Biến đổi Fourier rời rạc của dãy tín hiệu $\{x(n)\}$ tuần hoàn chu kỳ N là

$$\widehat{X}(k) = DFT\{x(n)\} = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\mathscr{E}^{-mk} .$$

Biến đổi Fourier rời rạc ngược: $x(n) = IDFT\left\{\widehat{X}(k)\right\} = \dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\widehat{X}(k)\mathscr{E}^{nk}$.

CÂU HỎI ÔN TẬP VÀ BÀI TẬP

2.1 Hàm ảnh $F(s)$ của biến đổi Laplace là một hàm giải tích trong nửa mặt phẳng.

Đúng ☐ Sai ☐.

2.2 Nếu $f(t)$ là hàm gốc thì đạo hàm $f'(t)$ cũng là hàm gốc.

Đúng ☐ Sai ☐.

2.3 Nếu $f(t)$ là hàm gốc thì tích phân $\varphi(t) = \int_0^t f(u)du$ cũng là hàm gốc.

Đúng ☐ Sai ☐.

2.4 Phép biến đổi Laplace có tính chất tuyến tính.

Đúng ☐ Sai ☐.

2.5 Biến đổi Laplace của tích hai hàm gốc bằng tích hai hàm ảnh.

Đúng ☐ Sai ☐.

2.6 Chỉ có các hàm tuần hoàn mới tồn tại biến đổi Fourier.

Đúng ☐ Sai ☐.

2.7 Phép biến đổi Fourier hữu hạn được sử dụng để khảo sát các tín hiệu rời rạc $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Đúng ☐ Sai ☐.

2.8 Mọi hàm gốc của biến đổi Laplace đều tồn tại biến đổi Fourier.

Đúng ☐ Sai ☐.

2.9 Phép biến đổi Fourier rời rạc áp dụng cho các dãy tín hiệu $\{x(n)\}$ tuần hoàn chu kỳ N .

Đúng ☐ Sai ☐.

2.10 Phép biến đổi Fourier biến miền thời gian về miền tần số.

Đúng ☐ Sai ☐.

2.11. Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc sau:

a. $\sin^3 t$ **b**. $\cos^4 \omega t$ **c**. $e^{-2t}\operatorname{ch} 3t$

d. $\left(1+te^{-t}\right)^3$ **e**. $\operatorname{ch} 2t\cos t$ **f**. $e^{-t}\sin 2t\cos 4t$.

2.12. Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc sau:

a. $t\,\mathrm{ch}\,3t$ **b**. $t\cos\omega t\,\mathrm{ch}\,at$ **c**. $t^3\sin t$

d. $\dfrac{\sin 4t}{t}$ **e**. $\dfrac{\cos at-\cos bt}{t}$ **f**. $\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$.

2.13. Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc:

a. $\eta(t-b)\cos^2(t-b)$ **b**. $x(t)=\begin{cases}(t-1)^2 & \text{nếu } t>1\\ 0 & \text{nếu } 0<t<1\end{cases}$

c. $x(t)=\begin{cases} t & \text{nếu } 0<t<1\\ 2-t & \text{nếu } 1<t<2\\ 0 & \text{nếu } t>2\end{cases}$ **d**. $x(t)=\begin{cases}\cos t & \text{nếu } 0<t<\pi\\ \sin t & \text{nếu } t>\pi\end{cases}$.

2.14. Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc:

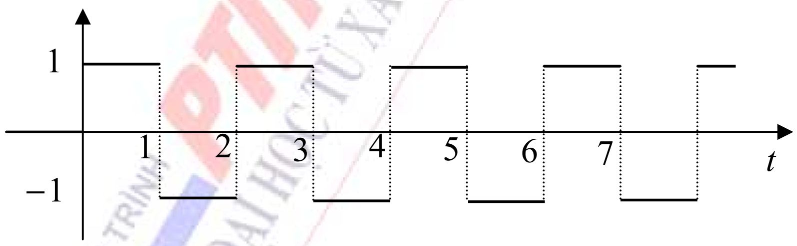
a. $x(t)=\displaystyle\int_0^t\left(u^2-u+e^{-u}\right)du$ **b**. $x(t)=\displaystyle\int_0^t (u+1)\cos\omega u\,du$

c. $x(t)=\displaystyle\int_0^t \cos(t-u)e^{2u}du$ **d** . $x(t)=\displaystyle\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}du$.

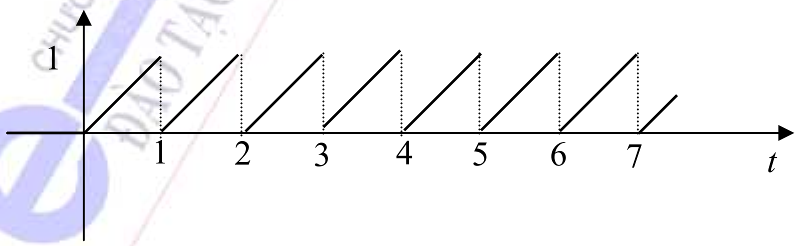
2.15. Chứng minh rằng nếu $X(s)=\mathscr{L}\{x(t)\}$ thì $\mathscr{L}\left\{\displaystyle\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}x(u)\,du\right\}=\dfrac{X(s)}{s^2}$.

2.16. Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc tuần hoàn có đồ thị hoặc xác định như sau:

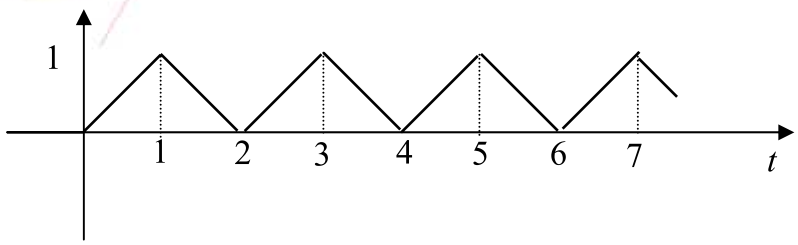
a.



b.



c.



d. $x(t) = |\cos t|$.

2.17. Sử dung công thức định nghĩa Laplace tính các tích phân sau:

a. $\displaystyle\int_0^\infty t^3 e^{-t} \sin t\, dt$ **b**. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}\sin t}{t} dt$

c. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos 6t - \cos 4t}{t} dt$ **d**. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t} dt$

2.18. **a**. Chứng minh rằng biến đổi Laplace $\mathscr{L}\left\{\sin^{2n+1} t\right\} = \dfrac{(2n+1)!}{\left(s^2+1\right)\cdots\left(s^2+(2n+1)^2\right)}$.

b. Chứng minh rằng biến đổi Laplace $\mathscr{L}\left\{\sin^{2n} t\right\} = \dfrac{(2n)!}{s\left(s^2+4\right)\cdots\left(s^2+(2n)^2\right)}$.

2.19. Tìm hàm gốc của các hàm số sau:

a. $\dfrac{s^2}{(s-1)^3}$ **b**. $\dfrac{s+3}{s^2+6s+11}$ **c**. $\dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}$

d. $\dfrac{4s+12}{s^2+8s+16}$ **e**. $\dfrac{s^3}{\left(s^2+4\right)^2}$ **f**. $\dfrac{3s+2}{\left(s^2-4s+6\right)^2}$.

2.20. Tìm hàm gốc:

a. $\dfrac{3s+1}{(s-1)\left(s^2+1\right)}$ **b**. $\dfrac{1}{s^3\left(s^3+1\right)}$

c. $\dfrac{s-1}{(s+3)\left(s^2+2s+2\right)}$ **d**. $\dfrac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^2}$

2.21. Tìm hàm gốc:

a. $\dfrac{s^4-9s^3+16s^2-4s+5}{s^5-4s^4+5s^3}$ **b**. $\dfrac{e^{-\frac{s}{3}}}{s(s^2+1)}$ **c**. $\dfrac{1}{\sqrt{2s+3}}$ **d**. $\dfrac{e^{4-3s}}{\sqrt{(s+4)^5}}$.

2.22. Tính: $\displaystyle\int_0^t J_0(u) J_0(t-u)\, du$, $(t>0)$.

2.23. Tìm hàm gốc của hàm ảnh: $\dfrac{e^{-\frac{1}{s}}}{s}$.

2.24. Giải các phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng với các điều kiện đầu:

a. $x''+2x'+x=t^2e^t$, $\quad x(0)=x'(0)=0$.

b. $x'''+3x''+3x'+x=6e^{-t}$, $\quad x(0)=x'(0)=x''(0)=0$.

c. $x''-x=4\sin t+5\cos 2t$, $\quad x(0)=-1,\ x'(0)=-2$.

d. $x''+9x=\cos 2t$, $\quad x(0)=1,\ x(\pi/2)=-1$.

2.25. Giải các phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng với các điều kiện đầu:

a. $x''+a^2x=f(t)$, $\quad x(0)=1,\ x'(0)=-2$.

b. $x''-a^2x=g(t)$, $\quad x(0)=C_1,\ x'(0)=C_2$.

2.26. Giải hệ phương trình:

a. $\begin{cases} x'+y'=t \\ x''-y=e^{-t} \end{cases}$ với điều kiện đầu $\begin{cases} x(0)=3,\ x'(0)=-2 \\ y(0)=0 \end{cases}$.

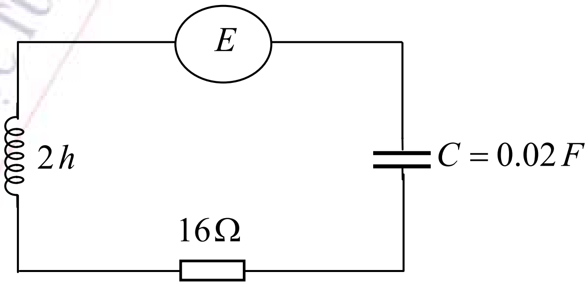
b. $\begin{cases} x'-y'-2x+2y=\sin t \\ x''+2y'+x=0 \end{cases}$ với điều kiện đầu $\begin{cases} x(0)=x'(0)=0 \\ y(0)=0 \end{cases}$.

c. $\begin{cases} -3x''+3y''=te^{-t}-3\cos t \\ tx''-y'=\sin t \end{cases}$ với điều kiện đầu $\begin{cases} x(0)=-1,\ x'(0)=2 \\ y(0)=4,\ y'(0)=0 \end{cases}$.

2.27. Cho mạch điện như hình vẽ được nối tiến với suất điện động E volts, điện dung 0,02 farads, hệ số tự cảm 2 henry và điện trở 16 Ohms. Tại thời điểm t = 0 điện lượng ở tụ điện và cường độ dòng điện trong mạch bằng 0. Tìm điện lượng và cường độ dòng điện tại thời điểm t nếu:

a. E = 300 (Volts)

b. E = 100 sin3t (Volts)



2.28. Cho mạch điện như hình vẽ:

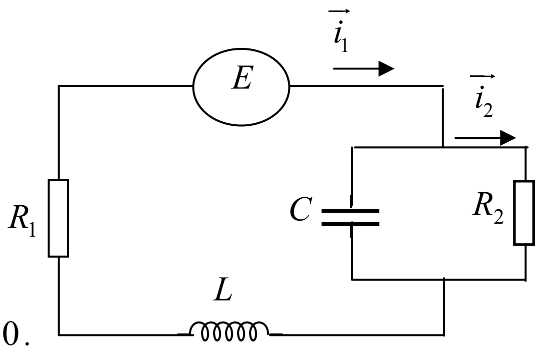
$E=500\,\mathbf{sin}\,10t \qquad L=1\,\text{henry}$

$R_1=10\,\text{ohms} \qquad R_2=10\,\text{ohms}$

$C=0,01$ farad.

Nếu điện thế ở tụ điện và cường độ i_1, i_2 bằng không tại thời điểm $t=0$.

Tìm điện lượng tại tụ điện tại thời điểm $t>0$.



2.29. Cho $x(t)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ 10 và $x(t)=\begin{cases} 0 \text{ nếu } & -5<t<0 \\ 3 \text{ nếu } & 0<t<5 \end{cases}$

a. Tìm chuỗi Fourier của $x(t)$.

b. $x(t)$ nhận giá trị bao nhiêu tại $t=-5,0,5$ để chuỗi Fourier hội tụ về $x(t)$ với mọi $t\in[-5;5]$.

2.30. Cho $x(t)=2t,\ 0<t<4$.

a. Tìm khai triển Fourier của $x(t)$ theo các hàm $\sin$.

b. Tìm khai triển Fourier của $x(t)$ theo các hàm $\cos$.

2.31. Cho dãy tín hiệu rời rạc $x(n)=\begin{cases} 1/3^n & n\ge 0 \\ 0 & n<0 \end{cases}$.

a. Tìm biến đổi Z của $x(n)$.

b. Tìm biến đổi Fourier của $x(n)$.

c. Tìm biến đổi Fourier của $y(n)=nx(n)$.

2.32. Tìm biến đổi Fourier ngược của $\hat{X}(f)=\begin{cases} e^{-i2\pi f n_0} & |f|<f_0 \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$

trong trường hợp $f_0=\dfrac{1}{4},\ n_0=4$.

2.33. **a**. Tìm biến đổi Fourier của $x(t)=\begin{cases} 1 \text{ nếu } & -T<t<T \\ 0 \text{ nếu } & |t|>T \end{cases}$

b. Hãy suy ra giá trị của tích phân $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda T\cos\lambda t}{\lambda}d\lambda$.

c. Tính $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}du$.

d. Áp dụng đẳng thức Parseval cho hàm $x(t)$ ở câu a, suy ra giá trị của tích phân: $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}du$.

2.34. Tìm hàm chẵn thỏa mãn phương trình tích phân

$$\int_0^{\infty}x(t)\cos\lambda t\,dt=\begin{cases} 1-\lambda & \text{nếu } 0\le\lambda\le 1 \\ 0 & \text{nếu } \lambda>1 \end{cases}.$$

2.35. Chứng minh rằng $\int\limits_0^\infty \frac{\cos\lambda t}{\lambda^2+1}d\lambda = \frac{\pi}{2}e^{-|t|}$.

2.36. Tìm biến đổi Fourier của các hàm số sau:

a. $x(t) = \Pi(t/T)\sin\omega_0 t$.

b. $\Lambda(t/T) = \begin{cases} 1-\dfrac{|t|}{T} & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$.

2.37. Tìm biến đổi Fourier của các hàm số sau:

a. $x(t) = \begin{cases} e^{-t/T} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$, $T > 0$.

b. $x(t) = e^{-|t|/T}$, $T > 0$.

c. $x(t) = \dfrac{1}{t^2+a^2}$, $a > 0$.

d. $x(t) = \begin{cases} 1-t^2 & \text{nếu} \quad -1 < t < 1 \\ 0 & \text{nếu} \quad |t| > 1 \end{cases}$