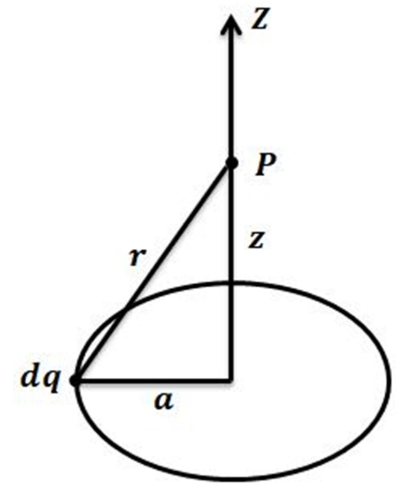
BÀI TẬP CHƯƠNG 2

<u>Câu 1.</u> Điện tích Q phân bố liên tục đều trên vòng dây tròn mảnh bán kính a. Xác định thế điện và cường độ điện trường tại điểm P nằm trên trục z của vòng dây.



Giải

Điện tích phân bố đều trên vòng dây → $\lambda = const$

$$Q = \int_C \lambda dl = \lambda \int_C dl = \lambda L = 2\pi a\lambda \rightarrow \lambda = \frac{Q}{2\pi a}$$

$$Thế\ điện\ \varphi = \int_C \frac{dq}{4\pi\varepsilon r} = \int_C \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon r} = \int_C \frac{\frac{Q}{2\pi a}.2\pi a}{4\pi\varepsilon\sqrt{a^2+z^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\sqrt{a^2+z^2}}$$

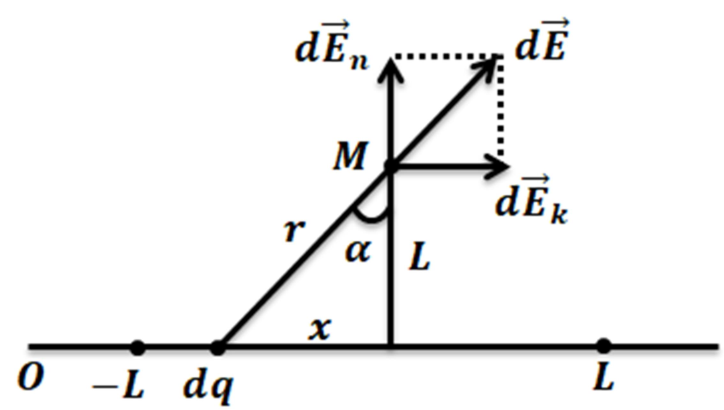
$$Cường\ độ\ điện\ trường\ \vec{E} = -grad\ \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{i}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{i}_z\right).\frac{Q}{4\pi\varepsilon\sqrt{a^2+z^2}} = \frac{Qz}{4\pi\varepsilon\sqrt{(a^2+z^2)^3}}\vec{i}_z$$

<u>Câu 2.</u> Xác định vector cường độ điện trường tại điểm M nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng và cách đoạn thẳng một đoạn L, biết rằng đoạn thẳng mang điện tích có chiều dài 2L có mật độ điện dài λ đặt dọc theo trục Ox từ $x = -L \rightarrow x = L$.

Giải

Ta có:

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + L^2 = (L.\tan\alpha)^2 + L^2 = \dfrac{L^2}{\cos^2\alpha} \\ x = L.\tan\alpha \rightarrow dx = \dfrac{L}{\cos^2\alpha}d\alpha \rightarrow dq = \lambda dl = \lambda dx = \dfrac{\lambda L}{\cos^2\alpha}d\alpha \end{cases}$$



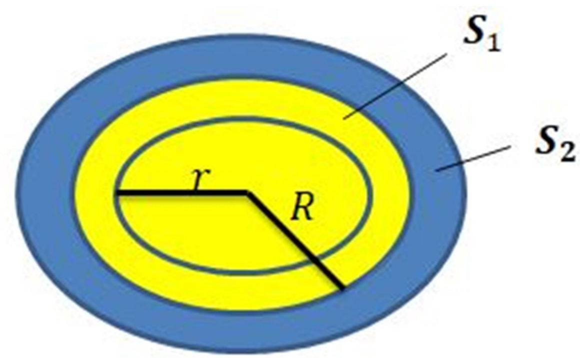
$$\vec{E} = \int_{\text{dây}} d\vec{E} = \int_{\text{dây}} d\vec{E}_n + \int_{\text{dây}} d\vec{E}_k = \int_{\text{dây}} d\vec{E}_n = \int_{\text{dây}} dE_n = \int_{\text{dây}} dE\,.\cos\alpha = \int_{\text{dây}} \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}.\frac{dq}{r^2}.\cos\alpha$$

$$= \int_{\text{dây}} \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}.\frac{\lambda L}{\cos^2\alpha}d\alpha.\frac{\cos^2\alpha}{L^2}.\cos\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 L}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\alpha\, d\alpha = \frac{\lambda\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 L}$$

__Câu 3.__ Điện thế tại một điểm bất kỳ trong không gian của phân bố điện tích đối xứng cầu với mật độ $\boldsymbol{\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 \text{ nếu } 0 \le r \le R \\ 0 \text{ nếu } r > R \end{cases}}$ ($\boldsymbol{R}$ *là bán kính quả cầu*). Xác định cường độ điện trường và điện thế bên trong và bên ngoài quả cầu.

Giải

$$Ta\ có: \phi_e = \oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = \sum_i q_i$$



Chọn S_1 là mặt cầu nằm trong quả cầu tích điện $(r < R)$.

Chọn S_2 là mặt cầu nằm ngoài quả cầu tích điện $(r > R)$.

- Bên trong quả cầu tích điện $(r < R)$. Áp dụng định lý $O - G$ ta có:

$$\begin{cases} \oint_{S_1} \vec{D}_1 d\vec{S} = \int_{V_1} \rho dV \\ \oint_{S_1} \vec{D}_1 d\vec{S} = D_1 S_1 = D_1.4\pi r^2 \quad \to D_1 = \frac{\rho_0 r}{3} \to E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon\varepsilon_0} \\ \int_{V_1} \rho dV = \int_{V_1} \rho_0 dV = \rho_0.\frac{4}{3}\pi r^3 \end{cases}$$

- Bên ngoài quả cầu tích điện $(r > R)$. Áp dụng định lý $O - G$ ta có:

$$\begin{cases} \oint\limits_{S_2} \vec{D}_2 d\vec{S} = \int\limits_V \rho dV \\ \oint\limits_{S_2} \vec{D}_2 d\vec{S} = D_2 S_2 = D_2 . 4\pi r^2 \;\; \rightarrow D_2 = \dfrac{\rho_0 R^3}{3r^2} \rightarrow E_2 = \dfrac{D_2}{\varepsilon\varepsilon_0} = \dfrac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0 r^2} \\ \int\limits_V \rho dV = \int\limits_V \rho_0 dV = \rho_0 . \dfrac{4}{3}\pi R^3 \end{cases}$$

- Thế điện bên trong quả cầu:

$$\varphi_1(r) = \int_r^\infty \vec{E}\, d\vec{r} = \int_r^R \vec{E}_1\, d\vec{r} + \int_R^\infty \vec{E}_2\, d\vec{r} = \int_r^R E_1\, dr + \int_R^\infty E_2\, dr = \int_r^R \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon\varepsilon_0} dr + \int_R^\infty \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho_0}{6\varepsilon\varepsilon_0} r^2\Big|_r^R - \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{r}\Big|_R^\infty$$

$$= \frac{\rho_0}{6\varepsilon\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)$$

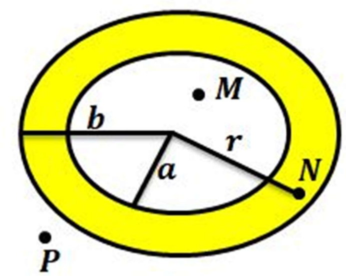
- Thế điện bên ngoài quả cầu:

$$\varphi_2(r) = \int_r^\infty \vec{E}\, d\vec{r} = \int_r^\infty \vec{E}_2\, d\vec{r} = \int_r^\infty E_2\, dr = \int_r^\infty \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{r}\Big|_\infty^r = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0 r}$$

<u>Câu 4.</u> Xác định vector cường độ điện trường tạo bởi một lớp hình cầu đồng tâm có bán kính lần lượt là a,b (a<b), tích điện với mật độ khối $\rho = -\frac{\rho_0}{r^2}(a < r < b)$.

Giải

Chọn S_1 là mặt cầu bán kính $r < a$, S_2 là mặt cầu bán kính $a < r < b$, S_3 là mặt cầu bán kính $r > b$



$$Cường\ độ\ điện\ trường\ tại\ điểm\ M: \oint_{S_1} \vec{D}_1 d\vec{S} = \int_{V_1} \rho dV = 0 \rightarrow D_1 = 0 \rightarrow E_1 = 0$$

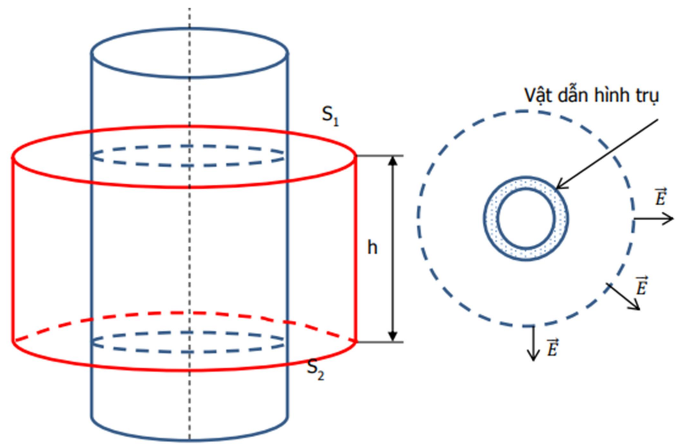
$$Cường\ độ\ điện\ trường\ tại\ điểm\ N \begin{cases} \oint_{S_2} \vec{D}_2 d\vec{S} = \int_{V_2} \rho dV \\ \oint_{S_2} \vec{D}_2 d\vec{S} = D_2 S_2 = D_2.4\pi r^2 \\ \int_{V_2} \rho dV = \int_{V_2} \frac{-\rho_0}{r^2}.4\pi r^2 dr = \rho_0.4\pi r|_r^a = \rho_0.4\pi(a-r) \end{cases} \rightarrow D_2 = \frac{\rho_0(a-r)}{r^2} \rightarrow E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\rho_0(a-r)}{r^2\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$Cường\ độ\ điện\ trường\ tại\ điểm\ P: \oint_{S_3} \vec{D}_3 d\vec{S} = \int_{V} \rho dV \rightarrow D_3.4\pi r^2 = \int_a^b -\frac{\rho_0}{r^2}.4\pi r^2 dr = 4\pi\rho_0 r|_b^a = 4\pi\rho_0(a-b)$$

$$\rightarrow D_3 = \frac{\rho_0(a-b)}{r^2} \rightarrow E_3 = \frac{\rho_0(a-b)}{\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$$

<u>Câu 5.</u> Hình trụ bằng kim loại thiết diện tròn bán kính bằng a dài L $(L \gg a)$ mang điện tích Q đặt trong môi trường đẳng hướng, đồng nhất có $\varepsilon = const$. Xác định cường độ điện trường và điện thế bên trong và bên ngoài hình trụ.

Giải



- **Vùng bên trong hình trụ:**

Điện tích chỉ phân bố trên bề mặt hình trụ, bên trong hình trụ không có điện tích nên $q = 0$.

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q = 0 \rightarrow \vec{D} = 0 \rightarrow \vec{E} = 0 \rightarrow \varphi_1 = 0$$

- **Vùng bên ngoài hình trụ:**

Điện tích chứa trong mặt trụ S chỉ phân bố trên bề mặt hình trụ bán kính a nên:

$$q = \int_{S_a} \sigma dS = \sigma \int_{S_a} dS = \sigma . S_a = \sigma . 2\pi a h$$

Nếu xét trên toàn mặt trụ chiều dài L:

$$Q = \sigma.2\pi aL \rightarrow \sigma = \frac{Q}{2\pi aL}$$

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \oint_{S_1} \vec{D}d\vec{S} + \oint_{S_2} \vec{D}d\vec{S} + \oint_{S_{xq}} \vec{D}d\vec{S}$$

S_1, S_2: $2\ mặt\ đáy$; S_{xq}: $diện\ tích\ xung\ quanh$.

Đối với 2 mặt đáy: $d\vec{S}$ vuông góc với mặt đáy → $d\vec{S}$ vuông góc với $\vec{D}$:

$$\vec{D}d\vec{S} = 0 \rightarrow \oint_{S_1} \vec{D}d\vec{S} = \oint_{S_2} \vec{D}d\vec{S} = 0$$

Đối với mặt xung quanh: $d\vec{S}$ vuông góc với mặt xung quanh → $d\vec{S}$ cùng phương với $\vec{D}$:

$$\vec{D}d\vec{S} = DdS \rightarrow \oint_{S_{xq}} \vec{D}d\vec{S} = \oint_{S_{xq}} DdS = D\oint_{S_{xq}} dS = DS_{xq} = D.2\pi rh$$

Áp dụng định luật Gauss:

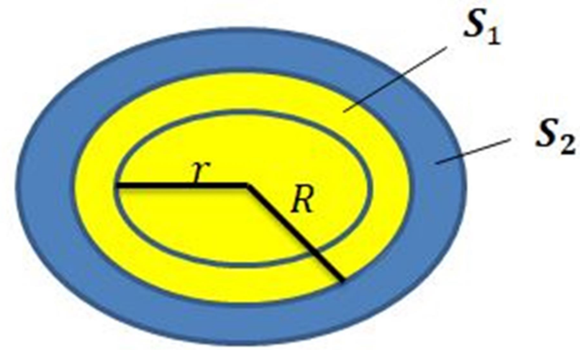
$$q = \oint_S \vec{D}d\vec{S} \leftrightarrow \sigma.2\pi ah = D.2\pi rh \rightarrow D = \frac{\sigma a}{r} = \frac{Q}{2\pi Lr} \rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 Lr}$$

Chọn thế điện tại $r = b$ bằng 0.

$$\rightarrow \varphi(r) = \int_r^b \vec{E}\,d\vec{r} = \int_r^b Edr = \int_r^b \frac{Q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 Lr} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 L}.\ln\frac{b}{r}$$

<u>Câu 6.</u> Xác định năng lượng tĩnh điện chứa bên trong miền $r < R$ của phân bố điện tích đối với quả cầu với $\rho_l = \begin{cases} \rho_0 \text{ nếu } 0 \le r \le R \\ 0 \text{ nếu } r > R \end{cases}$.

Giải



Chọn S_1 là mặt cầu nằm trong quả cầu tích điện $(r < R)$.

Chọn S_2 là mặt cầu nằm ngoài quả cầu tích điện $(r > R)$.

- Bên trong quả cầu tích điện $(r < R)$. Áp dụng định lý $O - G$ ta có:

$$\begin{cases} \oint_{S_1} \vec{D}_1 d\vec{S} = \int_{V_1} \rho dV \\ \oint_{S_1} \vec{D}_1 d\vec{S} = D_1 S_1 = D_1.4\pi r^2 \quad \rightarrow D_1 = \dfrac{\rho_0 r}{3} \rightarrow E_1 = \dfrac{D_1}{\varepsilon\varepsilon_0} = \dfrac{\rho_0 r}{3\varepsilon\varepsilon_0} \\ \int_{V_1} \rho dV = \int_{V_1} \rho_0 dV = \rho_0.\dfrac{4}{3}\pi r^3 \end{cases}$$

- Thế điện bên trong quả cầu:

$$\varphi_1(r) = \int_r^\infty \vec{E}\, d\vec{r} = \int_r^R \vec{E}_1\, d\vec{r} + \int_R^\infty \vec{E}_2\, d\vec{r} = \int_r^R E_1\, dr + \int_R^\infty E_2\, dr = \int_r^R \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon\varepsilon_0} dr + \int_R^\infty \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho_0}{6\varepsilon\varepsilon_0} r^2\Big|_r^R - \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{r}\Big|_R^\infty$$
$$= \frac{\rho_0}{6\varepsilon\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)$$

- Năng lượng trường tĩnh điện bên trong quả cầu $r < R$:

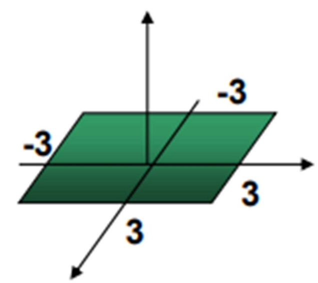
$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \varphi_1\, \rho_0 dV = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{R} \frac{\rho_0}{12\varepsilon\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)\rho_0 r^2 sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$= \frac{\rho_0}{12\varepsilon\varepsilon_0}\left(R^2 r^3 - \frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_0^R .(-cos\theta)|_0^{\pi}.\varphi|_0^{2\pi} = \frac{\rho_0}{12\varepsilon\varepsilon_0}.\frac{4}{5}R^5.2.2\pi = \frac{4\pi R^5}{15\varepsilon\varepsilon_0}$$

<u>Câu 9.</u> Mặt vuông nằm trong mặt phẳng $x - y$ giới hạn $(-3 < x < 3)$ và $(-3 < y < 3)$ mang điện tích với mật độ $\rho_s = 2y^2\left(\frac{\mu C}{m^2}\right)$. Tìm điện tích Q của mặt?

Giải

Ta có:



$$Q = \int_S \rho_s . dS_z = \int_{-3}^{3}\int_{-3}^{3} 2y^2\, dxdy = \int_{-3}^{3} dx \int_{-3}^{3} 2y^2 dy = 216(\mu C)$$

<u>Câu 10.</u> Tìm thông lượng của vector cảm ứng điện thoát ra bên ngoài mặt S giới hạn bởi: $x = 1, y = 4$ và $z = 1$, biết mật độ điện tích khối bên trong: $\rho_V(x,y,z) = \rho_0(3 - x^2 - y^2 - z^2)$

Giải

$$\oint_S \vec{D}.d\vec{S} = \int_V \rho_V\, dV = \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-4}^{4}\int_{z=-1}^{1} \rho_0\,(3 - x^2 - y^2 - z^2)dxdydz = \rho_0 \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-4}^{4}\left(3z - x^2z - y^2z - \frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= \rho_0 \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-4}^{4}\left(\frac{16}{3} - 2x^2 - 2y^2\right)dxdy = \rho_0 \int_{x=-1}^{1}\left(\frac{16}{3}y - 2x^2y - \frac{2}{3}y^3\right)\Bigg|_{-4}^{4} = \rho_0 \int_{x=-1}^{1}\left(-\frac{128}{3} - 16x^2\right)dx$$

$$= -96\rho_0$$

Câu 11. Một mặt cầu kim loại mỏng bán kính r mang điện tích Q. Tính:

a. Điện dung của quả cầu.

b. Mật độ năng lượng điện trường tại khoảng cách r tính từ tâm quả cầu.

Giải

a. Ta có:

$$\begin{cases} U = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}.\dfrac{Q}{r} \\ C = \dfrac{Q}{U} \end{cases} \rightarrow C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r(C)$$

b. Ta có:

$$\begin{cases} E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} \\ w = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} \end{cases} \rightarrow w = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^4}\left(\frac{J}{m^3}\right)$$