai bên vế phải dần tới 0. Thật vậy, do tích phân không phụ thuộc đường đi nên trong tích phân $\int_{z}^{z+\Delta z} \alpha(\zeta)d\zeta$ ta chọn đường đi từ z tới z + Δz là đoạn thẳng nối hai điểm đó. Chiều dài đoạn thẳng này là | Δz |. Sau đó áp dụng công thức ước lượng tích phân ta có:

$$\left| \int_{z}^{z+\Delta z} \alpha(\zeta)d\zeta \right| \le \max|\alpha(\zeta)|.|\Delta z|$$

Vậy: $\left|\dfrac{\int_z^{z+\Delta z}\alpha(\zeta)d\zeta}{\Delta z}\right| \le \max|\alpha(\zeta)|$

Cho $\Delta z \to 0$ thì max | $\alpha(\zeta)$ | $\to$ 0. Do đó $\dfrac{\int_z^{z+\Delta z}\alpha(\zeta)d\zeta}{\Delta z} \to 0$. Từ (11) ta suy ra F'(z) = f(z).

§4. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

Ta gọi F(z) là nguyên hàm f(z) nếu F'(z) = f(z). Hiển nhiên, nếu F(z) là nguyên hàm của f(z) thì F(z) + C , trong đó C là một hằng số phức cũng là nguyên hàm của f(z). Ngược lại nếu Φ(z) và F(z) đều là nguyên hàm của f(z) thì chúng phải khác nhau một hằng số phức C:

$\Phi(z) - F(z) = C$

Thật vậy, đặt g(z) = Φ(z) - F(z) = u(x, y) + jv(x, y).
Ta phải chứng minh rằng u và v là những hằng số.
Ta có:

$$g'(z) = \Phi'(z) - F'(z) = 0 \qquad (12)$$

Nhưng theo công thức tính đạo hàm:

$$g'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - j\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Như vậy:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Nghĩa là u(x, y) và v(x, y) là các hằng số. Ta suy ra rằng nếu F(z) là nguyên hàm của f(z) thì họ hàm số F(z) + C với C là một hằng số phức tuỳ ý, chứa tất cả các nguyên hàm của f(z). Ta gọi họ hàm số này là tích phân bất định của hàm f(z) và kí hiệu là $\int f(z)dz$.

Tóm lại: $\int f(z)dz = F(z) + C: \ F'(z) = f(z)$

Theo bảng đạo hàm ta có thể suy ra bảng nguyên hàm, giống như trong tích phân thực:

$$\int e^z dz = e^z + C$$

$$\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \sin z dz = \cos z + C$$

$$\int \frac{1}{z} dz = \ln z + C$$

§5. CÔNG THỨC NEWTON - LEIBNITZ

Định lí: Giả sử f(z) là một hàm giải tích trong miền đơn liên G và có nguyên hàm F(z). Khi đó:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)d\zeta = F(z_2) - F(z_1) \qquad (13)$$

Chứng minh: Ta đã biết là $\int_{z_o}^{z} f(\zeta)d\zeta$ cũng là một nguyên hàm f(z). Vậy:

$$\int_{z_o}^{z} f(\zeta)d\zeta = F(z) + C$$

Thay $z = z_o$ vào 2 vế ta có: $0 = F(z_o) + C$. Do đó $C = -F(z_o)$. Như vậy:

$$\int_{z_o}^{z} f(\zeta)d\zeta = F(z) - F(z_o)$$

Khi $z = z_1$:

$$\int_{z_o}^{z_1} f(\zeta)d\zeta = F(z_1) - F(z_o) = F(z)\Big|_{z_o}^{z_1}$$

Công thức này được gọi là công thức Newton - Leibnitz. Khi tính tích phân của một hàm giải tích ta dùng trực tiếp công thức này mà không đưa về tính tích phân đường loại 2.

Ví dụ 1: Tính $I = \int_{2}^{j} z^2 dz$

$$I = \int_{2}^{j} z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Big|_{2}^{j} = -\frac{j+8}{3}$$

Vi dụ 2: Tính $I = \int_{L} \frac{dz}{z}$, L là cung tròn đi từ điểm z = -a đến điểm z = a(a> 0)

$$I = \int_{L} \frac{dz}{z} = \int_{-a}^{a} \frac{dz}{z} = \ln z\Big|_{-a}^{a} = \ln a - \ln(-a) = \ln a - [\ln a + j\arg(-a)] = -j\pi$$

Ví dụ 3: Tính $I = \int_{0}^{j} ze^z dz$

$$I = \int_{0}^{j} ze^z dz = ze^z\Big|_{0}^{j} - \int_{0}^{j} e^z dz = ze^z\Big|_{0}^{j} - e^z\Big|_{0}^{j} = -0.381 - 0.301j$$

§6. CÔNG THỨC TÍCH PHÂN CAUCHY

1. Tích phân Cauchy:

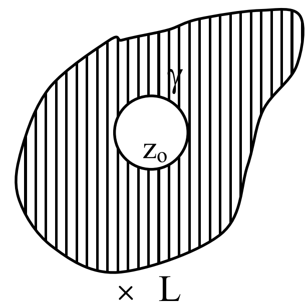
Định lí: Giả sử G là một miền đơn liên hoặc đa liên giới hạn bởi biên L và z là một điểm bên trong G. Nếu f(z) giải tích trong $\overline{G}$ thì ta có công thức:

$$f(z) = \frac{1}{2j\pi}\oint_L \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \tag{14}$$

Tích phân bên vế phải được gọi là tích phân Cauchy của hàm f(z). Công thức (14) được gọi là công thức tích phân Cauchy.

Ý nghĩa: Công thức này cho phép ta tính được giá trị của hàm giải tích ở bên trong miền G khi biết giá trị của nó trên biên.

Nói khác đi, giá trị của hàm giải tích trong miền, hoàn toàn được xác định bởi giá trị của nó trên biên.



Chứng minh: Lấy z_o bất kì trong miền G, ta sẽ chứng minh rằng:

$$f(z_o) = \frac{1}{2j\pi}\oint_L \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_o} \tag{15}$$

Đặt $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_o}$. Loại khỏi miền G một hình tròn bán kính r bất kì đủ nhỏ có tâm tại z_o thì φ(z) sẽ giải tích trong miền đa liên còn lại.

Áp dụng định lí Cauchy cho miền đa liên ta có:

$$\oint_L \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_o} = \oint_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_o}$$

γ là đường tròn $|\zeta - z_o| = r$

Vì công thức trên đúng với mọi r khá bé nên (để đường tròn γnằm trong miền G) ta có thể viết:

$$\int_L \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_o} = \lim_{r\to 0}\oint_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_o}$$

Ta có:

$$\oint_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_o} = \oint_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z_o) + f(z_o)}{\zeta - z_o}d\zeta = \oint_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z_o)}{\zeta - z_o}d\zeta + f(z_o)\oint_\gamma \frac{1}{\zeta - z_o}d\zeta$$

$$= \oint_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z_o)}{\zeta - z_o}d\zeta + 2j\pi f(z_o) \tag{16}$$

Do tính liên tục của hàm f(ζ) nên ∀ε > 0 ta có thể chọn r khá bé để $|f(\zeta) - f(z_o)| < \varepsilon$.

Khi đó $\forall \zeta \in \gamma$ ta có $|\zeta - z_o| = r$ và:

$$\left|\frac{f(\zeta) - f(z_o)}{\zeta - z_o}\right| < \frac{\varepsilon}{r}$$

Áp dụng công thức ước lượng tích phân ta có:

$$\left|\oint_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z_o)}{\zeta - z_o}\right| \le \frac{\varepsilon}{r}2\pi r = 2\pi\varepsilon$$

Vì ε bé tuỳ ý nên:

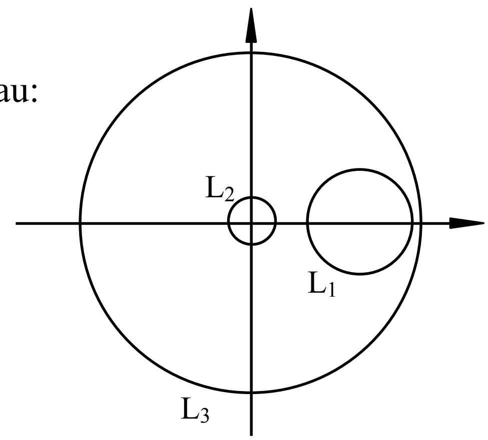
$$\lim_{r\to 0}\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)-f(z_o)}{\zeta - z_o}d\zeta = 0$$

Từ (16) suy ra:

$$\lim_{r\to 0}\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_o}d\zeta = 2\pi\varepsilon f(z_o)$$

Đó là điều cần chứng minh.

Nhờ công thức tích phân Cauchy ta có thể tính một số tích phân lấy dọc theo một đường cong kín.



Ví dụ 1: Tính $I = \oint_{L}\frac{e^z dz}{z(z-3)}$ trong các trường hợp sau:

- L là đường tròn tâm tại 2, bán kính 1.5(đường L_1)
- L là đường trón tâm O, bán kính 0.25(đường L_2)
- L là đường trón tâm 0.5, bán kính 5(đường L_3)
- Để tính tích phân $I = \oint_{L_1}\frac{e^z dz}{z(z-3)}$ ta dùng (15)

Chọn $f(z) = \frac{e^z}{z}$, $z_o = 3$; hàm f(z) giải tích trong hình tròn $\left|z-2\right| \le \frac{3}{2}$. Vậy giả thiết của định lí được thoả mãn. Ta có:

$$I = \oint_{L_1}\frac{e^z dz}{z(z-3)} = 2j\pi f(3) = 2j\pi\frac{e^z}{3}$$

- Để tính $I = \oint_{L_2}\frac{e^z dz}{z(z-3)}$ ta đặt $f(z) = \frac{e^z}{z-3}$, $z_o = 0$; hàm f(z) giải tích trong hình tròn $\left|z\right| \le \frac{1}{4}$. Vậy giả thiết của định lí được thoả mãn. Ta có:

$$I = \oint_{L_1}\frac{e^z dz}{z(z-3)} = 2j\pi f(0) = 2j\pi\frac{e^0}{0-3} = -\frac{2j\pi}{3}$$

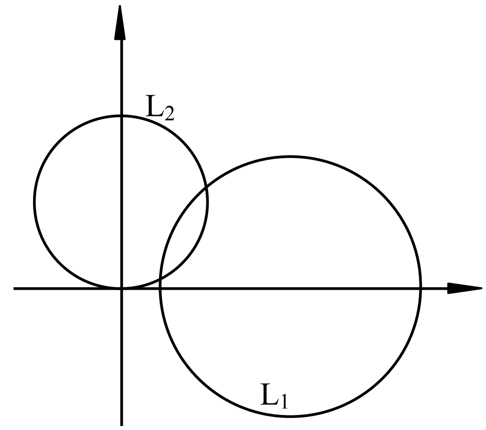
- Hàm dưới dấu tích phân $f(z) = \frac{e^z}{z(z-3)}$ giải tích trong miền đa liên mà biên ngoài là L_o và hai biên trong là L_1 và L_2. Áp dụng định lí Cauchy cho miền đa liên ta có:

$$\oint_{L}\frac{e^z dz}{z(z-3)} = \oint_{L_1}\frac{e^z dz}{z(z-3)} + \oint_{L_2}\frac{e^z dz}{z(z-3)} = 2j\pi\left[-\frac{1}{3}+\frac{e^z}{3}\right]$$

Ví dụ 2: Tính $I = \oint_{L}\frac{dz}{z^2+1}$ trong 2 trường hợp:

- L là đường tròn | z - 2 | = 3/2(đường L_1)
- L là đường tròn | z - j | = 1 (đường L_1)

Vì hàm $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ giải tích trong hình tròn $|z-2|\le\dfrac{3}{2}$ nên theo định lí Cauchy ta có:



$$I=\oint_{L_1}\frac{dz}{z^2+1}=0$$

$$I=\oint_{L_2}\frac{dz}{z^2+1}=\oint_{L_2}\frac{dz}{(z+j)(z-j)}.$$

Ta đặt $f(z)=\dfrac{1}{z+j}$, $z_o=j$. Hàm f(z) giải tích trong hình tròn $|z-j|\le 1$. Áp dụng (15) ta có:

$$\frac{1}{2j\pi}\oint_{L_2}\frac{dz}{z^2+1}=f(j)=\frac{1}{2j}$$

Như vậy:

$$\oint_{L_2}\frac{dz}{z^2+1}=\pi$$

2. Tích phân loại Cauchy:

Định nghĩa: Giả sử L là một đường cong trơn và f(t) là một hàm liên tục trên L. Xét hàm:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2j\pi}\int_L\frac{f(t)dt}{t-z},\ z \text{ bất kì } \overline{\in}\ L \qquad (17)$$

Nếu $z\,\overline{\in}\,L$ thì hàm số dưới dấu tích phân là một hàm liên tục. Vậy tích phân tồn tại và cho ta một hàm số của z xác định khắp nơi, trừ các điểm thuộc L.

Định lí: Hàm $\Phi(z)$ xác định bởi tích phân loại Cauchy một hàm giải tích tại mọi điểm $z\in L$. Đạo hàm cấp n của nó được tính theo công thức:

$$\Phi^{(n)}(z)=\frac{n1}{2\pi j}\int_L\frac{f(\xi)d\xi}{t-z},\ \ z \text{ bất kì } \notin L$$

§7. ĐẠO HÀM CẤP CAO CỦA MỘT HÀM GIẢI TÍCH

1. Đạo hàm cấp cao của một hàm giải tích:

Định lí: Nếu f(z) giải tích trong miền giới nội D và liên tục trong $\overline{D}$ với biên C thì tại mọi $z\in D$ hàm f(z) có đạo hàm mọi cấp và:

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2j\pi}\oint_C\frac{f(t)dt}{(t-z)^{n+1}};\ n=1,2,... \qquad (20)$$

Trong đó chiều đi trên biên C là chiều dương.

Chứng minh: Theo định nghĩa đạo hàm và công thức tích phân Cauchy ta có:

$$f'(z) = \lim_{h\to0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{1}{2j\pi}\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\oint_C f(t)\left[\frac{1}{t-z-h}-\frac{1}{t-z}\right]dt$$
$$= \frac{1}{2j\pi}\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\oint_C \frac{f(t)dt}{(t-z-h)(t-z)} = \frac{1}{2j\pi}\oint_C\frac{f(t)dt}{(t-z)^2}$$

Việc qua giới hạn dưới dấu tích phân thực hiện được vì hàm $g(t) = \dfrac{1}{t-z-h}$ z cố định thuộc D và t chạy trên C hội tụ đều trên C đến $\dfrac{1}{t-z}$ khi $h \to 0$.

Ta đã chứng minh công thức trên với n = 1. Với n > 1 ta chứng minh bằng cách quy nạp.

Như vậy ta suy ra nếu f(z) giải tích trong miền đơn liên giới hạn bởi đường cong C và liên tục trong $\overline{D}$, $z_o \in D$ thì :

$$\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-z_o)^{n-1}} = \frac{2j\pi}{n!}f^{(n)}(z_o) \quad n = 0, 1, 2,...$$

với quy ước 0! = 1, $f^{(o)}(z_o) = f(z_o)$.

Ví dụ: Tính $I = \oint_L \dfrac{\cos z dz}{(z-j)^3}$, L là đường tròn | z - j | = 1

Ta viết công thức (20) dưới dạng khác:

$$f^{(n)}(z_o) = \frac{n!}{2j\pi}\oint_L\frac{f(z)dz}{(z-z_o)^{n+1}}$$

Trong công thức này f(z) = cosz, z_o = j, n = 2. Ta có:

$$I = \oint_L \frac{\cos z dz}{(z-j)^3} = \frac{2j\pi f''(j)}{2!} = j\pi f''(j)$$

Do f'(z) - -sinz, f''(z) = -cosz nên f''(j) = -cosj = -ch1. Vậy:

I = -πjch1

2. Bất đẳng thức Cauchy và định lí Liouville:

a. Bất đẳng thức Cauchy: Giả sử G là một miền có biên L và f(z) là hàm giải tích trong $\overline{G}$. Gọi M là giá trị lơn nhất của | f(z) | trong miền $\overline{G}$, R là khoảng chá từ điểm $z_o \in G$ tới biên, l là độ dài của L thì từ (20) suy ra:

$$\left|f^{(n)}(z_o)\right| \le \frac{n!}{2\pi}\left|\int_L\frac{f(t)dt}{(t-z_o)^{n+1}}\right| \le \frac{n!Ml}{2\pi R^{n+1}}$$

Nếu G là hình tròn | z - z_o | < R thì l = 2pR và công thức trên trở thành:

$$\left|f^{(n)}(z_o)\right| \le \frac{n!M}{R^{n1}} \qquad (21)$$

Bất đẳng thức trên gọi là bất đẳng thức Cauchy.

b. Định lí Liouville: Nếu hàm f(z) giải tích trong toàn mặt phẳng và bị chặn thì nó là một hằng số.

Chứng minh: Giả thiết | f(z) | < M $\forall z \in C$. Từ (21) suy ra $\left|f'(z)\right| \le \dfrac{M}{R}$ với R đủ lớn.

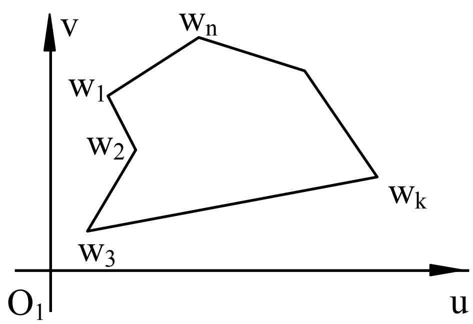
Vì vế trái không phụ thuộc R nên | f'(z) | = 0 $\forall z \in C$.
Tóm lại f'(z) = 0 trong toàn mặt phẳng, áp dụng công thức Newton - Leibnitz, chọn z_o cố định ta được:

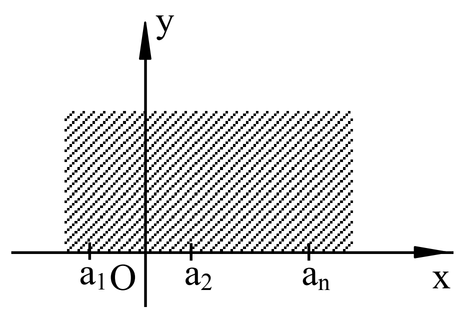
$$f(z) - f(z_o) = \int_{z_o}^{z} f'(z)dz = 0$$

Vậy f(z) = f(z_o) $\forall z$.

§8. CÔNG THỨC SCHWARTZ - CHRISTOPHELL

a. Định lí: Gọi P là một đa giác trong mặt phẳng w có n đỉnh là $w_1, w_2, w_3, ..,$ w_n với $w_k \neq \infty\ \forall k$





Gọi α_k là góc trong của đa giác tại đỉnh w_k và

$$0 < \alpha_k < 2\pi : \ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = (n-2)\pi$$

Hàm w = f(z) biến nửa mặt phẳng trên Imz > 0 lên miền trong của đa giác P sao cho ảnh của các điểm $a_1, a_2, ..a_n$

$-\infty < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \infty$

trên trục thực Ox là các đỉnh $w_1, w_2, .., w_n$ của đa giác P, được xác định bởi công thức Schwartz - Christophell:

$$f(z) = C\int_{z_o}^{z} \left(\zeta - a_1\right)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1} . \left(\zeta - a_2\right)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} \cdots \left(\zeta - a_n\right)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} d\zeta + C_1 \qquad (10)$$

Trong đó z_o, C và C_1 là các hằng số phức.

b. Dạng khác của công thức Schwartz - Christophell: Nếu một đỉnh của đa giác tương ứng với điểm ∞, chẳng hạn đỉnh w_1 tương ứng với $a_1 = \infty$, thì (10) được thay bởi:

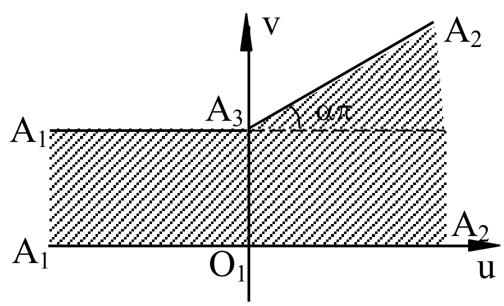
$$f(z) = C\int_{z_o}^{z} \left(\zeta - a_2\right)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} . \left(\zeta - a_3\right)^{\frac{\alpha_3}{\pi}-1} \cdots \left(\zeta - a_n\right)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} d\zeta + C_1 \qquad (11)$$

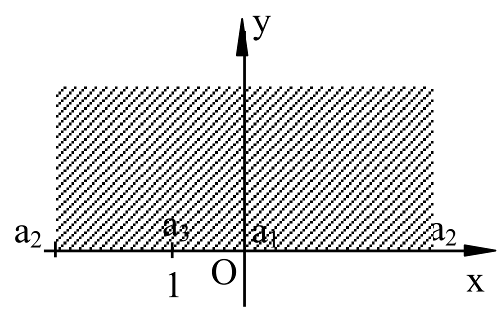
Như vậy trong (11) vắng mặt thừa số $\left(\zeta - a_2\right)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}$

Trái lại nếu một trong các đỉnh của đa giác là điểm ∞, chẳng hạn $w_k = \infty$ thì trong (10) ta phải đặt $\alpha_k = -\beta_k$ trong đó β_k là góc giữa hai cạnh cùng đi qua w_k tại giao điểm hữu hạn của chúng.

c. Sử dụng công thức Schwartz - Christophell: Khi ta phải biến một đa giác P cho trước trong mặt phẳng w lên nửa mặt phẳng Imz > 0 thì ta sử dụng công thức (10). Chú ý là ta chưa biết a_k là ảnh của các đỉnh đa giác và các hằng số z_o, C_1 và C_2. Theo định lí Rieman, ta có thể chọn tuỳ ý ảnh của 3 đỉnh đa giác, nghĩa là chọn tuỳ ý 3 số a_1, a_2 và a_3. Các số a_n còn lại và những hằng số tích phân z_o, C_1, C_2 sẽ được xác định tuỳ theo điều kiện bài toán,

Ví dụ 1: Biến miền G gạch chéo lên nửa mặt phẳng Imz > 0





Miền G có thể coi là một tam giác có đỉnh $A_1 = \infty$, $A_2 = \infty$ và A_3 có toạ vị w = jh. Các góc ở đỉnh tam giác là $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -\alpha\pi$, $\alpha_3 = \pi + \alpha\pi$. Ta sẽ biến các điểm A_1, A_2 và A_3 lần lượt thành các điểm a_1, a_2 và a_3. Ta có:

$$w = C\int_{z_o}^{z} z^{-1}(z+1)^{\alpha}dz + C_1$$

Vì w(-1) = jh nên ta có thể lấy $z_o = -1$ và $C_1 = jh$. Vậy:

$$w = C\int_{-1}^{z}\frac{(z+1)^{\alpha}}{z}dz + jh$$

Để xác định hằng số tích phân C, ta sẽ làm như sau: cho điểm z chạy trên nửa cung tròn γ bán kính r khá bé $z = re^{j\varphi}$ sao cho φ biến thiên từ π đến 0. Gọi Δw là số gia tương ứng của w khi z chạy trên cung tròn đó. Ta có:

$$\Delta w = C\int_{\gamma}\frac{(z+1)^{\alpha}}{z}dz$$

Khai triển $(1 + z)^{\alpha}$ theo luỹ thừa của z ta có:

$$w = C\int_{\gamma}\left[\frac{1}{z} + \alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z + \cdots\right]dz$$

Đặt $z = re^{j\varphi}$ rồi tích phân theo φ từ π đến 0 ta được:

$\Delta w = -C\pi j + O(r)$ trong đó $O(r) \to 0$ khi $r \to 0$

Mặt khác trong mặt phẳng w điểm w tương ứng chuyển từ tia A_1A_3 sang tia A_1A_2 nên ta được:

$\Delta w = -jh + O(r)$

Từ đó suy ra -jh = - Cπj hay $C = \frac{h}{\pi}$

Tóm lại phép biến hình phải tìm là hàm ngược của hàm:

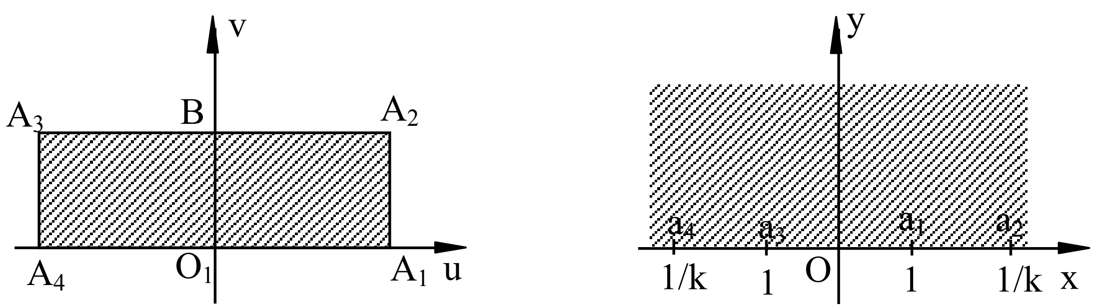
$$w = \frac{h}{\pi}\int_{-1}^{z}\frac{(z+1)^{\alpha}}{z}dz + jh \quad (13)$$

Trường hợp α = 1 ta có:

$$w = \frac{h}{\pi}\int_{-1}^{z}\frac{(z+1)}{z}dz + jh = \frac{h}{\pi}(z+\ln z)\Big|_{-1}^{z} + jh = \frac{h}{\pi}(z+1+\ln z) \quad (14)$$

đây là phép biến hình , biến nửa mặt phẳng Imw > 0 có một lát cắt dọc theo A_1A_3 thành nửa mặt phẳng trên Imz > 0.

Ví dụ 2: Tìm phép biến hình bảo giác biến hình chữ nhật có các đỉnh $A_1(w_1 = k)$, $A_2(w_2= h+ jk)$, $A_3(w = -h + jk)$, $A_4(w_4 = -h)$ lên nửa mặt phẳng trên Imz > 0



Gọi $w = f_1(z)$ là phép biến hình biến góc phần tư thứ nhất (Rez > 0, Imz > 0) thành hình chữ nhật $O_1A_1A_2B$ sao cho o_1 ứng với O. A_1 ứng với điểm z = 1 B ứng với điểm z = ∞. Trong phép biến hình này A_2 sẽ ứng với điểm z = 1/k với k là một hằng số dương nhỏ hơn 1 mà ta phải xác định. Qua phép biến hình, đoạn BO_1 ứng với nửa trục Oy dương. Theo nguyên lí đối xứng, hàm w = f(z) là hàm phải tìm để biến nửa mặt phẳng trên Imz > 0 lên hình chữ nhật $A_1A_2A_3A_4$ là thác triển của hàm $f_1(z)$ qua trục ảo. Cũng theo nguyên lí đối xứng, các điểm đối xứng qua BO_1 ứng với các điểm đối xứng qua Oy. Vậy A_4 ứng điểm z = -1; A_3 ứng với điểm z = -1/k. Áp dụng công thức Schwartz - Christophell với $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{\pi}{2}$ và $z_o = 0$ ta có:

$$w = f(z) = C\int_{0}^{z}(\zeta+1)^{\frac{1}{2}-1}(\zeta-1)^{\frac{1}{2}-1}\left(\zeta-\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(\zeta+\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}-1}d\zeta + C_1$$

Vì f(0) = 0 nên $C_1 = 0$, vậy:

$$w = C'\int_{0}^{z}\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-1)\left(\zeta^2-\frac{1}{k^2}\right)}} = C\int_{0}^{z}\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}$$

Ta còn phải xác định hằng số C và k. Vì $A_1(w_1 = h)$ ứng với = 1 nên:

$$h = C\int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)\left(1-k^2\zeta^2\right)}}$$

Vì $A_2(w_2 = h + jk)$ ưng với $z = 1/k$ nên :

$$h + jk = C\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{d\zeta}{\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)\left(1-k^2\zeta^2\right)}} = C\left[\int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)\left(1-k^2\zeta^2\right)}} + j\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{d\zeta}{\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)\left(1-k^2\zeta^2\right)}}\right] \qquad (15)$$

$$= h + j\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{d\zeta}{\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)\left(1-k^2\zeta^2\right)}}$$

Suy ra:

$$k = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{d\zeta}{\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)\left(1-k^2\zeta^2\right)}} \qquad (16)$$

Các đẳng thức (15) và (16) sẽ cho phép ta xác định C và k.