$$f(t)=\int_0^t 2\sin(t+\tau)d\tau+\int_0^t \sin(t-3\tau)d\tau$$

$$=-\cos(t+\tau)\Big|_0^t+\frac{\cos(t-3\tau)}{3}\Bigg|_0^t=\cos t-\cos 2t+\frac{1}{3}\cos 2t-\frac{1}{3}\cos t$$

$$=\frac{2}{3}\cos t-\frac{2}{3}\cos 2t$$

§19. ỨNG DỤNG CỦA PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG

1. Phương pháp chung: Giả sử ta cần tìm nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng:

$$a_o\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n x=f(t) \qquad (1)$$

thoả mãn các điều kiện ban đầu:

$$x(0)=x_o,\ x'(0)=x_1,\ldots,\ x^{(n-1)}(0)=x_{n-1} \qquad (2)$$

với giả thiết $a_o \neq 0$, hàm f(t), nghiệm x(t) cùng các đạo hàm tới cấp n của nó đều là các hàm gốc.

Để tìm nghiệm của bài toán trên ta làm như sau:

- Trước hết ta lập phương trình ảnh của (1) bằng cách gọi X(p) là ảnh của x(t), F(p) là ảnh của f(t). Theo công thức đạo hàm gốc ta có:

$x'(t) = pX(p) - x_o$

$x''(t) = p^2X(p) - px_o - x_1$

…

$x^{(n)}(t) = p^nX(p) - p^{n-1}x_o - \cdots - x_{n-1}$

Lấy ảnh hai vế của (1) ta có phương trình đối với ảnh X(p):

$$(a_op^n + a_1p^{n-1} + \cdots + a_n)X(p) = F(p) + x_o(a_op^{n-1} + a_1p^{n-2} + \cdots + a_{n-1})$$
$$+ x_1(a_op^{n-1} + a_1p^{n-2} + \cdots + a_{n-1}) +\cdots + x_{n-1}a_o$$

hay:

$$A(p).X(p) = F(p) + B(p) \qquad (3)$$

Trong đó A(p) và B(p) là các đa thức đã biết. Giải (3) ta có:

$$X(p)=\frac{F(p)+B(p)}{A(p)} \qquad (4)$$

- Sau đó tìm gốc của X(p) ta được nghiệm của phương trình

Ví dụ 1: Tìm nghiệm của phương trình $x'' - 2x' + 2x = 2e^t\cos t$ thoả mãn điều kiện đầu $x(0) = x'(0) = 0$

Đặt $x(t) \leftrightarrow X(p)$ thì $x'(t) \leftrightarrow pX(p)$ và $x''(t) \leftrightarrow p^2X(p)$.

Mặt khác $2e^t\cos t\leftrightarrow\frac{2(p-1)}{(p-1)^2+1}=\frac{2(p-1)}{p^2-2p+2}$. Thay vào phương trình ta có:

$$p^2X - 2pX + 2X = \frac{2(p-1)}{p^2 - 2p + 2}$$

hay

$$(p^2 - 2p + 2)X = \frac{2(p-1)}{p^2 - 2p + 2}$$

Giải ra ta được:

$$X = \frac{2(p-1)}{(p^2 - 2p + 2)^2}$$

Dùng phép biến đổi ngược ta có:

$x(t) = te^t\sin t$

Ví dụ 2: Tìm nghiệm của phương trình x" - x = 4sint + 5cos3t thoả mãn các điều kiện ban đầu x(0) = -1, x'(0) = -2

Đặt $x(t) \leftrightarrow X(p)$ thì $x''(t) \leftrightarrow p^2X + p + 2$. Mặt khác $5\cos 2t \leftrightarrow \frac{5p}{p^2 + 4}$ và $4\sin t \leftrightarrow \frac{4}{p^2 + 1}$. Thay vào phương trình trên ta được:

$$p^2X + p + 2 - X = \frac{4}{p^2 + 1} + \frac{5p}{p^2 + 4}$$

nên:

$$X = \frac{4}{(p^2+1)(p^2-1)} + \frac{5p}{(p^2+4)(p^2-1)} - \frac{p+2}{p^2-1}$$

$$= \frac{2}{p^2-1} - \frac{2}{p^2+1} + \frac{p}{p^2-1} - \frac{p}{p^2+4} - \frac{p+2}{p^2-1}$$

$$= -\frac{2}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+4}$$

Dùng phép biến đổi ngược ta được:

$x(t) = -2\sin t - \cos 2t$

Ví dụ 3: Tìm nghiệm của phương trình $x'' + 4x' + 4x = t^3e^{-2t}$ thoả mãn các điều kiện ban đầu x(0) = 1, x'(0) = 2.

Đặt $x(t) \leftrightarrow X(p)$ thì $x'(t) \leftrightarrow pX - 1$, $x''(t) \leftrightarrow p^2X - p - 2$. Mặt khác $t^3e^{-2t} \leftrightarrow \frac{3!}{(p+2)^4} = \frac{6}{(p+2)^4}$. Thay vào phương trình trên ta được:

$$p^2X - p - 2 + 4pX - 4 + 4X = \frac{6}{(p+2)^4}$$

Như vậy:

$$X = \frac{6}{(p+2)^6} + \frac{p+6}{(p+2)^2} = \frac{6}{(p+2)^6} + \frac{4}{(p+2)^2} + \frac{1}{p+2}$$

Vậy $x(t) = x(t) = e^{-2t} + 4te^{-2t} + \frac{1}{20}t^5e^{-2t} = e^{-2t}\left(1 + 4t + \frac{t^5}{20}\right)$

Ví dụ 4: Tìm nghiệm của phương trình $x^{(4)} + 2x'' + x = \sin t$ thoả mãn các điều kiện ban đầu $x(0) = x'(0) = x''(0) = x^{(3)}(0) = 0$.

Đặt $x(t) \leftrightarrow X(p)$ thì: $x''(t) \leftrightarrow p^2X$, $x^{(4)}(t) \leftrightarrow p^4X$. Mặt khác $\sin t \leftrightarrow \frac{1}{p^2+1}$.

Thay vào phương trình trên ta được:

$$(p^4 + 2p^2 + 1)X = \frac{1}{p^2+1}$$

$$X = \frac{1}{(p^2+1)(p^4+2p^2+1)} = \frac{1}{(p^2+1)^3} = \frac{1}{(p-j)^3(p+j)^3}$$

Hàm $X(p)e^{pt}$ có hai điểm cực cấp 3 là j và -j. Ta tính thặng dư tại các cực điểm đó:

$$\text{Res}[X(p)e^{pt}, j] = \frac{1}{2}\lim_{p\to j}\left[\frac{e^{pt}}{(p+j)^3}\right]'' = \frac{1}{2}\lim_{p\to j}\left[\frac{12e^{pt}}{(p+j)^5} - \frac{6te^{pt}}{(p+j)^4} + \frac{t^2e^{pt}}{(p+j)^3}\right]$$

$$= \frac{e^{jt}}{16}\left[-3t + j(t^2-3)\right]$$

$$\text{Res}[X(p)e^{pt}, -j] = \frac{1}{2}\lim_{p\to -j}\left[\frac{e^{pt}}{(p-j)^3}\right]'' = \frac{1}{2}\lim_{p\to -j}\left[\frac{12e^{pt}}{(p-j)^5} - \frac{6te^{pt}}{(p-j)^4} + \frac{t^2e^{pt}}{(p-j)^3}\right]$$

$$= \frac{e^{-jt}}{16}\left[-3t - j(t^2-3)\right]$$

Theo công thức tìm gốc của phân thức hữu tỉ ta có:

$$x(t) = \text{Res}[X(p)e^{pt}, j] + \text{Res}[X(p)e^{pt}, -j]$$

$$= \frac{e^{jt}}{16}\left[-3t + j(t^2-3)\right] + \frac{e^{-jt}}{16}\left[-3t - j(t^2-3)\right]$$

$$= \frac{e^{jt}}{16}\left[-3t + j(t^2-3)\right] + \frac{e^{jt}}{16}\left[-3t + j(t^2-3)\right]$$

$$= 2\,\text{Re}\left\{\frac{e^{jt}}{16}\left[-3t + j(t^2-3)\right]\right\} = -\frac{3}{8}t\cos t + \frac{3-t^2}{8}\sin t$$

Ví dụ 5: Tìm nghiệm của phương trình $x'' + x = e^t$ thoả mãn các điều kiện ban đầu $x(1) = x'(1) = 1$.

Các điều kiện ban đầu ở đây không phải cho tại t = 0 mà tại t = 1. Vì vậy ta phải biến đổi để quy về trường hợp trên. Ta đặt $t = \tau + 1$, $x(t) = x(\tau + 1) = y(\tau)$, Vậy $x'(t) = y'(\tau)$, $x''(t) = y''(\tau)$. Bài toán được đưa về tìm nghiệm của phương trình:

$$y''(\tau) + y(\tau) = e^{\tau+1}$$

thoả mãn $y(0) = 1$ và $y'(0) = 0$

Gọi Y(p) là ảnh của y(τ). Vậy y"(τ) ↔ p^2Y(p) - p. Mặt khác $e^{\tau+1} = e.e^{\tau} \leftrightarrow \frac{e}{p-1}$

Vậy phương trình ảnh là:

$$p^2Y - p + Y = \frac{e}{p-1}$$

Giải phương trình này ta được:

$$Y = \frac{e}{(p-1)(p^2+1)} + \frac{p}{p^2+1} = \frac{e}{2(p-1)} - \frac{e(p+1)}{2(p^2+1)} + \frac{p}{p^2+1}$$

$$= \frac{e}{2(p-1)} + \left(1 - \frac{e}{2}\right)\frac{p}{p^2+1} - \frac{e}{2(p^2+1)}$$

Từ đó ta được:

$$y(\tau) = \frac{e}{2}e^{\tau} + \left(1 - \frac{e}{2}\right)\cos\tau - \frac{e}{2}\sin\tau$$

Trở về biến t ta có:

$$x(y) = \frac{e^t}{2} + \left(1 - \frac{e}{2}\right)\cos(t-1) - \frac{e}{2}\sin(t-1)$$

Ví dụ 6: Tìm nghiệm của phương trình:

$$x' + x = \begin{cases} 1 & 0 < t < 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

thoả mãn điều kiện ban đầu x(0) = 0.

Đặt x(t) ↔ X(p) nên x'(t) ↔ pX(p). Vế phải của phương trình có thể viết được là f(t) = η(t) - η(t - 2). Vậy:

$$f(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}\left(1 - e^{-2p}\right)$$

và phương trình ảnh có dạng:

$$pX + X = \frac{1}{p}\left(1 - e^{-2p}\right)$$

Giải ra ta được:

$$X = \frac{1 - e^{-2p}}{p(p+1)} = \frac{1}{p(p+1)} - \frac{e^{-2p}}{p(p+1)}$$

Do $\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \leftrightarrow 1 - e^{-t}$

nên theo tính chất trễ ta có:

$$e^{-2p}\frac{1}{p(p+1)} \leftrightarrow \eta(t-2)\left[1 - e^{-(t-2)}\right]$$

Vậy: $x(t) = 1 - e^{-t} - \eta(t-2)\left[1 - e^{-(t-2)}\right] = \begin{cases} 1 - e^{-t} & 0 < t < 2 \\ e^{-t}\left(e^2 - 1\right) & t > 2 \end{cases}$

Ví dụ 7: Tìm nghiệm của phương trình:

$$x'' + \omega^2 x = \begin{cases} \sin t & 0 < t < \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$$

thoả mãn các điều kiện ban đầu x(0) = x'(0) = 0.

Đặt $x(t) \leftrightarrow X(p)$, nên $x''(t) \leftrightarrow p^2X(p)$

Trước đây ta đã tìm được ảnh của hàm trong vế phải là:

$$\frac{1}{p^2+1}\left(1+e^{-p\pi}\right)$$

Vậy phương trình ảnh tương ứng là:

$$p^2X + \omega^2X = \frac{1}{p^2+1}\left(1+e^{-p\pi}\right)$$

hay: $$X = \frac{1+e^{-p\pi}}{(p^2+1)(p^2+\omega^2)}$$

Ta xét hai trường hợp:

* nếu $\omega^2 \neq 1$ thì:

$$\frac{1}{(p^2+1)(p^2+\omega^2)} \leftrightarrow \frac{\sin\omega t - \omega\sin t}{\omega(1-\omega^2)}$$

Theo tính chất trễ

$$\frac{e^{-p\pi}}{(p^2+1)(p^2+\omega^2)} \leftrightarrow \eta(t-\pi)\frac{\sin\omega(t-\pi) - \omega\sin(t-\pi)}{\omega(1-\omega^2)}$$

Vây:

$$x(t) = \frac{\sin\omega t - \omega\sin t}{\omega(1-\omega^2)} + \eta(t-\pi)\frac{\sin\omega(t-\pi) - \omega\sin(t-\pi)}{\omega(1-\omega^2)}$$

hay:

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin\omega t - \omega\sin t}{\omega(1-\omega^2)} & 0 < t < \pi \\[2ex] \dfrac{\sin\omega(t-\pi) - \omega\sin(t-\pi)}{\omega(1-\omega^2)} = \dfrac{2\cos\dfrac{\omega\pi}{2}\sin\omega\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\omega(1-\omega^2)} & t > \pi \end{cases}$$

* nếu $\omega^2 = 1$ thì:

$$X = \frac{1+e^{-p\pi}}{(p^2+1)^2}$$

Ta đã biết $\dfrac{1}{(p^2+1)^2} \leftrightarrow \sin t - \dfrac{t\cos t}{2}$

Theo tính chất trễ ta có:

$$\frac{e^{-p\pi}}{(p^2+1)^2} \leftrightarrow \frac{\eta(t-\pi)}{2}\left[\sin(t-\pi) - (t-\pi)\cos(t-\pi)\right]$$

hay: $\dfrac{e^{-p\pi}}{(p^2+1)^2} \leftrightarrow \dfrac{\eta(t-\pi)}{2}\left[(t-\pi)\cos t - \sin t\right]$

Vậy:

$$x(t) = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t) + \frac{1}{2}\eta(t-\pi)\left[(t-\pi)\cos t - \sin t\right]$$

hay:

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(\sin t - t\cos t) & 0 < t < \pi \\ -\dfrac{\pi\cos t}{2} & t > \pi \end{cases}$$

Ví dụ 8: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x' + x - y = e^t \\ y' + 3x - y = 3e^t \end{cases}$$

thoả mãn điều kiện đầu x(0) = 1, y(0) = 1

Đặt $x(t) \leftrightarrow X(p)$, $y(t) \leftrightarrow Y(p)$ nên x'(t) = pX - 1, y'(t) = pY - 1. Thay vào ta có hệ phương trình ảnh:

$$\begin{cases} pX - 1 + X - Y = \dfrac{1}{p-1} \\ pY - 1 + 3X - 2Y = \dfrac{2}{p-1} \end{cases}$$

hay:

$$\begin{cases} (p+1)X - Y = \dfrac{1}{p-1} + 1 \\ 3X + (p-2)Y = \dfrac{2}{p-1} + 1 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được:

$$X = \frac{1}{p-1}; \quad Y = \frac{1}{p-1}$$

Vậy: $x(t) = e^t$ và $y(t) = e^t$

Ví dụ 9: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x'' - x + y + z = 0 \\ x + y'' - y + z = 0 \\ x + y + z'' - z = 0 \end{cases}$$

Thoả mãn các điều kiện đầu x(0) = 1, y(0) = z(0) = x'(0) = y'(0) = z'(0) = 0.

Đặt $x(t) \leftrightarrow X(p) \Rightarrow x'' \leftrightarrow p^2X - p$

$y(t) \leftrightarrow Y(p) \Rightarrow y'' \leftrightarrow p^2Y$

$z(t) \leftrightarrow Z(p) \Rightarrow z'' \leftrightarrow p^2Z$

Do đó hệ phương trình đối với các ảnh là:

$$\begin{cases}(p^2-1)X+Y+Z=p\\ X+(p^2-1)Y+Z=0\\ X+Y+(p^2-1)Z=0\end{cases}$$

Giải hệ này ta có:

$$X=\frac{p^3}{(p^2+1)(p^2-2)}$$

$$Y=Z=-\frac{p}{(p^2+1)(p^2-2)}$$

Như vậy:

$$x(t)=\frac{2}{3}\text{ch}\left(\sqrt{2}t\right)+\frac{1}{3}\cos t$$

$$y(t)=z(t)=-\frac{1}{3}\text{ch}\left(\sqrt{2}t\right)+\frac{1}{3}\cos t$$

2. Dùng công thức Duhamel: Nếu biết nghiệm $x_1(t)$ của phương trình:

$$a_o x_1''+a_1x_1'+a_2x_1=1 \tag{5}$$

thoả mãn các điều kiện ban đầu thuần nhất $x(0) = x'(0) = 0$ thì công thức mà ta thiết lập dưới đây dựa vào công thức Duhamel sẽ cho ta nghiệm $x(t)$ của phương trình:

$$a_o x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t) \tag{6}$$

thoả mãn các điều kiện ban đầu thuần nhất $x(0) = x'(0) = 0$.

Ta có công thức:

$$x(t)=x_1'*f=\int_0^{\tau}f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau=\int_0^{\tau}f(t-\tau)x_1'(\tau)d\tau$$

Chứng minh: Đặt $x_1(t) \leftrightarrow X_1(p)$, $x(t) \leftrightarrow X(p)$, $f(t) \leftrightarrow F(p)$. Hàm $X_1(p)$ thoả mãn phương trình ảnh của (5) là:

$$(a_o p^2+a_1p+a_2)X_1(p)=\frac{1}{p} \tag{7}$$

Hàm $X(p)$ thoả mãn phương trình ảnh của (6) là:

$$(a_o p^2+a_1p+a_2)X(p)=F(p) \tag{8}$$

Từ (7) và (8) suy ra:

$$pX_1(p)=\frac{X(p)}{F(p)} \text{ hay } X(p)=pX_1(p).F(p)$$

Theo công thức tích phân Duhamel ta có:

$$X(p) \leftrightarrow x_1(t).f(0) + x_1'*f$$

Vì $x_1(0) = 0$ nên $X(p) \leftrightarrow x_1'*f$

nghĩa là:

$$x(t) = x_1' * f = \int_0^{\tau} f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau = \int_0^{t} f(t-\tau)x_1'(\tau)d\tau \qquad (9)$$

Ta cũng có thể dùng công thức Duhamel thứ 2:

$$x(t) = x_1(t)f(0) = \int_0^{\tau} x_1(\tau)f(t-\tau)d\tau \qquad (10)$$

Ví dụ 1: Tìm nghiệm của phương trình:

$$x'' + x' = e^{-t^2}$$

thoả mãn điều kiện đầu x(0) = x'(0) = 0.

Ta thấy nghiệm của phương trình x'' + x' = 1 với điều kiện đầu x(0) = x'(0) = 0 là $x_1(t)$ = 1 - cost. Vậy theo (9) thì nghiệm của phương trình ban đầu là:

$$x(t) = \int_0^{t} e^{-(t-\tau)^2} \sin\tau d\tau$$

Ví dụ 2: Tìm nghiệm của phương trình x'' + x = $5t^2$ với điều kiện đầu là x(0) = x'(0) = 0

Trong ví dụ trên ta có $x_1(t)$ = 1 - cost. Vậy:

$$x(t) = \int_0^{t} 5t^2 \sin(t-\tau)d\tau = 5(t^2 - 2 + 2\cos t)$$

§20. BẢNG ĐỐI CHIẾU ẢNH - GỐC

Tt	f(t)	F(p)	Tt	f(t)	F(p)
1	1	$\frac{1}{p}$	21	$te^{at}\cos mt$	$\frac{(p-a)^2 - m^2}{[(p-a)^2 + m^2]^2}$
2	t	$\frac{1}{p^2}$	22	$te^{at}\text{sh}mt$	$\frac{2m(p-a)}{[(p-a)^2 - m^2]^2}$
3	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	23	$te^{at}\text{ch}mt$	$\frac{(p-a)^2 + m^2}{[(p-a)^2 - m^2]^2}$
4	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	24	1-cosmt	$\frac{m^2}{p(p^2 + m^2)}$
5	e^{at} - 1	$\frac{a}{p(p-a)}$	25	f(t)sinmt	$\frac{1}{2}[F(p-jm) - F(p+jm)]$
6	te^{at}	$\frac{1}{(p-a)^2}$	26	f(t)cosmt	$\frac{1}{2}[F(p-jm) + F(p+jm)]$
7	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	27	f(t)shmt	$\frac{1}{2}[F(p-m) - F(p+m)]$
8	sinmt	$\frac{m}{p^2 + m^2}$	28	f(t)chmt	$\frac{1}{2}[F(p-m) + F(p+m)]$

9	cosmt	$\frac{p}{p^2+m^2}$	29	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$
10	shmt	$\frac{m}{p^2-m^2}$	30	$\frac{e^{-\frac{t}{a}}-e^{-\frac{t}{b}}}{a-b}$	$\frac{1}{(ap+1)(bp+1)}$
11	chmt	$\frac{p}{p^2-m^2}$	31	$(1+at)e^{at}$	$\frac{p}{(p-a)^2}$
12	e^{at}sinmt	$\frac{m}{(p-a)^2+m^2}$	32	$\frac{e^{a}-at-1}{a^2}$	$\frac{1}{(p-a)p^2}$
13	e^{at}cosmt	$\frac{p-a}{(p-a)^2+m^2}$	33	$\cos^2 mt$	$\frac{p^2+2m^2}{p(p^2+4m^2)}$
14	e^{at}shmt	$\frac{m}{(p-a)^2-m^2}$	34	$\sin^2 mt$	$\frac{2m^2}{p(p^2+4m^2)}$
15	e^{at}chmt	$\frac{p-a}{(p-a)^2-m^2}$	35	$ch^2 mt$	$\frac{p^2-2m^2}{p(p^2-4m^2)}$
16	tsinmt	$\frac{2pm}{(p^2+m^2)^2}$	36	$sh^2 t$	$\frac{2m^2}{p(p^2-4m^2)}$
17	tcosmt	$\frac{p^2-m^2}{(p^2+m^2)^2}$	37	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{t}$	$\ln\frac{p-b}{p-a}$
18	tshmt	$\frac{2pm}{(p^2-m^2)^2}$	38	$\frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p+a}}$
19	tchmt	$\frac{p^2+m^2}{(p^2-m^2)^2}$	20	$te^{at}\sin mt$	$\frac{2m(p-a)}{[(p-a)^2+m^2]^2}$