ĐỀ THI TOÁN CHUYÊN NGÀNH 2017 – 2018

Câu 1. Tìm chuỗi Laurent của hàm $f(z) = \frac{2z+1}{z^2-7z+10}$

a. Trong miền: $2 < |z| < 5$

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2-7z+10} = \frac{2z+1}{(z-2)(z-5)} = -\frac{5}{3(z-2)} + \frac{11}{3(z-5)}$$

Với $|z| < 5 \Leftrightarrow \left|\frac{z}{5}\right| < 1$ ta có:

$$\frac{1}{z-5} = -\frac{1}{5}.\frac{1}{1-\frac{z}{5}} = -\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{5}\right)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{5^{n+1}}$$

Với $|z| > 2 \Leftrightarrow \left|\frac{2}{z}\right| < 1$ ta có:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}.\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$$

$$f(z) = \frac{2z+3}{z^2+z-6} = -\frac{5}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} - \frac{11}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{5^{n+1}}$$

ĐỀ THI TOÁN CHUYÊN NGÀNH 2017 – 2018

Câu 1. Tìm chuỗi Laurent của hàm $\boldsymbol{f(z)=\frac{2z+1}{z^2-7z+10}}$

b. Trong miền $\boldsymbol{1<|z-3|<2}$

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2-7z+10}=\frac{2z+1}{(z-2)(z-5)}=-\frac{5}{3(z-2)}+\frac{11}{3(z-5)}$$

Với $|z-3|>1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{z-3}\right|<1$ ta có:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-3+1}=\frac{1}{z-3}.\frac{1}{1+\frac{1}{z-3}}=\frac{1}{z-3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(z-3)^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(z-3)^{n+1}}$$

Với $|z-3|<2 \Leftrightarrow \frac{z-3}{2}<1$ ta có:

$$\frac{1}{z-5}=\frac{1}{z-3-2}=-\frac{1}{2}.\frac{1}{1-\frac{z-3}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-3}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-3)^n}{2^{n+1}}$$

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2-7z+10}=-\frac{5}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(z-3)^{n+1}}-\frac{11}{3}$$

ĐỀ THI TOÁN CHUYÊN NGÀNH 2017 – 2018

Câu 1. Tìm chuỗi Laurent của hàm $f(z)=\frac{2z+1}{z^2-7z+10}$

c. Trong miền $\sqrt{5}<|z-i|<\sqrt{26}$

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2-7z+10}=\frac{2z+1}{(z-2)(z-5)}=-\frac{5}{3(z-2)}+\frac{11}{3(z-5)}$$

Với $|z-i|>\sqrt{5}\Leftrightarrow\left|\frac{2-i}{z-i}\right|<1$ ta có:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-i-(2-i)}=\frac{1}{z-i}.\frac{1}{1-\frac{2-i}{z-i}}=\frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2-i}{z-i}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2-i)^n}{(z-i)^{n+1}}$$

Với $|z-i|<\sqrt{26}\Leftrightarrow\left|\frac{z-i}{5-i}\right|<1$

$$\frac{1}{z-5}=\frac{1}{z-i-(5-i)}=-\frac{1}{5-i}.\frac{1}{1-\frac{z-i}{5-i}}=-\frac{1}{5-i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-i}{5-i}\right)^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-i)^n}{(5-i)^{n+1}}$$

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2-7z+10}=-\frac{5}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2-i)^n}{(z-i)^{n+1}}-\frac{11}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-i)^n}{(5-i)^{n+1}}$$

ĐỀ THI TOÁN CHUYÊN NGÀNH 2017 – 2018

Câu 2. Sử dụng thặng dư tính tích phân sau:

$$\boldsymbol{I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x cos3x}{x^2 + 6x + 12} dx}$$

Ta có:

$$I = Re \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{j3x}}{x^2 + 6x + 12} dx$$

Tìm các cực điểm của $R(z) = \frac{z}{z^2+6z+12}$

Giải phương trình $z^2 + 6z + 12 = 0$ ta có 2 nghiệm là $z = -3 \pm \sqrt{3}j$

Cực điểm $z = -3 + j\sqrt{3}$ nằm trong nữa mặt phẳng trên.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{j3x}}{x^2 + 6x + 12} dx = 2\pi j. Res\left[\frac{z e^{j3z}}{z^2 + 6z + 12}, -3 + \sqrt{3}j\right] = 2\pi j \left.\frac{z e^{j3z}}{2z + 6}\right|_{-4+2j} = 2\pi j \frac{\left(-3 + \sqrt{3}j\right) e^{-3\sqrt{3}-9j}}{2\sqrt{3}j}$$

$$= -\frac{\pi\sqrt{3}}{3} e^{-3\sqrt{3}}\left[3cos9 + \sqrt{3}sin(-9)\right] + j\frac{\pi\sqrt{3}}{3} e^{-3\sqrt{3}}\left[\sqrt{3}cos9 - 3\sin(-9)\right]$$

Từ đó suy ra

$$I = -\frac{\pi\sqrt{3}}{3} e^{-3\sqrt{3}}\left[3cos9 + \sqrt{3}sin(-9)\right]$$

ĐỀ THI TOÁN CHUYÊN NGÀNH 2017 – 2018

Câu 4. Sử dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình sau:

$$\boldsymbol{y'' + 6y' + 13y = 2e^{3t}} \text{ **với** } \boldsymbol{y(0) = -3, y'(0) = 1}$$

Lấy Laplace 2 vế ta có:

$$L\{y'' + 6y' + 13y\} = L\{2e^{3t}\}$$

$$\Leftrightarrow L\{y''\} + 6L\{y'\} + 13L\{y\} = \frac{2}{p-3}$$

$$L\{y''\} = p^2Y - py(0) - y'(0) = p^2Y + 3p - 1$$
$$L\{y'\} = pY - y(0) = pY + 3$$
$$L\{y\} = Y$$

$$\Leftrightarrow p^2Y + 3p + 6pY + 17 + 13Y = \frac{2}{p-3}$$

$$\Leftrightarrow (p^2 + 6p + 13)Y = \frac{-3p^2-8p+}{p-3}$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{-3p^2-8p+5}{(p-3)(p^2+6p+1\ \ )} = \frac{1}{8}.\frac{1}{p-3} - \frac{1}{8}.\frac{25p+145}{p^2+6p+1}$$

$$= \frac{1}{8}.\frac{1}{p-3} - \frac{25}{8}.\frac{(p+3)}{(p+3)^2+4} - \frac{35}{8}.\frac{2}{(p+3)^2+2^2}$$

Vậy $f(t) = L^{-1}\{Y\} = \frac{1}{8}e^{3t} - e^{-3t}\left(\frac{25}{8}cos2t + \frac{35}{8}sin2t\right)$