Giải đề lý thuyết trường điện từ 2014 – 2015

Câu 1 (2019 – 2020): Cho trường vector $\vec{A} = (r\cos\theta)\vec{i_r} + (r\sin\theta)\vec{i_\theta} + (r\sin\theta\cos\varphi)\vec{i_\varphi}$

a. Tính div của $\vec{A}$.

Ta có:

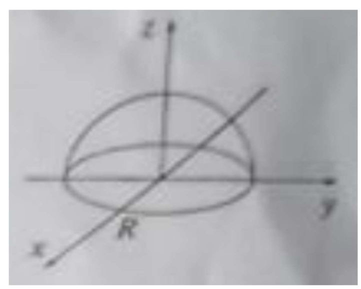
$$div\,\vec{A} = \nabla.\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\,A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 r\cos\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, r\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(r\sin\theta\cos\varphi)}{\partial\varphi}$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^3\cos\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(r\sin^2\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(r\sin\theta\cos\varphi)}{\partial\varphi}$$

$$= 5\cos\theta - \sin\varphi$$

b. Nghiệm lại định lý divergence trong thể tích V là ½ khối cầu bán kính R, có tâm ở gốc tọa độ (hình vẽ).



$$\oint_S \vec{A}d\vec{S} = \oint_V div\vec{A}\,dV$$

$$\oint_V div\vec{A}\,dV = \oint_V (5\cos\theta - \sin\varphi)r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{R} (5\cos\theta - \sin\varphi) r^2 sin\theta drd\theta d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{R} r^2 \left(\frac{5}{2} sin2\theta - sin\theta sin\varphi\right) drd\theta d\varphi$$

$$= \frac{R^3}{3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{5}{2} sin2\theta - sin\theta sin\varphi\right) d\theta d\varphi$$

$$= \frac{R^3}{3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (-\frac{5}{4} cos2\theta + cos\theta sin\varphi)\Big|_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{R^3}{3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{5}{2} - sin\varphi\right) d\varphi = \frac{5}{3}\pi R^3$$

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \oint_{S_1} \vec{A} d\overrightarrow{S_1} + \oint_{S_2} \vec{A} d\overrightarrow{S_2} \ \text{với } S_1\text{: mặt bao ngoài}, S_2\text{: mặt đáy}$$

$$\rightarrow d\overrightarrow{S_1} = r^2 sin\theta d\theta d\varphi \overrightarrow{\iota_r}, d\overrightarrow{S_2} = r sin\theta dr d\varphi \overrightarrow{\iota_\theta}$$

$$\oint_{S_1} \vec{A} d\overrightarrow{S_1} = \oint_{S_1} \left[(rcos\theta)\overrightarrow{\iota_r} + (rsin\,\theta)\overrightarrow{\iota_\theta} + (rsin\,\theta cos\varphi)\overrightarrow{\iota_\varphi}\right] r^2 sin\theta d\theta d\varphi \overrightarrow{\iota_r}$$

$$= \oint_{S_1} \frac{r^3 sin2\theta}{2} d\theta d\varphi = \frac{R^3}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} sin2\theta d\theta d\varphi = \frac{R^3}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = \pi R^3$$

$$\oint_{S_2} \vec{A} d\overrightarrow{S_2} = \oint_{S_2} \left[(rcos\theta)\overrightarrow{\iota_r} + (rsin\,\theta)\overrightarrow{\iota_\theta} + (rsin\,\theta cos\varphi)\overrightarrow{\iota_\varphi}\right] rsin\theta dr d\varphi \overrightarrow{\iota_\theta}$$

$$= \oint_{S_2} r^2 \sin^2\theta\, drd\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} r^2 drd\varphi \left(\text{chọn } \theta = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{R^3}{3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{2\pi R^3}{3}$$

$$\rightarrow \oint_S \vec{A}d\vec{S} = \oint_{S_1} \vec{A}d\overrightarrow{S_1} + \oint_{S_2} \vec{A}d\overrightarrow{S_2} = \pi R^3 + \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{5}{3}\pi R^3 = \oint_V div\vec{A}\,dV$$

<u>Câu 2.</u> Từ dạng phức của hệ phương trình Maxwell mô tả trường điện từ biến thiên điều hòa theo thời gian, hãy khảo sát tính chất của sóng phẳng đơn sắc, đồng nhất truyền theo phương Oz, trong môi trường đẳng hướng, tuyến tính, đồng nhất, không có nguồn ngoài.

Giả sử trong môi trường không có nguồn ngoài:

$$\dot{\vec{J}}_S = 0, \rho_s = 0, \dot{\vec{E}}_s = 0, \dot{\vec{J}} = \gamma\dot{\vec{E}}$$

$$rot\,\dot{\vec{H}} = \dot{\vec{J}} + i\omega\dot{\vec{D}}\ (7a)$$

Phương trình (7a) có thể viết lại:

$$rot\,\dot{\vec{H}} = \gamma\dot{\vec{E}} + i\omega\dot{\vec{D}} = \gamma\dot{\vec{E}} + i\omega\varepsilon\dot{\vec{E}} = i\omega\left(\varepsilon - i\frac{\gamma}{\omega}\right)\dot{\vec{E}}$$

Nếu đặt $\tilde{\varepsilon} = \left(\varepsilon - i\frac{\gamma}{\omega}\right)$ thì $rot\,\dot{\vec{H}} = i\omega\tilde{\varepsilon}\dot{\vec{E}}$ với $\tilde{\varepsilon}$ là độ thẩm điện phức

$$rot\,\dot{\vec{H}} = i\omega\tilde{\varepsilon}\dot{\vec{E}} \leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dz}\dot{H}_y = -i\omega\tilde{\varepsilon}\dot{E}_x (3a) \\ \dfrac{d}{dz}\dot{H}_x = i\omega\tilde{\varepsilon}\dot{E}_y (3b) \\ 0 = -i\omega\tilde{\varepsilon}\dot{E}_z \rightarrow \dot{E}_z = 0 \end{cases}$$

$$rot\,\dot{\vec{E}} = -i\omega\mu\dot{\vec{H}} \leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dz}\dot{E}_y = -i\omega\mu\dot{H}_x (4a) \\ \dfrac{d}{dz}\dot{E}_x = i\omega\mu\dot{H}_y (4b) \\ 0 = i\omega\mu\dot{H}_z \rightarrow \dot{H}_z = 0 \end{cases}$$

Đạo hàm theo z 2 vế của (4b), thay (3a) vào kết quả vừa nhận được, ta được phương trình sau:

$$\frac{d^2\dot{E}_x}{dz^2} + \omega^2\tilde{\varepsilon}\mu\dot{E}_x = 0$$

Tương tự từ (4a) và (3b) cũng suy ra được:

$$\frac{d^2\dot{E}_y}{dz^2} + \omega^2\tilde{\varepsilon}\mu\dot{E}_y = 0$$

Đạo hàm theo z 2 vế của (3b), thay (4a) vào kết quả vừa nhận được, ta được phương trình sau:

$$\frac{d^2\dot{H}_x}{dz^2} + \omega^2\tilde{\varepsilon}\mu\dot{H}_x = 0$$

Tương tự

$$\frac{d^2\dot{H}_y}{dz^2} + \omega^2\tilde{\varepsilon}\mu\dot{H}_y = 0$$

Biểu thức giá trị tức thời của $\vec{E}, \vec{H}$:

$$\begin{cases} E_x(t) = m_x e^{-\alpha}\ \ \cos(\omega t - \beta z + \psi_x) + n_x e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z + \psi_x) \\ E_y(t) = m_y e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \psi_y) + n_y e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z + \psi_y) \\ E_z(t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_x(t) = -\frac{m_y}{Z_c} e^{-\alpha}\ \ \cos(\omega t - \beta z + \psi_y) + \frac{n_y}{Z_c} e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z + \psi_y) \quad (*) \\ H_y(t) = \frac{m_x}{Z_c} e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \psi_x) - \frac{n_x}{Z_c} e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z + \psi_x) \\ H_z(t) = 0 \end{cases}$$

Từ các biểu thức trên suy ra tính chất của sóng phẳng đơn sắc truyền theo phương z:

- Vì $E_z = 0, H_z = 0$ suy ra các vector $\vec{E}, \vec{H}$ của sóng phẳng vuông góc vơi phương truyền, ta nói sóng điện từ phẳng là sóng điện từ ngang TEM.

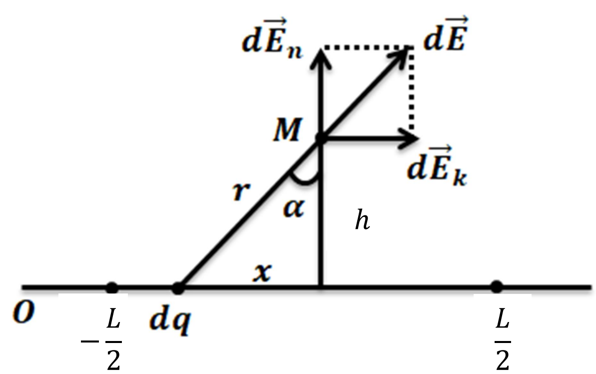
- Các số hạng thứ 1 trong biểu thức $(*)$ mô tả sóng phẳng đơn sắc lan truyền theo phương và chiều dương trục Z, gọi là sóng thuận. Khi lan truyền biên độ giảm dần theo hàm mũ, các mặt đẳng pha dịch chuyển theo chiều (+) trục Z với vận tốc ω/β.

+ Các số hạng thứ 2 mô tả sóng phẳng đơn sắc lan truyền theo phương và chiều âm trục Z, gọi là sóng ngược. Biên độ giảm dần theo hàm mũ, các mặt đẳng pha dịch chuyển theo chiều (-) trục Z với vận tốc ω/β.

<u>Câu 3.</u> Xác định:

a) Xác định vector cường độ điện trường tại điểm M nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng và cách đoạn thẳng một đoạn h, biết rằng đoạn thẳng mang điện tích có chiều dài 2L có mật độ điện dài $\boldsymbol{\lambda}$ đặt dọc theo trục $\boldsymbol{Ox}$ từ $\boldsymbol{x = -L/2 \to x = L/2}$.

Ta có:



$$\begin{cases} r^2 = x^2 + h^2 = (h.\tan\alpha)^2 + h^2 = \dfrac{h^2}{\cos^2\alpha} \\ x = h.\tan\alpha \to dx = \dfrac{h}{\cos^2\alpha} d\alpha \to dq = \lambda dl = \lambda dx = \dfrac{\lambda h}{\cos^2\alpha} d\alpha \end{cases}$$

$$\vec{E} = \int_{dây} d\vec{E} = \int_{dây} d\vec{E}_n + \int_{dây} d\vec{E}_k = \int_{dây} d\vec{E}_n = \int_{dây} dE_n = \int_{dây} dE\,.\cos\alpha$$

$$= \int_{dây} \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}.\frac{dq}{r^2}.\cos\alpha = \int_{dây} \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}.\frac{\lambda h}{\cos^2\alpha}d\alpha.\frac{\cos^2\alpha}{h^2}.\cos\alpha$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 h}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\alpha\, d\alpha = \frac{\lambda\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 h}$$

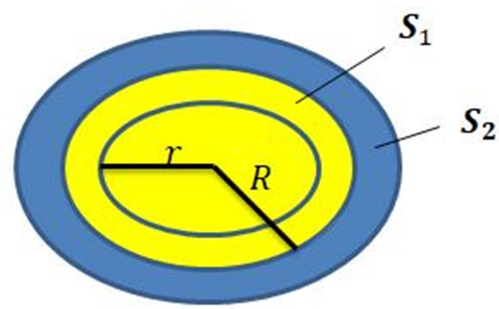
b) Điện thế tại một điểm bất kỳ trong không gian của phân bố điện tích đối xứng cầu với mật độ $\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 \text{ nếu } 0 \le r \le R \\ 0 \text{ nếu } r > R \end{cases}$ (R là bán kính quả cầu). Xác định cường độ điện trường và điện thế bên trong và bên ngoài quả cầu.

Giải

Ta có: $\phi_e = \oint_S \vec{D}\,d\vec{S} = \sum_i q_i$

Chọn S_1 là mặt cầu nằm trong quả cầu tích điện $(r < R)$.

Chọn S_2 là mặt cầu nằm ngoài quả cầu tích điện $(r > R)$.



- Bên trong quả cầu tích điện $(r < R)$. Áp dụng định lý $O-G$ ta có:

$$\begin{cases} \oint_{S_1} \vec{D}_1 d\vec{S} = \int_{V_1} \rho dV \\ \oint_{S_1} \vec{D}_1 d\vec{S} = D_1 S_1 = D_1.4\pi r^2 \quad \rightarrow D_1 = \frac{\rho_0 r}{3} \rightarrow E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon\varepsilon_0} \\ \int_{V_1} \rho dV = \int_{V_1} \rho_0 dV = \rho_0.\frac{4}{3}\pi r^3 \end{cases}$$

- Bên ngoài quả cầu tích điện $(r > R)$. Áp dụng định lý $O-G$ ta có:

$$\begin{cases} \oint\limits_{S_2} \vec{D}_2 d\vec{S} = \int\limits_V \rho dV \\ \oint\limits_{S_2} \vec{D}_2 d\vec{S} = D_2 S_2 = D_2 .4\pi r^2 \ \rightarrow D_2 = \dfrac{\rho_0 R^3}{3r^2} \rightarrow E_2 = \dfrac{D_2}{\varepsilon\varepsilon_0} = \dfrac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0 r^2} \\ \int\limits_V \rho dV = \int\limits_V \rho_0 dV = \rho_0 . \dfrac{4}{3}\pi R^3 \end{cases}$$

- Thế điện bên trong quả cầu:

$$\varphi_1(r) = \int_r^\infty \vec{E}\, d\vec{r} = \int_r^R \vec{E}_1\, d\vec{r} + \int_R^\infty \vec{E}_2\, d\vec{r} = \int_r^R E_1\, dr + \int_R^\infty E_2\, dr$$

$$= \int_r^R \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon\varepsilon_0} dr + \int_R^\infty \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho_0}{6\varepsilon\varepsilon_0} r^2 \Big|_r^R - \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0} \frac{1}{r}\Big|_R^\infty$$

$$= \frac{\rho_0}{6\varepsilon\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)$$

- Thế điện bên ngoài quả cầu:

$$\varphi_2(r) = \int_r^\infty \vec{E}\, d\vec{r} = \int_r^\infty \vec{E}_2\, d\vec{r} = \int_r^\infty E_2\, dr = \int_r^\infty \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0} \frac{1}{r}\Big|_\infty^r = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0 r}$$

<u>Câu 4.</u> Xác định thế $\vec{A}$, tạo bởi một dòng điện thẳng, dài vô hạn, có cường độ I, trong môi trường có độ từ thẩm μ.

Chọn hệ tọa độ trụ, trục z, trục z trùng với trục dòng điện. Giả sử dòng điện chạy theo chiều dương trục z.

$$d\vec{A} \| \vec{J} dV \rightarrow \text{thế vector } \vec{A} \text{ song song với dòng điện}:$$

$$\vec{A} = A\vec{i}_z$$

Do tính đối xứng, A chỉ phụ thuộc r: $A = A(r)$

$$\vec{B} = rot\,\vec{A} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \vec{i}_r & \vec{i}_\varphi & \vec{i}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A(r) \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial A(r)}{\partial \varphi}\vec{i}_r - r\frac{\partial A(r)}{\partial r}\vec{i}_\varphi\right] = -\frac{\partial A(r)}{\partial r}\vec{i}_\varphi$$

$$\vec{B} = -\frac{\partial A(r)}{\partial r}\vec{i}_\varphi = B(r)\vec{i}_\varphi$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = H(r)\vec{i}_\varphi$$

Áp dụng định luật Ampère cho đường kính bán kính r, tâm nằm trên trục dòng điện:

$$\oint_C \vec{H}d\vec{l} = \sum_k I_k$$

$$\oint_C \vec{H}d\vec{l} = \int_C Hdl = H.2\pi r = I \rightarrow H = \frac{I}{2\pi r} \rightarrow \vec{H} = \frac{I}{2\pi r}\vec{i}_\varphi \rightarrow \vec{B} = \frac{\mu I}{2\pi r}\vec{i}_\varphi$$

$$-\frac{\partial A(r)}{\partial r} = B(r) \rightarrow A(r) = \int -B(r)dr = \int -\frac{\mu I}{2\pi r}dr = -\frac{\mu I}{2\pi}lnr + C$$

Chọn $A(r_0) = 0 \rightarrow C = \frac{\mu I}{2\pi}lnr_0 \rightarrow \boldsymbol{A(r) = \frac{\mu I}{2\pi}ln\frac{r_0}{r}}$

<u>Câu 5.</u> Trường điện từ biến thiên trong chân không được cho bởi:

$$\boldsymbol{\vec{E} = \frac{50}{\rho}cos(10^6t + \beta z)\vec{i}_\phi\left(\frac{V}{m}\right)} \quad \boldsymbol{v}\text{à} \quad \boldsymbol{\vec{H} = \frac{H_0}{\rho}cos(10^6t + \beta z)\vec{i}_\rho\left(\frac{A}{m}\right)}$$

Thiết lập biểu thức các biên độ phức của trường và xác định các đại lượng $\boldsymbol{H_0, \beta}$

Giải

$$\vec{E} = \frac{50}{\rho} cos(10^6 t + \beta z)\vec{i}_\phi \left(\frac{V}{m}\right) \rightarrow \dot{\vec{E}} = \frac{50}{\rho} e^{i\beta z}\vec{i}_\phi \rightarrow \dot{E}_\phi = \frac{50}{\rho} e^{i\beta z}$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{\varepsilon}}} \rightarrow \frac{1}{Z_c} = \sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}}{\mu}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$$

$$\vec{i}_z \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i}_\rho & \vec{i}_\phi & \vec{i}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dot{E}_\phi & 0 \end{vmatrix} = -\dot{E}_\phi . \vec{i}_\rho$$

$$\vec{H} = \frac{1}{Z_c}\left(\vec{i}_z \times \vec{E}\right) = -\frac{50}{\rho}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} cos(10^6 t + \beta z)\vec{i}_\rho = \frac{H_0}{\rho} cos(10^6 t + \beta z)\vec{i}_\rho$$

$$\rightarrow H_0 = -50\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left(\frac{A}{m}\right)$$

$$\beta = \omega\sqrt{\tilde{\varepsilon}\mu} = 10^6\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$