CHƯƠNG 2: PHÉP BIẾN HÌNH BẢO GIÁC
VÀ CÁC HÀM SƠ CẤP CƠ BẢN

§1. KHÁI NIỆM VỀ BIẾN HÌNH BẢO GIÁC

1. Phép biến hình bảo giác:

a. Định nghĩa: Một phép biến hình được gọi là bảo giác tại z nếu nó có các tính chất:

- Bảo toàn góc giữa hai đường cong bất kì đi qua điểm z (kể cả độ lớn và hướng)

- Có hệ số co dãn không đổi tại điểm đó, nghĩa là mọi đường cong đi qua z đều có hệ số co dãn như nhau qua phép biến hình.

Nếu phép biến hình là bảo giác tại mọi điểm của miền G thì nó được gọi là bảo giác trong miền G.

b. Phép biến hình thực hiện bởi hàm giải tích: Cho hàm w = f(z) đơn diệp, giải tích trong miền G. Do ý nghĩa hình học của f'(z) ta thấy rằng phép biến hình được thực hiện bởi hàm w = f(z) là bảo giác tại mọi điểm mà $f'(z) \neq 0$.

Nếu chỉ xét trong một lân cận nhỏ của điểm z, thì phép biến hình bảo giác là một phép đồng dạng do tính chất bảo toàn góc. Các góc tương ứng trong hai hình là bằng nhau. Mặt khác nếu xem hệ số co dãn là không đổi thì tỉ số giữa hai cạnh tương ứng là không đổi.

Ngược lại người ta chứng minh được rằng phép biến hình w = f(z) đơn diệp là bảo giác trong miền G thì hàm w = f(z) giải tích trong G và có đạo hàm $f'(z) \neq 0$.

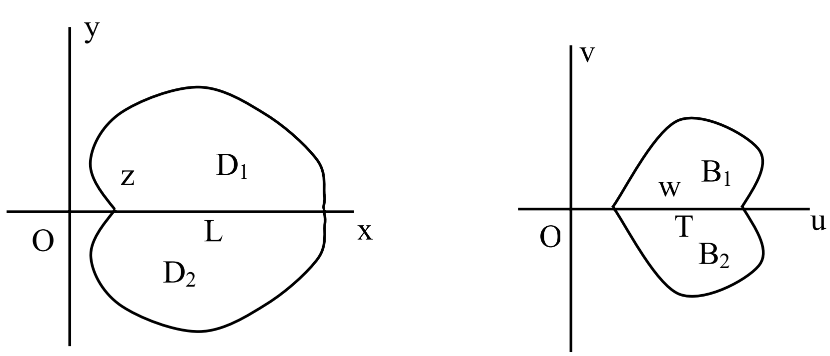
2. Bổ đề Schwarz: Giả sử hàm f(z) giải tích trong hình tròn | z | < R và f(0) = 0. Nếu | z) | ≤ M với mọi z mà | z | < R thì ta có:

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R}|z|,\ |z| < R$$

Trong đó đẳng thức xảy ra tại z_1 với 0 < | z | < R chỉ khi $f(z) = \frac{Me^{j\alpha}}{R}z$, α thực.

3. Nguyên lí đối xứng: Trước hết ta thừa nhận một tính chất đặc biệt của hàm biến phức mà hàm biến số thực không có, đó là tính duy nhất, được phát biểu như sau: Giả sử hai hàm f(z) và g(z) cùng giải tích trong miền D và thoả mãn f(z) = g(z) trên một cung L nào đó nằm trong D, khi đó f(z) = g(z) trên toàn miền D.

Giả sử D_1 và D_2 nằm kề nhau và có biên chung là L



Giả sử $f_1(z)$ giải tích trong D_1 và $f_2(z)$ giải tích trong D_2. Nếu $f_1(z) = f_2(z)$ trên L thì ta gọi $f_2(z)$ là thác triển giải tích của $f_1(z)$ qua L sang miền D_2. Theo tính duy nhất của hàm giải tích nếu $f_3(z)$ cũng là thác triển giải tích của $f_1(z)$ qua L sang miền D_2 thì ta phải có $f_3(z) = f_2(z)$ trong D_2. Cách nhanh nhất để tìm thác triển giải tích của một hàm cho trước là áp dụng nguyên lí đối xứng sau đây:

Giả sử biên của miền D_1 chứa một đoạn thẳng L và $f_1(z)$ biến bảo giác D_1 lên B_1 trong đó L chuyển thành đoạn thẳng T thuộc biên của B_1. Khi đó tồn tại thác triển giải tích $f_2(z)$ của $f_1(z)$ qua L sang miền D_2 nằm đối xứng với D_1 đối với L. Hàm $f_2(z)$ biến bảo giác D_2 lên B_2nằm đối xứng với B_1 đối với T và hàm:

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{trong } D_1 \\ f_1(z) = f_2(z) & L \\ f_2(z) & \text{trong } D_2 \end{cases}$$

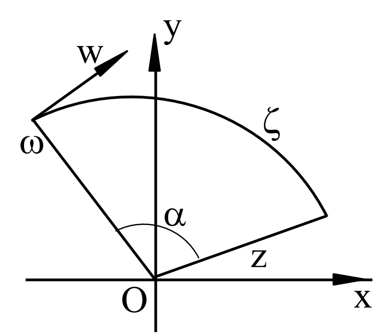
biến bảo giác D thành B.

Nguyên lí đối xứng thường dùng để tìm phép biến hình bảo giác hai miền đối xứng cho trước.

§2. CÁC PHÉP BIẾN HÌNH QUA CÁC HÀM SƠ CẤP

1. Phép biến hình tuyến tính: Xét hàm tuyến tính w = az + b trong đó a, b là các hằng số phức. Giả thiết $a \neq 0$. Nếu $a = |a|e^{j\alpha}$ thì $w = |a|e^{j\alpha}z + b$. Phép biến hình tuyến tính là bảo giác trong toàn mặt phẳng phức vì $f'(z) = a \neq 0\ \forall z \in C$. Hàm tuyến tính có thể coi là hợp của 3 hàm sau:

- $\zeta = kz$ $(k = |a| > 0)$
- $\omega = e^{j\alpha}.\zeta$ $(\alpha = \text{Arg}a)$
- $w = \omega + b$

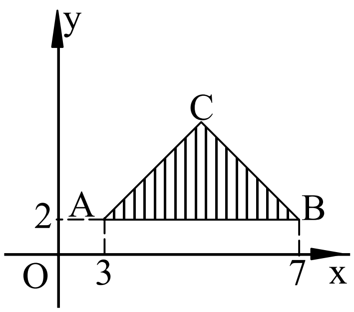


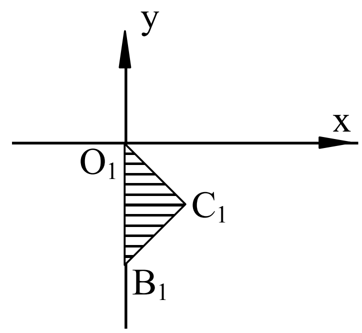
Nếu biểu diễn các điểm ζ, ω, w trong cùng một mặt phẳng thì dựa vào ý nghĩa hình học của phép nhân và phép cộng các số phức ta suy ra rằng:

- điểm ζ nhận được từ điểm z bằng phép co dẫn với hệ số k
- điểm ω nhận được từ điểm ζ bằng phép quay tâm O, góc quay α.
- điểm w nhận được từ điểm ω bằng phép tịnh tiến xác định bởi vec tơ biểu diễn số phức b.

Như vậy muốn được ảnh w của z ta phải thực hiện liên tiếp một phép co dãn, một phép quay và một phép tịnh tiến. Tích của 3 phép biến hình trên là một phép đồng dạng. Vậy phép biến hình tuyến tính là một phép đồng dạng. Nó biến một hình bất kì thành một hình đồng dạng với hình ấy. Đặc biệt, ảnh của một đường tròn là một đường tròn, ảnh của một đường thẳng là một đường thẳng.

Ví dụ: Tìm hàm w = f(z) biến hình tam giác vuông cân A(3+ 2j), B(7 + 2j), C(5 + 4j) thành tam giác vuông cân có đỉnh tại O_1, B_1(-2j) và C_1(1 - j)





Vì các tam giác ABC và $O_1B_1C_1$ đồng dạng nên phép biến hình được thực hiện bằng một hàm bậc nhất w = az + b. Phép biến hình này có thể phân tích thành các phép biến hình liên tiếp sau đây:

* phép tịnh tiến từ A về gốc, xác định bằng vec tơ (-3 - 2j). Phép tịnh tiến này được xác định bởi hàm $\zeta = z - (3 + 2j)$

* phép quay quanh gốc một góc $-\frac{\pi}{2}$, ứng với hàm $\omega = \zeta e^{-j\frac{\pi}{2}}$

* phép co dãn tâm O, hệ số $k = \frac{O_1B_1}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, được thực hiên bằng hàm $w = \frac{1}{2}\omega$

Vậy: $w = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}(z - 3 - 2j) = -\frac{j}{2}(z - 3 - 2j) = -jz + \frac{3}{2}j - 1$

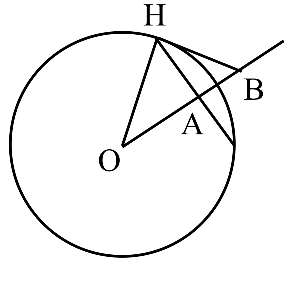
2. Phép nghịch đảo:

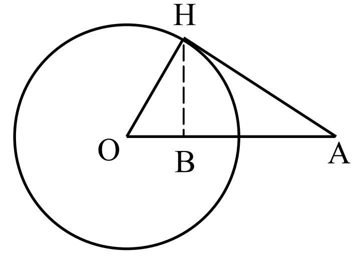
a. Định nghĩa: Hai điểm A và B được gọi là đối xứng đối với đường tròn C' tâm O, bán kính R nếu chúng cùng nằm trên một nửa đường thẳng xuất phát từ O và thoả mãn đẳng thức:

$OA.OB = R^2$

Dĩ nhiên, vì $OB = \frac{R^2}{OA} = \frac{R}{OA}.R$ nên nếu OA < R $\left(\frac{R}{OA} > 1\right)$ thì OB > R. Ngược lại nếu OA > R thì OB < R. Nghĩa là trong hai điểm A và B thì một điểm nằm trong và một điểm nằm ngoài đường tròn.

Nếu A nằm trong đường tròn thì muốn được B kẻ đường AH ⊥ OA và sau đó vẽ tiếp tuyến HB.

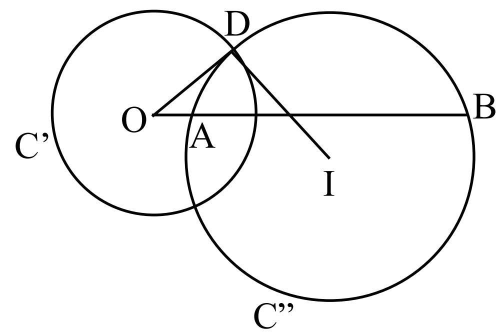




Nếu A nằm ngoài đường tròn thì muốn được điểm B ta vẽ tiếp tuyến AH, sau đó kẻ HB $\perp$ OA.

b. Định lí 1: Nếu A và B đối xứng với đường tròn C’ và C” là đường tròn bất kì đi qua A và B thì C’ và C” trực giao với nhau.

Chứng minh: Gọi I là tâm và r là bán kính của C”. Kí hiệu $P_{C''}O$ là phương tích của điểm O đối với đường tròn C”.



Theo giả thiết vì A và B đối xứng qua C’ nên $OA.OB = R^2$. Mặt khác theo cách tính phương tích ta có:

$$P_{C''}O = OA.OB = OI^2 - r^2$$

Từ đó suy ra:

$$R^2 = OI^2 - r^2$$

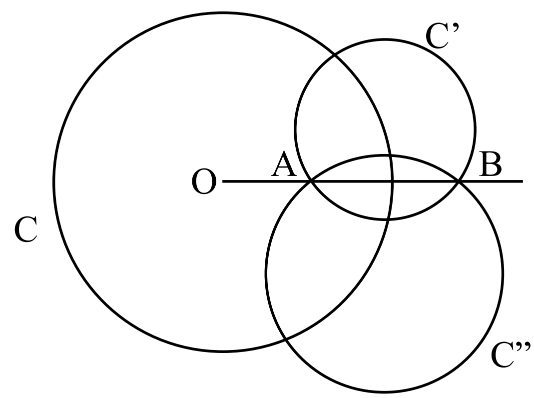
hay:

$$OI^2 = R^2 + r^2 = OD^2 + ID^2.$$

Vậy OD $\perp$ DI

c. Định lí 2: Giả sử hai đường tròn C’ và C” cùng trực giao với đường tròn C. Nếu C’ và C” cắt nhau tại A và B thì hai điểm A và B đối xứng qua C

Chứng minh: Gọi I_1 và I_2 lần lượt là tâm của đường tròn C’ và C”; r_1 và r_2 là bán kính của chúng. Gọi R là bán kính của đường tròn C. Ta có:



$$P_{C'}O = OI_1^2 - r_1^2$$

$$P_{C''}O = OI_2^2 - r_2^2$$

Nhưng do giả thiết trực giao ta có:

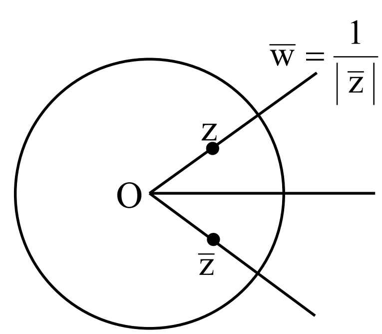
$$OI_1^2 - r_1^2 = R^2$$

$$OI_2^2 - r_2^2 = R^2$$

Vây: $P_{C'}O = P_{C''}O$

Vì điểm O có cùng phương tích với cả hai đường tròn C’ và C” nên O nằm trên trục đẳng phương AB của cặp vòng tròn đó. Mặt khác do $P_{C'}O = OA.OB = R^2$ nên A và B đối xứng qua C.

d. Phép biến hình $\boldsymbol{w = \dfrac{1}{z}}$: Phép biến hình này đơn diệp, biến mặt phẳng phức mở rộng z (tức mặt phẳng phức có bổ sung thêm điểm z = ∞) lên mặt phẳng phức mở rộng w. Ảnh của điểm z = 0 là điểm w = ∞. Ngược lại ảnh của điểm z = ∞ là điểm w = 0. Vì $w' = -\dfrac{1}{z^2}$ nên phép biến hình bảo giác tại z $\neq$ 0 và z $\neq$ ∞.



Ta sẽ nêu ra cách tìm ảnh của một điểm z bất kì. Chú ý là hai điểm z và $\frac{1}{\overline{z}} = \overline{w}$ đối xứng nhau qua đường tròn đơn vị vì $\operatorname{Arg}\frac{1}{\overline{z}} = -\operatorname{Arg}\overline{z} = \operatorname{Arg}z$. Mặt khác $|z|.\frac{1}{|\overline{z}|} = 1$.

Vậy muốn được w, ta dựng $\overline{w}$ đối xứng với z qua đường tròn đơn vị rồi lấy đối xứng qua trục thực. Nói khác đi, phép biến hình $w = \frac{1}{z}$ là tích của hai phép đối xứng:

* phép đối xứng qua đường tròn đơn vị
* phép đối xứng qua trục thực

e. Tính chất của phép biến hình: ☞Phép biến hình $w = \frac{1}{z}$ biến:

* một đường tròn đi qua gốc toạ độ thành một đường thẳng
* một đường tròn không đi qua gốc toạ độ thành một đường tròn
* một đường thẳng đi qua gốc toạ độ thành một đương thẳng
* một đường thẳng không đi qua gốc toạ độ thành một đường tròn đi qua gốc toạ độ.

Nếu coi đường thẳng là một đường tròn có bán kính vô hạn thì tính chất trên được phát biểu gọn lại là: Phép biến hình $w = \frac{1}{z}$ biến một đường tròn thành một đường tròn.

Chứng minh: Xét đường cong C' có phương trình:

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0$$

Trong đó A, B, C, D là những hằng số thực. Viết phương trình ấy dưới dạng phức ta có:

$$Az\overline{z} + Ez + \overline{Ez} + D = 0 \qquad (1)$$

Trong đó E = B - jC

Nếu A ≠ 0, D = 0 thì C' là đường tròn đi qua gốc toạ độ. Nếu A = 0 thì C' là đường thẳng. Nếu A = D = 0 thì C' là đường thẳng đi qua gốc toạ độ. Ảnh của C' qua phép biến hình $w = \frac{1}{z}$ là đường cong L có phương trình:

$$A\frac{1}{w}.\frac{1}{\overline{w}} + \frac{E}{w} + \frac{\overline{E}}{\overline{w}} + D = 0$$

hay: $D w\overline{w} + \overline{E}w + E\overline{w} + A = 0$ (2)

Nếu D = 0 thì L là đường thẳng. Nếu D = A = 0 thì L là đường thẳng đi qua gốc toạ độ. Nếu A = 0 thì L là đường tròn đi qua gốc toạ độ.

☞ Giả sử z_1 và z_2 là hai điểm đối xứng với nhau qua đường tròn C'. Khi đó nếu gọi w_1 và w_2 và L là ảnh của z_1, z_2 và C' qua phép biến hình $w = \frac{1}{z}$ thì w_1 và w_2 đối xứng nhau qua C. Nói khác đi, phép biến hình $w = \frac{1}{z}$ bảo toàn tính đối xứng qua một đường tròn.

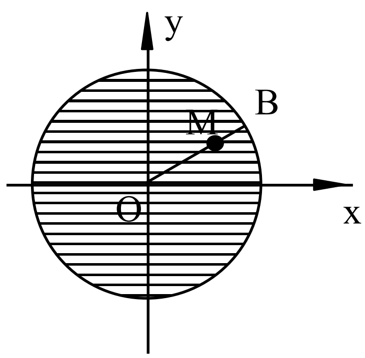
Chứng minh: Lấy 2 đường tròn bất kì P và Q qua z_1 và z_2.Theo định lí 1 thì P và Q cùng trực giao với C'. Qua phép biến hình, P và Q sẽ biến thành hai đường tròn L_1 và L_2 cắt nhau tại w_1 và w_2. Vì phép biến hình bảo giác nên L_1 và L_2 trực giao với C'. Theo định lí 2 thì w_1 và w_2 sẽ đối xứng với nhau qua L.

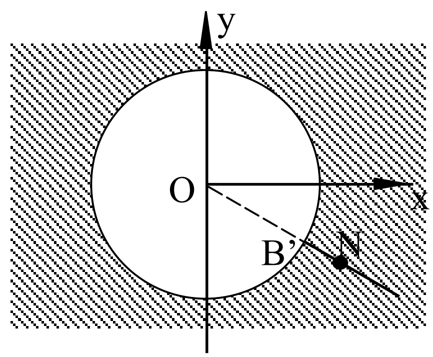
Ví dụ 1: Tìm ảnh của hình tròn | z | < 1 qua phép biến hình $w = \frac{1}{z}$

Dễ dàng thấy rằng ảnh của đường tròn | z | = a (0 < a < 1) là đường tròn $|w| = \frac{1}{a}$. Khi a biến thiên từ 0 đến 1, thì $\frac{1}{a}$ giảm từ +∞ đến 1. Trong khi đường tròn | z | = a quét nên hình tròn | z | < 1 thì ảnh của nó quét nên miền | w | > 1.

Tóm lại ảnh của miền | z | < 1 là miềm | w | > 1. Ảnh của đường tròn | z | = 1 là đường tròn | w | + 1.

Ví dụ 2: Tìm ảnh của bán kinh OB: argz = π/6; | z | < 1 qua phép biến hình w = 1/z





Lấy M bất kì trên OB. Thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua đường tròn đơn vị và phép đối xứng qua trục thực ta được ảnh N của nó nằm trên nửa đường thẳng sao cho:

OM.ON = 1

Khi M chạy từ O đến B, N chạy từ ∞ đến B'.

3. Phép biến hình phân tuyến tính $w = \frac{az+b}{cz+d}$: Phép biến hình chỉ có ý nghĩa khi c và d không đồng thời triệt tiêu. Ta không xét trường hợp ad = bc vì đây là trường hợp tầm thường . Thật vậy nếu ad = bc thì ta có thể viết:

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{adz+bd}{cbz+db}.\frac{b}{d} = \frac{b}{d}$$

Tức là mọi $z \neq -\frac{d}{c}$ đều có cùng một ảnh $w = \frac{b}{d}$.

Vậy ta chỉ xét các trường hợp ad - bc ≠ 0. Nếu c = 0 ta được hàm tuyến tính đã xét:

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

cho nên ta giả thiết c ≠ 0. Phép biến hình $w = \frac{az+b}{cz+d}$ là đơn diệp và biến toàn bộ mặt phẳng mở rộng z lên mặt phẳng mở rộng w. Mỗi điểm $z \neq -\frac{d}{c}$ có ảnh là điểm $w = \frac{az+b}{cz+d}$. Ngược lại, giải z theo w, ta được hàm ngược $z = \frac{-dw+b}{cw-a}$; tức là mỗi điểm $w \neq \frac{a}{c}$ có nghịch ảnh là $z = \frac{-dw+b}{cw-a}$. Ảnh của điểm $z = -\frac{d}{c}$ là điểm $w = \infty$. Ảnh của điểm $z = \infty$ là $w = \frac{a}{c}$

Vì $w' = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$ nên phép biến hình phân tuyến tính bảo giác tại mọi điểm $z \neq -\frac{d}{c}$ và $z \neq \infty$. Phân tích biểu thức của w ta được:

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{acz+bc}{c(cz+d)} = \frac{acz+ad+bc-ad}{c(cz+d)} = \frac{a(cz+d)+bc-ad}{c(cz+d)}$$

$$= \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}.\frac{1}{cz+d}$$

Từ đó suy ra phép biến hình phân tuyến tính là tích của 3 phép biến hình:

$\zeta = cz + d$ phép biến hình tuyến tính

$\omega = \frac{1}{\zeta}$ phép nghịch đảo

$w = \frac{bc-ad}{c}.\omega + \frac{a}{c}$ phép biến hình tuyến tính

Vì mỗi phép biến hình thành phần đều biến một đường tròn thành một đường tròn và bảo toàn tính đối xứng của 2 điểm đối với đường tròn nên phép biến hình phân tuyến tính cũng có các tính chất ấy.

Phép biến hình phân tuyến tính tổng quát chứa 4 tham số a, b, c, d nhưng thực chất chỉ có 3 tham số là độc lập. Thật vậy, với giả thiết $c \neq 0$, ta có:

$$w = \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}}$$

Nếu ta đặt $a_1 = \frac{a}{c}$, $b_1 = \frac{b}{c}$, $d_1 = \frac{d}{c}$ thì ta có:

$$w = \frac{a_1 z + b_1}{z + d_1}$$

Vậy muốn phép biến hình phân tuyến tính hoàn toàn xác định, ta phải cho 3 điều kiện. Chẳng hạn ta có thể buộc nó biến 3 điểm cho trước z_1, z_2 và z_3 lần lượt thành 3 điểm w_1, w_2 và w_3. Khi đó các tham số a_1, b_1 và d_1 là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{a_1z_1+b_1}{z+d_1}=w_1 \\ \dfrac{a_1z_2+b_1}{z+d_1}=w_2 \\ \dfrac{a_1z_3+b_1}{z+d_1}=w_3 \end{cases}$$

Giải hệ này ta tính được a_1, b_1 và d_1 rồi thay vào $w=\dfrac{a_1z+b_1}{z+d_1}$ ta được hàm phải tìm dưới dạng đối xứng:

$$\frac{w-w_2}{w-w_3}\cdot\frac{w_1-w_3}{w_1-w_2}=\frac{z-z_2}{z-z_3}\cdot\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2} \qquad (4)$$

Ví dụ 1: Tìm phép biến hình bảo giác biến nửa mặt phẳng trên lên hình tròn đơn vị sao cho z = a với Ima > 0 thành w = 0

Theo tính bảo toàn vị trí điểm đối xứng thì điểm $z=\bar{a}$ phải chuyển thành điểm $w=\infty$. Vậy phép biến hình phải tìm có dạng:

$$w=k\frac{z-a}{z-\bar{a}}$$

Vì z = 0 chuyển thành một điểm nào đó trên đường tròn | w | = 1 nên suy ra | k | = 1 hay $k = e^{j\alpha}$. Vậy:

$$w=e^{j\alpha}\frac{z-a}{z-\bar{a}}$$

Ví dụ 2: Biến hình tròn đơn vị thành chính nó sao cho z = a với | a | < 1 thành w = 0.

Theo tính bảo toàn vị trí đối xứng thì điểm $b=\dfrac{1}{\bar{a}}$ nằm đối xứng với a qua đường tròn | z | = 1phải chuyển thành điểm $w = \infty$. Phép biến hình cần tìm có dạng:

$$w=k\frac{z-a}{z-b}=K\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

Trong đó k và K là các hằng số nào đó. Vì z = 1 thì | w | = 1 nên ta có:

$$\left|K\frac{1-a}{1-\bar{a}}\right|=|K|=1 \text{ nên } K=e^{i\alpha}$$

và: $$w=e^{j\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

Ví dụ 3: Biến nửa mặt phẳng trên thành chính nó

Phép biến hình này được thực hiện bằng hàm phân tuyến tính biến 3 điểm z_1, z_2 và z_3 trên trục thực theo chiều dương của mặt phẳng z thành 3 điểm w_1, w_2, w_3 trên trục thực theo chiều dương của mặt phẳng w.

4. Phép biến hình Giucovski: Ta gọi hàm phức $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ là hàm Giucovski. hàm này có rất nhiều ứng dụng trong kĩ thuật. Nó có một điểm bất thường hữu hạn là z = 0. Đạo hàm của nó là $w' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$, w' = 0 tại các điểm z = ±1. Vậy phép biến hình Giucovski bảo giác tại mọi điểm z hữu hạn khác với điểm O và ±1. Ta hãy tìm miền đơn diệp của hàm. Giả sử $z_1 \neq z_2$ nhưng:

$$\frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) = \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right) \text{ hay } (z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) = 0 \qquad (5)$$

Ta thấy rằng đẳng thức (5) xảy ra khi $z_1.z_2 = 1$. Vậy phép biến hình sẽ đơn diệp trong mọi miền không chứa hai điểm nghịch đảo của nhau. Chẳng hạn miền | z | < 1 là miền đơn diệp của hàm số; miền | z | > 1 cũng là một miền đơn diệp khác.

Ví dụ 1: Tìm ảnh của phép biến hình Giucovski của:

* đường tròn | z | = h 0 < h < 1
* đoạn thẳng Argz = α, | z | < 1
* hình tròn đơn vị | z | < 1
* nửa mặt phẳng trên, nằm ngoài hình tròn đơn vị tâm O.

• Ta đặt $z = re^{j\varphi}$. Hàm Giucovski được viết thành:

$$w = u + jv = \frac{1}{2}\left(re^{j\varphi} + \frac{1}{re^{j\varphi}}\right) = \frac{1}{2}\left[r(\cos\varphi + j\sin\varphi) + \frac{1}{r}(\cos\varphi - j\sin\varphi)\right]$$

Tách phần thực và phần ảo ta có:

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{2}\right)\cos\varphi$$

$$v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{2}\right)\sin\varphi$$

Từ đó suy ra ảnh của đường tròn | z | = r = h có phương trình tham số là:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}\left(h + \frac{1}{h}\right)\cos\varphi \\ v = \frac{1}{2}\left(h - \frac{1}{h}\right)\sin\varphi = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h} - h\right)\sin\varphi \end{cases}$$

Trong đó φ là tham số. Đó là một elip (γ), có tâm O và các bán trục $a = \frac{1}{2}\left(h + \frac{1}{h}\right)$ và $b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h} - h\right)$, tiêu cự $2c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{\frac{1}{4}\left(h + \frac{1}{h}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(h - \frac{1}{h}\right)^2} = 2$. Các tiêu điểm của elip là $F_1(-1, 0)$ và $F_2(1, 0)$. Khi φ biến thiên từ 0 đến 2π, điểm z chạy dọc đường tròn | z | = h theo hướng dương trong khi ảnh w tương ứng của nó chạy trên ellip theo hướng âm của mặt phẳng.

Vì khi $0 < \varphi < \pi$ thì $v < 0$ và khi $\pi < \varphi < 2\pi$ thì $v > 0$ nên ảnh của nửa đường tròn trên là nửa elip dưới, ảnh của nửa đường tròn dưới là elip trên.

Chú ý là khi $h \to 0$ thì các bán trục a, b của elip dần ra ∞, nghĩa là nếu đường tròn $| z | = h$ càng nhỏ thì ảnh của nó có các bán trục càng lớn. Khi $h \to 1$ thì $a \to 1$ và $b \to 0$, nghĩa là nếu đường tròn $| z | = h$ càng dần vào đường tròn đơn vị thì elip ảnh dẹt dần và tiến tới đoạn kép F_1F_2 (sở dĩ gọi là đoạn kép vì F_1F_2 đồng thời là ảnh của nửa cung tròn đơn vị trên và nửa cung tròn đơn vị dưới). Ta quy ước bờ trên của đoạn là ảnh của nửa cung tròn đơn vị nằm trong nửa mặt phẳng dưới; bờ dưới của đoạn thẳng là ảnh của nửa cung tròn đơn vị nằm trong nửa mặt phẳng trên.

• Nếu gọi L là ảnh của đoạn thẳng:

$$\begin{cases} \operatorname{Arg} z = \alpha \\ |z| < 1 \end{cases}$$

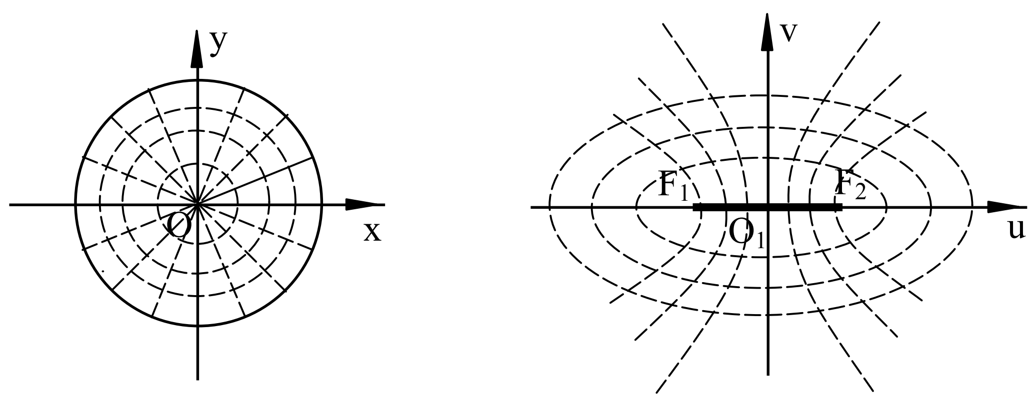
thì phương trình tham số của L là:

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right)\cos\alpha \\ v = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r} - r\right)\sin\alpha \end{cases}$$

Khử r trong các phương trình này ta có:

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1 \qquad (6)$$

Đây là một hyperbol có các tiêu điểm trùng với F_1 và F_2.



Nếu $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ thì ảnh (L) là nhánh hyperbol (6) nằm trong góc phần tư thứ tư. Khi điểm z chạy trên đoạn bán kính từ gốc toạ độ tới đường tròn đơn vị thì ảnh w của nó chạy trên nhánh hyperbol nằm trong góc phần tư thứ tư từ ∞ tới trục thực O_1u.

• Khi cho h biến thiên từ 0 đến 1 thì đường tròn $| z | = h$ sẽ quét nên hình tròn $| z | < 1$. Ảnh (γ) của L trong mặt phẳng w sẽ quét nên mặt phẳng w, bỏ đi lát cắt dọc đoạn F_1F_2. Bờ dưới của lát cắt là ảnh của cung tròn đơn vị trên. Bờ trên của lát cắt là ảnh của cung tròn đơn vị dưới. Nửa hình tròn đơn vị trên có ảnh là nửa mặt phẳng dưới. Ngược lại nửa hình tròn đơn vị dưới có ảnh là nửa mặt phẳng trên.

• Tương tự như ở câu đầu tiên ảnh của nửa đường tròn trên:

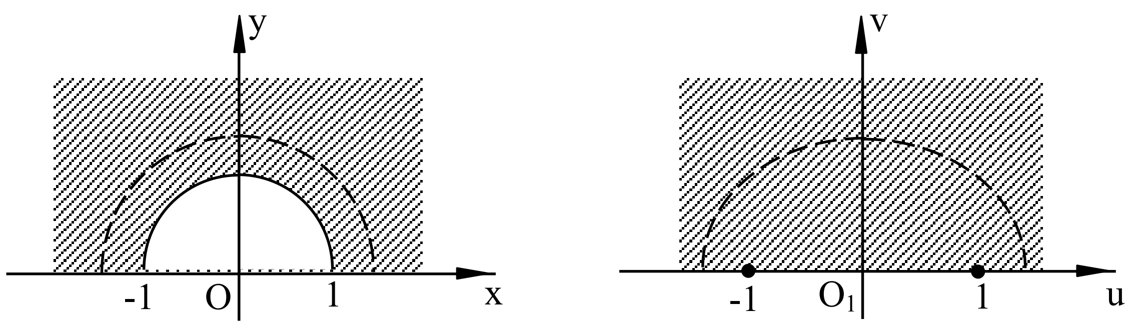
$r = h\ (h > 1) \quad 0 < \varphi < \pi$

có phương trình tham số là:

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}\left(h + \dfrac{1}{h}\right)\cos\varphi \\ v = \dfrac{1}{2}\left(h - \dfrac{1}{h}\right)\sin\varphi \end{cases} \quad 0 < \varphi < \pi$$

Đây là một cung ellip nằm trong nửa mặt phẳng trên , có các bán trục là $a = \dfrac{1}{2}\left(h + \dfrac{1}{h}\right)$ và $b = \dfrac{1}{2}\left(h - \dfrac{1}{h}\right)$

Khi nửa đường tròn trên tâm O, bán kính h quét nên phần nửa mặt phẳng trên nằm ngoài đường tròn đơn vị thì ảnh của nó quét nên nửa mặt phẳng trên Imz > 0 xem hình vẽ).



Ví dụ 2: Tìm phép biến hình biến nửa hình đơn vị | z | = 1, Imz > 0 thành nửa mặt phẳng trên.

Dễ thấy rằng phép biến hình phải tìm là hợp của hai phép:

$$t = -z = e^{j\pi}z$$

$$w = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$$

5. Hàm luỹ thừa $w = z^n$: Ta xét hàm $w = z^n$ với n nguyên dương, lớn hơn hay bằng 2. Nếu $z = r(\cos\alpha + j\sin\alpha)$ thì $w = r^n(\cos n\alpha + j\sin n\alpha)$. Vậy ảnh của tia Argz = α là tia Argw = $n\alpha$ nhận được bằng cách quay tia Argz = α quanh gốc toạ độ góc $(n - 1)\alpha$. ảnh của đường tròn | z | = R là đường tròn | w | = R^n. Ảnh của mặt phẳng z là mặt phẳng w.

Tuy nhiên phép biến hình từ mặt phẳng z lên mặt phẳng w không đơn diệp vì nếu hai số phức z_1 và z_2 có cùng môđun và có argumen sai khác nhau một số nguyên lần $\dfrac{2\pi}{n}$ thì $z_1^n = z_2^n$.

Muốn hàm $w = z^n$ đơn diệp trong một miền G nào đó thì miền G này phải không chứa bất kì cặp điểm nào có cùng môđun và có argumen sai khác nhau góc $\frac{2\pi}{n}$. Chẳng hạn miền quạt $0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}$ là một miền đơn diệp của hàm $w = z^n$. Ảnh của miền quạt này, qua phép biến hình, là mặt phẳng w, bỏ đi một lát cắt dọc theo nửa trục thực $u > 0$. Bờ trên của lát cắt là ảnh của tia argz = 0 và bờ dưới của lát cắt là ảnh của tia $\arg z = \frac{2\pi}{n}$.

Miền quạt $\frac{\pi}{n} < \arg z < \frac{3\pi}{n}$ cũng là một miền đơn diệp khác của hàm. Ảnh của miền quạt này qua phép biến hình là mặt phẳng w, bỏ đi một lát cắt dọc theo nửa trục thực âm.

Hàm $w = z^n$ giải tích trong toàn mặt phẳng, vì ta có:

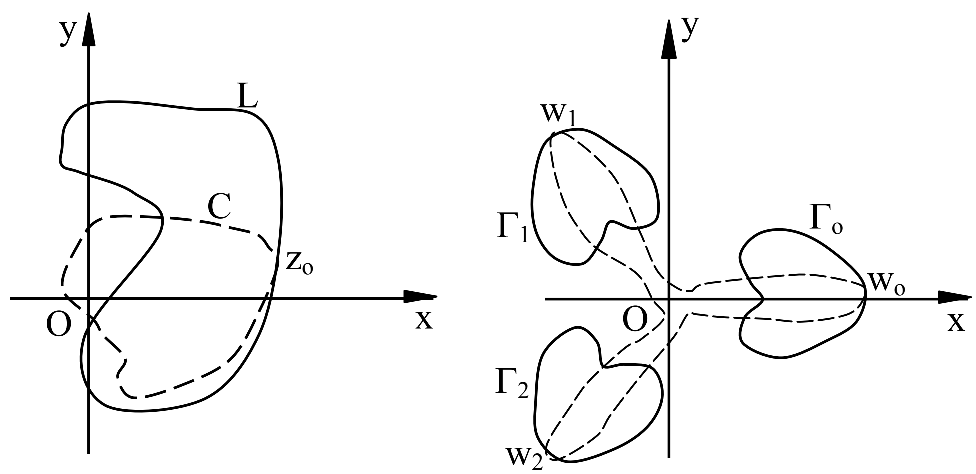
$$\frac{dw}{dz} = nz^{n-1} \quad \forall z \in C$$

Phép biến hình $w = z^n$ bảo giác tại mọi điểm $z \neq 0$.

6. Hàm $w = \sqrt[n]{z}$: Đây là hàm ngược của hàm $w = z^n$. Nó là một hàm đa trị vì với mỗi số phức $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) \neq 0$ có n căn bậc n cho bởi:

$$w = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + j\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right] \quad k = 0,1,\ldots,n-1$$

Toạ vị của n số phức này là các đỉnh của một đa giác đều n cạnh tâm O. Giả zử điểm z vạch thành một đường cong kín L không bao quanh gốc toạ độ O, xuất phát từ z_o.



Khi đó điểm $w = \sqrt[n]{z}$ trong đó $\sqrt[n]{z}$ là một giá trị nào đó của căn thức mà ta chọn trước sẽ vạch nên đường cong kín Γ_o, xuất phát từ $w_o = \sqrt[n]{z_o}$ vì khi z xuất phát từ z_o chạy một vòng trên C thì Argz biến thiên từ giá trị ban đầu Argz_o rồi quay về đúng giá trị ấy. Các giá trị căn thức khác với giá trị đã chọn sẽ vạch nên đường cong kín Γ_k, được suy ra từ Γ_o bằng cách quay các góc $2\pi/n$ quanh gốc toạ độ.

Bây giờ ta giả thiết điểm z vạch nên đường cong kín C bao quanh gốc toạ độ một vòng theo hướng dương, xuất phát từ điểm z_o. Trong trường hợp này, khi z chạy một vòng thì arumen của z tăng thêm 2π. Do vậy argumen của w tăng thêm $2\pi/n$. Điểm w sẽ vạch nên một đường cong liên tục từ điểm w_o tới $w_1 = w_o\left(\cos\frac{2\pi}{n} + j\sin\frac{2\pi}{n}\right)$. Nghĩa là w đi từ giá trị w_o của căn thức tới một giá trị khác của căn thức. Do đó điểm w chỉ trở về vị trí xuất phát sau khi z chạy n vòng trên C. Điều đó chứng tỏ rằng muốn tách được một hàm đơn trị liên tục từ hàm đa trị $w = \sqrt[n]{z}$ thì miền xác định E của hàm đơn trị này không được chứa bất kì một đường cong kín nào bao quanh gốc O. Muốn vậy ta có thể lấy E là mặt phẳng phức z cắt di một lát cắt γ từ gốc toạ độ ra ∞. Chẳng hạn, có thể chọn γ là nửa trục Ox dương. Khi đó các hàm đơn trị tách ra từ hàm đa trị $w = \sqrt[n]{z}$, mà ta thường gọi là các nhánh đơn trị cuả hàm $w = \sqrt[n]{z}$ là những hàm biến phức biến E(mặt phẳng phức với lát cắt dọc theo nửa trục Ox dương) lên mỗi hình quạt:

$$0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}$$

$$\frac{2\pi}{n} < \arg z < \frac{4\pi}{n}$$

……

Muốn chọn ra một nhánh xác định trong n nhánh trên ta có thể buộc nhánh này phải lấy một giá trị w_o khi $z = z_o$ với w_o là căn bậc n nào đó của z_o. Mỗi nhánh đơn trị của hàm $w = \sqrt[n]{z}$ trong miền xác định E có đạo hàm:

$$(\sqrt[n]{z})' = \frac{1}{(w^n)'} = \frac{1}{nw^{n-1}} = \frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}$$

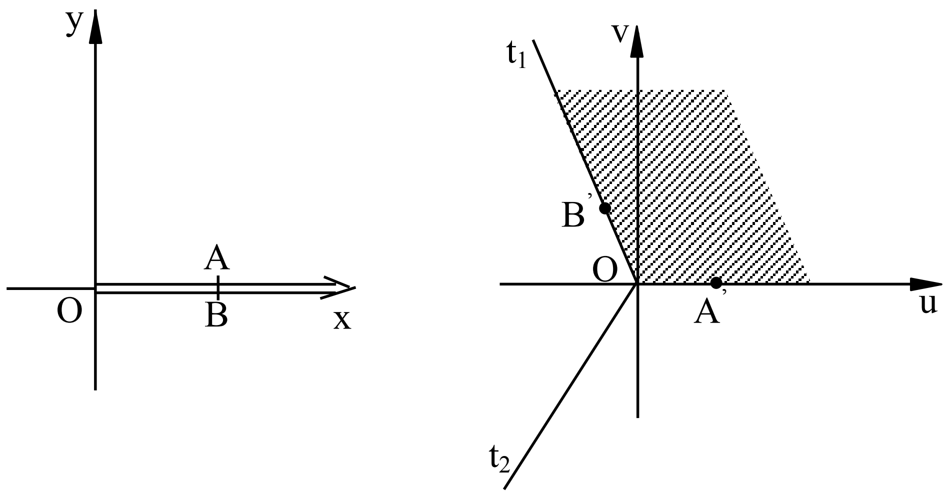
nên nó là hàm giải tích trong E.

Nếu ta không dùng lát cắt γ thì không thể tách được các nhánh đơn trị vì khi điểm z vạch nên đường cong kín thì điểm w sẽ chuyển từ nhánh nọ sang nhánh kia. Vì vậy O còn được gọi là điểm rẽ nhánh của hàm đa trị $w = \sqrt[n]{z}$.

Ví dụ: Xét hàm đa trị $w = \sqrt[3]{z}$

Gọi Ot_1 là tia $\text{Arg}w = \frac{2\pi}{3}$; Ot_2 là tia $\text{Arg}w = \frac{4\pi}{3}$. Những nhánh đơn trị của của hàm $w = \sqrt[3]{z}$ là các phép biến hình đơn diệp, biến mặt phẳng phức z, bỏ đi lát cắt dọc theo nửa trục Ox dương lên mỗi góc uOt_1, t_1Ot_2, t_2Ou.

Nhánh $w = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r(\cos\varphi + j\sin\varphi)} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + j\sin\frac{\varphi}{3}\right)$ với $0 < \varphi < 2\pi$ biến hai điểm A và B nằm lần lượt ở bờ trên và bờ dưới của lát cắt thành hai điểm A' thuộc tia $\arg w = 0$ và B' thuộc tia $\arg w = \frac{2\pi}{3}$. Điều đó chứng tỏ nửa trục Ox là đường gián đoạn của nhánh này.



7. Hàm mũ:

a. Định nghĩa: Ta gọi hàm phức có phần thực $u(x,y) = e^x\cos y$ và phần ảo $v(x,y)=e^x\sin y$ là hàm mũ biến phức và kí hiệu là e^z.

$w = e^z = e^{x + jy} = e^x(\cos y + j\sin y)$ (1)

Cho y = 0 ta có $w = e^x$, nghĩa là khi z = x thực ta có hàm biến thực e^x đã biết. Ta nói rằng hàm mũ $w = e^z$ là thác triển của hàm mũ thực e^x từ trục thực ra toàn bộ mặt phẳng phức. Theo định nghĩa trên ta có:

$| w | = e^x$ và $\mathrm{Arg}w = y + 2k\pi$, k nguyên (2)

b. Các phép tính về hàm mũ:

$$e^{z_1}.e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_1}} = e^{z_1-z_2} \qquad (3)$$

$$(e^z)^n = e^{nz}\text{, n nguyên}$$

Ta chứng minh công thức đầu tiên. Các công thức sau cũng tương tự. Ta có:

$z_1 = x_1 + jy_1$; $z_2 = x_2 + jy_2$

Theo định nghĩa ta có:

$$e^{z_1} = e^{x_1}(\cos y_1 + j\sin y_1) \text{ và } e^{z_2} = e^{x_2}(\cos y_2 + j\sin y_2)$$

Vậy: $e^{z_1}.e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + j\sin y_1)\, e^{x_2}(\cos y_2 + j\sin y_2)$

Hay: $e^{z_1}.e^{z_2} = e^{x_1+x_2}\left[\cos(y_1 + y_2) + j\sin(y_1 + y_2)\right]$

Theo định nghĩa hàm mũ phức ta có:

$$e^{z_1}.e^{z_2} = e^{(x_1+x_2)+j(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}$$

c. Chu kỳ của hàm mũ: Theo đinh nghĩa, ta có:

$e^{2jk\pi} = \cos 2k\pi + j\sin 2k\pi = 1$ (k nguyên)

Theo (3) thì:

$e^{2jk\pi+z} = e^z.\ e^{2jk\pi} = e^z$ (4)

Công thức này cho thấy rằng hàm $w = e^z$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ $2j\pi$. Vậy hai điểm nằm trên một đường song song với trục ảo và các nhau một khoảng bằng bội số của $2j\pi$ thì có cùng ảnh.

Cần chú ý là nếu $e^{z_1} = e^{z_2}$ thì:

$$e^{z_1} = e^{z_2} = z_2 = z_1 + 2jk\pi \quad (5)$$

vì: $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_1}} = e^{z_1 - z_2} = 1 = e^{2jk\pi}$ và z_1 - z_2 = 2jkπ

d. Công thức Euler: Trong (1), cho x = 0 ta có công thức Euler:

$$e^{jy} = \cos y + j\sin y \quad (6)$$

Thay y bằng -y ta có:

$$e^{-jy} = \cos y - j\sin y \quad (7)$$

Nhờ có công thức Euler mà số phức z = r(cosφ + jsinφ) viết được dưới dạng mũ z = $re^{j\varphi}$. Ta có: $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) = re^{j\varphi}$

Ví dụ: $1 = \cos 0 + j\sin 0 = e^{j0}$

$$j = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$1 + j = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$3 + 4j = 5\left[\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) + j\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right] = 5e^{j\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}$$

$$e^{2+3j} = e^2(\cos 3 + j\sin 3)$$

$$e^{-2j} = \cos 2 - j\sin 2$$

f. Tính giải tích của hàm w = e^z: Hàm $w = e^z$ giải tích trong toàn bộ mặt phẳng vì ∀z, điều kiện C - R được thoả mãn:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \cos y\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \sin y\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \cos y\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \sin y\right)$$

$$w'(z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \cos y\right) + j\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \sin y\right)$$

g. Phép biến hình w = e^z: Vì | w | = e^x nên ảnh của đường thẳng x = C_1 là đường tròn $\left|w\right| = e^{C_1}$. Vì y là một giá trị của Argw, nên đường thẳng y = C_2 có ảnh là tia Argw= C_2. Khi C_2 biến thiên từ 0 đến 2π (0 < C_2 < 2π) thì đường y = C_2 sẽ quét nên miền G là băng 0 < y < 2π. Ảnh của đường thẳng y = C_2 là tia Argw = C_2 sẽ quét nên miền Δ là ảnh của G. Rõ ràng Δ là mặt phẳng w, bỏ đi lát cắt dọc theo nửa trục thực u dương; bờ trên của lát cắt này ứng với đường y = 0, bờ dưới của lát cắt là ảnh của đường y = 2π.

Phép biến hình từ băng G lên miền Δ là một phép biến hình đơn diệp. Tương tự, phép biến hình $w = e^z$ cũng biến mọi băng 2kπ < y < 2(k+1)π(k nguyên), có chiều rộng k, lên miền Δ nói trên.

Phép biến hình $w = e^z$ biến cả mặt phẳng z lên mặt phẳng w, nhưng không đơn diệp.