CHƯƠNG 6: PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

§1. PHƯƠNG PHÁP CỦA PHÉP TÍNH TOÁN TỬ

Cho hai tập hợp A và B. Một ánh xạ T cho ứng một phần tử của A với một phần tử xác định của B, kí hiệu là Tx, được gọi là một toán tử. Phần tử Tx được gọi là ảnh của x còn x được gọi là gốc của hay nghịch ảnh của Tx.

Ví dụ: ☞Nếu A = B = **R** thì toán tử T là một hàm số thực của biến số thực.

☞ Nếu A là tập hợp các số thực dương và B = R. Ánh xạ cho mỗi số $a \in A$ thành một số thực thuộc B là Ta = lna được gọi là toán tử logarit. Nhờ có toán tử loga mà phép nhân các gốc được chuyển thành phép cộng các ảnh:

$$T(a_1.a_2) = Ta_1 + Ta_2 \qquad (1)$$

Do đó muốn tính tích $a_1.a_2$, ta tìm ảnh của nó theo (1) sau đó dùng bảng logarit tra ngược lại

☞ Cho A là tập hợp các hàm dao động hình sin có cùng tần số góc ω, B là tập hợp các hàm biến số thực t nhưng lấy giá trị phức. Cho ứng mỗi hàm $v(t) = V\sin(\omega t + \varphi) \in A$ với một hàm $Tv \in B$ theo công thức:

$$Tv = V.e^{j(\omega t + \varphi)}$$

cũng là một toán tử. Nhờ toán tử này mà các phép tính đạo hàm và tích phân gốc được chuyển thành các phép tính đại số đối với ảnh.

Trong chương này ta sẽ nghiên cứu toán tử Laplace. Bài toán đặt ra là biết gốc, tìm ảnh toán tử Laplace của nó và ngược lại biết ảnh của một hàm, tìm lại gốc của nó.

§2. ĐỊNH NGHĨA HÀM GỐC

Ta gọi hàm f(t) của biến thực t là hàm gốc nếu nó thoả mãn các điều kiện sau:

• Hàm f(t) liên tục từng khúc khi $t \geq 0$, nghĩa là nếu lấy một khoảng [a, b] bất kì trên nửa trục $t \geq 0$, bao giờ cũng có thể chia nó thành một số hữu hạn các khoảng nhỏ sao cho trong mỗi khoảng nhỏ f(t) liên tục và tại mút của mỗi khoảng nhỏ nó có giới hạn một phía

• Khi $t \to +\infty$, hàm f(t) tăng không nhanh hơn một hàm mũ, nghĩa là tồn tại một số $M>0$, $s_o \geq 0$ sao cho:

$$\left| f(t) \right| \leq Me^{s_o t} \quad \forall t > 0 \qquad (2)$$

trong đó s_o được gọi là chỉ số tăng của f(t)

• f(t) = 0 khi t < 0. Điều kiện này được đặt ra vì trong các ứng dụng thực tế t thường là thời gian.

Ví dụ 1: Hàm:

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < 0 \\ 1 & \text{khi } t > 0 \end{cases}$$

là hàm gốc.

Thật vậy vì $|\eta(t)| \leq 1$ nên điều kiện 2 được thoả mãn nếu chọn M = 1, $s_0 = 0$; dễ dàng kiểm tra được điều kiện 1.

Ví dụ 2: Hàm:

$$f(t) = \eta(t).\sin t = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < 0 \\ \sin t & \text{khi } t > 0 \end{cases}$$

là hàm gốc.

Thật vậy vì | η(t).sint | ≤ 1 nên điều kiện 2 được thoả mãn nếu chọn M = 1, $s_0 = 0$; dễ dàng kiểm tra được điều kiện 1.

Ví dụ 3: Hàm:

$$f(t) = \eta(t).t^2 = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < 0 \\ t^2 & \text{khi } t > 0 \end{cases}$$

là hàm gốc.

Thật vậy vì | $\eta(t).t^2$ | ≤ $2e^t$ nên điều kiện 2 được thoả mãn nếu chọn M = 2, $s_0 = 1$; dễ dàng kiểm tra được điều kiện 1.

Quy ước:
- Ta viết φ(t) thay cho η(t).φ(t)
- giới hạn phải của f(t), tức là khi t → + 0 được viết là f(0)

§3. ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

Nếu f(t) là hàm gốc có chỉ số tăng là s_0 thì tích phân:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt \qquad (3)$$

trong đó p = s + jσ là một tham số phức sẽ hội tụ trong miền Rep = s > s_o (nửa mặt phẳng phức bên phải đường thẳng s = s_o)

Tích phân (3) là một hàm của biến số phức p. Hàm biến phức F(p) giải tích trong miền Rep > s_o và dần tới 0 khi p → ∞ sao cho Rep = s → +∞.

Chứng minh: Lấy p bất kì thuộc miền Rep > s_o, ta sẽ chứng minh tích phân (3) hội tụ. Muốn vậy ta chứng minh nó thừa nhận một tích phân trội hội tụ tuyệt đối. Thật vậy vì $\left|f(t)\right| \le Me^{s_0 t}$ nên $\left|f(t)e^{-pt}\right| \le Me^{s_0 t}e^{-st} = Me^{(s_o - s)t}$. Do đó:

$$\int_0^{+\infty} \left|f(t).e^{-pt}\right| dt \le M\int_0^{+\infty} e^{(s_o - s)t}dt = \left.\frac{Me^{(s_o - s)t}}{s_o - s}\right|_0^{+\infty}$$

Vì s_0 - s < 0 nên $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{(s_o - s)t} = 0$. Do đó:

$$\int_0^{+\infty} \left|f(t).e^{-pt}\right| dt \le \frac{M}{s_o - s} \qquad (4)$$

Điều đó chứng tỏ (3) hội tụ. Khi p = s + jσ → +∞ sao cho s →+∞ thì $\frac{M}{s_o - s} \to 0$ nên F(p) → 0.

Ta còn phải chứng minh F(p) giải tích trong miền Rep > s_o. Muốn vậy ta chứng minh đạo hàm của F(p) tồn tại tại mọi điểm của miền ấy. Xét tích phân $\int_0^{+\infty} -t.e^{-pt}f(t)dt$ thu được bằng cách lấy đạo hàm một cách hình thức $\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt$ dưới dấu tích phân.

Trong nửa mặt phẳng Rep ≥ s_1 với s_1 bất kì lớn hơn s_o thì tích phân đó thừa nhận một tích phân trội hội tụ và không phụ thuộc tham số p:

$$\left|\int_0^{+\infty} f(t).e^{-pt}dt\right| \le M\int_0^{+\infty} t.e^{(s_o-s)t}dt < M\int_0^{+\infty} t.e^{(s_o-s_1)t}dt = \frac{M}{(s_1-s_o)^2} \qquad (5)$$

Vậy theo định lý Weierstrass, tích phân hội tụ đều đối với p trong miền đó vµ là đạo hàm của F(p). Tóm lại:

$$F'(p) = \int_0^{+\infty} -te^{-pt}f(t)dt \qquad (6)$$

§4. ĐỊNH NGHĨA TOÁN TỬ LAPLACE

Toán tử Laplace, còn gọi là phép biến đổi Laplace. Nếu f(t) là một hàm gốc thì hàm F(p) được xác định bằng tích phân (3) là một hàm giải tích trong nửa mặt phẳng Rep>s_o. Ta gọi nó là ảnh của f(t) qua phép biến đổi Laplace của f(t) và kí hiệu:

F(p) = L{ f(t) } hay f(t) ≓ F(p). Ta có:

$$L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt \qquad (7)$$

Chú ý: ® Các điều kiện trong định nghĩa hàm gốc f(t) chỉ là điều kiện đủ để ảnh tồn tại chứ không phải là điều kiện cần. Chẳng hạn hàm $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ không phải là hàm gốc vì $\lim_{t\to+0}\frac{1}{t} = \infty$. Tuy vậy tích phân $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-pt}dt$ vẫn tồn tại

• Không phải mọi hàm phức F(p) đều có nghịch ảnh là một hàm gốc. Chẳng hạn F(p) = p^2 không thể là ảnh của một hàm gốc nào cả vì $\lim_{p\to\infty}F(p) = \infty$. Điều này mâu thuẫn với kết luận của định lí 1.

• Nếu F(p) giải tích tại ∞ thì F(p) → 0 khi p → ∞ một cách bất kì chứ không phải chỉ trong trường hợp p → ∞ sao cho Rep → +∞.

Ví dụ 1: Tìm ảnh qua phép biến đổi Laplace (gọi tắt là ảnh) của hàm η(t):

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < 0 \\ 1 & \text{khi } t > 0 \end{cases}$$

$$L\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = -\left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_0^{\infty} = -\frac{1}{p}\left.\frac{e^{-(s+j\sigma)t}}{p}\right|_0^{\infty} = -\frac{1}{p}\left.\frac{e^{-st}e^{-j\sigma t}}{p}\right|_0^{\infty}$$

Nếu Rep = s > 0 thì khi t → ∞, e^{-st} → 0; khi t → 0, e^{-st} → 1. Vậy:

$$F(p) = \frac{1}{p} \qquad (8)$$

Ví dụ 2: Tìm ảnh của hàm f(t) = e^{at} trong đó a = α + jβ = const

Ta có $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-p)t}dt = \left.\frac{e^{(a-p)t}}{a-p}\right|_0^{\infty}$

Khi t → 0 thì $e^{(a-p)t}$ → 1. Nếu Rep>Rea (s>α) thì khi t → +∞, $e^{(a-p)t} = e^{(\alpha-s)t}e^{j(\beta-\sigma)t}$ → 0. Vậy:

$$F(p)=\frac{1}{p-a} \tag{9}$$

Ví dụ 3: Tìm ảnh của f(t) = t.

$$F(p)=\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt=-\frac{1}{p}\int_0^{+\infty} tde^{-pt}=-\frac{te^{-pt}}{p}\Bigg|_0^{\infty}+\frac{1}{p}\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt=-\frac{e^{-pt}}{p^2}\Bigg|_0^{\infty}$$

Khi t $\rightarrow$ 0 thì $e^{-pt} \rightarrow 1$. Khi t $\rightarrow +\infty$, $e^{-pt} \rightarrow 0$. Vậy:

$$F(p)=\frac{1}{p^2}$$

Ví dụ 4: Tìm ảnh của f(t) = t^n.

$$F(p)=\int_0^{+\infty} t^n e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}\int_0^{+\infty} t^n de^{-pt}=-\frac{t^n e^{-pt}}{p}\Bigg|_0^{\infty}+\frac{1}{p}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-pt}dt$$

Sau n lần tích phân phân đoạn ta có:

$$F(p)=\frac{n!}{p^{n+1}}$$

§5. CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

1. Tính chất tuyến tính của toán tử: Giả sử f(t) và g(t) là hai hàm gốc. A và B là hai hằng số thực hay phức. Nếu f(t) $\risingdotseq$ F(p), g(t) $\risingdotseq$ G(p) thì:

$$Af(t) + B\,g(t) \risingdotseq F(p) + G(p) \tag{10}$$

Thật vậy theo định nghĩa:

$$L\{Af(t)+Bg(t)\}=\int_0^{+\infty} e^{-pt}[Af(t)+Bg(t)]dt$$

Do tính chất tuyến tính của tích phân ta có:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}[Af(t)+Bg(t)]dt=A\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt+B\int_0^{+\infty} e^{-pt}g(t)dt$$

Nhưng theo giả thiết :

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt=F(p)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}g(t)dt=G(p)$$

Thay vào trên ta có:

$$L\{Af(t)+Bg(t)\}=AF(p)+BG(p)$$

Ví dụ 1:Tìm ảnh của f(t) = sinat và cosat

Theo công thức Euler ta có:

$$\sin at=\frac{e^{jat}-e^{-jat}}{2j}=\frac{1}{2j}e^{jat}-\frac{1}{2j}e^{-jat}$$

Nhưng theo (9):

$$e^{jat} \fallingdotseq \frac{1}{p-ja} \;;\; e^{-jat} \leftrightarrow \frac{1}{p+ja}$$

Sử dụng tính chất tuyến tính ta được:

$$\sin at \leftrightarrow \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{p-ja}-\frac{1}{p+ja}\right]=\frac{a}{p^2+a^2} \qquad (11)$$

$$L\{\sin at\}=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{p-ja}-\frac{1}{p+ja}\right]=\frac{a}{p^2+a^2}$$

Tương tự $\cos at=\dfrac{e^{jat}+e^{-jat}}{2}=\dfrac{1}{2}e^{jat}+\dfrac{1}{2}e^{-jat}$

$$\cos at \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-ja}+\frac{1}{p+ja}\right]=\frac{p}{p^2+a^2} \qquad (12)$$

Ví dụ 2: Tìm ảnh của ch(at) và sh(at)

$$\text{chat}=\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}=\frac{1}{2}e^{at}+\frac{1}{2}e^{-at}$$

$$\text{shat}=\frac{e^{at}e^{-at}}{2}=\frac{1}{2}e^{at}-\frac{1}{2}e^{-at}$$

$$\text{chat} \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p+a}\right]=\frac{p}{p^2-a^2} \qquad (13)$$

$$\text{shat} \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p+a}\right]=\frac{a}{p^2-a^2} \qquad (14)$$

Ví dụ 3: Tìm ảnh của sin(ωt + φ) và cos(ωt + φ)

Ta có sin(ωt + φ) = sinωtcosφ + sinφcosωt. Do tính chất tuyến tính:

$$\sin(\omega t+\varphi) \leftrightarrow \sin\varphi\frac{p}{p^2+\omega^2}+\cos\varphi\frac{\omega}{p^2+\omega^2}=\frac{p\sin\varphi+\omega\cos\varphi}{p^2+\omega^2}$$

Tương tự: $\cos(\omega t+\varphi) \leftrightarrow s=\dfrac{p\cos\varphi-\omega\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$

Ví dụ 4: Tìm ảnh của $\sin^3 t$

Ta có: $\sin^3 t=\dfrac{1}{4}(3\sin t-\sin 3t)$

Vậy: $\sin^3 t \leftrightarrow \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{p^2+1}-\dfrac{3}{p^2+9}\right)=\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{p^2+1}-\dfrac{1}{p^2+9}\right)$

2. Tính chất đẳng cấp: Nếu L{ f(t) } = F(p) thì L{ af(t) } = aF(p)

3. Tính chất đồng dạng: Giả sử λ là một hằng số dương bất kì. Nếu f(t) ↔ F(p) thì

$$f(\lambda t) \leftrightarrow \frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right) \qquad (15)$$

Chứng minh: Theo định nghĩa ta có:

$$f(\lambda t) \leftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(\lambda t)dt$$

Trong tích phân vế phải, đổi biến $\lambda t = t_1$, $dt = \frac{1}{\lambda}dt_1$ ta được:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(\lambda t)dt = \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-p\frac{t_1}{\lambda}} f(t_1)dt_1 = \frac{1}{\lambda}F(p)$$

4. Tính chất chuyển dịch ảnh: Cho a là một số phức bất kì. Nếu L{ f(t) } = F(p) thì

$$e^{at}f(t) \leftrightarrow F(p - a) \tag{16}$$

Chứng minh: Theo định nghĩa ta có:

$$e^{at} f(t) \leftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-pt} f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-a)t} f(t)dt = F(p-a)$$

Ví dụ 1: Tìm ảnh của $e^{at}\sin\omega t$ và $e^{at}\cos\omega t$

Ta có $\sin\omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ và $\cos\omega t \leftrightarrow \frac{p}{p^2+\omega^2}$

Nên: $e^{at}\sin\omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$

$$e^{at}\cos\omega t \leftrightarrow \frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$$

Ví dụ 2: Giả sử $f(t) \leftrightarrow F(p)$. Tìm ảnh của $f(t)\sin\omega t$

Ta có: $f(t)\sin\omega t = f(t)\frac{e^{j\omega t} - e^{j\omega t}}{2j}$

Do công thức dịch chuyển ảnh:

$$f(t)e^{j\omega t} \leftrightarrow F(p - j\omega)$$

$$f(t)e^{-j\omega t} \leftrightarrow F(p + j\omega)$$

Theo tính chất tuyến tính ta có:

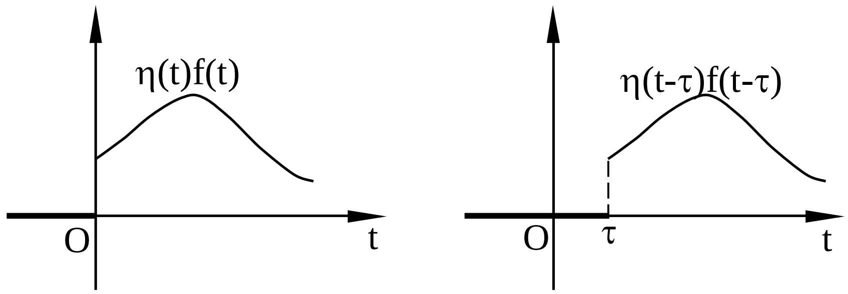
$$f(t)\sin\omega t \leftrightarrow \frac{1}{2j}\,[\, F(p - j\omega) + F(p + j\omega)\,]$$

5. Tính chất trễ:

a. Trường hợp τ là một hằng số dương: Nếu $f(t) \leftrightarrow F(p)$ thì:

$$\eta(t - \tau)f(t - \tau) \leftrightarrow e^{-p\tau}F(p) \tag{17}$$

Trước hết ta thấy rằng nếu $\eta(t)f(t)$ có đồ thị là đường cong C thì đồ thị của $\eta(t-\tau)f(t-\tau)$ có được bằng cách dịch chuyển đường cong C sang một đoạn τ theo trục hoành. Nếu t và τ là các đại lượng chỉ thời gian thì quá trình biểu diễn bởi hàm $\eta(t-\tau)f(t - \tau)$ xảy ra giống quá trình biểu diễn bởi hàm $\eta(t)f(t)$ nhưng chậm hơn một khoảng thời gian τ



Chứng minh: Theo định nghĩa ta có:

$$\eta(t-\tau)f(t-\tau) \leftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-pt}\eta(t-\tau)f(t-\tau)dt$$

Vì : $\eta(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < \tau \\ 1 & \text{khi } t > \tau \end{cases}$

nên: $\eta(t-\tau)f(t-\tau) \leftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t-\tau)dt$

Trong tích phân bên vế phải, đổi biến $t_1 = t - \tau$ ta được:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t-\tau)dt = \int_0^{+\infty} e^{-p(t_1+\tau)} f(t_1)dt_1 = e^{-p\tau}\int_0^{+\infty} e^{-pt_1} f(t_1)dt_1 = e^{-p\tau}F(p)$$

Ví dụ: ta biết hàm $f(t) = e^{2t}$ có ảnh là $F(p) = \dfrac{1}{p-2}$. Tìm ảnh của hàm $f(t-1) = e^{2(t-1)}$

Theo (17) ta có:

$$f(t-1) = e^{2(t-1)} \leftrightarrow \frac{e^{-p}}{p-2}$$

b. Biểu diễn một hàm xung qua hàm η(t):Ta gọi một hàm xung là hàm có dạng:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < a \\ \varphi(t) & \text{khi } a < t < b \\ 0 & \text{khi } t > b \end{cases}$$

Ta có thể viết:

$$f(t) = \eta(t-a)\varphi(t) - \eta(t-b)\varphi(t) \qquad (18)$$

Ví dụ 1: Tìm ảnh của hàm $\eta(t-\tau)$

Vì $\eta(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{p}$ nên theo tính chất trễ thì:

$$\eta(t-\tau) \leftrightarrow e^{-p\tau}\frac{1}{p} \qquad (19)$$

Ví dụ 2: Tìm ảnh của hàm xung đơn vị

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < a \\ 1 & \text{khi } a < t < b \\ 0 & \text{khi } t > b \end{cases}$$

Theo (18) thì: $f(t) = \eta(t-a) - \eta(t-b)$

Theo (19) thì:

$$f(t) \leftrightarrow e^{-pa}\frac{1}{p} - e^{-pb}\frac{1}{p} = \frac{1}{p}\left(e^{-pa} - e^{-pb}\right) \qquad (20)$$

Ví dụ 3: Tìm ảnh của hàm:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < 0 \\ \sin t & \text{khi } 0 < t < \pi \\ 0 & \text{khi } t > \pi \end{cases}$$

Theo (18) ta có thể viết:

$f(t) = \eta(t)\sin t - \eta(t - \pi)\sin t$

Vì $\sin t = \sin(\pi - t) = -\sin(t - \pi)$ nên:

$f(t) = \eta(t)\sin t + \eta(t - \pi)\sin(\pi - t)$

Theo tính chất trễ ta có:

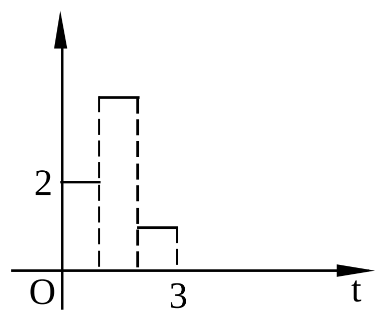
$$\eta(t-\pi)\sin(t-\pi) \leftrightarrow e^{-p\pi}\frac{1}{p^2+1}$$

Kết quả

$$f(t) \leftrightarrow \frac{1}{p^2+1} + e^{-p\pi}\frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1}\left(1 + e^{-p\pi}\right)$$

Ví dụ 4: Tìm ảnh của hàm bậc thang sau:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < 0 \\ 2 & \text{khi } 0 < t < 1 \\ 4 & \text{khi } 1 < t < 2 \\ 1 & \text{khi } 2 < t < 3 \\ 0 & \text{khi } t > 3 \end{cases}$$



Đặt:

$$h_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < 0 \\ 1 & \text{khi } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{khi } t > 1 \end{cases}$$

$$h_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < 1 \\ 1 & \text{khi } 1 < t < 2 \\ 0 & \text{khi } t > 2 \end{cases}$$

$$h_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < 2 \\ 1 & \text{khi } 2 < t < 3 \\ 0 & \text{khi } t > 3 \end{cases}$$

Như vậy:

$f(t) = 2h_1(t) + 4h_2(t) + h_3(t)$

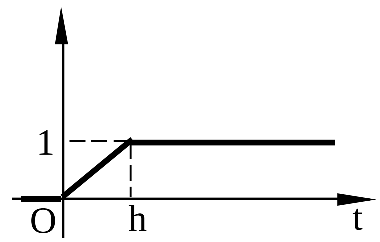
Vì theo (20):

$$h_1(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}\left(1 - e^{-p}\right);\ h_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}\left(e^{-p} - e^{-2p}\right);\ h_3(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}\left(e^{-2p} - e^{-3p}\right)$$

nên: $f(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}\left(2 - 2e^{-p} + 4e^{-p} - 4e^{-2p} + e^{-2p} - e^{-3p}\right) = \frac{1}{p}\left(2 + 2e^{-p} - 3e^{-2p} - e^{-3p}\right)$

Ví dụ 5: Tìm ảnh của hàm f(t) như hình vẽ

Hàm f(t) được coi là tổng của hai hàm xung $h_1(t)$ và $h_2(t)$:



$$h_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < 0 \\ \dfrac{t}{h} & \text{khi } 0 < t < h \\ 0 & \text{khi } t > h \end{cases}$$

$$h_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < h \\ 1 & \text{khi } t > h \end{cases}$$

Theo (18) ta có:

$$h_1(t) = \eta(t)\frac{t}{h} - \eta(t-h)\frac{t}{h}$$
$$h_2(t) = \eta(t-h)$$

Vậy:
$$f(t) = \eta(t).\frac{t}{h} - \eta(t-h).\frac{t}{h} + \eta(t-h) = \eta(t)\frac{t}{h} - \eta(t-h).\left(\frac{t-h}{h}\right)$$
$$= \frac{1}{h}\left[\eta(t).t - \eta(t-h).(t-h)\right]$$

Theo tính chất trễ ta có:

$$f(t) = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{p^2} - e^{-hp}\frac{1}{p^2}\right] = \frac{1}{hp^2}\left(1 - e^{-hp}\right)$$

§6. ẢNH CỦA MỘT HÀM TUẦN HOÀN

Nếu f(t) là một hàm gốc, tuần hoàn với chu kì T, nghĩa là f(t) = f(t + T) ∀t > 0 thì ảnh của nó được tính theo công thức:

$$F(p) = \frac{\Phi(p)}{1 - e^{-pT}} \tag{21}$$

Trong đó: $\Phi(p) = \int_0^T e^{-pt} f(t)dt$ là ảnh của hàm:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < 2 \\ f(t) & \text{khi } 0 < t < T \\ 0 & \text{khi } t > T \end{cases}$$

Chứng minh: Theo định nghĩa ta có:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = \int_0^T e^{-pt} f(t)dt + \int_T^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$$

Trong tích phân thứ ở vế phải, đổi biến t = u + T ta có:

$$\int_T^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-p(u+T)} f(u+T)du = e^{-pT}\int_0^{+\infty} e^{-pu} f(u+T)du$$

Do tính chất tuần hoàn f(u + T) = f(u), nên:

$$\int_T^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = e^{-pT}\int_0^{+\infty} e^{-pu} f(u)du = e^{-pT}.F(p)$$

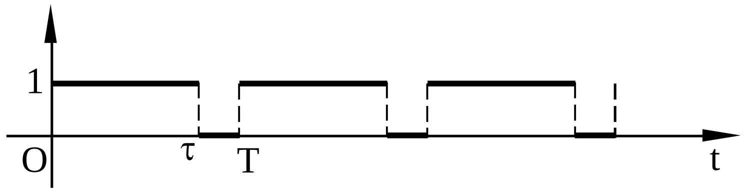
Thay vào trên ta được:

$$F(p) = \Phi(p) + e^{-pT}F(p)$$

Từ đó rút ra:

$$F(p) = \frac{\Phi(p)}{1 - e^{-pT}}$$

Ví dụ 1: Có một hệ thống xung như hình vẽ. Tìm ảnh của hàm đó:

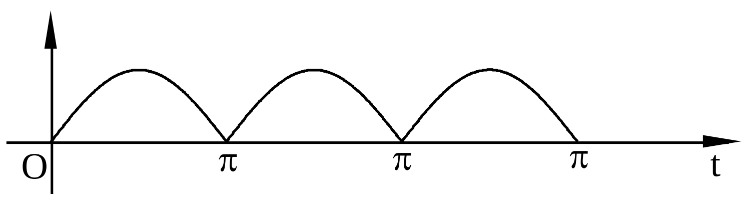


Ta có:

$$\Phi(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = \int_0^{\tau} e^{-pt}dt = \left.\frac{e^{-pt}}{-p}\right|_0^{\tau} = \frac{1}{p}\left(1 - e^{-p\tau}\right)$$

Vậy: $F(p) = \dfrac{1}{p}\dfrac{1 - e^{-pt}}{1 - e^{-pT}}$

Ví dụ 2: Cho một hệ thống các xung hình sin như hình vẽ. Tìm ảnh



Ta thấy rằng hàm f(t) = | sint | tuần hoàn với chu kì T = π. Trong ví dụ 3 ở §5 ta đã biết:

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2 + 1}\left(1 - e^{-p\pi}\right)$$

Vậy: $F(p) = \dfrac{1}{p^2 + 1}\left(\dfrac{1 + e^{-p\pi}}{1 - e^{-p\pi}}\right) = \dfrac{1}{p^2 + 1}\coth\dfrac{p\pi}{2}$

§7. ĐẠO HÀM GỐC

1. Đạo hàm cấp 1: Giả sử f(t) là hàm gốc, có đạo hàm f'(t) cũng là hàm gốc. Nếu $f(t) \leftrightarrow F(p)$ thì:

$$f'(t) \leftrightarrow pF(p) - f(0) \qquad (22)$$

Chứng minh: Theo định nghĩa:

$$f'(t) \leftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)dt$$

Trong tích phân bên vế phải, dùng phương pháp tích phân từng phần, đặt $u = e^{-pt}$ ta có $du = -p.e^{-pt}$, $dv = f'(t)dt$ nên $v = f(t)$. Thay vào ta có:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)dt = f(t)e^{-pt}\Big|_o^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = f(t)e^{-pt}\Big|_o^{+\infty} + pF(p)$$

Do | f(t) | ≤ $Me^{s_o t}$ nên nếu Rep = s > s_o thì | $f(t)e^{-pt}$ | ≤ $Me^{(s_o - s)t} \to 0$ khi $t \to +\infty$.Vậy:

$$f(t)e^{-pt}\Big|_o^{+\infty} = -f(0)$$

Thay vào trên ta có:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)dt = pF(p) - f(0)$$

2. Đạo hàm cấp cao: Nếu f(t) có đạo hàm tới cấp n và các đạo hàm này đều là hàm gốc thì bằng cách áp dụng liên tiếp (22) ta có:

$$f^{(n)}(t) = p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \qquad (23)$$

3. Hệ quả: Nếu f(t) là hàm gốc và pF(p) giải tích tại ∞ thì:

$$\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0) \qquad (24)$$

§8. TÍCH PHÂN GỐC

Nếu f(t) ↔ F(p) thì $\int_0^t f(t)dt$ là một hàm gốc và

$$\int_0^t f(t)dt \leftrightarrow \frac{F(p)}{p} \qquad (25)$$

Chứng minh: đặt $\varphi(t) = \int_0^t f(t)dt$. Rõ ràng φ(0) = 0.. Hàm φ(t) có đạo hàm là hàm f(t) liên tục từng khúc. Bởi vì:

$$|\varphi(t)| \le \int_0^t |f(t)|dt \le \int_0^t Me^{s_o t}dt = \frac{M}{s_o}e^{s_o t}\Big|_0^t \le M_1 e^{s_o t}$$

nên φ(t) là một hàm gốc cùng chỉ số tăng với f(t). Gọi Φ(p) là ảnh của nó. Ta phải tìm Φ(p). Vì φ'(t) = f(t) nên theo công thức đạo hàm gốc ta có:

$$f(t) \leftrightarrow p\Phi(p) - \varphi(0)$$

Vậy F(p) = pΦ(p) hay

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$$

§9. ĐẠO HÀM ẢNH

Nếu f(t) ↔ F(p) thì: