

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

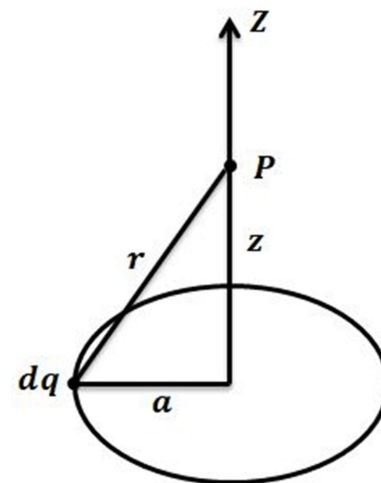
Câu 1. Điện tích Q phân bố liên tục đều trên vòng dây tròn mảnh bán kính a . Xác định thế điện và cường độ điện trường tại điểm P nằm trên trục z của vòng dây.

Giải

Điện tích phân bố đều trên vòng dây $\rightarrow \lambda = \text{const}$

$$Q = \int_C \lambda dl = \lambda \int_C dl = \lambda L = 2\pi a \lambda \rightarrow \lambda = \frac{Q}{2\pi a}$$

$$\text{Thế điện } \varphi = \int_C \frac{dq}{4\pi\epsilon r} = \int_C \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon r} = \int_C \frac{\frac{Q}{2\pi a} \cdot 2\pi a}{4\pi\epsilon \sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon \sqrt{a^2 + z^2}}$$



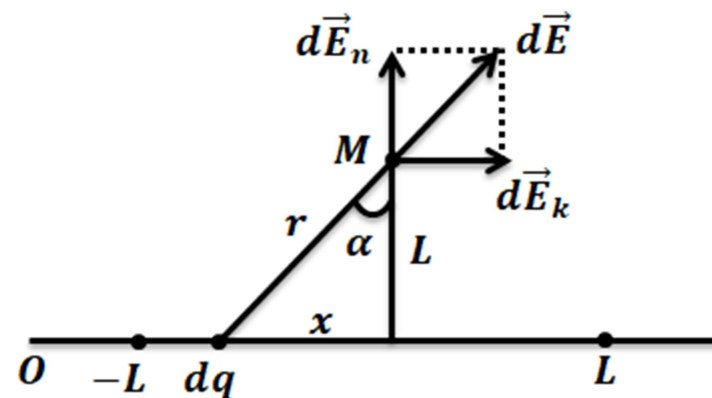
$$\text{Cường độ điện trường } \vec{E} = -\text{grad } \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{i}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{i}_z \right) \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon \sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{Qz}{4\pi\epsilon \sqrt{(a^2 + z^2)^3}} \vec{i}_z$$

Câu 2. Xác định vector cường độ điện trường tại điểm M nằm trên đường trung trục của đoạn thẳng và cách đoạn thẳng một đoạn L , biết rằng đoạn thẳng mang điện tích có chiều dài $2L$ có mật độ điện dài λ đặt dọc theo trục Ox từ $x = -L \rightarrow x = L$.

Giải

Ta có:

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + L^2 = (L \cdot \tan \alpha)^2 + L^2 = \frac{L^2}{\cos^2 \alpha} \\ x = L \cdot \tan \alpha \rightarrow dx = \frac{L}{\cos^2 \alpha} d\alpha \rightarrow dq = \lambda dl = \lambda dx = \frac{\lambda L}{\cos^2 \alpha} d\alpha \end{cases}$$



$$\begin{aligned}\vec{E} &= \int_{\text{dây}} d\vec{E} = \int_{\text{dây}} d\vec{E}_n + \int_{\text{dây}} d\vec{E}_k = \int_{\text{dây}} d\vec{E}_n = \int_{\text{dây}} dE_n = \int_{\text{dây}} dE \cdot \cos \alpha = \int_{\text{dây}} \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \cdot \cos \alpha \\ &= \int_{\text{dây}} \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda L}{\cos^2 \alpha} d\alpha \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{L^2} \cdot \cos \alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon\epsilon_0 L} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos \alpha d\alpha = \frac{\lambda\sqrt{2}}{4\pi\epsilon\epsilon_0 L}\end{aligned}$$

Câu 3. Điện thế tại một điểm bất kỳ trong không gian của phân bố điện tích đối xứng cầu với mật độ $\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & \text{nếu } 0 \leq r \leq R \\ 0 & \text{nếu } r > R \end{cases}$ (R là bán kính quả cầu). Xác định cường độ điện trường và điện thế bên trong và bên ngoài quả cầu.

Giải

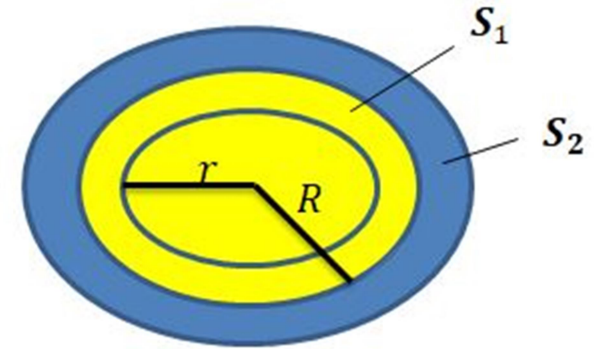
$$\text{Ta có: } \phi_e = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_i q_i$$

Chọn S_1 là mặt cầu nằm trong quả cầu tích điện ($r < R$).

Chọn S_2 là mặt cầu nằm ngoài quả cầu tích điện ($r > R$).

➤ Bên trong quả cầu tích điện ($r < R$). Áp dụng định lý O – G ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_{S_1} \vec{D}_1 d\vec{S} = \int_{V_1} \rho dV \\ \oint_{S_1} \vec{D}_1 d\vec{S} = D_1 S_1 = D_1 \cdot 4\pi r^2 \rightarrow D_1 = \frac{\rho_0 r}{3} \rightarrow E_1 = \frac{D_1}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon\epsilon_0} \\ \int_{V_1} \rho dV = \int_{V_1} \rho_0 dV = \rho_0 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \end{array} \right.$$



➤ Bên ngoài quả cầu tích điện ($r > R$). Áp dụng định lý $O - G$ ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_{S_2} \vec{D}_2 d\vec{S} = \int_V \rho dV \\ \oint_{S_2} \vec{D}_2 d\vec{S} = D_2 S_2 = D_2 \cdot 4\pi r^2 \rightarrow D_2 = \frac{\rho_0 R^3}{3r^2} \rightarrow E_2 = \frac{D_2}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon \epsilon_0 r^2} \\ \int_V \rho dV = \int_V \rho_0 dV = \rho_0 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \end{array} \right.$$

➤ Thế điện bên trong quả cầu:

$$\begin{aligned} \varphi_1(r) &= \int_r^\infty \vec{E} d\vec{r} = \int_r^R \vec{E}_1 d\vec{r} + \int_R^\infty \vec{E}_2 d\vec{r} = \int_r^R E_1 dr + \int_R^\infty E_2 dr = \int_r^R \frac{\rho_0 r}{3\epsilon \epsilon_0} dr + \int_R^\infty \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon \epsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho_0}{6\epsilon \epsilon_0} r^2 \Big|_r^R - \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon \epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_R^\infty \\ &= \frac{\rho_0}{6\epsilon \epsilon_0} (3R^2 - r^2) \end{aligned}$$

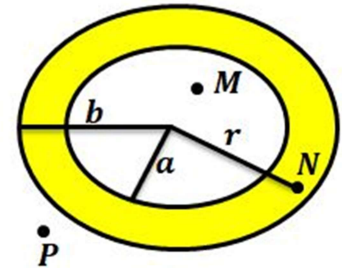
➤ Thế điện bên ngoài quả cầu:

$$\varphi_2(r) = \int_r^\infty \vec{E} d\vec{r} = \int_r^\infty \vec{E}_2 d\vec{r} = \int_r^\infty E_2 dr = \int_r^\infty \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon \epsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon \epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_\infty^r = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon \epsilon_0 r}$$

Câu 4. Xác định vector cường độ điện trường tạo bởi một lớp hình cầu đồng tâm có bán kính lần lượt là a, b ($a < b$), tích điện với mật độ khối $\rho = -\frac{\rho_0}{r^2}$ ($a < r < b$).

Giải

Chọn S_1 là mặt cầu bán kính $r < a$, S_2 là mặt cầu bán kính $a < r < b$, S_3 là mặt cầu bán kính $r > b$



Cường độ điện trường tại điểm M : $\oint_{S_1} \vec{D}_1 d\vec{S} = \int_{V_1} \rho dV = 0 \rightarrow D_1 = 0 \rightarrow E_1 = 0$

$$\text{Cường độ điện trường tại điểm } N \left\{ \begin{array}{l} \oint_{S_2} \vec{D}_2 d\vec{S} = \int_{V_2} \rho dV \\ \oint_{S_2} \vec{D}_2 d\vec{S} = D_2 S_2 = D_2 \cdot 4\pi r^2 \\ \int_{V_2} \rho dV = \int_{V_2} \frac{-\rho_0}{r^2} \cdot 4\pi r^2 dr = \rho_0 \cdot 4\pi r \Big|_r^a = \rho_0 \cdot 4\pi(a - r) \end{array} \right. \rightarrow D_2 = \frac{\rho_0(a - r)}{r^2} \rightarrow E_2 = \frac{D_2}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{\rho_0(a - r)}{r^2 \epsilon \epsilon_0}$$

$$\text{Cường độ điện trường tại điểm } P: \oint_{S_3} \vec{D}_3 d\vec{S} = \int_V \rho dV \rightarrow D_3 \cdot 4\pi r^2 = \int_a^b -\frac{\rho_0}{r^2} \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi \rho_0 r \Big|_b^a = 4\pi \rho_0(a - b)$$

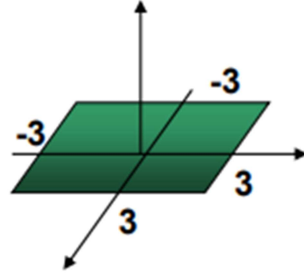
$$\rightarrow D_3 = \frac{\rho_0(a - b)}{r^2} \rightarrow E_3 = \frac{\rho_0(a - b)}{\epsilon \epsilon_0 r^2}$$

Câu 9. Mặt vuông nằm trong mặt phẳng $x - y$ giới hạn $(-3 < x < 3)$ và $(-3 < y < 3)$ mang điện tích với mật độ $\rho_s = 2y^2 \left(\frac{\mu C}{m^2}\right)$. Tìm điện tích Q của mặt?

Giải

Ta có:

$$Q = \int_S \rho_s \cdot dS_z = \int_{-3}^3 \int_{-3}^3 2y^2 dx dy = \int_{-3}^3 dx \int_{-3}^3 2y^2 dy = 216(\mu C)$$



Câu 10. Tìm thông lượng của vector cảm ứng điện thoát ra bên ngoài mặt S giới hạn bởi: $x = 1, y = 4$ và $z = 1$, biết mật độ điện tích khối bên trong: $\rho_V(x, y, z) = \rho_0(3 - x^2 - y^2 - z^2)$

Giải

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \int_V \rho_V dV = \int_{x=-1}^1 \int_{y=-4}^4 \int_{z=-1}^1 \rho_0 (3 - x^2 - y^2 - z^2) dx dy dz = \rho_0 \int_{x=-1}^1 \int_{y=-4}^4 \left(3z - x^2 z - y^2 z - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 dy dz \\ &= \rho_0 \int_{x=-1}^1 \int_{y=-4}^4 \left(\frac{16}{3} - 2x^2 - 2y^2 \right) dx dy = \rho_0 \int_{x=-1}^1 \left(\frac{16}{3} y - 2x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) \Big|_{-4}^4 dx = \rho_0 \int_{x=-1}^1 \left(-\frac{128}{3} - 16x^2 \right) dx \\ &= -96\rho_0 \end{aligned}$$

Câu 11. Một mặt cầu kim loại mỏng bán kính r mang điện tích Q . Tính:

a. Điện dung của quả cầu.

b. Mật độ năng lượng điện trường tại khoảng cách r tính từ tâm quả cầu.

Giải

a. Ta có:

$$\begin{cases} U = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \\ C = \frac{Q}{U} \end{cases} \rightarrow C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 r (C)$$

b. Ta có:

$$\begin{cases} E = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \\ w = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} \end{cases} \rightarrow w = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon\epsilon_0 r^4} \left(\frac{J}{m^3} \right)$$