Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh

Khoa Vật lý

METHODS OF MATHEMATICAL PHYSICS

Bài tập

PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT

&

PHƯƠNG TRÌNH LAPLACE

Biên soạn: Lee Ein

Thành phố Hồ Chí Minh, năm 2013

Lee Ein

Phương trình truyền nhiệt

Bài 1: Tìm nhiệt độ $u(x,t)$ trên một thanh dẫn nhiệt dài L mét không chứa nguồn nhiệt, biết rằng hai đầu thanh được giữ ở 0 và nhiệt độ ban đầu tại các điểm $M(x)$ trên thanh được cho bởi hàm số $f(x)$ với $0 \le x \le L$. Áp dụng kết quả này hãy tìm $u(x,t)$ khi biết thanh dài 2 mét với $f(x) = x$ khi $0 \le x \le 1$ và $f(x) = 2 - x$ khi $1 \le x \le 2$

Phương trình truyền nhiệt: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ với $\begin{cases} 0 \le x \le L \\ t \ge 0 \end{cases}$

Điều kiện ban đầu: $u\big|_{t=0} = f(x)$ với $\forall x \in [0;L]$

Điều kiện biên: $u\big|_{x=0} = u\big|_{x=L} = 0$ với $\forall t \ge 0$

Tách biến: $u(x,t) = X(x).T(t) \Rightarrow X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t)$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda = \text{const} \Rightarrow \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (1) \\ T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện biên: $X(0) = X(L) = 0$ (3)

Giải phương trình (1)

- Trường hợp 1: $\lambda = 0 \Rightarrow X(x) = Ax + B$

  Thay điều kiện (3) $\Rightarrow \begin{cases} X(0) = A.0 + B = 0 \\ X(L) = A.L + B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = 0$

  $\Rightarrow X(x) = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0$ (loại)

- Trường hợp 2: $\lambda < 0 \Rightarrow X(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$ với $\alpha = \sqrt{-\lambda}$

  Thay điều kiện (3) $\Rightarrow \begin{cases} X(0) = A + B = 0 \\ X(L) = Ae^{\alpha L} + Be^{-\alpha L} = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = 0$

  $\Rightarrow X(x) = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0$ (loại)

- Trường hợp 3: $\lambda > 0 \Rightarrow X(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$ với $\alpha = \sqrt{\lambda}$

  Thay điều kiện (3) $\Rightarrow \begin{cases} X(0) = A + 0 = 0 \\ X(L) = A + B\sin\alpha L = 0 \end{cases} \Rightarrow \sin\alpha L = 0$

  $\Rightarrow \alpha L = k\pi$ với k = 1, 2, 3,…

  $\Rightarrow \alpha = \dfrac{k\pi}{L}$

  Phương trình (1) có vô số nghiệm: $X_k(x) = B\sin\dfrac{k\pi x}{L}$

Giải phương trình (2), ta có nghiệm: $T_k(t) = C.e^{-a^2\lambda t} = C.e^{-\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 t}$ với $\lambda = \alpha^2 = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$

Suy ra: $\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} C_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 t} \sin\frac{k\pi x}{L}}$

Dựa vào điều kiện đầu: $u\big|_{t=0} = f(x) \Rightarrow f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \sin\frac{k\pi x}{L} \Rightarrow C_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx$

<u>Áp dụng:</u>

Ta có: $C_k = \int_0^2 f(x)\sin\frac{k\pi x}{2}dx = \int_0^1 f(x)\sin\frac{k\pi x}{2}dx + \int_1^2 f(x)\sin\frac{k\pi x}{2}dx$

$$\Rightarrow C_k = \int_0^1 x\sin\frac{k\pi x}{2}dx + \int_1^2 (2-x)\sin\frac{k\pi x}{2}dx$$

$$= \frac{-2x}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2}\Big|_0^1 + \frac{2}{k\pi}\int_0^1 \cos\frac{k\pi x}{2}dx + \frac{2(x-2)}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2}\Big|_1^2 - \frac{2}{k\pi}\int_1^2 \cos\frac{k\pi x}{2}dx$$

$$= \frac{-2}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2} + \frac{2}{k\pi}\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_0^1 + \frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2} - \frac{2}{k\pi}\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_1^2$$

$$= \frac{4}{(k\pi)^2}\sin\frac{k\pi}{2} + \frac{4}{(k\pi)^2}\sin\frac{k\pi}{2} = \frac{8}{(k\pi)^2}\sin\frac{k\pi}{2}$$

Đáp số: $\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8}{(k\pi)^2}\sin\frac{k\pi}{2} e^{-\left(\frac{k\pi a}{2}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi x}{2}}$

Lee Ein

Bài 2: Tìm nhiệt độ $u(x,t)$ trên một thanh dẫn nhiệt dài 1 mét không chứa nguồn nhiệt, biết rằng đầu $x=0$ của thanh được giữ ở u_0, còn đầu kia được giữ ở u_1, nhiệt độ ban đầu tại các điểm $M(x)$ trên thanh là u_2

Phương trình truyền nhiệt: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ với $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ t \ge 0 \end{cases}$

Điều kiện ban đầu: $u|_{t=0} = u_2$ với $\forall x \in [0;1]$

Điều kiện biên: $u|_{x=0} = u_0, \quad u|_{x=1} = u_1$ với $\forall t \ge 0$

Đặt $v(x,t) = u(x,t) - u_0 + (u_0 - u_1)x$

$$\Rightarrow \begin{cases} v|_{x=0} = u|_{x=0} - u_0 + (u_0 - u_1).0 = 0 \\ v|_{x=1} = u|_{x=1} - u_0 + (u_0 - u_1).1 = 0 \end{cases}$$

Với $u(x,t) = v(x,t) + u_0 + (u_1 - u_0)x$. Phương trình truyền nhiệt trở thành: $\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

Với điều kiện đầu: $v|_{t=0} = u_2 - u_0 + (u_0 - u_1)x$

Và điều kiện biên: $v|_{x=0} = v|_{x=1} = 0$

Tách biến: $v(x,t) = X(x).T(t) \Rightarrow X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t)$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda = \text{const} \Rightarrow \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (1) \\ T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện biên: $X(0) = X(1) = 0$ (3)

Giải phương trình (1)

- Trường hợp 1: $\lambda = 0 \Rightarrow X(x) = Ax + B$

  Thay điều kiện (3) $\Rightarrow \begin{cases} X(0) = A.0 + B = 0 \\ X(1) = A.1 + B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = 0$

  $\Rightarrow X(x) = 0 \Rightarrow v(x,t) = 0$ (loại)

- Trường hợp 2: $\lambda < 0 \Rightarrow X(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$ với $\alpha = \sqrt{-\lambda}$

  Thay điều kiện (3) $\Rightarrow \begin{cases} X(0) = A + B = 0 \\ X(1) = Ae^{\alpha} + Be^{-\alpha} = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = 0$

  $\Rightarrow X(x) = 0 \Rightarrow v(x,t) = 0$ (loại)

- Trường hợp 3: $\lambda > 0 \Rightarrow X(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$ với $\alpha = \sqrt{\lambda}$

Thay điều kiện (3) $\Rightarrow \begin{cases} X(0) = A + 0 = 0 \\ X(1) = A + B\sin\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \sin\alpha = 0$

$\Rightarrow \alpha = k\pi$ với k = 1, 2, 3,…

$\Rightarrow \alpha = k\pi$

Phương trình (1) có vô số nghiệm: $X_k(x) = B\sin k\pi x$

Giải phương trình (2), ta có nghiệm: $T_k(t) = C.e^{-a^2\lambda t} = C.e^{-(k\pi a)^2 t}$ với $\lambda = \alpha^2 = (k\pi)^2$

Suy ra: $v(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} C_k e^{-(k\pi a)^2 t} \sin k\pi x \Rightarrow C_k = 2\int_0^1 \left[u_2 - u_0 + (u_0 - u_1)x\right] \sin k\pi x dx$

Đáp số: $\boxed{u(x,t) = u_0 + (u_1 - u_0)x + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k e^{-(k\pi a)^2 t} \sin k\pi x}$

Bài 3: Tìm nhiệt độ $u(x,t)$ trên một thanh dẫn nhiệt dài L mét không chứa nguồn nhiệt, biết rằng hai đầu thanh cách nhiệt và nhiệt độ ban đầu tại các điểm $M(x)$ trên thanh được cho bởi hàm số $f(x)$ với $0 \le x \le L$. Áp dụng kết quả này hãy tìm $u(x,t)$ khi biết thanh dài 2 mét với $f(x) = u_0$ khi $0 \le x \le 1$ và $f(x) = 0$ khi $1 \le x \le 2$

Phương trình truyền nhiệt: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ với $\begin{cases} 0 \le x \le L \\ t \ge 0 \end{cases}$

Điều kiện ban đầu: $u\big|_{t=0} = f(x)$ với $\forall x \in [0;L]$

Điều kiện biên: $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0$ với $\forall t \ge 0$

Tách biến: $u(x,t) = X(x).T(t) \Rightarrow X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t)$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda = \text{const} \Rightarrow \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (1) \\ T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện biên: $X'(0) = X'(L) = 0$ (3)

- Trường hợp 1: $\lambda = 0 \Rightarrow X(x) = Ax + B$

  Thay điều kiện (3): $\Rightarrow X'(0) = A = 0 \Rightarrow X_0(x) = B \ne 0$

  Từ phương trình (2), ta có: $T'(t) = 0 \Rightarrow T_0(t) = C \ne 0$

  Vậy $u_0(x,t) = BC = \dfrac{a_0}{2}$

- Trường hợp 2: $\lambda < 0 \Rightarrow X(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$ với $\alpha = \sqrt{-\lambda}$

  $\Rightarrow X'(x) = \alpha Ae^{\alpha x} - \alpha Be^{-\alpha x}$

Lee Ein

Thay điều kiện (3) $\Rightarrow \begin{cases} X'(0) = A - B = 0 \\ X'(L) = Ae^{\alpha L} - Be^{-\alpha L} = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = 0$

$\Rightarrow X(x) = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0$ (loại)

- Trường hợp 3: $\lambda > 0 \Rightarrow X(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$ với $\alpha = \sqrt{\lambda}$

  $\Rightarrow X'(x) = -\alpha A\sin\alpha x + \alpha B\cos\alpha x$

  Thay điều kiện (3) $\Rightarrow \begin{cases} X'(0) = 0 + B = 0 \\ X'(L) = -\alpha A\sin\alpha L + 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \sin\alpha L = 0$

  $\Rightarrow \alpha L = k\pi$ với k = 1, 2, 3,…

  $\Rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{L}$

  Phương trình (1) có vô số nghiệm: $X_k(x) = A\cos\frac{k\pi x}{L}$

  Giải phương trình (2), ta có nghiệm: $T_k(t) = C.e^{-a^2\lambda t} = C.e^{-\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 t}$ với $\lambda = \alpha^2 = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$

Suy ra: $\boxed{u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 t}\cos\frac{k\pi x}{L}}$

Với $a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx$ và $C_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}dx$

Áp dụng:

Ta có: $a_0 = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx \Rightarrow a_0 = \int_0^1 u_0 dx = u_0 x\Big|_0^1 = u_0$

Và: $C_k = \int_0^1 u_0\cos\frac{k\pi x}{2}dx = \frac{2u_0}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_0^1 = \frac{2u_0}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}$

Đáp số: $\boxed{u(x,t) = \frac{u_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2u_0}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}e^{-\left(\frac{k\pi a}{2}\right)^2 t}\cos\frac{k\pi x}{2}}$

Lee Ein

Bài 4: Tìm nhiệt độ $u(x,t)$ trên một thanh dẫn nhiệt dài 1 mét không chứa nguồn nhiệt, biết rằng đầu $x=0$ của thanh cách nhiệt, còn đầu kia được giữ ở nhiệt độ u_1, nhiệt độ ban đầu tại các điểm $M(x)$ trên thanh là $u(x,0)=u_1x$ với $0\le x\le 1$

Phương trình truyền nhiệt: $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ với $\begin{cases}0\le x\le 1\\ t\ge 0\end{cases}$

Điều kiện ban đầu: $u\big|_{t=0}=u_1x$ với $\forall x\in[0;1]$

Điều kiện biên: $\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0$ và $u\big|_{x=1}=u_1$ với $\forall t\ge 0$

Đặt $v(x,t)=u(x,t)-u_1\Rightarrow\begin{cases}v\big|_{x=1}=u\big|_{x=1}-u_1=0\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}\Big|_{x=0}=\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{x=0}=0\\ v\big|_{t=0}=u\big|_{t=0}-u_1=u_1x-u_1\end{cases}$

Với $u(x,t)=v(x,t)+u_1$. Phương trình truyền nhiệt trở thành: $\dfrac{\partial v}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

Tách biến: $v(x,t)=X(x).T(t)\ \Rightarrow X(x)T'(t)=a^2X''(x)T(t)$

$$\Rightarrow\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=-\lambda=\text{const}\ \Rightarrow\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0 & (1)\\ T'(t)+a^2\lambda T(t)=0 & (2)\end{cases}$$

Điều kiện biên: $\begin{cases}X'(0)=0\\ X(1)=0\end{cases}$ (3)

- Trường hợp 1: $\lambda=0\Rightarrow X(x)=Ax+B\ \Rightarrow X'(x)=A$

  Thay điều kiện (3): $\begin{cases}X'(0)=A=0\\ X(L)=A+B=0\end{cases}\Rightarrow A=B=0$

  $\Rightarrow X(x)=0\Rightarrow v(x,t)=0$ (loại)

- Trường hợp 2: $\lambda<0\Rightarrow X(x)=Ae^{\alpha x}+Be^{-\alpha x}$ với $\alpha=\sqrt{-\lambda}$

  $\Rightarrow X'(x)=\alpha Ae^{\alpha x}-\alpha Be^{-\alpha x}$

  Thay điều kiện (3) $\Rightarrow\begin{cases}X'(0)=A-B=0\\ X(1)=Ae^{\alpha}+Be^{-\alpha}=0\end{cases}\Rightarrow A=B=0$

  $\Rightarrow X(x)=0\Rightarrow v(x,t)=0$ (loại)

- Trường hợp 3: $\lambda>0\Rightarrow X(x)=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x$ với $\alpha=\sqrt{\lambda}$

  $\Rightarrow X'(x)=-\alpha A\sin\alpha x+\alpha B\cos\alpha x$

Thay điều kiện (3): $\Rightarrow \begin{cases} X'(0) = 0 + B = 0 \\ X(1) = A\cos\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$ với $k = 0, 2, 3, \ldots$

Phương trình (1) có vô số nghiệm: $X_k(x) = A\cos\dfrac{(2k+1)\pi x}{2}$

Giải phương trình (2), ta có nghiệm: $T_k(t) = C.e^{-a^2\lambda t} = C.e^{-\left[\frac{(2k+1)\pi a}{2}\right]^2 t}$

với $\lambda = \alpha^2 = \left[\dfrac{(2k+1)\pi}{2}\right]^2$

Suy ra: $\boxed{v(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} C_k e^{-\left[\frac{(2k+1)\pi a}{2}\right]^2 t} \cos\dfrac{(2k+1)\pi x}{2}}$

Dựa vào điều kiện đầu: $v\big|_{t=0} = u_1 x - u_1$

$\Rightarrow u_1 x - u_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \cos\dfrac{(2k+1)\pi x}{2} \Rightarrow C_k = 2\int_0^1 (u_1 x - u_1)\cos\dfrac{(2k+1)\pi x}{2}dx$

Bài 5: Tìm nhiệt độ $u(x,t)$ trên một thanh dẫn nhiệt dài L mét có chứa nguồn nhiệt (cho bởi hàm số $g(x,t)$), biết rằng hai đầu thanh được giữ ở 0 và nhiệt độ ban đầu tại các điểm $M(x)$ trên thanh được cho bởi hàm số $f(x)$ với $0 \le x \le L$. Áp dụng kết quả này hãy tìm $u(x,t)$ khi biết thanh dài 2 mét với $g(x,t) = x^2 - 2x$ với $0 \le x \le 2$, nhiệt độ ban đầu tại các điểm $M(x)$ trên thanh là 0

Phương trình truyền nhiệt: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t)$ với $\begin{cases} 0 \le x \le L \\ t \ge 0 \end{cases}$

Điều kiện biên: $u\big|_{x=0} = u\big|_{x=L} = 0$ với $\forall t \ge 0$

Ta xét nghiệm: $u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} T_k(t)\sin\dfrac{k\pi x}{L}$

Điều kiện ban đầu: $u\big|_{t=0} = f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} T_k(0)\sin\dfrac{k\pi x}{L}$ với $\forall x \in [0;L]$

$\Rightarrow T_k(0) = \dfrac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\dfrac{k\pi x}{L}dx$ (*)

Ta viết: $g(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} G_k(t)\sin\dfrac{k\pi x}{L} \Rightarrow G_k(t) = \dfrac{2}{L}\int_0^L g(x,t)\sin\dfrac{k\pi x}{L}dx$

Lee Ein

Phương trình truyền nhiệt:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} T_k'(t)\sin\frac{k\pi x}{L} = a^2\sum_{k=1}^{+\infty} -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{L} + \sum_{k=1}^{+\infty} G_k(t)\sin\frac{k\pi x}{L}$$

$$\Rightarrow T_k'(t) = -\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 T_k(t) + G_k(t) \Leftrightarrow T_k'(t) + \left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 T_k(t) = G_k(t)$$

Nghiệm của phương trình vi phân: $T_k(t) = C.e^{-\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 t} + T_R(t)$ với $T_R(t)$ là nghiệm riêng.

Từ điều kiện (*): $\Rightarrow T_k(0) = C + T_R(0) \Rightarrow C = T_k(0) - T_R(0)$

Suy ra: $\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left[C.e^{-\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 t} + T_R(t)\right]\sin\frac{k\pi x}{L}}$

Áp dụng:

$$T_k(0) = \int_0^2 0.\sin\frac{k\pi x}{1}dx = 0$$

$$G_k(t) = \int_0^2 \left(x^2 - 2x\right)\sin\frac{k\pi x}{2}dx = \frac{2\left(2x - x^2\right)}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2}\Bigg|_0^2 + \frac{4}{k\pi}\int_0^1 (x-1)\cos\frac{k\pi x}{2}dx$$

$$= 0 + \frac{4}{k\pi}\left[\frac{2(x-1)}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\Bigg|_0^2 - \frac{2}{k\pi}\int_0^2 \sin\frac{k\pi x}{2}dx\right] = \frac{4}{k\pi}\left(0 + \frac{2}{k\pi}\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2}\Bigg|_0^2\right) = \frac{16}{(k\pi)^3}(\cos k\pi - 1)$$

$$= \frac{16\left[(-1)^k - 1\right]}{(k\pi)^3}$$

Ta có: $T_k'(t) + \left(\frac{k\pi a}{2}\right)^2 T_k(t) = \frac{16\left[(-1)^k - 1\right]}{(k\pi)^3}$

Nghiệm phương trình vi phân: $T_k(t) = C.e^{-\left(\frac{k\pi a}{2}\right)^2 t} + T_R(t) \Rightarrow T_R(t) = D = \text{const}$

$$\Rightarrow 0 + \left(\frac{k\pi a}{2}\right)^2 D = \frac{16\left[(-1)^k - 1\right]}{(k\pi)^3} \Rightarrow D = \frac{64\left[(-1)^k - 1\right]}{(k\pi)^5 a^2}$$

Ngoài ra, ta có: $T_k(0) = C + \frac{64\left[(-1)^k - 1\right]}{(k\pi)^5 a^2} = 0$

Nếu k chẵn $\Rightarrow C = 0$ (loại). Suy ra k phải lẻ $\Rightarrow C = \frac{(k\pi)^5 a^2}{64\left[1 - (-1)^k\right]} = \frac{(k\pi)^5 a^2}{128}$

Lee Ein

Vậy: $T_k(t)=\dfrac{(k\pi)^5 a^2 e^{-\left(\frac{k\pi a}{2}\right)^2 t}}{128}-\dfrac{128}{(k\pi)^5 a^2}$

Đáp số: $\boxed{u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\dfrac{(k\pi)^5 a^2 e^{-\left(\frac{k\pi a}{2}\right)^2 t}}{128}-\dfrac{128}{(k\pi)^5 a^2}\right]\sin\dfrac{k\pi x}{L}}$

Bài 6: Tìm nhiệt độ $u(x,t)$ trên một thanh dẫn nhiệt dài 1 mét không chứa nguồn nhiệt, biết rằng đầu $x=0$ của thanh được giữ ở nhiệt độ 0, còn đầu kia của thanh có nhiệt độ cho bởi $u(1,t)=\dfrac{1}{e^t}$ ($\forall t\ge 0$), nhiệt độ ban đầu tại các điểm $M(x)$ trên thanh là $u(x,0)=x$ với $0\le x\le 1$

Phương trình truyền nhiệt: $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ với $\begin{cases}0\le x\le 1\\ t\ge 0\end{cases}$

Điều kiện ban đầu: $u\big|_{t=0}=x$ với $\forall x\in[0;1]$

Điều kiện biên: $u\big|_{x=0}=0,\quad u\big|_{x=1}=e^{-t}$ với $\forall t\ge 0$

Đặt $v(x,t)=u(x,t)-e^{-t}x\Rightarrow\begin{cases}v\big|_{x=0}=u\big|_{x=0}-e^{-t}\cdot 0=0\\ v\big|_{x=1}=u\big|_{x=1}-e^{-t}\cdot 1=0\\ v\big|_{t=0}=u\big|_{t=0}-x=0\end{cases}$

Với $u(x,t)=v(x,t)+e^{-t}x$. Phương trình truyền nhiệt trở thành:

$\dfrac{\partial v}{\partial t}-e^{-t}x=a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Leftrightarrow\dfrac{\partial v}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+e^{-t}x\Rightarrow\dfrac{\partial v}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+g(x,t)$ với $g(x,t)=e^{-t}x$

Với điều kiện đầu: $v\big|_{t=0}=0$ và điều kiện biên: $v\big|_{x=0}=v\big|_{x=1}=0$

Ta xét nghiệm: $v(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}T_k(t)\sin k\pi x$

Điều kiện ban đầu: $v\big|_{t=0}=0=\sum_{k=1}^{+\infty}T_k(0)\sin k\pi x$ với $\forall x\in[0;1]$

$\Rightarrow T_k(0)=2\int_0^1 0\sin k\pi x dx=0\quad(*)$

Ta viết: $g(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}G_k(t)\sin k\pi x$

$$\Rightarrow G_k(t) = 2\int_0^1 e^{-t}x\sin k\pi x dx = 2.e^{-t}\left(\frac{-x}{k\pi}\cos k\pi x\Big|_0^1 + \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \cos k\pi x dx\right)$$

$$= 2.e^{-t}\left(\frac{-\cos k\pi}{k\pi} + \frac{1}{k\pi}\frac{1}{k\pi}\sin k\pi x\Big|_0^1\right) = \frac{-2.e^{-t}\cos k\pi}{k\pi} = \frac{2.e^{-t}(-1)^{k+1}}{k\pi}$$

Phương trình truyền nhiệt:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} T'_k(t)\sin k\pi x = a^2\sum_{k=1}^{+\infty} -(k\pi)^2 T_k(t)\sin k\pi x + \sum_{k=1}^{+\infty} G_k(t)\sin k\pi x$$

$$\Rightarrow T'_k(t) = -(k\pi a)^2 T_k(t) + G_k(t) \Leftrightarrow T'_k(t) + (k\pi a)^2 T_k(t) = G_k(t)$$

$$\Rightarrow T'_k(t) + (k\pi a)^2 T_k(t) = \frac{2.e^{-t}(-1)^{k+1}}{k\pi}$$

Nghiệm của phương trình vi phân: $T_k(t) = C.e^{-(k\pi a)^2 t} + T_R(t)$ với $T_R(t) = De^{-t}$.

$$\Rightarrow -De^{-t} + (k\pi a)^2 De^{-t} = \frac{2.e^{-t}(-1)^{k+1}}{k\pi} \Leftrightarrow D = \frac{2(-1)^k}{k\pi\left[1-(k\pi a)^2\right]}$$

Từ điều kiện (*): $\Rightarrow T_k(0) = C + T_R(0) \Rightarrow C = 0 - D = \dfrac{2(-1)^k}{k\pi\left[(k\pi a)^2 - 1\right]}$

Suy ra: $v(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\dfrac{2(-1)^k}{k\pi\left[(k\pi a)^2-1\right]}e^{-(k\pi a)^2 t} + \dfrac{2(-1)^k}{k\pi\left[1-(k\pi a)^2\right]}e^{-t}\right]\sin k\pi x$

Đáp số: $\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\dfrac{2(-1)^k}{k\pi\left[(k\pi a)^2-1\right]}e^{-(k\pi a)^2 t} + \dfrac{2(-1)^k}{k\pi\left[1-(k\pi a)^2\right]}e^{-t}\right]\sin k\pi x + e^{-t}x}$

Bài 7: Tìm nhiệt độ $u(x,t)$ trên một thanh dẫn nhiệt dài 1 mét không chứa nguồn nhiệt, biết rằng đầu $x=0$ của thanh có nhiệt độ cho bởi $u(0,t)=3t$ ($\forall t\ge 0$), còn đầu kia của thanh được giữ ở nhiệt độ 0, nhiệt độ ban đầu tại các điểm $M(x)$ trên thanh là $u(x,0)=0$ với $0\le x\le 1$

Phương trình truyền nhiệt: $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ với $\begin{cases}0\le x\le 1\\ t\ge 0\end{cases}$

Điều kiện ban đầu: $u\big|_{t=0}=0$ với $\forall x\in[0;1]$

Điều kiện biên: $u\big|_{x=0}=3t,\quad u\big|_{x=1}=0$ với $\forall t\ge 0$

Đặt $v(x,t)=u(x,t)-3t+3tx\Rightarrow\begin{cases}v\big|_{x=0}=u\big|_{x=0}-3t+3t.0=0\\ v\big|_{x=1}=u\big|_{x=1}-3t+3t.1=0\\ v\big|_{t=0}=u\big|_{t=0}-3.0+3.0.x=0\end{cases}$

Với $u(x,t)=v(x,t)+3t-3tx$. Phương trình truyền nhiệt trở thành:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+3-3x=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Leftrightarrow\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(3x-3)\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+g(x,t)\ \text{với}\ g(x,t)=3x-3$$

Với điều kiện đầu: $v\big|_{t=0}=0$ và điều kiện biên: $v\big|_{x=0}=v\big|_{x=1}=0$

Ta xét nghiệm: $v(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}T_k(t)\sin k\pi x$

Điều kiện ban đầu: $v\big|_{t=0}=0=\sum_{k=1}^{+\infty}T_k(0)\sin k\pi x$ với $\forall x\in[0;1]$

$$\Rightarrow T_k(0)=2\int_0^1 0\sin k\pi x dx=0\quad(*)$$

Ta viết: $g(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}G_k(t)\sin k\pi x$

$$\Rightarrow G_k(t)=2\int_0^1(3x-3)\sin k\pi x dx=6\int_0^1(x-1)\sin k\pi x dx$$

$$=6\left(\frac{1-x}{k\pi}\cos k\pi x\Big|_0^1+\frac{1}{k\pi}\int_0^1\cos k\pi x dx\right)=6\left(\frac{-1}{k\pi}+\frac{1}{k\pi}\frac{1}{k\pi}\sin k\pi x\Big|_0^1\right)=-\frac{6}{k\pi}$$

Phương trình truyền nhiệt:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}T_k'(t)\sin k\pi x=a^2\sum_{k=1}^{+\infty}-(k\pi)^2T_k(t)\sin k\pi x+\sum_{k=1}^{+\infty}G_k(t)\sin k\pi x$$

$$\Rightarrow T_k'(t)=-(k\pi a)^2T_k(t)+G_k(t)\Leftrightarrow T_k'(t)+(k\pi a)^2T_k(t)=G_k(t)$$

Lee Ein

$\Rightarrow T_k'(t)+(k\pi a)^2 T_k(t) = -\dfrac{6}{k\pi}$

Nghiệm của phương trình vi phân: $T_k(t) = C.e^{-(k\pi a)^2 t} + T_R(t)$ với $T_R(t) = D$.

$\Rightarrow (k\pi a)^2 D = -\dfrac{6}{k\pi} \Leftrightarrow D = -\dfrac{6}{(k\pi)^3 a^2}$

Từ điều kiện (*): $\Rightarrow T_k(0) = C + T_R(0) \Rightarrow C = 0 - D = \dfrac{6}{(k\pi)^3 a^2}$

Suy ra: $v(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{6}{(k\pi)^3 a^2}\left[e^{-(k\pi a)^2 t} - 1\right]\sin k\pi x$

Đáp số: $\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{6}{(k\pi)^3 a^2}\left[e^{-(k\pi a)^2 t} - 1\right]\sin k\pi x + 3t - 3tx}$

Bài 8: Tìm nhiệt độ $u(x,y,t)$ trên một hình chữ nhật dẫn nhiệt (chiều dài L và chiều rộng m) không chứa nguồn nhiệt, biết rằng nhiệt độ trên 4 cạnh của hình chữ nhật được giữ ở 0 và nhiệt độ ban đầu tại các điểm $M(x,y)$ trên hình chữ nhật được cho bởi hàm số $f(x,y)$ với $0 \le x \le L$ và $0 \le y \le m$. Áp dụng kết quả này hãy tìm $u(x,y,t)$ của một hình vuông có cạnh 2 mét với $f(x,y) = xy(x-2)(y-2)$ với $0 \le x \le 2$ và $0 \le y \le 2$

Phương trình truyền nhiệt: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u$ hay $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ với $\begin{cases} 0 \le x \le L \\ 0 \le y \le m \\ t \ge 0 \end{cases}$

Điều kiện ban đầu: $u\big|_{t=0} = f(x,y)$ với $\forall x \in [0;L]$ và $\forall y \in [0;m]$

Điều kiện biên: $\begin{cases} u\big|_{x=0} = u\big|_{x=L} = 0 \\ u\big|_{y=0} = u\big|_{y=m} = 0 \end{cases}$ với $\forall t \ge 0$

Tách biến: $u(x,y,t) = V(x,y)T(t) \Rightarrow V(x,y)T'(t) = a^2\Delta V(x,y)T(t)$

$\Rightarrow \dfrac{\Delta V(x,y)}{V(x,y)} = \dfrac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda = \text{const} \Rightarrow \begin{cases} \Delta V(x,y) + \lambda V(x,y) = 0 & (1) \\ T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0 & (2) \end{cases}$

Xét $V(x,y)=X(x)Y(y)$ là nghiệm, phương trình (1) trở thành: $\begin{cases} X''(x)+\alpha X(x)=0 & (3) \\ Y''(y)+\beta Y(y)=0 & (4) \\ \alpha+\beta=\lambda \end{cases}$

Với điều kiện biên: $\begin{cases} X(0)=X(L)=0 \\ Y(0)=Y(L)=0 \end{cases}$

Giải phương trình (3):

- Trường hợp 1: $\alpha=0 \Rightarrow X(x)=Ax+B$

  Thay điều kiện biên $\Rightarrow \begin{cases} X(0)=A.0+B=0 \\ X(L)=A.L+B=0 \end{cases} \Rightarrow A=B=0$

  $\Rightarrow X(x)=0 \Rightarrow V(x,y)=0 \Rightarrow u(x,y,t)=0$ (loại)

- Trường hợp 2: $\alpha<0 \Rightarrow X(x)=Ae^{\varphi x}+Be^{-\varphi x}$ với $\varphi=\sqrt{-\alpha}$

  Thay điều kiện biên $\Rightarrow \begin{cases} X(0)=A+B=0 \\ X(L)=Ae^{L\varphi}+Be^{-L\varphi}=0 \end{cases} \Rightarrow A=B=0$

  $\Rightarrow X(x)=0 \Rightarrow V(x,y)=0 \Rightarrow u(x,y,t)=0$ (loại)

- Trường hợp 3: $\alpha>0 \Rightarrow X(x)=A\cos\varphi x+B\sin\varphi x$ với $\varphi=\sqrt{\alpha}$

  Thay điều kiện biên $\Rightarrow \begin{cases} X(0)=A+0=0 \\ X(L)=A+B\sin\varphi L=0 \end{cases} \Rightarrow \sin\varphi L=0$

  $\Rightarrow \varphi L=k\pi$ với $k=1,2,3,\ldots$

  $\Rightarrow \varphi=\frac{k\pi}{L}$

  Phương trình (3) có vô số nghiệm: $X_k(x)=B\sin\frac{k\pi x}{L}$ với $\alpha=\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$

Giải tương tự cho phương trình (4), ta có vố số nghiệm: $Y_n(x)=B'\sin\frac{n\pi y}{m}$ với $\beta=\left(\frac{n\pi}{m}\right)^2$

Từ phương trình (2) cho ta nghiệm: $T_{kn}(t)=C.e^{-a^2\lambda t}$ với $\lambda=\alpha+\beta=\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{m}\right)^2$

Suy ra: $\boxed{u(x,y,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}C_{kn}e^{-\left[\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2+\left(\frac{n\pi a}{m}\right)^2\right]t}\sin\frac{k\pi x}{L}\sin\frac{n\pi y}{m}}$

Dựa vào điều kiện đầu: $u\big|_{t=0}=f(x,y) \Rightarrow f(x,y)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}C_{kn}\sin\frac{k\pi x}{L}\sin\frac{n\pi y}{m}$

Lee Ein

$$\Rightarrow C_{kn} = \frac{2}{L}\frac{2}{m}\int_0^L\int_0^m f(x,y)\sin\frac{k\pi x}{L}\sin\frac{n\pi y}{m}dxdy$$

Áp dụng:

$$\Rightarrow C_{kn} = \int_0^2\int_0^2 xy(x-2)(y-2)\sin\frac{k\pi x}{2}\sin\frac{n\pi y}{2}dxdy$$

$$= \int_0^2 (x^2-2x)\sin\frac{k\pi x}{2}dx.\int_0^2 (y^2-2y)\sin\frac{n\pi y}{2}dy$$

Ta có: $\int_0^2 (x^2-2x)\sin\frac{k\pi x}{2}dx = \frac{2(2x-x^2)}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2}\Big|_0^2 + \frac{4}{k\pi}\int_0^1 (x-1)\cos\frac{k\pi x}{2}dx$

$$= 0 + \frac{4}{k\pi}\left[\frac{2(x-1)}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_0^2 - \frac{2}{k\pi}\int_0^2 \sin\frac{k\pi x}{2}dx\right] = \frac{4}{k\pi}\left(0+\frac{2}{k\pi}\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2}\Big|_0^2\right) = \frac{16}{(k\pi)^3}(\cos k\pi - 1)$$

$$= \frac{16\left[(-1)^k - 1\right]}{(k\pi)^3}$$

Tương tự: $\int_0^2 (y^2-2y)\sin\frac{n\pi y}{2}dy = \frac{16\left[(-1)^n - 1\right]}{(n\pi)^3}$

Suy ra: $C_{kn} = \frac{16\left[(-1)^k-1\right]}{(k\pi)^3}\frac{16\left[(-1)^n-1\right]}{(n\pi)^3} = \frac{256\left[(-1)^k-1\right]\left[(-1)^n-1\right]}{(kn)^3\pi^6}$

Đáp số: $\boxed{u(x,y,t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{256\left[(-1)^k-1\right]\left[(-1)^n-1\right]}{(kn)^3\pi^6}e^{-\left[\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2+\left(\frac{n\pi a}{m}\right)^2\right]t}\sin\frac{k\pi x}{L}\sin\frac{n\pi y}{m}}$

Lee Ein

Bài 9: Tìm nhiệt độ $u(x,t)$ trên một thanh dẫn nhiệt dài vô hạn không chứa nguồn nhiệt, biết rằng nhiệt độ ban đầu tại các điểm $M(x)$ trên thanh được cho bởi hàm số $f(x)$ với $\forall x \in R$. Áp dụng kết quả này hãy tìm $u(x,t)$ khi biết nhiệt độ ban đầu tại các điểm $M(x)$ trên thanh là $f(x) = u_0$ khi $0 \le x \le 1$ và $f(x) = 0$ khi $x < 0$ hoặc $x > 1$

Phương trình truyền nhiệt: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ với $\begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ t \ge 0 \end{cases}$

Điều kiện ban đầu: $u\big|_{t=0} = f(x)$ với $\forall x \in R$

Tách biến: $u(x,t) = X(x).T(t) \Rightarrow X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t)$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda = \text{const} \Rightarrow \begin{cases} T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0 & (1) \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải phương trình (1), ta có nghiệm: $T(t) = Ce^{-a^2\lambda t}$

- Trường hợp 1: Nếu $\lambda < 0 \Rightarrow \lim\limits_{t \to +\infty} e^{-a^2\lambda t} = +\infty$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} T(t) \to +\infty \text{ nếu } C \ne 0 \\ T(t) = 0 \text{ nếu } C = 0 \end{array}\right. \text{(loại)} \Rightarrow \text{Không nhận } \lambda < 0$$

- Trường hợp 2: Nếu $\lambda \ge 0$ thì phương trình (2) có nghiệm:
  $X(x) = A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x$
  với $\lambda = \alpha^2 \Rightarrow \alpha \in R \Rightarrow$ có vô số nghiệm: $X_\alpha(x) = A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x$

Vậy ta có vô số nghiệm: $u_\alpha(x,t) = \left[A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x\right]e^{-a^2\alpha^2 t}$

$$\Rightarrow u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x\right]e^{-a^2\alpha^2 t}d\alpha$$

Từ điều kiện đầu: $u\big|_{t=0} = f(x) \Rightarrow f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left[A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x\right]d\alpha$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(\alpha) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\cos\alpha z dz \\ B(\alpha) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\sin\alpha z dz \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\cos\alpha z dz \cos\alpha x + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\sin\alpha z dz \sin\alpha x\right]e^{-a^2\alpha^2 t}d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(\cos\alpha z\cos\alpha x + \sin\alpha z\sin\alpha x)f(z)e^{-a^2\alpha^2 t}dz d\alpha$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos\left[\alpha(z-x)\right]f(z)e^{-a^2\alpha^2t}dzd\alpha$$

Xét tích phân: $P=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos\left[\alpha(z-x)\right]e^{-a^2\alpha^2t}d\alpha$

Đặt $\begin{cases}\sigma=a\alpha\sqrt{t}\Rightarrow d\alpha=\dfrac{d\sigma}{a\sqrt{t}}\\ \omega\sigma=\alpha(z-x)\Rightarrow\omega=\dfrac{z-x}{a\sqrt{t}}\end{cases}$

$\Rightarrow P=\frac{1}{2\pi a\sqrt{t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos(\omega\sigma)e^{-\sigma^2}d\sigma$. Đặt $I(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos(\omega\sigma)e^{-\sigma^2}d\sigma$

Xét $\frac{dI(\omega)}{d\omega}=I'(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}-\sigma\sin(\omega\sigma)e^{-\sigma^2}d\sigma$

Đặt $\begin{cases}\mho=\sin(\omega\sigma)\Rightarrow d\mho=\omega\cos(\omega\sigma)d\sigma\\ dv=-\sigma e^{-\sigma^2}d\sigma\Rightarrow v=\dfrac{e^{-\sigma^2}}{2}\end{cases}$

$$\Rightarrow I'(\omega)=\left.\frac{e^{-\sigma^2}\sin(\omega\sigma)}{2}\right|_{-\infty}^{+\infty}-\frac{\omega}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sigma^2}\cos(\omega\sigma)d\sigma=-\frac{\omega}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sigma^2}\cos(\omega\sigma)d\sigma=-\frac{\omega}{2}I(\omega)$$

$$\Rightarrow\frac{I'(\omega)}{I(\omega)}=-\frac{\omega}{2}\Rightarrow I(\omega)=Ce^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

Cho $\omega=0\Rightarrow I(0)=C\Rightarrow C=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sigma^2}d\sigma$ mà $\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\sigma^2}d\sigma=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Rightarrow C=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sigma^2}d\sigma=\sqrt{\pi}$

$$\Rightarrow I(\omega)=\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}}=\sqrt{\pi}e^{-\frac{\left(\frac{z-x}{a\sqrt{t}}\right)^2}{4}}=\sqrt{\pi}e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}}\Rightarrow P=\frac{1}{2\pi a\sqrt{t}}\sqrt{\pi}e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}}=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}}$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Pf(z)dz$$

Vậy $\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(z)e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}}dz}$

Áp dụng:

Ta có: $u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(z)e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}}dz=\frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{0}^{1}e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}}dz$

Lee Ein

Đặt $\alpha = \dfrac{z-x}{2a\sqrt{t}} \Rightarrow d\alpha = \dfrac{dz}{2a\sqrt{t}} \Rightarrow dz = 2a\sqrt{t}d\alpha$

Đổi cận: $\begin{cases} z=0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{-x}{2a\sqrt{t}} = \alpha_1 \\ z=1 \Rightarrow \alpha = \dfrac{1-x}{2a\sqrt{t}} = \alpha_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{-\alpha^2} 2a\sqrt{t}d\alpha = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{-\alpha^2} d\alpha$$

$$= \frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int_{\alpha_1}^{0} e^{-\alpha^2} d\alpha + \frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\alpha_2} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{u_0}{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\alpha_1} e^{-\alpha^2} d\alpha + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\alpha_2} e^{-\alpha^2} d\alpha\right) = \frac{u_0}{2}\left[-\Phi(\alpha_1) + \Phi(\alpha_2)\right]$$

Đáp số: $\boxed{u(x,t) = \dfrac{u_0}{2}\left[\Phi\left(\dfrac{1-x}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\dfrac{-x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]}$ (hàm Φ được tính gần đúng)

Bài 10: Tìm nhiệt độ $u(x,t)$ trên một thanh dẫn nhiệt nửa vô hạn không chứa nguồn nhiệt có đầu $x=0$ cách nhiệt và nhiệt độ ban đầu tại các điểm $M(x)$ trên thanh được cho bởi hàm số $f(x)$ với $x \ge 0$. Áp dụng kết quả này hãy tìm $u(x,t)$ khi biết nhiệt độ ban đầu tại các điểm $M(x)$ trên thanh là $f(x) = u_0$ khi $0 \le x \le 1$ và $f(x) = 0$ khi $x > 1$

Xét thanh dẫn nhiệt dài vô hạn:

Phương trình truyền nhiệt: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ với $\begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ t \ge 0 \end{cases}$

Điều kiện ban đầu: $u\big|_{t=0} = f(x)$ với $\forall x \in R$

Tách biến: $u(x,t) = X(x).T(t) \Rightarrow X(x)T'(t) = a^2X''(x)T(t)$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2T(t)} = -\lambda = const \Rightarrow \begin{cases} T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0 & (1) \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải phương trình (1), ta có nghiệm: $T(t) = Ce^{-a^2\lambda t}$

- Trường hợp 1: Nếu $\lambda < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-a^2\lambda t} = +\infty$

  $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} T(t) \to 0 \text{ nếu } C \ne 0 \\ T(t) = 0 \text{ nếu } C = 0 \end{array}\right.$ (loại) $\Rightarrow$ Không nhận $\lambda < 0$

- Trường hợp 2: Nếu $\lambda \ge 0$ thì phương trình (2) có nghiệm:
  $X(x) = A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x$

với $\lambda=\alpha^2 \Rightarrow \alpha\in R \Rightarrow$ có vô số nghiệm: $X_\alpha(x)=A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\sin\alpha x$

Vậy ta có vô số nghiệm: $u_\alpha(x,t)=\left[A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\sin\alpha x\right]e^{-a^2\alpha^2 t}$

$$\Rightarrow u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\sin\alpha x\right]e^{-a^2\alpha^2 t}d\alpha$$

Từ điều kiện đầu: $u\big|_{t=0}=f(x) \Rightarrow f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\sin\alpha x\right]d\alpha$

$$\Rightarrow\begin{cases}A(\alpha)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)\cos\alpha z dz\\ B(\alpha)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)\sin\alpha z dz\end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)\cos\alpha z dz\cos\alpha x+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)\sin\alpha z dz\sin\alpha x\right]e^{-a^2\alpha^2 t}d\alpha$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(\cos\alpha z\cos\alpha x+\sin\alpha z\sin\alpha x)f(z)e^{-a^2\alpha^2 t}dzd\alpha$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\left[\alpha(z-x)\right]f(z)e^{-a^2\alpha^2 t}dzd\alpha$$

Xét tích phân: $P=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\left[\alpha(z-x)\right]e^{-a^2\alpha^2 t}d\alpha$

Đặt $\begin{cases}\sigma=a\alpha\sqrt{t}\Rightarrow d\alpha=\dfrac{d\sigma}{a\sqrt{t}}\\ \omega\sigma=\alpha(z-x)\Rightarrow\omega=\dfrac{z-x}{a\sqrt{t}}\end{cases}$

$\Rightarrow P=\dfrac{1}{2\pi a\sqrt{t}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\omega\sigma)e^{-\sigma^2}d\sigma$. Đặt $I(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\omega\sigma)e^{-\sigma^2}d\sigma$

Xét $\dfrac{dI(\omega)}{d\omega}=I'(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}-\sigma\sin(\omega\sigma)e^{-\sigma^2}d\sigma$

Đặt $\begin{cases}\mho=\sin(\omega\sigma)\Rightarrow d\mho=\omega\cos(\omega\sigma)d\sigma\\ dv=-\sigma e^{-\sigma^2}d\sigma\Rightarrow v=\dfrac{e^{-\sigma^2}}{2}\end{cases}$

$$\Rightarrow I'(\omega)=\frac{e^{-\sigma^2}\sin(\omega\sigma)}{2}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}-\frac{\omega}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sigma^2}\cos(\omega\sigma)d\sigma=-\frac{\omega}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sigma^2}\cos(\omega\sigma)d\sigma=-\frac{\omega}{2}I(\omega)$$

Lee Ein

$$\Rightarrow \frac{I'(\omega)}{I(\omega)} = -\frac{\omega}{2} \Rightarrow I(\omega) = Ce^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

Cho $\omega = 0 \Rightarrow I(0) = C \Rightarrow C = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma$ mà $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow C = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma = \sqrt{\pi}$

$$\Rightarrow I(\omega) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}} = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\left(\frac{z-x}{a\sqrt{t}}\right)^2}{4}} = \sqrt{\pi} e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}} \Rightarrow P = \frac{1}{2\pi a\sqrt{t}} \sqrt{\pi} e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Pf(z)dz$$

Vậy $u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}} dz$

Ta có phương trình truyền nhiệt của thanh nửa vô hạn không chứa nguồn:

$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ với $\begin{cases} 0 \le x < +\infty \\ t \ge 0 \end{cases}$

Điều kiện ban đầu: $u\big|_{t=0} = f(x)$ với $\forall x \in [0;+\infty)$

Kéo dài thanh thành thanh vô hạn có điều kiện đầu: $F(x) = f(x)$ khi $x \in [0;+\infty)$

Khi đó, $u(x,t)$ của thanh vô hạn là: $u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(z) e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}} dz$

Ta có: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2(z-x)}{4a^2t} F(z) e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}} dz$

Với điều kiện biên: $\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0$ với $\forall t \ge 0 \Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} zF(z) e^{-\frac{z^2}{4a^2t}} dz = 0$ với $\forall t \ge 0$

$\Rightarrow F(x)$ là hàm số chẵn $\Rightarrow$ Kéo dài $f(x)$ thành $F(x)$ chẵn.

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{0} f(z) e^{-\frac{(z+x)^2}{4a^2t}} dz + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{+\infty} f(z) e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}} dz$$

Cuối cùng ta được: $\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z) \left[e^{-\frac{(z+x)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}} \right] dz}$

<u>Áp dụng:</u>

Ta có: $u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z) \left[e^{-\frac{(z+x)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}} \right] dz = \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{1} \left[e^{-\frac{(z+x)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}} \right] dz$

Tính tích phân: $I_1 = \dfrac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}}dz$

Đặt $\alpha = \dfrac{z-x}{2a\sqrt{t}} \Rightarrow d\alpha = \dfrac{dz}{2a\sqrt{t}} \Rightarrow dz = 2a\sqrt{t}d\alpha$

Đổi cận: $\begin{cases} z=0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{-x}{2a\sqrt{t}} = \alpha_1 \\ z=1 \Rightarrow \alpha = \dfrac{1-x}{2a\sqrt{t}} = \alpha_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{-\alpha^2}2a\sqrt{t}d\alpha = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{-\alpha^2}d\alpha$$

$$= \frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int_{\alpha_1}^{0} e^{-\alpha^2}d\alpha + \frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\alpha_2} e^{-\alpha^2}d\alpha = \frac{u_0}{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\alpha_1} e^{-\alpha^2}d\alpha + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\alpha_2} e^{-\alpha^2}d\alpha\right) = \frac{u_0}{2}\left[-\Phi(\alpha_1) + \Phi(\alpha_2)\right]$$

Tính tích phân: $I_2 = \dfrac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{(z+x)^2}{4a^2t}}dz$

Đặt $\alpha' = \dfrac{z+x}{2a\sqrt{t}} \Rightarrow d\alpha' = \dfrac{dz}{2a\sqrt{t}} \Rightarrow dz = 2a\sqrt{t}d\alpha'$

Đổi cận: $\begin{cases} z=0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{x}{2a\sqrt{t}} = \alpha'_1 \\ z=1 \Rightarrow \alpha = \dfrac{1+x}{2a\sqrt{t}} = \alpha'_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{\alpha'_1}^{\alpha'_2} e^{-\alpha'^2}2a\sqrt{t}d\alpha' = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int_{\alpha'_1}^{\alpha'_2} e^{-\alpha'^2}d\alpha'$$

$$= \frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int_{\alpha'_1}^{0} e^{-\alpha'^2}d\alpha' + \frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\alpha'_2} e^{-\alpha'^2}d\alpha = \frac{u_0}{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\alpha'_1} e^{-\alpha'^2}d\alpha' + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\alpha'_2} e^{-\alpha'^2}d\alpha'\right) = \frac{u_0}{2}\left[-\Phi(\alpha'_1) + \Phi(\alpha'_2)\right]$$

Đáp số: $\boxed{u(x,t) = I_1 + I_2 = \dfrac{u_0}{2}\left[\Phi\left(\dfrac{1-x}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\dfrac{-x}{2a\sqrt{t}}\right) + \Phi\left(\dfrac{1+x}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]}$

(hàm Φ được tính gần đúng)

Phương trình Laplace

Bài 1: Tìm nhiệt độ dừng $u(x,y)$ trên một hình chữ nhật (chiều dài L và chiều rộng m) với nhiệt độ trên 2 biên $x=0$ và $x=L$ giữ ở 0, còn nhiệt độ trên 2 biên $y=0$ và $y=m$ lần lượt là $f(x)$ và $F(x)$ với $0\le x\le L$. Áp dụng kết quả này hãy tìm $u(x,y)$ trên một hình vuông có cạnh 1 mét với $f(x)=\sin 5\pi x$ và $F(x)=0$ với $0\le x\le 1$

Phương trình Laplace: $\Delta u(x,y)=0 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

Điều kiện biên: $u\big|_{x=0}=u\big|_{x=L}=0$

$$u\big|_{y=0}=f(x),\ u\big|_{y=m}=F(x)$$

Tách biến: $u(x,y)=X(x)Y(y) \Rightarrow X''(x)Y(y)=-X(x)Y''(y)$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{Y''(y)}{-Y(y)}=-\lambda=\text{const} \Rightarrow \begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 & (1)\\ Y''(y)-\lambda Y(y)=0 & (2)\end{cases}$$

Với điều kiện biên: $X(0)=X(L)=0,\ Y(0)=f(x),\ Y(m)=F(x)$

Giải phương trình (1):

- Trường hợp 1: $\lambda=0 \Rightarrow X(x)=Ax+B$

  Thay điều kiện biên $\Rightarrow \begin{cases} X(0)=A.0+B=0\\ X(L)=A.L+B=0\end{cases} \Rightarrow A=B=0$

  $\Rightarrow X(x)=0 \Rightarrow u(x,t)=0$ (loại)

- Trường hợp 2: $\lambda<0 \Rightarrow X(x)=Ae^{\alpha x}+Be^{-\alpha x}$ với $\alpha=\sqrt{-\lambda}$

  Thay điều kiện biên $\Rightarrow \begin{cases} X(0)=A+B=0\\ X(L)=Ae^{\alpha L}+Be^{-\alpha L}=0\end{cases} \Rightarrow A=B=0$

  $\Rightarrow X(x)=0 \Rightarrow u(x,t)=0$ (loại)

- Trường hợp 3: $\lambda>0 \Rightarrow X(x)=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x$ với $\alpha=\sqrt{\lambda}$

  Thay điều kiện biên $\Rightarrow \begin{cases} X(0)=A+0=0\\ X(L)=A+B\sin\alpha L=0\end{cases} \Rightarrow \sin\alpha L=0$

  $\Rightarrow \alpha L=k\pi$ với $k=1, 2, 3,\ldots$

  $\Rightarrow \alpha=\dfrac{k\pi}{L}$

  Phương trình (1) có vô số nghiệm: $X_k(x)=B\sin\dfrac{k\pi x}{L}$

Với $\lambda = \alpha^2 = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$ và k = 1, 2, 3,… thì phương trình (2) có nghiệm: $Y_k(y) = Ce^{\frac{k\pi y}{L}} + De^{-\frac{k\pi y}{L}}$

Vậy: $\boxed{u(x,y) = X_k(x)Y_k(y) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(A_k e^{\frac{k\pi y}{L}} + B_k e^{-\frac{k\pi y}{L}}\right)\sin\frac{k\pi x}{L}}$

Mà $u\big|_{y=0} = f(x) \Rightarrow f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}(A_k + B_k)\sin\frac{k\pi x}{L} \Rightarrow A_k + B_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx$ (*)

Và $u\big|_{y=m} = F(x) \Rightarrow F(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(A_k e^{\frac{k\pi m}{L}} + B_k e^{-\frac{k\pi m}{L}}\right)\sin\frac{k\pi x}{L}$

$\Rightarrow A_k e^{\frac{k\pi m}{L}} + B_k e^{-\frac{k\pi m}{L}} = \frac{2}{L}\int_0^L F(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx$ (**)

Giải (*) và (**) tìm được A_k và B_k

<u>Áp dụng:</u>

Ta có: $A_k e^{k\pi} + B_k e^{-k\pi} = 2\int_0^1 0\sin k\pi x dx = 0$

Ta cũng có: $A_k + B_k = 2\int_0^1 \sin 5\pi x \sin k\pi x dx = \int_0^1\left[\cos(5-k)\pi x - \cos(5+k)\pi x\right]dx$

- Trường hợp 1: $k \neq 5$

  $\Rightarrow A_k + B_k = \int_0^1\left[\cos(5-k)\pi x - \cos(5+k)\pi x\right]dx$

  $= \frac{\sin(5-k)\pi x}{(5-k)\pi}\Bigg|_0^1 - \frac{\sin(5+k)\pi x}{(5+k)\pi}\Bigg|_0^1 = 0$

  Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} A_k + B_k = 0 \\ A_k e^{k\pi} + B_k e^{-k\pi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_k = -B_k \\ B_k\left(e^{k\pi} - \frac{1}{e^{k\pi}}\right) = 0 \end{cases}$

  $\Rightarrow A_k = B_k = 0$ (loại vì $u(x,t) = 0$)

- Trường hợp 1: $k = 5$

  $\Rightarrow A_5 + B_5 = \int_0^1(1 - \cos 10\pi x)dx = x\big|_0^1 - \frac{\sin 10\pi x}{10\pi}\Bigg|_0^1 = 1$

  Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} A_5 + B_5 = 1 \\ A_5 e^{5\pi} + B_5 e^{-5\pi} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_5 = 1 - B_5 \\ (1 - B_5)e^{5\pi} + B_5 e^{-5\pi} = 0 \end{cases}$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} A_5 = 1 - B_5 \\ e^{5\pi} - B_5 e^{5\pi} + B_5 e^{-5\pi} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_5 = -\frac{e^{-5\pi}}{e^{5\pi} - e^{-5\pi}} = \frac{-1}{e^{10\pi} - 1} \\ B_5 = \frac{e^{5\pi}}{e^{5\pi} - e^{-5\pi}} = \frac{e^{10\pi}}{e^{10\pi} - 1} \end{cases}$

Đáp số: $\boxed{u(x,y)=\left(\dfrac{e^{5\pi y}}{1-e^{10\pi}}+\dfrac{e^{10\pi-5\pi y}}{e^{10\pi}-1}\right)\sin 5\pi x}$

Bài 2: Tìm nhiệt độ dừng $u(x,y)$ trên một hình chữ nhật vô hạn với nhiệt độ trên 2 biên $x=0$ và $x=1$ giữ ở 0, còn nhiệt độ trên 2 biên $y=0$ và $y\to+\infty$ lần lượt là $f(x)=1-x$ và $F(x)=0$ với $0\le x\le 1$.

Phương trình Laplace: $\Delta u(x,y)=0 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

Điều kiện biên: $u\big|_{x=0}=u\big|_{x=1}=0$

$u\big|_{y=0}=1-x$, $\lim\limits_{y\to\infty}u=0$

Tách biến: $u(x,y)=X(x)Y(y) \Rightarrow X''(x)Y(y)=-X(x)Y''(y)$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{Y''(y)}{-Y(y)}=-\lambda=\text{const} \Rightarrow \begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 & (1)\\ Y''(y)-\lambda Y(y)=0 & (2)\end{cases}$$

Với điều kiện biên: $X(0)=X(1)=0$, $Y(0)=1-x$, $\lim\limits_{y\to+\infty}Y=0$

Giải phương trình (1):

- Trường hợp 1: $\lambda=0 \Rightarrow X(x)=Ax+B$

  Thay điều kiện biên $\Rightarrow \begin{cases} X(0)=A.0+B=0\\ X(1)=A+B=0\end{cases} \Rightarrow A=B=0$

  $\Rightarrow X(x)=0 \Rightarrow u(x,t)=0$ (loại)

- Trường hợp 2: $\lambda<0 \Rightarrow X(x)=Ae^{\alpha x}+Be^{-\alpha x}$ với $\alpha=\sqrt{-\lambda}$

  Thay điều kiện biên $\Rightarrow \begin{cases} X(0)=A+B=0\\ X(1)=Ae^{\alpha}+Be^{-\alpha}=0\end{cases} \Rightarrow A=B=0$

  $\Rightarrow X(x)=0 \Rightarrow u(x,t)=0$ (loại)

- Trường hợp 3: $\lambda>0 \Rightarrow X(x)=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x$ với $\alpha=\sqrt{\lambda}$

  Thay điều kiện biên $\Rightarrow \begin{cases} X(0)=A+0=0\\ X(1)=A+B\sin\alpha=0\end{cases} \Rightarrow \sin\alpha=0$

  $\Rightarrow \alpha=k\pi$ với k = 1, 2, 3,…

Phương trình (1) có vô số nghiệm: $X_k(x)=B\sin k\pi x$

Với $\lambda=\alpha^2=(k\pi)^2$ và k = 1, 2, 3,… thì phương trình (2) có nghiệm: $Y_k(y)=Ce^{k\pi y}+De^{-k\pi y}$

Lee Ein

$$\Rightarrow u(x,y) = X_k(x)Y_k(y) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(A_k e^{k\pi y} + B_k e^{-k\pi y}\right)\sin k\pi x$$

Ta có: $\lim\limits_{y\to\infty} u = 0 \Rightarrow A_k = 0$ vì $\begin{cases} \lim\limits_{y\to+\infty} e^{k\pi y} = +\infty \\ \lim\limits_{y\to+\infty} e^{-k\pi y} = 0 \end{cases}$

Vậy: $\boxed{u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} B_k e^{-k\pi y}\sin k\pi x}$

Mà $u\big|_{y=0} = 1 - x \Rightarrow 1 - x = \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \sin k\pi x \Rightarrow B_k = 2\int_0^1 (1-x)\sin k\pi x dx$

Bài 3: Tìm nhiệt độ dừng $u(r,\varphi)$ trên một hình tròn tâm O bán kính $R = 2$ biết rằng nhiệt độ trên biên cho bởi:

a) $u(2,\varphi) = 3 + \sin\varphi$ với $0 \le \varphi \le 2\pi$

b) $u(2,\varphi) = 3$ với $0 \le \varphi \le \pi$ và $u(2,\varphi) = 0$ với $\pi < \varphi \le 2\pi$

Phương trình Laplace: $\Delta u(r,\varphi) = 0$ với $\begin{cases} \forall\varphi \in [0;2\pi] \\ 0 \le r \le 2 \end{cases}$ và $u\big|_{r=2} = 3 + \sin\varphi$

Trong tọa độ cực: $\Delta u(r,\varphi) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0$

Xét $u(r,\varphi) = V(r)\Phi(\varphi)$

Ta có: $\frac{\partial u}{\partial r} = V'(r)\Phi(\varphi) \Rightarrow r\frac{\partial u}{\partial r} = rV'(r)\Phi(\varphi)$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = V'(r)\Phi(\varphi) + rV''(r)\Phi(\varphi) = \left[V'(r) + rV''(r)\right]\Phi(\varphi)$$

Phương trình Laplace trở thành: $\frac{\left[V'(r) + rV''(r)\right]\Phi(\varphi)}{r} + \frac{V(r)\Phi''(\varphi)}{r^2} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \frac{r\left[V'(r) + rV''(r)\right]}{-V(r)} \Rightarrow \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \frac{r^2V''(r) + rV'(r)}{-V(r)} = -\lambda = \text{const}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0 & (1) \\ r^2V''(r) + rV'(r) - \lambda V(r) = 0 & (2) \end{cases}$$

Ta có: $u(r,\varphi) = u(r,\varphi + 2\pi) \Rightarrow \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$

$\Rightarrow$ Hàm $\Phi(\varphi)$ tuần hoàn có chu kỳ $T = 2\pi$

Giải phương trình (1):

- Trường hợp 1: $\lambda = 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = A\varphi + B$

  Vì $\Phi(\varphi)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$ nên $A = 0 \Rightarrow \Phi_0(\varphi) = B$

  Từ phương trình (2) $\Rightarrow \dfrac{V''(r)}{V'(r)} = -\dfrac{1}{r} \Rightarrow \ln\left[V'(r)\right] = -\ln r + \ln C_1 \Leftrightarrow V'(r) = \dfrac{C_1}{r}$

  $\Rightarrow V_0(r) = C_1 \ln r + C_2$

  Vì $\ln r$ không xác định tại 0 nên $V_0(r) = C_2$

  Vậy $u_0(r,\varphi) = BC_2 = \dfrac{a_0}{2}$

- Trường hợp 2: $\lambda < 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = Ae^{\alpha\varphi} + Be^{-\alpha\varphi}$ với $\alpha = \sqrt{-\lambda}$

  Vì $\Phi(\varphi)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$ nên $A = B = 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = 0$

  $\Rightarrow u(r,\varphi) = 0$ (loại)

- Trường hợp 3: $\lambda > 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = A\cos\alpha\varphi + B\sin\alpha\varphi$ với $\alpha = \sqrt{\lambda}$

  Vì $\Phi(\varphi)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$ nên $\alpha = n = 1,2,3,...$

  $\Rightarrow \Phi(\varphi) = A\cos n\varphi + B\sin n\varphi$ với $\lambda = n^2$

  Từ phương trình (2) $\Rightarrow r^2V''(r) + rV'(r) - n^2V(r) = 0$

  Phương trình này có 2 nghiệm độc lập tuyến tính: r^n và r^{-n}

  $\Rightarrow V(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}$

  Vì $r^{-n} = \dfrac{1}{r^n}$ không xác định khi $r = 0 \Rightarrow D_n = 0$

  $\Rightarrow V_n(r) = C_n r^n$

Vậy nhiệt độ dừng trên hình tròn tâm O là: $\boxed{u(r,\varphi) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi\right)r^n}$

<u>Áp dụng:</u>

a. $u(2,\varphi) = 3 + \sin\varphi$ với $0 \le \varphi \le 2\pi$

$$\Rightarrow 3 + \sin\varphi = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_n 2^n\cos n\varphi + b_n 2^n \sin n\varphi\right)$$

Ta có:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(3+\sin\varphi)d\varphi = \frac{1}{\pi}(3\varphi - \cos\varphi)\Big|_0^{2\pi} = 6$$

- Trường hợp 1: $n \ne 1$

$$a_n 2^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(3+\sin\varphi)\cos n\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[3\cos n\varphi + \frac{1}{2}\sin(1+n)\varphi + \frac{1}{2}\sin(1-n)\varphi\right]d\varphi = 0$$

$\Rightarrow a_n = 0$

$$b_n 2^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(3+\sin\varphi)\sin n\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[3\sin n\varphi + \frac{1}{2}\cos(n-1)\varphi - \frac{1}{2}\cos(n+1)\varphi\right]d\varphi = 0$$

$$\Rightarrow b_n = 0$$

Như vậy loại trường hợp $n \neq 1$ vì $u(r,\varphi) = 3$

- Trường hợp 2: $n = 1$

$$a_1 2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(3+\sin\varphi)\cos\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(3\cos\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)d\varphi = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$b_1 2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(3+\sin\varphi)\sin\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[3\sin\varphi + \sin^2\varphi\right]d\varphi = 1 \Rightarrow b_1 = \frac{1}{2}$$

Đáp số: $\boxed{u(r,\varphi) = 3 + \frac{r}{2}\sin\varphi}$

* Ngoài cách làm trên, bài này có thể dùng phương pháp đồng nhất 2 vế:

Ta có: $3+\sin\varphi = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_n 2^n \cos n\varphi + b_n 2^n \sin n\varphi\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{a_0}{2} = 3 \\ n = 1 \\ a_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 6 \\ a_n = a_1 = 0 \\ b_n = b_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$

b. $u(2,\varphi) = 3$ với $0 \le \varphi \le \pi$ và $u(2,\varphi) = 0$ với $\pi < \varphi \le 2\pi$

Ta có:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} 3d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} 0d\varphi\right) = 3$$

$$a_n 2^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 3\cos n\varphi d\varphi + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 0\cos n\varphi d\varphi = \left.\frac{3\sin n\varphi}{n\pi}\right|_0^{\pi} = 0 \Rightarrow a_n = 0$$

$$b_n 2^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 3\sin n\varphi d\varphi + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 0\sin n\varphi d\varphi = \left.\frac{-3\cos n\varphi}{n\pi}\right|_0^{\pi} = \frac{3}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \frac{3\left[1-(-1)^n\right]}{n\pi}$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{3\left[1-(-1)^n\right]}{2^n n\pi}$$

Đáp số: $\boxed{u(r,\varphi) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3\left[1-(-1)^n\right]r^n}{2^n n\pi}\sin n\varphi = \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{6r^{2k-1}}{2^{2k-1}(2k-1)\pi}\sin(2k-1)\varphi}$

Bài 4: Tìm nhiệt độ dừng $u(r,\varphi)$ trên một hình bán nguyệt tâm O bán kính $R=1$ biết rằng nhiệt độ trên đường kính được giữ ở nhiệt độ 0, còn nhiệt độ trên cung tròn cho bởi $u(1,\varphi)=3\varphi$ với $0\le\varphi\le\pi$.

Phương trình Laplace: $\Delta u(r,\varphi)=0$ với $\begin{cases}\forall\varphi\in[0;\pi]\\ 0\le r\le 1\end{cases}$

Với $u\big|_{r=1}=3\varphi$ và $u\big|_{\varphi=0}=u\big|_{\varphi=\pi}=0$

Trong tọa độ cực: $\Delta u(r,\varphi)=0\Rightarrow \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$

Xét $u(r,\varphi)=V(r)\Phi(\varphi)$

Ta có: $\dfrac{\partial u}{\partial r}=V'(r)\Phi(\varphi)\ \Rightarrow r\dfrac{\partial u}{\partial r}=rV'(r)\Phi(\varphi)$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)=V'(r)\Phi(\varphi)+rV''(r)\Phi(\varphi)=\left[V'(r)+rV''(r)\right]\Phi(\varphi)$$

Phương trình Laplace trở thành: $\dfrac{\left[V'(r)+rV''(r)\right]\Phi(\varphi)}{r}+\dfrac{V(r)\Phi''(\varphi)}{r^2}=0$

$$\Rightarrow\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\frac{r\left[V'(r)+rV''(r)\right]}{-V(r)}\Rightarrow\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\frac{r^2V''(r)+rV'(r)}{-V(r)}=-\lambda=\text{const}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0 & (1)\\ r^2V''(r)+rV'(r)-\lambda V(r)=0 & (2)\end{cases}$$

Với $\Phi(0)=\Phi(\pi)=0$ (3)

Giải phương trình (1):

- Trường hợp 1: $\lambda=0\ \Rightarrow\Phi(\varphi)=A\varphi+B$

  Thay điều kiện (3) $\Rightarrow\begin{cases}\Phi(0)=A.0+B=0\\ \Phi(\pi)=A.\pi+B=0\end{cases}\Rightarrow A=B=0$

  $\Rightarrow\Phi(\varphi)=0\Rightarrow u(r,\varphi)=0$ (loại)

- Trường hợp 2: $\lambda<0\Rightarrow\Phi(\varphi)=Ae^{\alpha\varphi}+Be^{-\alpha\varphi}$ với $\alpha=\sqrt{-\lambda}$

  Thay điều kiện (3) $\Rightarrow\begin{cases}\Phi(0)=A+B=0\\ \Phi(\pi)=Ae^{\alpha\pi}+Be^{-\alpha\pi}=0\end{cases}\Rightarrow A=B=0$

  $\Rightarrow\Phi(\varphi)=0\Rightarrow u(r,\varphi)=0$ (loại)

- Trường hợp 3: $\lambda>0\Rightarrow\Phi(\varphi)=A\cos\alpha\varphi+B\sin\alpha\varphi$ với $\alpha=\sqrt{\lambda}$

Lee Ein

Thay điều kiện (3) $\Rightarrow \begin{cases} \Phi(0) = A + 0 = 0 \\ \Phi(\pi) = A\cos\alpha\pi + B\sin\alpha\pi = 0 \end{cases} \Rightarrow \sin\alpha\pi = 0$

$\Rightarrow \alpha\pi = k\pi$ với k = 1, 2, 3,…

$\Rightarrow \alpha = k$

Phương trình (1) có vô số nghiệm: $\Phi_k(\varphi) = B\sin k\varphi$ với $\lambda = \alpha^2 = k^2$

Từ phương trình (2) $\Rightarrow r^2V''(r) + rV'(r) - k^2V(r) = 0$

Phương trình này có 2 nghiệm độc lập tuyến tính: r^k và r^{-k}

$\Rightarrow V(r) = C_k r^k + D_k r^{-k}$

Vì $r^{-k} = \dfrac{1}{r^k}$ không xác định khi $r = 0 \Rightarrow D_k = 0$

$\Rightarrow V_k(r) = C_k r^k$

Vậy nhiệt độ dừng trên hình bán nguyệt tâm O là: $u(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{+\infty} C_k r^k \sin k\varphi$

Ta có: $u\big|_{r=1} = 3\varphi \Rightarrow 3\varphi = \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \sin k\varphi$

$$\Rightarrow C_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 3\varphi\sin k\varphi d\varphi = \frac{6}{\pi}\int_0^\pi \varphi\sin k\varphi d\varphi$$

$$= \frac{6}{\pi}\left(\frac{-\varphi\cos k\varphi}{k}\bigg|_0^\pi - \frac{1}{k}\int_0^\pi \cos k\varphi d\varphi\right) = \frac{6}{\pi}\left(\frac{-\varphi\cos k\varphi}{k}\bigg|_0^\pi - \frac{1}{k^2}\sin k\varphi\Big|_0^\pi\right)$$

$$= \frac{6}{\pi}\left(\frac{-\pi\cos k\pi}{k}\right) = \frac{6(-1)^{k+1}}{k}$$

<u>Đáp số:</u> $\boxed{u(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{6(-1)^{k+1}}{k} r^k \sin k\varphi}$

Lee Ein

Bài 5: Tìm nhiệt độ dừng $u(r,\varphi)$ trên $\frac{1}{4}$ hình tròn tâm O bán kính $R = 1$ biết rằng nhiệt độ trên 2 bán kính được giữ ở nhiệt độ 0, còn nhiệt độ trên cung tròn cho bởi $u(1,\varphi) = 2\varphi^2 - \pi\varphi$ với $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Phương trình Laplace: $\Delta u(r,\varphi) = 0$ với $\begin{cases} \forall\varphi \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$

Với $u\big|_{r=1} = 2\varphi^2 - \pi\varphi$ và $u\big|_{\varphi=0} = u\big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0$

Trong tọa độ cực: $\Delta u(r,\varphi) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0$

Xét $u(r,\varphi) = V(r)\Phi(\varphi)$

Ta có: $\frac{\partial u}{\partial r} = V'(r)\Phi(\varphi) \Rightarrow r\frac{\partial u}{\partial r} = rV'(r)\Phi(\varphi)$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = V'(r)\Phi(\varphi) + rV''(r)\Phi(\varphi) = \left[V'(r) + rV''(r)\right]\Phi(\varphi)$$

Phương trình Laplace trở thành: $\frac{\left[V'(r)+rV''(r)\right]\Phi(\varphi)}{r} + \frac{V(r)\Phi''(\varphi)}{r^2} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \frac{r\left[V'(r)+rV''(r)\right]}{-V(r)} \Rightarrow \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \frac{r^2V''(r)+rV'(r)}{-V(r)} = -\lambda = \text{const}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0 & (1) \\ r^2V''(r) + rV'(r) - \lambda V(r) = 0 & (2) \end{cases}$$

Với $\Phi(0) = \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ (3)

Giải phương trình (1):

- Trường hợp 1: $\lambda = 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = A\varphi + B$

  Thay điều kiện (3) $\Rightarrow \begin{cases} \Phi(0) = A.0 + B = 0 \\ \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = A.\frac{\pi}{2} + B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = 0$

  $\Rightarrow \Phi(\varphi) = 0 \Rightarrow u(r,\varphi) = 0$ (loại)

- Trường hợp 2: $\lambda < 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = Ae^{\alpha\varphi} + Be^{-\alpha\varphi}$ với $\alpha = \sqrt{-\lambda}$

Thay điều kiện (3) $\Rightarrow \begin{cases} \Phi(0) = A + B = 0 \\ \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = Ae^{\alpha\frac{\pi}{2}} + Be^{-\alpha\frac{\pi}{2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = 0$

$\Rightarrow \Phi(\varphi) = 0 \Rightarrow u(r,\varphi) = 0$ (loại)

– Trường hợp 3: $\lambda > 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = A\cos\alpha\varphi + B\sin\alpha\varphi$ với $\alpha = \sqrt{\lambda}$

Thay điều kiện (3) $\Rightarrow \begin{cases} \Phi(0) = A + 0 = 0 \\ \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = A\cos\alpha\frac{\pi}{2} + B\sin\alpha\frac{\pi}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \sin\alpha\frac{\pi}{2} = 0$

$\Rightarrow \alpha\frac{\pi}{2} = k\pi$ với $k = 1, 2, 3, \ldots$

$\Rightarrow \alpha = 2k$

Phương trình (1) có vô số nghiệm: $\Phi_k(\varphi) = B\sin 2k\varphi$ với $\lambda = \alpha^2 = 4k^2$

Từ phương trình (2) $\Rightarrow r^2V''(r) + rV'(r) - 4k^2V(r) = 0$

Phương trình này có 2 nghiệm độc lập tuyến tính: r^{2k} và r^{-2k}

$\Rightarrow V(r) = C_k r^{2k} + D_k r^{-2k}$

Vì $r^{-2k} = \frac{1}{r^{2k}}$ không xác định khi $r = 0 \Rightarrow D_k = 0$

$\Rightarrow V_k(r) = C_k r^{2k}$

Vậy nhiệt độ dừng trên $\frac{1}{4}$ hình tròn tâm O là: $u(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{+\infty} C_k r^{2k}\sin 2k\varphi$

Ta có: $u\big|_{r=1} = 2\varphi^2 - \pi\varphi \Rightarrow 2\varphi^2 - \pi\varphi = \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \sin 2k\varphi$

$$\Rightarrow C_k = \frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\varphi^2 - \pi\varphi)\sin 2k\varphi d\varphi = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\varphi^2 - \pi\varphi)\sin 2k\varphi d\varphi$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{(\pi\varphi - 2\varphi^2)\cos 2k\varphi}{2k}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\varphi - \pi)\cos 2k\varphi d\varphi\right] = \frac{2}{k\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\varphi - \pi)\cos 2k\varphi d\varphi$$

$$= \frac{2}{k\pi}\left[\frac{(4\varphi - \pi)\sin 2k\varphi}{2k}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2k\varphi d\varphi\right]$$

$$= \frac{2}{k\pi}\frac{2}{k}\frac{\cos 2k\varphi}{2k}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{k^3\pi}(\cos k\pi - 1) = \frac{2\left[(-1)^k - 1\right]}{k^3\pi}$$

Lee Ein

Đáp số: $\boxed{u(r,\varphi)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2\left[(-1)^k-1\right]}{k^3\pi}r^{2k}\sin 2k\varphi}$

Bài 6: Tìm nhiệt độ dừng $u(r,\varphi)$ trên một hình vành khăn tâm O bán kính trong và ngoài là $R_1=1$ và $R_2=2$ biết rằng nhiệt độ trên biên cho bởi $u(1,\varphi)=u_1$ và $u(2,\varphi)=u_2$ với $0\le\varphi\le 2\pi$.

Phương trình Laplace: $\Delta u(r,\varphi)=0$ với $\begin{cases}\forall\varphi\in[0;2\pi]\\ 1\le r\le 2\end{cases}$

Với $u\big|_{r=1}=u_1$ và $u\big|_{r=2}=u_2$

Trong tọa độ cực: $\Delta u(r,\varphi)=0\Rightarrow\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$

Xét $u(r,\varphi)=V(r)\Phi(\varphi)$

Ta có: $\frac{\partial u}{\partial r}=V'(r)\Phi(\varphi)\ \Rightarrow r\frac{\partial u}{\partial r}=rV'(r)\Phi(\varphi)$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)=V'(r)\Phi(\varphi)+rV''(r)\Phi(\varphi)=\left[V'(r)+rV''(r)\right]\Phi(\varphi)$$

Phương trình Laplace trở thành: $\frac{\left[V'(r)+rV''(r)\right]\Phi(\varphi)}{r}+\frac{V(r)\Phi''(\varphi)}{r^2}=0$

$$\Rightarrow\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\frac{r\left[V'(r)+rV''(r)\right]}{-V(r)}\Rightarrow\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\frac{r^2V''(r)+rV'(r)}{-V(r)}=-\lambda=\text{const}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0 & (1)\\ r^2V''(r)+rV'(r)-\lambda V(r)=0 & (2)\end{cases}$$

Ta có: $u(r,\varphi)=u(r,\varphi+2\pi)\ \Rightarrow\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)$

$\Rightarrow$ Hàm $\Phi(\varphi)$ tuần hoàn có chu kỳ $T=2\pi$

Giải phương trình (1):

- Trường hợp 1: $\lambda=0\ \Rightarrow\Phi(\varphi)=A\varphi+B$

  Vì $\Phi(\varphi)$ tuần hoàn với chu kỳ $T=2\pi$ nên $A=0\ \Rightarrow\Phi_0(\varphi)=B$

  Từ phương trình (2) $\Rightarrow\frac{V''(r)}{V'(r)}=-\frac{1}{r}\ \Rightarrow\ln\left[V'(r)\right]=-\ln r+\ln C_1\ \Leftrightarrow V'(r)=\frac{C_1}{r}$

  $\Rightarrow V_0(r)=C_1\ln r+C_2$

Lee Ein

Vậy $u_0(r,\varphi) = B(C_1 \ln r + C_2) = \dfrac{a_0}{2} + \dfrac{b_0 \ln r}{2}$

- Trường hợp 2: $\lambda < 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = Ae^{\alpha\varphi} + Be^{-\alpha\varphi}$ với $\alpha = \sqrt{-\lambda}$

  Vì $\Phi(\varphi)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$ nên $A = B = 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = 0$

  $\Rightarrow u(r,\varphi) = 0$ (loại)

- Trường hợp 3: $\lambda > 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = A\cos\alpha\varphi + B\sin\alpha\varphi$ với $\alpha = \sqrt{\lambda}$

  Vì $\Phi(\varphi)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$ nên $\alpha = n = 1,2,3,...$

  $\Rightarrow \Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi$ với $\lambda = n^2$

  Từ phương trình (2) $\Rightarrow r^2 V''(r) + rV'(r) - n^2 V(r) = 0$

  Phương trình này có 2 nghiệm độc lập tuyến tính: r^n và r^{-n}

  $\Rightarrow V_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}$

Vậy nhiệt độ dừng trên hình vành khăn tâm O là:

$$\boxed{u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \frac{b_0 \ln r}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(C_n r^n + D_n r^{-n}\right)\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right)}$$

Ta có:

$$u\big|_{r=1} = u_1 \Rightarrow u_1 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(C_n + D_n\right)\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u_1 d\varphi = 2u_1 \\ \left(C_n + D_n\right)A_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u_1 \cos n\varphi d\varphi = \dfrac{u_1 \sin n\varphi}{n\pi}\Bigg|_0^{2\pi} = 0 \quad \text{(I)} \\ \left(C_n + D_n\right)B_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u_1 \sin n\varphi d\varphi = -\dfrac{u_1 \cos n\varphi}{n\pi}\Bigg|_0^{2\pi} = 0 \end{cases}$$

$$u\big|_{r=2} = u_2 \Rightarrow u_2 = \frac{a_0}{2} + \frac{b_0 \ln 2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(C_n 2^n + D_n 2^{-n}\right)\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 + b_0 \ln 2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u_2 d\varphi = 2u_2 \\ \left(C_n 2^n + D_n 2^{-n}\right)A_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u_2 \cos n\varphi d\varphi = 0 \quad \text{(II)} \\ \left(C_n 2^n + D_n 2^{-n}\right)B_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u_2 \sin n\varphi d\varphi = 0 \end{cases}$$

Lee Ein

Từ hệ phương trình (I) và (II), ta tính được: $\begin{cases} a_0 = 2u_1 \\ b_0 = \dfrac{2(u_2 - u_1)}{\ln 2} \\ A_n = B_n = C_n = D_n = 0 \end{cases}$

Đáp số: $\boxed{u(r,\varphi) = u_1 + (u_2 - u_1)\ln\frac{r}{2}}$

* Sử dụng phương pháp đồng nhất 2 vế cũng ra được kết quả ngay mà không cần phải giải hệ phương trình. Nhìn các điều kiện không có hàm sin hoặc cos mà chỉ là u_1 và u_2 là các giá trị hằng số, cho nên ta được ngay $A_n = B_n = C_n = D_n = 0$, lúc đó chỉ cần giải quyết a_0 và b_0 theo hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{a_0}{2} = u_1 \\ \dfrac{a_0}{2} + \dfrac{b_0 \ln 2}{2} = u_2 \end{cases}$

* Ngoài ra, bài toán có thể tính trực tiếp:

Vì $u\big|_{r=1} = u_1$ và $u\big|_{r=2} = u_2$ là hằng số $\Rightarrow u(r,\varphi) = f(r)$ không phụ thuộc vào φ.

Phương trình Laplace: $\Delta u(r,\varphi) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial f}{\partial r}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial r} = \dfrac{C_1}{r} \Rightarrow f(r) = C_1 \ln r + C_2$

Ta có: $\begin{cases} f(1) = C_2 = u_1 \\ f(2) = C_1 \ln 2 + C_2 = u_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{u_2 - u_1}{\ln 2} \\ C_2 = u_1 \end{cases} \Rightarrow u(r,\varphi) = f(r) = u_1 + (u_2 - u_1)\ln\dfrac{r}{2}$

Bài 7: Tìm nhiệt độ dừng $u(r,\varphi)$ trên một hình vành khăn tâm O bán kính trong và ngoài là $R_1 = 1$ và $R_2 = 2$ biết rằng nhiệt độ trên biên cho bởi $u(1,\varphi) = 0$ và $u(2,\varphi) = 5 + 3\sin\varphi$ với $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Phương trình Laplace: $\Delta u(r,\varphi) = 0$ với $\begin{cases} \forall\varphi \in [0;2\pi] \\ 1 \le r \le 2 \end{cases}$

Với $u\big|_{r=1} = 0$ và $u\big|_{r=2} = 5 + 3\sin\varphi$

Trong tọa độ cực: $\Delta u(r,\varphi) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$

Xét $u(r,\varphi) = V(r)\Phi(\varphi)$

Ta có: $\dfrac{\partial u}{\partial r} = V'(r)\Phi(\varphi) \Rightarrow r\dfrac{\partial u}{\partial r} = rV'(r)\Phi(\varphi)$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = V'(r)\Phi(\varphi) + rV''(r)\Phi(\varphi) = \left[V'(r) + rV''(r)\right]\Phi(\varphi)$$

Phương trình Laplace trở thành: $\dfrac{\left[V'(r)+rV''(r)\right]\Phi(\varphi)}{r} + \dfrac{V(r)\Phi''(\varphi)}{r^2} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \frac{r\left[V'(r)+rV''(r)\right]}{-V(r)} \Rightarrow \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \frac{r^2V''(r)+rV'(r)}{-V(r)} = -\lambda = \text{const}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0 & (1) \\ r^2V''(r) + rV'(r) - \lambda V(r) = 0 & (2) \end{cases}$$

Ta có: $u(r,\varphi) = u(r,\varphi+2\pi) \Rightarrow \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi+2\pi)$

$\Rightarrow$ Hàm $\Phi(\varphi)$ tuần hoàn có chu kỳ $T = 2\pi$

Giải phương trình (1):

- Trường hợp 1: $\lambda = 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = A\varphi + B$

  Vì $\Phi(\varphi)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$ nên $A = 0 \Rightarrow \Phi_0(\varphi) = B$

  Từ phương trình (2) $\Rightarrow \dfrac{V''(r)}{V'(r)} = -\dfrac{1}{r} \Rightarrow \ln\left[V'(r)\right] = -\ln r + \ln C_1 \Leftrightarrow V'(r) = \dfrac{C_1}{r}$

  $\Rightarrow V_0(r) = C_1 \ln r + C_2$

  Vậy $u_0(r,\varphi) = B(C_1 \ln r + C_2) = \dfrac{a_0}{2} + \dfrac{b_0 \ln r}{2}$

- Trường hợp 2: $\lambda < 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = Ae^{\alpha\varphi} + Be^{-\alpha\varphi}$ với $\alpha = \sqrt{-\lambda}$

  Vì $\Phi(\varphi)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$ nên $A = B = 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = 0$

  $\Rightarrow u(r,\varphi) = 0$ (loại)

- Trường hợp 3: $\lambda > 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = A\cos\alpha\varphi + B\sin\alpha\varphi$ với $\alpha = \sqrt{\lambda}$

  Vì $\Phi(\varphi)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$ nên $\alpha = n = 1,2,3,...$

  $\Rightarrow \Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi$ với $\lambda = n^2$

  Từ phương trình (2) $\Rightarrow r^2V''(r) + rV'(r) - n^2V(r) = 0$

  Phương trình này có 2 nghiệm độc lập tuyến tính: r^n và r^{-n}

  $\Rightarrow V_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}$

Vậy nhiệt độ dừng trên hình vành khăn tâm O là:

$$\boxed{u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \frac{b_0 \ln r}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(C_n r^n + D_n r^{-n}\right)\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right)}$$

Ta có:

$$u\big|_{r=1} = 0 \Rightarrow 0 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(C_n + D_n\right)\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right)$$

Lee Ein

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} 0 d\varphi = 0 \\ \left(C_n + D_n\right)A_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} 0\cos n\varphi d\varphi = 0 \quad \text{(I)} \\ \left(C_n + D_n\right)B_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} 0\sin n\varphi d\varphi = 0 \end{cases}$$

$$u\big|_{r=2} = 5 + 3\sin\varphi \Rightarrow 5 + 3\sin\varphi = \frac{a_0}{2} + \frac{b_0 \ln 2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(C_n 2^n + D_n 2^{-n}\right)\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 + b_0 \ln 2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(5 + 3\sin\varphi\right)d\varphi = 10 \\ \left(C_n 2^n + D_n 2^{-n}\right)A_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(5 + 3\sin\varphi\right)\cos n\varphi d\varphi \quad \text{(II)} \\ \left(C_n 2^n + D_n 2^{-n}\right)B_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(5 + 3\sin\varphi\right)\sin n\varphi d\varphi \end{cases}$$

Từ hệ phương trình (I) và (II), ta tính được: $\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = \dfrac{10}{\ln 2} \\ n = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = \dfrac{10}{\ln 2} \\ A_1 = 0 \\ C_1 + D_1 = 0 \\ B_1\left(2C_1 + \dfrac{D_1}{2}\right) = 3 \end{cases}$

* Có thể sử dụng phương pháp đồng nhất 2 vế để giải quyết bài toán nhanh hơn*

------------------------ The End --------------------

Chúc các bạn thi tốt

Lee Ein