$F'(p) \leftrightarrow -tf(t)$ (26)

Chứng minh: Theo (6) ta có:

$$F'(p) = \int_0^{+\infty} -tf(t)e^{-pt}dt$$

Mặt khác, theo định nghĩa thì:

$$-tf(t) \leftrightarrow \int_0^{+\infty} -tf(t)e^{-pt}dt$$

Vậy: $F'(p) \leftrightarrow -tf(t)$

Sử dụng công thức này liên tiếp ta có:

$$t^n f(t) \leftrightarrow (-1)^n F^{(n)}(p) \quad (27)$$

Một cách tổng quát ta có:

$$t^n \leftrightarrow \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (28)$$

§10. TÍCH PHÂN ẢNH

Nếu tích phân $\int_p^{\infty} F(p)dp$ hội tụ thì nó là ảnh của hàm $\frac{f(t)}{t}$, nghĩa là:

$$\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_p^{\infty} F(p)dp \quad (29)$$

Chứng minh: Ta có:

$$\int_p^{\infty} F(p)dp = \int_p^{\infty} dp \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt \quad (30)$$

Lấy s_1 là một số lớn hơn s_o. Giả sử đường lấy tích phân (p, ∞) nằm hoàn toàn trong nửa mặt phẳng $\mathrm{Re}p \geq 0$. Khi đó ta có:

$$\left| \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt \right| \leq M \int_0^{\infty} e^{-(s_1 - s_o)t}dt$$

Dễ dàng thấy răng tích phân vế phải hội tụ nên tích phân $\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$ hội tụ đều đối với p. Vậy trong (3) ta có thể đổi thứ tự lấy tích phân:

$$\int_p^{\infty} F(p)dp = \int_0^{\infty} f(t)dt \int_p^{\infty} e^{-pt}dp = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-pt}dt$$

Hay: $\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_p^{\infty} F(p)dp$

Ví dụ 1: Tìm ảnh của hàm $\frac{e^{bt} - e^{at}}{t}$

Vì $e^{bt} - e^{at} \leftrightarrow \frac{1}{p-b} - \frac{1}{p-a}$ nên theo (29) ta có:

$$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t} \leftrightarrow \int_p^{+\infty}\left(\frac{1}{p-b}-\frac{1}{p-a}\right)dp = \ln\frac{p-a}{p-b}$$

Ví dụ 2: Tìm ảnh của hàm $\int_0^t \frac{\sin t}{t}$

Ta đã biết $\sin t \leftrightarrow \frac{1}{p^2+1}$ nên theo (29) ta có:

$$\frac{\sin t}{t} \leftrightarrow \int_p^{\infty}\frac{dp}{p^2+1} = \frac{\pi}{2} - \text{arctg}p = \text{arcotg}p$$

Dùng công thức tích phân gốc ta có:

$$\int_0^t \frac{\sin t}{t} \leftrightarrow \frac{1}{p}\text{arcotg}p$$

§11. ẢNH CỦA TÍCH CHẬP

1. Định nghĩa tích chập của hai hàm số: Cho hai hàm số f(t) và g(t). Tích phân $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ là một hàm số của t và được gọi là tích chập của hai hàm số f(t) và g(t). Nó được kí hiệu là $f * g$

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \qquad (31)$$

2. Tính chất:

a. Tính chất 1: Tích chập có tính chất giao hoán f * g = g * f

Thật vậy dùng phép đổi biến $\tau_1 = t - \tau$, $d\tau_1 = -d\tau$, ta có:

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = -\int_t^0 f(t-\tau_1)g(t)d\tau_1 = \int_0^t g(\tau_1)f(t-\tau_1)d\tau_1 = g * f$$

b. Tính chất 2: Nếu f(t) và g(t) là những hàm gốc thì f * g cũng là hàm gốc

Ví dụ 1: Tính tích chập $e^t * t = \int_0^t e^{\tau}(t-\tau)d\tau$

Tính tích phân bên vế phải bằng phương pháp tích phân từng phân ta có:

$$e^t * t = \int_0^t e^{\tau}(t-\tau)d\tau = t(e^t-1) - (te^t - e^t + 1) = e^t - t - 1$$

$$t * e^{at} = \int_0^t \tau e^{a(t-\tau)}d\tau = e^{at}\int_0^t \tau e^{-a\tau}d\tau = -\frac{t}{a} + \frac{e^{at}}{a^2} - \frac{1}{a^2}$$

Ví dụ 2:

$$\sin t * t = \int_0^t (t-\tau)\sin\tau d\tau = -\sin t + t$$

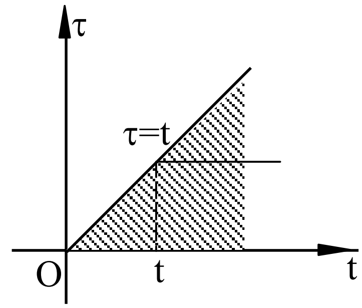
$$\cos t * t = \int_0^t (t-\tau)\cos\tau d\tau = -\cos t + 1$$

3. Ảnh của tích chập: Nếu f(t) ↔ F(p) và g(t) ↔ G(p) thì ảnh của tích chập bằng tích các ảnh:

$$f * g \leftrightarrow F(p).G(p) \tag{32}$$

Chứng minh: Theo định nghĩa thì:

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \leftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$



Xét tích phân bên vế phải. Vì ứng với t cố định thì tích phân theo τ lấy từ 0 đến t, sau đó cho t biến thiên từ 0 đến +∞ nên vế phải tích phân lặp lấy trong miền quạt G: $0 < \arg(t + j\tau) < \dfrac{\pi}{4}$. Vì khi Rep > s + 1 thì do tính chất của tích chập, tích phân lặp này hội tụ tuyệt đối nên ta có thể đổi thứ tự tích phân:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^{+\infty} f(\tau)d\tau\int_t^{\infty} e^{-pt}g(t-\tau)d\tau$$

Đổi biến $t_1 = t - \tau$ thì:

$$\int_\tau^{\infty} e^{-pt}g(t-\tau)d\tau = e^{-p\tau}\int_0^{\infty} e^{-pt_1}g(t_1)dt_1$$

Vậy: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^{+\infty} e^{-p\tau}f(\tau)d\tau\int_0^{\infty} e^{-pt_1}g(t_1)dt_1 = F(p).G(p)$

nghĩa là: $\quad f * g = F(p).G(p)$

Ví dụ: $t*\sin t = t - \sin t \leftrightarrow \dfrac{1}{p^2}.\dfrac{1}{p^2+1}$

4. Cặp công thức Duhamel: Nếu f(t) ↔ F(p) và g(t) ↔ G(p) thì:

$$p.F(p).G(p) \leftrightarrow f(0).g(t) + f' * g \tag{33}$$

$$p.F(p).G(p) \leftrightarrow g(0).f(t) + f * g' \tag{34}$$

Chứng minh: Ta chỉ cần chứng minh công thức (33) và do tính chất đối xứng ta suy ra công thức (34). Ta có:

$$pF(p).G(p) = f(0).G(p) + [\ pF(p) - f(0)\ ].G(p)$$

Theo công thức đạo hàm gốc:

$$pF(p) - f(0) \leftrightarrow f'(t)$$

Theo công thức nhân ảnh:

$$[\ pF(p) - f(0)\ ].G(p) \leftrightarrow f'(t)$$

Vậy: $\quad p.F(p).G(p) \leftrightarrow f(0).g(t) + f' * g$

§12. ẢNH CỦA TÍCH HAI GỐC

Giả sử f(t) và g(t) là hai hàm gốc có chỉ số tăng s_1 và s_2. Khi đó tích f(t).g(t) cũng là một hàm gốc tính theo công thức:

$$f(t).g(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j}\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(\zeta).G(p-\zeta)d\zeta \qquad (35)$$

§13. QUAN HỆ GIỮA GỐC VÀ ẢNH

Định lý:Nếu f(t) là một hàm gốc với chỉ số tăng s_o và F(p) là ảnh của nó thì tại mọi điểm liên tục của hàm f(t) ta có:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} e^{pt}F(p)dp \qquad (36)$$

trong đó a là một số thực bất kì lớn hơn s_o. Tích phân bên vế phải được hiểu theo nghĩa giá trị chính.

Công thức (36) được gọi là công thức ngược của Mellin. Ta thừa nhận mà không chứng minh định lí này.

§14. ĐIỀU KIỆN ĐỦ ĐỂ F(p) LÀ MỘT HÀM ẢNH

Định lí: Giả sử F(p) là một hàm biến phức thoả mãn các điều kiện sau:

- F(p) giải tích trong nửa mặt phẳng Rep > s_o
- F(p) → 0 khi | p | → +∞ trong nửa mặt phẳng Rep > a > s_o đều đối với argp
- tích phân $\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} e^{pt}F(p)dp$ hội tụ tuyệt đối

Khi đó F(p) là ảnh của hàm gốc cho bởi công thức:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} e^{pt}F(p)dp \quad a > s_o \;\; t > 0 \qquad (37)$$

§15. TÌM HÀM GỐC CỦA MỘT PHÂN THỨC THỰC SỰ

Một phân thức hữu tỉ được gọi là thực sự nếu bậc của mẫu số lớn hơn bậc của tử số của nó.

Cho một phân thức thực sự $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$, trong đó tử số và mẫu số là các đa thức không có nghiệm chung. Nếu gọi a_k (k = 1, 2,.., n) là các điểm cực của F(p) thì F(p) là ảnh của hàm η(t).f(t) trong đó:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left[F(p)e^{pt}, a_k\right] \qquad (40)$$

☛ Nếu a_k là cực điểm cấp m_k thì theo công thức tính thặng dư:

$$\mathrm{Res}[\,F(p)e^{pt}, a_k\,] = \frac{1}{(m_k-1)!}\lim_{p\to a_k}\left[(p-a_k)^{m_k}F(p)e^{pt}\right]^{(m_k-1)}$$

nên công thức (40) trở thành:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{p \to a_k} \left[(p - a_k)^{m_k} F(p) e^{pt} \right]^{(m_k - 1)} \qquad (42)$$

☛ Đặc biệt, nếu các cực điểm đều đơn, tức $m_k = 1$, thì cách tính thặng dư đơn giản hơn:

$$\text{Res}[\, F(p)e^{pt}, a_k \,] = \frac{A(a_k)}{B'(a_k)} e^{a_k t}$$

và ta có:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(a_k)}{B'(a_k)} e^{a_k t} \qquad (43)$$

☛ Đặc biệt hơn nữa, nếu số 0 cũng là một cực điểm đơn thì khi đó mẫu số B(p) có thừa số chung là p: $B(p) = p.B_1(p)$ với $B_1(0) \neq 0$, $B_1(a_k) = 0$ khi k = 2, 3,..,n. Trong công thức (43) chọn $a_1 = 0$ ta được:

$$f(t) = \frac{A(0)}{B'(0)} + \sum_{k=2}^{n} \frac{A(a_k)}{B'(a_k)} e^{a_k t}$$

Vì $B'(p) = B_1(p) + pB_1'(p)$ nên $B'(0) = B_1(0)$, $B'(a_k) = a_k B_1'(a_k)$ nên:

$$f(t) = \frac{A(0)}{B'(0)} + \sum_{k=2}^{n} \frac{A(a_k)}{B'(a_k)} e^{a_k t} \leftrightarrow \frac{A(p)}{pB_1(p)} \qquad (44)$$

☛ Nếu A(p) và B(p) là các đa thức có các hệ số đều là số thực và nếu các cực điểm đều đơn gồm:

* những số thực $b_1, b_2, \ldots, b_r$
* những số phức liên hợp $a_1, a_2, \ldots, a_s$, $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_s$

khi đó $r + 2s = n$ là số cực điểm; $a_k = \alpha_k + j\beta_k$, $\bar{a}_k = \alpha_k - j\beta_k$ và đặt $\frac{A(a_k)}{B'(a_k)} = M_k + jN_k$ thì (43) còn có thể viết dưới dạng sau:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{r} \frac{A(b_k)}{B'(b_k)} e^{b_k t} + \sum_{k=1}^{s} 2e^{\alpha_k t} \left[M_k \cos\beta_k t - N_k \sin\beta_k t \right] \qquad (46)$$

Ví dụ 1: Tìm gốc của hàm $F(p) = \dfrac{1}{p(p+a)(p+b)}$

Trong ví dụ này A(p) = 1; $B(p) = p.B_1$; $B_1 = (p + a)(p + b)$. Các cực điểm của F(p) là:

$a_1 = 0$; $a_2 = -a$; $a_3 = -b$

Áp dụng công thức (44) ta được:

$$f(t) = \frac{1}{ab} + \frac{e^{-at}}{a(a-b)} + \frac{e^{-bt}}{b(b-a)}$$

Ví dụ 2: Tìm gốc của hàm: $F(p) = \dfrac{3p^2 + 3p + 2}{(p-2)(p^2 + 4p + 8)}$

Trong ví dụ này $A(p) = 3p^2 + 3p + 2$, $B(p) = (p - 2)(p^2 + 4p + 8)$, $B'(p) = 3p^2 + 4p$. Các cực điểm của F(p) là:

$b_1 = 2$, $a_1 = -2 + 2j$ $\bar{a}_1 = -2 - 2j$ nên $\alpha_1 = -2$, $\beta_1 = 2$

Theo (46) ta được:

$$f(t)=\frac{A(b_1)}{B'(b_1)}e^{b_1t}+2e^{\alpha_1t}\left[\operatorname{Re}\frac{A(a_1)}{B'(a_1)}\cos\beta_1t-\operatorname{Im}\frac{A(a_1)}{B'(a_1)}\sin\beta_1t\right]$$

Nhưng:

$$\frac{A(2)}{B'(2)}=\frac{20}{20}=1$$

$$\frac{A(-2+2j)}{B'(-2+2j)}=\frac{-18j-4}{-2(4+8j)}=1+\frac{j}{4}$$

Vậy:

$$f(t)=e^{2t}+2e^{-2t}\left(\cos2t-\frac{1}{4}\sin2t\right)$$

Ví dụ 3: Tìm gốc của hàm $F(p)=\dfrac{p+2}{(p-1)^2p^3}$

Ta có A(p) = p + 2, B(p) = $p^3(p-1)^2$. Vậy F(p) có hai cực điểm là:

$a_1 = 1$ (cấp 2) và $a_2 = 0$ (cấp 3)

Để tính f(t) ta dùng công thức (42):

$$\frac{1}{2}\lim_{p\to0}\left[p^3\frac{p+2}{p^3(p-1)^2}e^{pt}\right]''=\frac{1}{2}\lim_{p\to0}\left[\frac{p+2}{(p-1)^2}e^{pt}\right]''=\frac{1}{2}\lim_{p\to0}\left[\frac{-p-5}{(p-1)^3}e^{pt}+\frac{p+2}{(p-1)^3}te^{pt}\right]'=$$

$$\frac{1}{2}\lim_{p\to0}\left[\frac{2p+16}{(p-1)^4}e^{pt}+\frac{-p-5}{(p-1)^3}te^{pt}+\frac{p+2}{(p-1)^2}t^2e^{pt}+\frac{-p-5}{(p-1)^3}te^{pt}\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left(16+5t+2t^2+5t\right)=t^2+5t+8$$

và:

$$\lim_{p\to1}\left[(p-1)^2\frac{p+2}{(p-1)^2p^3}e^{pt}\right]=\lim_{p\to1}\left(\frac{p+2}{p^3}e^{pt}\right)=\lim_{p\to1}\left(\frac{-2p-6}{p^4}e^{pt}+te^{pt}\frac{p+2}{p^3}\right)=3te^t-8e^t$$

Thay vào (42) ta được:

$$f(t)=\frac{1}{2}\lim_{p\to0}\left[\frac{p+2}{(p-1)^2}e^{pt}\right]''+\lim_{p\to1}\left[\frac{p+2}{p^3}e^{pt}\right]=t^2+5t+8+(3t-8)e^t$$

Ví dụ 4: Tìm gốc của hàm $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{(p^3+1)p}$

Trước hết ta tìm gốc g(t) của hàm $G(p)=\dfrac{1}{(p^3+1)p}$. Đối với hàm này A(p) = 1, B(p) = $p(p^3+1)$. Vậy G(p) có các cực điểm thực là:

$b_1 = 0$, $b_2 = -1$

và cặp cực điểm phức liên hợp:

$$a_1 = \frac{1+j\sqrt{3}}{2} \text{ và } \bar{a}_1 = \frac{1-j\sqrt{3}}{2}.$$

Ta có: $B'(p) = 4p^3 + 1$

nên: $B'(0) = 1$

$B'(-1) = -3$

$$B'\left(\frac{1+j\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\frac{1+j\sqrt{3}}{2}\right)^3 + 1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3 + 1 = 4(\cos 3\pi + j\sin 3\pi) + 1 = -3$$

$$M_1 = \text{Re}\frac{1}{B'(a_1)} = -\frac{1}{3}$$

$$N_1 = \text{Im}\frac{1}{B'(a_1)} = 0$$

Thay vào (46) ta được:

$$g(t) = \frac{1}{B'(0)}e^{ot} + \frac{1}{B'(-1)}e^{-t} + 2e^{\frac{t}{2}}\left[M_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - N_1\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

Để tính f(t) ta dùng tính chất trễ theo (17):

$$\eta(t-1)g(t-1) \leftrightarrow e^{-p}G(p) = F(p)$$

tức là:

$$f(t) = \eta(t-1)g(t-1) = \eta(t-1)\left\{1 - \frac{1}{3}e^{-t+1} - \frac{2}{3}e^{\frac{t-1}{2}}\cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)\right]\right\}$$

Ví dụ 5: Tìm gốc của hàm $F(p) = \dfrac{p+1}{p^2+2p}$

Phương trình $p^2 + 2p$ có hai nghiệm đơn là $a_1 = 0$ và $a_2 = -2$. Áp dụng công thức thặng dư tại cực điểm đơn ta có:

$$\text{Res}[(p)e^{pt}, 0] = \lim_{p\to 0}\frac{p+1}{2p+2}e^{pt} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Res}[(p)e^{pt}, -2] = \lim_{p\to -2}\frac{p+1}{2p+2}e^{pt} = \frac{1}{2}e^{-pt}$$

Vậy $F(p) \leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(1 + e^{pt}\right)$

§16. TÌM HÀM GỐC CỦA MỘT PHÂN THỨC HỮU TỈ

Trong thực tế, để tìm gốc của một phân thức hữu tỉ ta phân tích chúng thành các phân thức tối giản loại 1:

$$\frac{1}{p-a} \text{ hay } \frac{1}{(p-a)^n}$$ với a thực, n nguyên dương

và các phân thức tối giản loại 2:

$$\frac{Mp+N}{p^2+2bp+c} \text{ hay } \frac{Mp+W}{(p^2+2bp+c)^n}$$ với M, N, b, c thực; b^2 - c < 0; n nguyên dương.

Đối với phân thức tối giản loại 1 ta chú ý rằng:

$$\frac{1}{p} \leftrightarrow 1; \ \frac{1}{p^n} \leftrightarrow \frac{t^{n-1}}{n!}$$

Do đó dùng công thức dịch chuyển ảnh ta có:

$$\frac{1}{p-a} \leftrightarrow e^{at}; \ \frac{1}{(p-a)^n} \leftrightarrow e^{at}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

Đối với phân thức tối giản loại 2 ta làm như sau:

- Ta đưa tam thức ở mẫu số về dạng chính tắc:

$$\frac{Mp+N}{p^2+2bp+c} = \frac{M(p+b)+N-Mb}{\left[(p+b)^2+(c-b^2)\right]^n} = \frac{M(p+b)+N-Mb}{\left[(p+b)^2+\alpha^2\right]^n}$$

với $\alpha^2 = c - b^2$

- Tìm gốc của $\frac{Mp}{\left(p^2+\alpha^2\right)^n}$ và của $\frac{N-Mb}{\left(p^2+\alpha^2\right)^n}$ rồi dùng công thức chuyển dịch ảnh. Khi tìm gốc của $\frac{p}{\left(p^2+\alpha^2\right)^n}$ hay của $\frac{1}{\left(p^2+\alpha^2\right)^n}$ ta thường tới công thức đạo hàm ảnh.

Ví dụ 1:Tìm gốc của hàm $F(p) = \frac{p+1}{p^2+p+1}$

Đưa mẫu số về dạng chính tắc ta có:

$$p^2+p+1 = \left(p+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Vậy: $$F(p) = \frac{p+1}{p^2+p+1} = \frac{p+1}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

Ta có: $$\frac{p}{p^2+\frac{3}{4}} \leftrightarrow \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$\frac{1}{p^2+\frac{3}{4}} \leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

Áp dụng công thức dịch chuyển ảnh ta có:

$$\frac{p}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \leftrightarrow e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$\frac{1}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \leftrightarrow e^{-\frac{t}{2}}\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

Vây: $f(t) \leftrightarrow e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + e^{-\frac{t}{2}}\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$

Ví dụ 2: Tìm gốc của hàm $F(p)=\frac{3p-4}{(p^2-2p+2)^2}$

Đưa mẫu số về dạng chính tắc ta có:

$$F(p)=\frac{3p-4}{(p^2-2p+2)^2}=\frac{3(p-1)-1}{\left[(p-1)^2+1\right]^2}=\frac{3(p-1)}{\left[(p-1)^2+1\right]^2}-\frac{1}{\left[(p-1)^2+1\right]^2}$$

Đặt $G(p)=\frac{3p}{(p^2+1)^2}-\frac{1}{(p^2+1)^2}$ thì G(p - 1) = F(p). Vậy nếu tìm được gốc của G(p) ta sẽ dùng công thức dịch chuyển ảnh để tìm gốc của F(p).

Vì: $$\frac{1}{(p^2+1)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+1}\right)'+\frac{1}{2}\frac{1}{p^2+1}$$

$$\frac{p}{(p^2+1)^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'$$

nên: $$G(p)=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+1}\right)'-\frac{1}{2}\frac{1}{p^2+1} \qquad (47)$$

Vì: $\frac{1}{p^2+1}\leftrightarrow \sin t;\ \frac{p}{p^2+1}\leftrightarrow \cos t$

nên áp dụng tính chất đạo hàm ảnh ta có:

$$\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'\leftrightarrow -t\sin t;\ \left(\frac{p}{p^2+1}\right)'\leftrightarrow -t\cos t$$

Từ (47) ta suy ra:

$$g(t)=\frac{3}{2}t\sin t+\frac{3}{2}t\cos t-\frac{1}{2}\sin t$$

$$f(t)=e^t g(t)=e^t\left(\frac{3}{2}t\sin t+\frac{3}{2}t\cos t-\frac{1}{2}\sin t\right)$$

Ví dụ 3: Tìm gốc của hàm $F(p)=\frac{3p^2+2p+2}{(p-2)(p^2+4p+8)}$

Phân tích F(p) thành phân thức tối giản ta được:

$$F(p)=\frac{3p^2+2p+2}{(p-2)(p^2+4p+8)}=\frac{1}{p-2}+\frac{2p+3}{p^2+4p+8}=\frac{1}{p-2}+\frac{2(p+2)-1}{(p+2)^2+4}$$

$$=\frac{1}{p-2}+2\frac{p+2}{(p+2)^2+4}-\frac{1}{(p+2)^2+4}$$

Vì $\frac{1}{p-2}\leftrightarrow e^{2t}$

$$\frac{2p}{p^2+4}\leftrightarrow 2\cos 2t$$

$$\frac{1}{p^2+4}\leftrightarrow \frac{1}{2}\sin t$$

Nên chuyển dịch ảnh ta được:

$$2\frac{p+2}{(p+2)^2+4}\leftrightarrow 2e^{-2t}\cos 2t;\quad \frac{1}{(p+2)^2+4}\leftrightarrow e^{-2t}\frac{\sin 2t}{2}$$

Cuối cùng:

$$f(t)=e^{2t}+2e^{-2t}\cos 2t-e^{-2t}\frac{\sin 2t}{2}$$

§17. TÌM HÀM GỐC DƯỚI DẠNG CHUỖI

Định lí: Nếu hàm F(p) giải tích tại p = ∞, nghĩa là tại lân cận p = ∞, khai triển Laurent của nó có dạng:

$$F(p)=\frac{C_1}{p}+\frac{C_2}{p^2}+\frac{C_3}{p^3}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{p^n}\qquad(48)$$

thì F(p) là ảnh của hàm η(t)f(t) trong đó:

$$f(t)=C_1+\frac{C_2}{1!}t+\frac{C_2}{2!}t^2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\qquad(49)$$

Ví dụ 1: Tìm gốc của hàm $F(p)=\frac{1}{p^{n+1}}e^{-\frac{1}{p}}$

Khai triển

$$e^{-\frac{1}{p}}=1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2!p^2}-\frac{1}{3!p^3}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{p^k}$$

Vậy: $F(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{p^{n+k+1}}$

Vì: $\frac{1}{p^{n+k+1}}\leftrightarrow\frac{t^{n+k}}{(n+k)!}$

nên: $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{t^{n+k}}{(n+k)!}$

Ví dụ 2: Tìm gốc của hàm $F(p)=\dfrac{p^9}{p^{10}-1}$

Khai triển F(p) tại lân cận p = ∞ ta được:

$$F(p)=\frac{p^9}{p^{10}-1}=\frac{p^9}{p^{10}\left(1-\frac{1}{p^{10}}\right)}=\frac{1}{p\left(1-\frac{1}{p^{10}}\right)}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^{11}}+\frac{1}{p^{21}}+\cdots+\frac{1}{p^{10n+1}}+\cdots$$

Theo định lí trên ta có:

$$f(t)=1+\frac{t^{10}}{10!}+\frac{t^{20}}{20!}+\cdots+\frac{t^{10n}}{(10n)!}+\cdots$$

Ví dụ 3: Tìm gốc của hàm $F(p)=\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$

Áp dụng khai triển nhị thức ta có:

$$F(p)=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}=\frac{1}{p}\left[1-\frac{1}{2}.\frac{1}{p^2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{2!}\frac{1}{p^4}+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{1}{3!}\frac{1}{p^6}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{p}-\frac{1}{2p^3}+\frac{1.3}{2^2.2!p^5}-\frac{1.3.5}{2^3.3!p^7}+\cdots$$

Do $\quad \dfrac{1}{p^{n+1}}\leftrightarrow\dfrac{t^n}{n!}$

Nên ta có:

$$f(t)=1-\frac{t^2}{2^2(1!)^2}+\frac{t^4}{2^4(2!)^2}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

§18. DÙNG CÔNG THỨC NHÂN ẢNH VÀ CÔNG THỨC DUHAMEL

Ta nhắc lại công thức nhân ảnh:

F(p).G(p) = f*g

pF(p)G(p) = f’*g + f(0)g(t)

Ví dụ: Tìm gốc của hàm $F(p)=\dfrac{2p}{(p^2+1)(p^2+4)}$

Ta có thể viết:

$$F(p)=\frac{2p}{(p^2+1)(p^2+4)}=\frac{2}{p^2+1}.\frac{p}{p^2+4}$$

Vì $\quad \dfrac{2}{p^2+1}\leftrightarrow 2\sin t;\ \dfrac{p}{p^2+4}\leftrightarrow 2\cos 2t$

nên theo công thức nhân ảnh ta có:

$$f(t)=2\sin t*\cos 2t=\int_0^t 2\sin(t-\tau)\cos 2\tau d\tau$$

Nhưng 2sin(t - τ).cos2τ = sin(t + τ)sin(t - 3τ) nên: