GIẢI ĐỀ THI LÝ THUYẾT TRƯỜNG ĐIỆN TỪ 2019 – 2020

Câu 1 (2019 – 2020): Cho trường vector

$$\vec{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{r cos\theta})\overrightarrow{\boldsymbol{\iota_r}} + (\boldsymbol{r sin\ \theta})\overrightarrow{\boldsymbol{\iota_\theta}} + (\boldsymbol{r sin\ \theta cos\varphi})\overrightarrow{\boldsymbol{\iota_\varphi}}$$

a. Tính div của $\vec{A}$.

Ta có:

$$div\ \vec{A} = \nabla.\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{rsin\ \theta}\frac{\partial(\sin\theta\ A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{rsin\ \theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

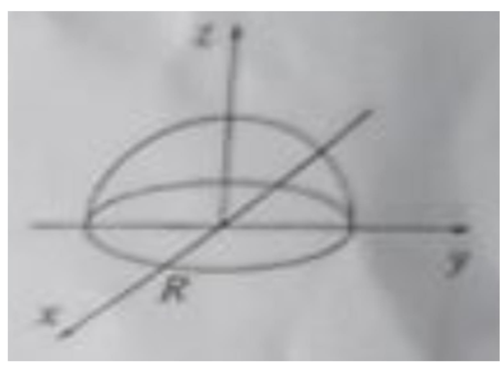
$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 rcos\theta)}{\partial r} + \frac{1}{rsin\ \theta}\frac{\partial(\sin\theta\ rsin\ \theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{rsin\ \theta}\frac{\partial(rsin\ \theta cos\varphi)}{\partial\varphi}$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^3 cos\theta)}{\partial r} + \frac{1}{rsin\ \theta}\frac{\partial(rsin^2\ \theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{rsin\ \theta}\frac{\partial(rsin\ \theta cos\varphi)}{\partial\varphi}$$

$$= 5\cos\theta - \sin\varphi$$

b. Nghiệm lại định lý divergence trong thể tích V là ½ khối cầu bán kính R, có tâm ở gốc tọa độ (hình vẽ).

$$\oint_S \vec{\boldsymbol{A}} d\vec{\boldsymbol{S}} = \oint_V \boldsymbol{div}\vec{\boldsymbol{A}}\, \boldsymbol{dV}$$



$$\oint_V div\vec{A}\, dV = \oint_V (5\cos\theta - \sin\varphi) r^2 sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{R} (5\cos\theta - \sin\varphi) r^2 sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{R} r^2 \left(\frac{5}{2} sin2\theta - sin\theta sin\varphi\right) dr d\theta d\varphi$$

$$= \frac{R^3}{3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{5}{2} sin2\theta - sin\theta sin\varphi\right) d\theta d\varphi$$

$$= \frac{R^3}{3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (-\frac{5}{4} cos2\theta + cos\theta sin\varphi)\Big|_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{R^3}{3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{5}{2} - sin\varphi\right) d\varphi = \frac{5}{3}\pi R^3$$

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \oint_{S_1} \vec{A} d\overrightarrow{S_1} + \oint_{S_2} \vec{A} d\overrightarrow{S_2} \text{ với } S_1\text{: mặt bao ngoài}, S_2\text{: mặt đáy}$$

$$\rightarrow d\overrightarrow{S_1} = r^2 sin\theta d\theta d\varphi \overrightarrow{\iota_r}, d\overrightarrow{S_2} = r sin\theta dr d\varphi \overrightarrow{\iota_\theta}$$

$$\oint_{S_1} \vec{A} d\overrightarrow{S_1} = \oint_{S_1} \left[(r cos\theta)\overrightarrow{\iota_r} + (r sin\,\theta)\overrightarrow{\iota_\theta} + (r sin\,\theta cos\varphi)\overrightarrow{\iota_\varphi}\right] r^2 sin\theta d\theta d\varphi \overrightarrow{\iota_r}$$

$$= \oint_{S_1} \frac{r^3 sin2\theta}{2} d\theta d\varphi = \frac{R^3}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} sin2\theta d\theta d\varphi = \frac{R^3}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = \pi R^3$$

$$\oint_{S_2} \vec{A} d\overrightarrow{S_2} = \oint_{S_2} \left[(rcos\theta)\overrightarrow{\iota_r} + (rsin\,\theta)\overrightarrow{\iota_\theta} + (rsin\,\theta cos\varphi)\overrightarrow{\iota_\varphi}\right] rsin\theta drd\varphi\overrightarrow{\iota_\theta}$$

$$= \oint_{S_2} r^2 \sin^2\theta\, drd\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} r^2 drd\varphi \left(chọn\ \theta = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{R^3}{3}\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi R^3}{3}$$

$$\rightarrow \oint_S \vec{A} d\vec{S} = \oint_{S_1} \vec{A} d\overrightarrow{S_1} + \oint_{S_2} \vec{A} d\overrightarrow{S_2} = \pi R^3 + \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{5}{3}\pi R^3 = \oint_V div\vec{A}\, dV$$

<u>Câu 2.</u> Từ hệ phương trình Maxwell, hãy thiết lập: dạng phức của hệ phương trình Maxwell mô tả trường điện từ biến thiên điều hòa theo thời gian và các điều kiện biên phức.

Xét vector $\vec{E}$:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = E_{xm}(x,y,z)\cos[\omega t + \psi_x(x,y,z)]\,\vec{\iota}_x + E_{ym}(x,y,z)\cos[\omega t + \psi_y(x,y,z)]\,\vec{\iota}_y + E_{zm}(x,y,z)\cos[\omega t + \psi_z(x,y,z)]\,\vec{\iota}_z \qquad \mathbf{(1)}$$

Trong đó E_{xm}, E_{ym}, E_{zm}: biên độ (không phụ thuộc vào thời gian t)

ψ_x, ψ_y, ψ_z: pha ban đầu (không phụ thuộc vào thời gian t)

Theo công thức Euler $e^{i\alpha} = \cos\alpha + isin\alpha$

$$\mathbf{(1)} \rightarrow \vec{E}(x,y,z,t) = Re\left\{E_{xm}(x,y,z)e^{i(\omega t+\psi_x)}\vec{\iota}_x + E_{ym}(x,y,z)e^{i(\omega t+\psi_y)}\vec{\iota}_y + E_{zm}(x,y,z)e^{i(\omega t+\psi_z)}\vec{\iota}_z\right\} \quad \mathbf{(2)}$$

⇨ $\vec{E}(x,y,z) = Re\left[\dot{\vec{E}}(x,y,z)e^{i\omega t}\right]$

⇨ $\vec{E}(x,y,z) = E_{xm}(x,y,z)e^{i\psi_x}\vec{\iota}_x + E_{ym}(x,y,z)e^{i\psi_y}\vec{\iota}_y + E_{zm}(x,y,z)e^{i\psi_z}\vec{\iota}_z \ \ \mathbf{(3)}$

Đối với các vector khác của trường điện từ cũng được biểu diễn tương tự

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(x,y,z) = i\omega\vec{E} \qquad (4a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(x,y,z) = i\omega\left(i\omega\vec{E}\right) = -\omega^2\vec{E} \quad (4b)$$

Từ (1), (2) và (4a) suy ra hệ phương trình Maxwell dạng phức:

$$rot\,\dot{\vec{H}} = \dot{\vec{J}} + i\omega\dot{\vec{D}} \quad (5a)$$

$$rot\,\dot{\vec{E}} = -i\omega\dot{\vec{B}} \quad (5b)$$

$$div\,\dot{\vec{B}} = 0 \quad (6a)$$

$$div\,\dot{\vec{D}} = \rho \quad (6b)$$

$$\dot{\vec{D}} = \varepsilon\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{B}} = \mu\dot{\vec{H}}, \dot{\vec{J}} = \gamma\left(\dot{\vec{E}} + \dot{\vec{E}}_s\right) = \gamma\dot{\vec{E}} + \dot{\vec{J}}_s \quad (7)$$

Các điều kiện biên:

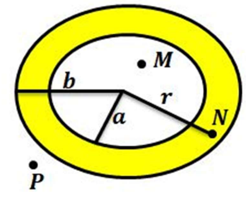
$$\begin{cases} H_{1x} = H_{2x} \\ E_{1x} = E_{2x} \\ \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \\ \bar{\varepsilon}_1 \dot{E}_{1n} = \bar{\varepsilon}_2 \dot{E}_{2n} \end{cases}$$

<u>Câu 3.</u> Xác định:

a) Vector cường độ điện trường tạo bởi một lớp hình cầu đồng tâm có bán kính lần lượt là a,b (a<b), tích điện với mật độ khối $\boldsymbol{\rho = -\frac{\rho_0}{r^2}\,(a < r < b)}$

<u>Giải</u>

Chọn S_1là mặt cầu bán kính $r < a$, S_2là mặt cầu bán kính $a < r < b$, S_3là mặt cầu bán kính $r > b$



$Cường\ độ\ điện\ trường\ tại\ điểm\ M$: $\oint_{S_1} \vec{D}_1 d\vec{S} = \int_{V_1} \rho dV = 0 \rightarrow D_1 = 0$

$$\rightarrow E_1 = 0$$

$Cường\ độ\ điện\ trường\ tại\ điểm\ N$

$$\begin{cases} \oint_{S_2} \vec{D}_2 d\vec{S} = \int_{V_2} \rho dV \\ \oint_{S_2} \vec{D}_2 d\vec{S} = D_2 S_2 = D_2.4\pi r^2 \qquad \rightarrow D_2 = \dfrac{\rho_0(a-r)}{r^2} \rightarrow E_2 = \dfrac{D_2}{\varepsilon\varepsilon_0} \\ \int_{V_2} \rho dV = \int_{V_2} \dfrac{-\rho_0}{r^2}.4\pi r^2 dr = \rho_0.4\pi(a-r) \end{cases}$$

$$= \frac{\rho_0(a-r)}{r^2\varepsilon\varepsilon_0}$$

$Cường\ độ\ điện\ trường\ tại\ điểm\ P$:

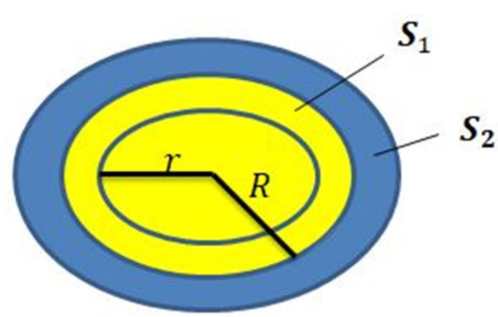
$$\oint_{S_3} \vec{D}_3 d\vec{S} = \int_V \rho dV \rightarrow D_3.4\pi r^2 = \int_a^b -\frac{\rho_0}{r^2}.4\pi r^2 dr = 4\pi\rho_0 r|_b^a = 4\pi\rho_0(a-b)$$

$$\rightarrow D_3 = \frac{\rho_0(a-b)}{r^2} \rightarrow E_3 = \frac{\rho_0(a-b)}{\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$$

b) Điện thế tại một điểm bất kỳ trong không gian của phân bố điện tích đối xứng cầu với mật độ $\rho(r) = \begin{cases} \rho_0\ nếu\ 0 \le r \le R \\ 0\ nếu\ r > R \end{cases}$ $(R\ là\ bán\ kính\ quả\ cầu)$. Xác định cường độ điện trường và điện thế bên trong và bên ngoài quả cầu.

Giải

$Ta\ có$: $\phi_e = \oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = \sum_i q_i$



Chọn S_1 là mặt cầu nằm trong quả cầu tích điện $(r < R)$.

Chọn S_2 là mặt cầu nằm ngoài quả cầu tích điện $(r > R)$.

- Bên trong quả cầu tích điện $(r < R)$. Áp dụng định lý $O - G$ ta có:

$$\begin{cases} \oint_{S_1} \vec{D}_1 d\vec{S} = \int_{V_1} \rho dV \\ \oint_{S_1} \vec{D}_1 d\vec{S} = D_1 S_1 = D_1.4\pi r^2 \quad \rightarrow D_1 = \dfrac{\rho_0 r}{3} \rightarrow E_1 = \dfrac{D_1}{\varepsilon\varepsilon_0} = \dfrac{\rho_0 r}{3\varepsilon\varepsilon_0} \\ \int_{V_1} \rho dV = \int_{V_1} \rho_0 dV = \rho_0.\dfrac{4}{3}\pi r^3 \end{cases}$$

- Bên ngoài quả cầu tích điện $(r > R)$. Áp dụng định lý $O - G$ ta có:

$$\begin{cases} \oint_{S_2} \vec{D}_2 d\vec{S} = \int_{V} \rho dV \\ \oint_{S_2} \vec{D}_2 d\vec{S} = D_2 S_2 = D_2.4\pi r^2 \quad \rightarrow D_2 = \dfrac{\rho_0 R^3}{3r^2} \rightarrow E_2 = \dfrac{D_2}{\varepsilon\varepsilon_0} = \dfrac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0 r^2} \\ \int_{V} \rho dV = \int_{V} \rho_0 dV = \rho_0.\dfrac{4}{3}\pi R^3 \end{cases}$$

- Thế điện bên trong quả cầu:

$$\varphi_1(r) = \int_r^{\infty} \vec{E}\, d\vec{r} = \int_r^{R} \vec{E}_1\, d\vec{r} + \int_R^{\infty} \vec{E}_2\, d\vec{r} = \int_r^{R} E_1\, dr + \int_R^{\infty} E_2\, dr$$

$$= \int_r^{R} \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon\varepsilon_0} dr + \int_R^{\infty} \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho_0}{6\varepsilon\varepsilon_0} r^2\Big|_r^R - \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{r}\Big|_R^{\infty}$$

$$= \frac{\rho_0}{6\varepsilon\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)$$

- Thế điện bên ngoài quả cầu:

$$\varphi_2(r) = \int_r^{\infty} \vec{E}\, d\vec{r} = \int_r^{\infty} \vec{E}_2\, d\vec{r} = \int_r^{\infty} E_2\, dr = \int_r^{\infty} \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{r}\Big|_{\infty}^{r} = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0 r}$$

<u>Câu 5.</u> Xác định

a) Xác định thành phần từ trường của sóng điện từ phẳng, đơn sắc truyền trong chân không, có thành phần điện trường:

$$\boldsymbol{\vec{E} = 40cos(\omega t - \beta z)\vec{i}_x + 30sin(\omega t - \beta z)\vec{i}_y \left(\frac{V}{m}\right)}$$

$$\boldsymbol{Cho\ bi\acute{\hat{e}}t\ \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}10^{-9}\left(\frac{F}{m}\right), \mu_0 = 4\pi.10^{-7}\left(\frac{H}{m}\right)}$$

<u>Giải</u>

$$\vec{E} = 40cos(\omega t - \beta z)\vec{i}_x + 30sin(\omega t - \beta z)\vec{i}_y \left(\frac{V}{m}\right)$$

$$\boldsymbol{\vec{H} = \frac{1}{Z_c}(\vec{i}_z \times \vec{E})}$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{\varepsilon}}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi.10^{-7}.36\pi}{10^{-9}}} = 120\pi$$

$$\left(\vec{i}_z \times \vec{E}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ 40cos(\omega t - \beta z) & 30sin(\omega t - \beta z) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -30sin(\omega t - \beta z)\vec{i}_x + 40cos(\omega t - \beta z)\vec{i}_y$$

$$\rightarrow \vec{H} = \frac{1}{120\pi}\left[-30sin(\omega t - \beta z)\vec{i}_x + 40cos(\omega t - \beta z)\vec{i}_y\right] \ \left(\frac{A}{m}\right)$$

$$\beta = \omega\sqrt{\tilde{\varepsilon}\mu} = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \omega\sqrt{\frac{10^{-9}}{36\pi}.4\pi.10^{-7}} = \frac{\omega}{3}.10^{-8}$$

b) **Tính độ định hướng của anten có cường độ bức xạ:**

$$U = \begin{cases} \sin^2\theta\,, khi\ 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0, các\ trường\ hợp\ khác \end{cases}$$

$$\rightarrow\ U_{max} = 1 \rightarrow D = \frac{4\pi}{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\ sin\theta d\theta d\varphi} = 1.5 = 1.76(dB)$$

Cường độ bức xạ cực đại sẽ gấp 1.5 lần cường độ bức xạ trung bình khi bức xạ rải đều theo mọi hướng