Với k lẻ ta phải giải phương trình vi phân tương ứng là:

$$T''_{2n-1}(t) + \left[(2n-1)\pi\right]^2 T_{2n-1}(t) = \frac{4}{(2n-1)\pi}$$

với điều kiện: $T_{2n-1}(0) = 0$; $T'_{2n-1}(0) = \frac{4}{(2n-1)\pi}$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là:

$$T_{2n-1}(t) = C_1\cos(2n-1)\pi t + C_2\sin(2n-1)\pi t + \frac{4}{(2n-1)^3\pi^3}$$

Khi t = 0 ta có:

$$C_1 = -\frac{4}{(2n-1)^3\pi^3}$$

Mặt khác ta có:

$$T'_{2n-1}(t) = -C_1(2n-1)\pi\sin(2n-1)\pi t + C_2(2n-1)\pi\cos(2n-1)\pi t$$

Theo điều kiện đầu:

$$T'_{2n-1}(t) = -C_1(2n-1)\pi\sin(2n-1)\pi t + C_2(2n-1)\pi\cos(2n-1)\pi t = \frac{4}{(2n-1)^3\pi^3}$$

nên: $C_2 = \frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}$

Thay C_1 và C_2 vào biểu thức của $T_{2n-1}(t)$ ta có:

$$T_{2n-1}(t) = \frac{4}{(2n-1)^3\pi^3}\left[(2n-1)\pi\sin(2n-1)\pi t - \cos(2n-1)\pi t + 1\right]$$

và:

$$u(x,t) = \frac{4}{(2n-1)^3\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(2n-1)\pi\sin(2n-1)\pi t - \cos(2n-1)\pi t + 1\right]\sin\frac{(2n-1)\pi x}{1}$$

Ví dụ 2: Giải phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x(x-1) \qquad\qquad 0 \le x \le 1,\ 0 \le t$$

với các điều kiện:

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0$$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = u(x,t)\big|_{x=1} = 0$$

Trong ví dụ này ta có f(x, t) = x(x - 1). Vậy:

$$C_k = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x,t)\sin\frac{k\pi}{1}x\,dx = 2\int_0^1 x(x-1)\sin k\pi x\,dx$$

$$= 2\left[(x^2 - x)\left(-\frac{\cos k\pi x}{k\pi}\right)\right]\Bigg|_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{k\pi}\int_0^1 (2x-1)\cos k\pi x\,dx$$

nên: $C_k = \frac{4}{k\pi^2}\left[(-1)^k - 1\right] = \begin{cases} \frac{8}{(2n-1)^3\pi^3} & \text{khi } k = 2n-1 \\ 0 & \text{khi } k = 2n \end{cases}$

Ta tìm nghiệm của bài toán dưới dạng (1) nên bây giờ phải tìm $T_k(t)$

Với k = 2n (chẵn), ta tìm $T_{2n}(t)$ từ phương trình :

$$T''_{2n}(t) + (2n\pi)^2 T_{2n}(t) = 0$$

với điều kiện: $T_{2n}(0) = 0$; $T'_{2n}(0) = 0$

Như vậy $T_{2n}(t) \equiv 0$

Với k = 2n -1 (lẻ) ta phải giải phương trình vi phân tương ứng là:

$$T''_{2n-1}(t) + \left[(2n-1)\pi\right]^2 T_{2n-1}(t) + \frac{8}{(2n-1)^3\pi^3} = 0$$

với điều kiện: $T_{2n-1}(0) = 0$; $T'_{2n-1}(0) = 0$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là:

$$T_{2n-1}(t) = C_1\cos(2n-1)\pi t + C_2\sin(2n-1)\pi t - \frac{8}{(2n-1)^5\pi^5}$$

Khi t = 0 thì từ các điều kiện đầu ta rút ra:

$$C_1 = \frac{8}{(2n-1)^5\pi^5} \qquad C_2 = 0$$

$$T_{2n-1}(t) = \frac{8}{(2n-1)^5\pi^5}\left[\cos(2n-1)\pi t - 1\right]$$

$$u(x,t) = \frac{8}{(2n-1)^5\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos(2n-1)\pi t - 1\right]\sin(2n-1)\pi x$$

d. Bài toán hỗn hợp: Sau khi đã giải 2 bài toán trên ta trở về giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T \tag{1}$$

với các điều kiện :

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u_o(x); \ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = u_1(x)$$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = \varphi_1(t); \qquad u(x,t)\big|_{x=l} = \varphi_2(t)$$

Ta giải bài toán bằng cách đưa vào hàm phụ:

$$\rho(x,t) = \varphi_1(t) + \frac{x}{l}\left[\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\right]$$

Khi đó ta tìm nghiệm của bài toán hỗn hợp dưới dạng:

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + \rho(x,t) \tag{2}$$

Trong đó hàm $\tilde{u}(x,t)$ ta phải xác định. Trước hết ta có nhận xét:

$$\rho(x,t)\big|_{x=0} = \varphi_1(t) \qquad \rho(x,t)\big|_{x=l} = \varphi_2(t)$$

Vậy kết hợp với điều kiện đã cho ta có:

$$\tilde{u}(x,t)\big|_{x=0} = \tilde{u}(x,t)\big|_{x=l} = 0 \tag{3}$$

Khi t = 0 ta sẽ có:

$$\begin{cases} \tilde{u}(x,t)\big|_{t=0} = \left[u(x,t) - \rho(x,t)\right]\big|_{t=0} = u_o(x) - \varphi_1(0) - \dfrac{x}{l}\left[\varphi_2(0) - \varphi_1(0)\right] = \tilde{u}_o(x) \\ \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} - \dfrac{\partial \rho}{\partial t}\bigg|_{t=0} = u_1(x) - \varphi_1'(0) - \dfrac{x}{l}\left[\varphi_2'(0) - \varphi_1'(0)\right] = \tilde{u}_o'(x) \end{cases} \quad (4)$$

Đạo hàm 2 lần (2) theo x và t rồi thay vào (1) và rút gọn ta có:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + f_1(x,t) \quad (5)$$

Trong đó:

$$f_1(x,t) = f(x,t) - \varphi_1''(t) - \frac{x}{l}\left[\varphi_2''(t) - \varphi_1''(t)\right]$$

Tóm lại, để tìm u(x, t) ta phải giải (5) với các điều kiện (3) và (4). Đó chính là dạng bài toán 2 mà ta đã biết cách giải. Sau đó kết hợp $\tilde{u}(x,t)$ và $\rho(x, t)$ ta tìm được nghiệm.

§3. BÀI TOÁN CAUCHY CỦA PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN SÓNG TRONG KHÔNG GIAN

Bài toán Cauchy của phương trình truyền sóng trong không gian là bài toán giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad (1)$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} u(x,y,z,t)\big|_{t=0} = u_o(x,y,z) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = u_1(x,y,z) \end{cases} \quad -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty,\ -\infty < z < \infty,\ t > 0 \quad (2)$$

Người ta đã chứng minh được rằng nghiệm của phương trình có dạng:

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_S u_1(\xi,\eta,\zeta)ds + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_S u_o(\xi,\eta,\zeta)ds\right]$$

Trong đó S là mặt cầu tâm M(x,y,z) và bán kính at. Công thức này gọi là công thức Kirhoff.

Trong trường hợp mặt phẳng, công thức Kirhoff trở thành công thức Poisson:

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\iint_D \frac{u_1(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi a}\iint_D \frac{u_o(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}\right]$$

§4. BÀI TOÁN DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC

1. Nguyên lí Duhamel: Để giải các bài toán có tác động của ngoại lực người ta thường dùng nguyên lý Duhamel được phát biểu như sau:

Nếu $H(\alpha, x, t)$ với mọi giá trị của tham biến α là nghiệm của phương trình:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = a^2 \Delta il$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} H(\alpha, x, t)\big|_{t=0} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t} H(\alpha, x, t)\Big|_{t=0} = h(x, \sigma) \end{cases}$$

Khi đó hàm:

$$u(x, t) = \int_0^1 H(\alpha, x, t - \alpha) d\alpha$$

sẽ là nghiệm của phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + h(x, t)$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} u(x, t)\big|_{t=0} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Để hiểu rõ hơn về nguyên lý Duhamel ta sẽ dùng nó để giải các bài toán về dao động cưỡng bức sau:

2. Bài toán 1: Giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t) \qquad (1)$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} u(x, y, z, t)\big|_{t=0} = u_o(x, y, z) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1(x, y, z) \end{cases} \quad -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty,\ -\infty < z < \infty,\ t > 0 \qquad (2)$$

Ta dùng phương pháp chồng nghiệm, nghĩa là tìm nghiệm của phương trình (1) dưới dạng:

$$u(x, y, z, t) = \bar{u}(x, y, z, t) + \bar{\bar{u}}(x, y, z, t)$$

Trong đó $\bar{u}(x, y, z, t)$ là nghiệm của bài toán:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = a^2 \Delta \bar{u}$$

với: $\bar{u}\big|_{t=0} = u_o;\ \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1$

Còn $\bar{\bar{u}}(x, y, z, t)$ là nghiệm của bài toán:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = a^2 \Delta \bar{u} + f$$

với: $\bar{\bar{u}}\big|_{t=0} = 0;\ \dfrac{\partial \bar{\bar{u}}}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$

Theo công thức Kirhoff ta có:

$$\bar{u}(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_S u_1(\xi,\eta,\zeta)ds + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_S u_o(\xi,\eta,\zeta)ds\right]$$

Mặt khác theo nguyên lí Duhamel ta có:

$$H(\alpha,x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\iint_S \frac{f(\xi,\eta,\zeta,\alpha)}{t}ds$$

Từ đó suy ra:

$$\bar{\bar{u}}(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^1\left[\iint_{S(t-\alpha)} \frac{f(\xi,\eta,\zeta,\alpha)}{t-\alpha}ds\right]d\alpha$$

Để rút gọn công thức nghiệm trong tích phân trên ta đổi biến r = a(t - α). Do đó ta có:

$$\bar{\bar{u}}(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^1\left[\iint_{S(r)} \frac{f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{r}ds\right]dr = \frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{Vat}\frac{f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{r}dV$$

Trong đó V_{at} là hình cầu bao bởi mặt S và:

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

Vậy nghiệm của bài toán 1 là:

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\iint_S \frac{u_1(\xi,\eta,\zeta)}{t}ds + \frac{\partial}{\partial t}\left[\iint_S \frac{u_o(\xi,\eta,\zeta)}{t}ds\right] + \iiint_{Vat}\frac{f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{r}dV$$

Công thức này được gọi là công thức Kirhoff tổng quát.

3. Bài toán 2: Giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t) \qquad (1)$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} u(x,y,t)\big|_{t=0} = u_o(x,y) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x,y) \end{cases} \quad -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty,\ t > 0 \qquad (2)$$

Nghiệm của bài toán rút ra nhờ cách giải tương tự như bài toán trước bằng cách dùng nguyên lý Duhamel:

$$u(x,y,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\iint_S \frac{u_1(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}d\xi d\eta$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left[\iint_{D_a}\frac{u_o(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}d\xi d\eta\right] + \int_0^1\left[\iint_{D_{a(t-\alpha)}}\frac{f(\xi,\eta,\alpha)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2(t-\alpha)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}\right]d\alpha$$

Trong đó D_{at} và $D_{a(t-\alpha)}$ là miền tròn có cùng tâm (x, y) và bán kính là at và a(t-α) . Công thức này được gọi là công thức Poisson tổng quát.

4. Bài toán 3: Giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (1)$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} u(x,t)\big|_{t=0} = u_o(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = u_1(x) \end{cases} \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0 \qquad (2)$$

Dựa trên nguyên lý Duhamel và công thức D'Alembert ta đưa đến nghiệm bài toán:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{at} u_1(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\left[u_o(x+at) + u_o(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_0^1\left[\int_{x-a(t-\alpha)}^{x+a(t-\alpha)} f(\xi,\alpha)d\xi\right]d\alpha$$

đây là công thức D'Alembert tổng quát.

§5. BÀI TOÁN HỖN HỢP CỦA PHƯƠNG TRÌNH LOẠI HYPERBOLIC

Cho D là một miền phẳng với biên là đường cong trơn. Ta cần tìm nghiệm của phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (1)$$

với các điều kiện đầu :

$$\begin{cases} u(x,y,t)\big|_{t=0} = u_o(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = u_1(x,y) \end{cases} \quad -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty,\ t > 0 \qquad (2)$$

và điều kiện biên:

$$u(x,y,t)\big|_{(x,y)\in\gamma} = 0 \qquad (3)$$

Bài toán này ta giải bằng phương pháp phân ly biến số và sẽ tìm nghiệm của nó dưới dạng:

$$u(x, y, t) = u^*(x, y).T(t) \qquad (4)$$

Đạo hàm 2 vế của (4) theo x, y và t hai lần rồi thay vào (10) ta nhận được phương trình:

$$\frac{1}{u^*}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T}$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} + \lambda u^* = 0 \qquad (5)$$

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \qquad (6)$$

Trong đó λ là một hằng số.

Để tìm nghiệm của bài toán (1) với các điều kiện (2), (3) ta thấy rằng $T(t) \neq 0$ và đối với các điểm trên biên ta phải có:

$$u(x,y)\big|_{(x,y)\in\gamma} = 0 \qquad (7)$$

Những giá trị λ để tồn tại nghiệm $u^*(x, y) \neq 0$ được gọi là các giá trị riêng và các nghiệm $u^*(x, y)$ tương ứng được gọi là các hàm riêng của bài toán. Tính chất của giá trị riêng và hàm riêng là:

* Mọi giá trị riêng đều dương
* Tập các giá trị riêng là một tập vô hạn đếm được
* Nếu $\lambda_i \neq \lambda_j$ thì các hàm riêng tương ứng với chúng thoả mãn hệ thức:

$$\iint_D u_i(x,y)u_j(x,y)dxdy = 0$$

nghĩa là các hàm riêng trực giao với nhau

* Một giá trị riêng có thể ứng với nhiều hàm riêng độc lập tuyến tính khác nhau. Giá trị riêng như vậy được gọi là giá trị riêng bội
* Đối với các hàm riêng nếu chưa là hệ trực chuẩn thì bằng phương pháp trực giao hoá Schmidt có thể xây dựng hệ hàm riêng trực giao chuẩn, nghĩa là đối với hệ đó ta có:

$$\iint_D u_i(x,y)u_j(x,y)dxdy = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

* Mọi hàm $\beta(x, y)$ khả vi, liên tục 2 lần và thoả mãn điều kiện biên:

$$\beta(x,y)\Big|_{(x,y)\in\gamma} = 0$$

đều có thể khai triển theo hệ thống các hàm trực giao chuẩn thành chuỗi hội tụ tuyệt đối và đều trên miền D, nghĩa là nó có thể biểu diễn dưới dạng:

$$\beta(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x,y)$$

trong đó a_k được tính theo công thức:

$$a_k = \iint_D \beta(x,y)u_k(x,y)dxdy$$

Từ những tính chất đã nêu của hàm riêng và giá trị riêng ta thấy bài toán (5) & (6) có các giá trị riêng dương nên (6) có nghiệm tổng quát là:

$$T_k(t) = b_k \cos\sqrt{\lambda_k}at + c_k \sin\sqrt{\lambda_k}at$$

Từ đó suy ra:

$$u(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,y)T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,y)\left[b_k \cos\sqrt{\lambda_k}at + c_k \sin\sqrt{\lambda_k}at\right]$$

Nếu xét đến các điều kiện ban đầu ta có:

$$b_k = \iint_D u_o(x,y)\tilde{u}_k(x,y)dxdy$$

$$c_k = \frac{1}{a\lambda_k}\iint_D u_1(x,y)u_k(x,y)dxdy$$

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

trên miền $D = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq m \end{cases}$ $\quad t \geq 0$

với các điều kiện đầu:

$$\begin{cases} u(x,y,t)\big|_{t=0} = xy(l-x)(m-y) = u_o(x,y) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 = u_1(x,y) \end{cases}$$

và các điều kiện biên:

$$u(x,y,t)\big|_{(x,y)\in\gamma} = 0$$

trong đó γ là biên của miền D.

Ta tìm nghiệm của bài toán dưới dạng (4):

$u(x, y, t) = u^*(x, y).T(t)$

trong đó $u^*(x, y)$ lại được tìm dưới dạng $u^*(x, y) = X(x).Y(y)$ bằng phương pháp phân li biến số.

Khi đó phương trình (5) được viết thành:

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda = -\frac{X''(x)}{X(x)}$$

Từ đó ta suy ra:

$$\begin{cases} X''(x) + \alpha X(x) = 0 \\ Y''(y) + \beta Y(y) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Từ điều kiện biên của bài toán ta rút ra:

$$\begin{cases} X(0) = X(l) = 0 \\ Y(0) + Y(l) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Khi giải phương trình (8) với điều kiện (9) để có nghiệm không tầm thường ta cần có:

$$\alpha_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2};\ \beta_n = \frac{\pi^2 n^2}{m^2}$$

Từ đó ta có:

$$\lambda_{kn} = \pi^2\left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2}\right)$$

Nghiệm riêng ứng với các giá trị riêng đó là hệ hàm trực chuẩn:

$$u_{kn} = \frac{2}{\sqrt{lm}}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{m}$$

Khi đó nghiệm của phương trình (6) có dạng:

$$T_k(t) = b_{kn}\cos\left(\pi at\sqrt{\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2}}\right) + c_{kn}\sin\left(\pi at\sqrt{\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2}}\right)$$

Tóm lại nghiệm của bài toán sẽ là:

$$u(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[b_{kn}\cos\left(\pi at\sqrt{\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2}}\right) + c_{kn}\sin\left(\pi at\sqrt{\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2}}\right)\right]\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{m}$$

Trong đó b_{kn} và c_{kn} được tính như sau:

$c_{kn} = 0\ \forall k, n$ vì $u_1 \equiv 0$

$$b_{kn} = \frac{4}{lm}\int_0^l\int_0^m xy(l-x)(m-y)\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{m}dxdy$$

$$= \frac{4}{lm}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx\int_0^m y(m-y)\sin\frac{n\pi y}{m}dy$$

$$= \begin{cases} \dfrac{64m^2l^2}{\pi^6(2k'+1)^3(2n'+1)^3} & k = 2k'+1,\ n = 2n'+1 \\ 0 & k = 2k_1 \end{cases}$$

Như vậy:

$$u(x,y,t) = \frac{64m^2l^2}{\pi^6}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\cos\pi at\theta_{kn}}{(2k'+1)^3(2n'+1)^3}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}\right]\sin\frac{(2n+1)\pi y}{m}$$

Ví dụ 2:Giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

trên miền $D = \begin{cases} 0 \le x \le l \\ 0 \le y \le m \end{cases}$ $\qquad t \ge 0$

với các điều kiện đầu:

$$\begin{cases} u(x,y,t)\big|_{t=0} = u_o(x,y) = \sin\dfrac{\pi x}{l}\sin\dfrac{\pi y}{l} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1(x,y) = \dfrac{a}{l} \end{cases}$$

và các điều kiện biên:

$$u(x,y,t)\big|_{(x,y)\in\gamma} = 0$$

trong đó γ là biên của miền D.

Tương tự như ví dụ 1, sau khi dùng phương pháp phân li biến số ta tìm được giá trị riêng là:

$$\lambda_{kn} = \pi^2\left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{l^2}\right)$$

hệ hàm trực chuẩn tương ứng là $\dfrac{2}{l}\sin\dfrac{k\pi x}{l}\sin\dfrac{n\pi y}{l}$ và các hệ số trong nghiệm tổng quát được tính như sau:

$$b_{kn} = \frac{4}{l^2}\int_0^l\int_0^l \sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{m}dxdy = \begin{cases} 0 & k,n \ne 1 \\ 1 & k = n = 1 \end{cases}$$

$$\frac{\pi a}{l}\sqrt{k^2+n^2}c_{kn} = \frac{4}{l^2}\int_0^l\int_0^l \sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l}\sin\frac{n\pi y}{m}dxdy$$

$$= \frac{4a}{l^3}\int_0^l \sin\frac{\pi x}{l}dx\int_0^l \sin\frac{\pi y}{l}\sin\frac{n\pi y}{m}dy = \begin{cases} 0 & k,n \text{ chan} \\ \dfrac{16a}{l\pi^2(2k'+1)(2n'+1)} & k,n \text{ le} \end{cases}$$

Nghiệm của bài toán là:

$$u(x,y,t) = \left(\cos\frac{at\pi\sqrt{2}}{l} + \frac{16}{\pi^3\sqrt{2}}\sin\frac{at\pi\sqrt{2}}{l}\right)\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l}$$

$$+\frac{16}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left[\dfrac{at\pi\sqrt{(2k+1)^2+(2n+1)^2}}{l}\right]}{(2k+1)(2n+1)\sqrt{(2k+1)^2+(2n+1)^2}}\sin\left(\frac{2k+1}{l}\pi x\right)\sin\left(\frac{2n+1}{l}\pi y\right)$$

§6. BÀI TOÁN CAUCHY- PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT TRONG THANH VÔ HẠN VÀ NỬA VÔ HẠN

1. Bài toán ban đầu: Bài toán Cauchy của phương trình truyền nhiệt - phương trình loại parabolic là bài toán giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

với các điều kiện đầu :

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u_o(x) \quad -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty,\ t \geq 0 \qquad (2)$$

Dùng phương pháp phân li biến số ta tìm nghiệm dưới dạng:

$$u(x, t) = X(x).T(t)$$

Lấy đạo hàm theo x và t rồi đưa vào phương trình (1) ta có:

$$T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \qquad (3)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad (4)$$

với λ là hằmg số.

Phương trình (3) cho nghiệm là:

$$T(t) = Ce^{-\lambda a^2 t}$$

với C là một hằng số

Mặt khác nhiệt độ của thanh không thể đạt đến ∞ khi t tiến đến ∞. Do vậy λ phải là số dương. Kết hợp với nghiệm của phương trình (4) ta có:

$$u_h(x,t) = e^{-h^2a^2t}\left[C_1(h)\cosh x + C_2(h)\sinh x\right]$$

u(x,t) là nghiệm riêng của (1) với C_1 và C_2 là các hệ số có thể phụ thuộc h. Họ các nghiệm ở đây là một tập hợp vô hạn không đếm được. Do đó ta sẽ tìm nghiệm của bài toán dưới dạng tích phân theo tham biến h.

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_h(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2a^2t}\left[C_1(h)\cosh x + C_2(h)\sinh x\right]dh$$

Khi t = 0 ta có:

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u_o(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[C_1(h)\cosh x + C_2(h)\sinh x\right]dh$$