CHƯƠNG 9: PHƯƠNG TRÌNH VẬT LÝ - TOÁN

§1. PHÂN LOẠI CÁC PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG TUYẾN TÍNH CẤP 2 VỚI CÁC BIẾN ĐỘC LẬP

1. Phân loại các phương trình: Khi khảo sát các bài toán vật lí, ta nhận được phương trình đạo hàm riêng cấp 2 dạng:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = d(x) \qquad (1)$$

Trong đó $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ và $d(x)$ là các hàm nhiều biến đã cho của $x = (x_1, x_2,...x_n)$ còn $u(x)$ là các hàm cần xác định.

Trong thực tế ta thường gặp các phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp 2 với hai biến độc lập dạng:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + gu = h \qquad (2)$$

Trong đó a, b, c, d, g, h là các hàm hai biến của x và y.

Trong giáo trình này ta chỉ xét các phương trình dạng (2). Để đơn giản ta viết lại (2):

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Phi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (3)$$

Các phương trình này có thể phân thành các loại sau:

Phương trình hyperbolic:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \Phi_1\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Phương trình eliptic:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Phi_2\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Phương trình parabolic:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi_3\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

2. Các bài toán cơ bản của phương trình vật lí - toán:

a. Bài toán Cauchy và bài toán hỗn hợp của phương trình truyền sóng: Một phương trình truyền sóng là một phương trình dạng hyperbolic. Phương trình truyền sóng dạng chính tắc là:

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f_1(x,y,z,t)$$

Giả sử ta cần xác định hàm u(x, y, z, t) trong miền V và $t \geq 0$. V được giới hạn bằng mặt biên kín và trơn S với các điều kiện đầu:

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0} = u_o(x,y,z)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_o^*(x,y,z)$$

và điều kiện biên:

$$u(x,y,z,t)\Big|_{(x,y,z)\in S}=u_1(x,y,z)$$

Bài toán giải phương trình trên với các điều kiện đầu và điều kiện biên được gọi là bài toán hỗn hợp của phương trình truyền sóng. Nếu ta xét bài toán trong miền cách xa các biên mà ở đó điều kiện biên không có tác dụng thì ta gặp bài toán Cauchy với điều kiện đầu và xét trong toàn bộ không gian.

b. Bài toán Cauchy và bài toán hỗn hợp của phương trình truyền nhiệt: Cho phương trình truyền nhiệt dưới dạng chính tắc:

$$\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f_1(x,y,z,t)$$

Khi đó bài toán hỗn hợp của phương trình truyền nhiệt là bài toán tìm nghiệm của phương trình với điều kiện đầu và điều kiện biên:

$$u(x,y,z,t)\Big|_{t=0}=u_o(x,y,z)$$

$$u(x,y,z,t)\Big|_{(x,y,z)\in S}=u_1(x,y,z)$$

Bài toán Cauchy của phương trình truyền nhiệt là bài toán tìm nghiệm của phương trình truyền nhiệt trong toàn bộ không gian.

§2. PHƯƠNG TRÌNH LOẠI HYPERBOLIC PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT

1. Bài toán Cauchy - Phương trình sóng của dây vô hạn và nửa vô hạn: Bài toán Cauchy của phương trình hyperbolic trong trường hợp một biến được xác định như sau:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad -\infty\le x\le\infty,\ t\ge 0 \tag{1}$$

với các điều kiện

$$u(x,t)\Big|_{t=0}=u_o(x)\ ;\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=u_1(x) \tag{2}$$

Đây là bài toán dao động tự do của dây dài vô hạn.

Để giải phương trình (1) ta biến đổi nó bằng cách dùng các biến:

$$\begin{aligned}\xi&=x+at\\ \eta&=x-at\end{aligned} \tag{3}$$

nghĩa là:

$$x=\frac{\xi+\eta}{2}\qquad t=\frac{\xi-\eta}{2a}$$

Ta có:

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}=a\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\right)$$

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}$$

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2} - 2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}\right)$$

Thay vào (2.1) ta có:

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta} = 0 \text{ hay } \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\right) = 0$$

Suy ra: $\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi} = \varphi_1(\xi)$ với $\varphi_1(\xi)$ là hàm tuỳ ý

Như vậy:

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = \int \varphi_1(\xi)d\xi + \psi(\eta)$$

với $\psi(\eta)$ là hàm tuỳ ý.

Từ đó ta có:

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

hay: $u(x, t) = \varphi(x + at) + \psi(x - at)$ (3)

Trong đó φ và ψ là các hàm tuỳ ý, liên tục và khả vi 2 lần. Nghiệm của (3) được gọi là nghiệm tổng của (1). Từ (3) nếu tính đến điều kiện (2) ta sẽ có:

$\varphi(x) + \psi(x) = u_o(x)$ (4)

$a\varphi(x) - a\psi(x) = u_1(x)$ (5)

Lấy tích phân hai vế của (5) ta có:

$$a[\varphi(x) - \varphi(0)] - a[\psi(x) - \psi(0)] = \int_0^x u_1(\theta)d\theta$$

Vậy nên:

$$\varphi(x) - \psi(x) = \frac{1}{a}\int_0^x u_1(\theta)d\theta + C \quad (6)$$

với $C = \varphi(0) - \psi(0)$

Từ (4) và (6) rút ra:

$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{2}u_o(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x u_1(\theta)d\theta + \frac{C}{2} \\ \psi(x) = \frac{1}{2}u_o(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x u_1(\theta)d\theta - \frac{C}{2} \end{cases}$$

Đặt các hệ thức trên vào (3) ta được nghiệm:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_o(x + at) + u_o(x - at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\theta)d\theta$$

Đây là công thức D'Alembert.

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad -\infty < x < \infty,\ t \geq 0$$

với các điều kiện:

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{x}{1+x^2} = u_o(x)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sin x = u_1(x)$$

Áp dụng công thức D'Alembert ta có:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\frac{x+at}{1+(x+at)^2} + \frac{x+at}{1+(x-at)^2}\right] + \frac{1}{a}\sin at \sin x$$

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad -\infty < x < \infty,\ t \geq 0$$

với các điều kiện:

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \frac{\sin x}{x} = u_o(x)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{1}{1+x^2} = u_1(x)$$

Áp dụng công thức D'Alembert ta có:

$$u(x,t) = \frac{x\sin x\cos at - at\cos x\sin at}{x^2-(at)^2} + \frac{1}{2a}\mathrm{arctg}\left[\frac{2at}{1+x^2-(at)^2}\right]$$

vì nếu đặt arctg(x + at) - arctg(x - at) = α ta có:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\mathrm{tg}[\mathrm{arctg}(x+at)] - \mathrm{tg}[\mathrm{arctg}(x-at)]}{1+\mathrm{tg}[\mathrm{arctg}(x+at)]\times \mathrm{tg}[\mathrm{arctg}(x-at)]} = \frac{(x+at)-(x-at)}{1+(x+at)(x-at)}$$

$$= \frac{2at}{1+x^2-(at)^2}$$

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad -\infty < x < \infty,\ t \geq 0$$

với các điều kiện:

$$u(x,t)\big|_{t=0} = x^2 = u_o(x)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sin^2 x = u_1(x)$$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = 0$$

Trước hết để tìm nghiệm của bài toán ta kéo dài lẻ hàm $u_o(x) = x^2$ và $u_1(x) = \sin^2 x$ sẽ được các hàm:

$$u_o^* = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$$u_1^* = \begin{cases} \sin^2 x & x \geq 0 \\ -\sin^2 x & x < 0 \end{cases}$$

Áp dụng công thức D'Alembert cho các hàm này ta có:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[u_o^*(x+at)+u_o^*(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}u_1^*(\theta)d\theta$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[(x+at)^2+(x-at)^2\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\sin^2(\theta)d\theta & t\le\frac{x}{a}\\ \frac{1}{2}\left[(x+at)^2-(x-at)^2\right]+\frac{1}{2a}\left[\int_{0}^{x+at}\sin^2(\theta)d\theta-\int_{x-at}^{0}\sin^2(\theta)d\theta\right] & t>\frac{x}{a}>0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x^2+a^2t^2+\frac{t}{2}-\frac{1}{4a}\cos 2x\sin 2at & t\le\frac{x}{a}\\ 2axt+\frac{1}{4a}\left[2x-\sin 2x\cos 2at\right]\end{cases}$$

Ví dụ 4: Giải phương trình điện báo:

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\frac{RC+LG}{LC}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{RG}{LC}u-\frac{1}{LC}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0$$

$$\frac{\partial^2i}{\partial t^2}+\frac{RC+LG}{LC}\frac{\partial i}{\partial t}+\frac{RG}{LC}i-\frac{1}{LC}\frac{\partial^2i}{\partial x^2}=0$$

Trong các trường hợp:

- Dây không tổn hao R = G = 0
- Dây không méo RC = LG

☞ Trường hợp dây không tổn hao: Khi đó các phương trình trên có dạng:

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2i}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2i}{\partial x^2}$$

Trong đó $a=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

Giả sử các điều kiện ban đầu đã biết là:

$$\begin{cases}u(x,t)\big|_{t=0}=u_o(x)\\ i(x,t)\big|_{t=0}=i_o(x)\end{cases}\qquad -\infty<x<\infty,\ y>0$$

Với R = G = 0 ta có điều kiện đối với phương trình điện báo:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=-\frac{1}{C}i_o(x)$$

$$\left.\frac{\partial i}{\partial t}\right|_{t=0}=-\frac{1}{C}u_o(x)$$

Từ đó áp dụng các công thức D'Alembert ta được:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[u_o(x+at)+u_o(x-at)\right]-\frac{1}{2aC}\int_{x-at}^{x+at}i_o(\theta)d\theta$$

$$i(x,t)=\frac{1}{2}\left[i_o(x+at)+i_o(x-at)\right]-\frac{1}{2aC}\int_{x-at}^{x+at}u_o(\theta)d\theta$$

Nếu tính đến $a=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ ta suy ra nghiệm:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[u_o(x+at)+u_o(x-at)\right]+\sqrt{\frac{L}{C}}\left[\frac{i_o(x-at)-i_o(x+at)}{2}\right]$$

$$i(x,t)=\frac{1}{2}\left[i_o(x+at)+i_o(x-at)\right]+\sqrt{\frac{L}{C}}\left[\frac{u_o(x-at)-u_o(x+at)}{2}\right]$$

☞ Trường hợp dây không méo: khi đó RC = LC và ta tìm nghiệm dưới dạng:

$$\begin{cases} u(x,t)=e^{-\frac{R}{L}t\tilde{u}(x,t)} \\ i(x,t)=e^{-\frac{R}{L}t\tilde{i}(x,t)} \end{cases}$$

Lấy đạo hàm hệ thức trên hai lần theo x và theo t rồi thay vào phương trình ta có:

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}=a^2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2};\qquad \frac{\partial^2\tilde{i}}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\tilde{i}}{\partial x^2}$$

Các điều kiện đầu:

$$\begin{cases} u(x,t)\big|_{t=0}=\tilde{u}(x,t)\big|_{t=0}=u_o(x) \\ i(x,t)\big|_{t=0}=\tilde{i}(x,t)\big|_{t=0}=i_o(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}\right|_{t=0}=-\frac{1}{C}i_o(x) \\ \left.\frac{\partial\tilde{i}}{\partial t}\right|_{t=0}=-\frac{1}{L}u_o(x) \end{cases}$$

Từ đó, theo công thức D’Alembert ta có nghiệm:

$$\begin{cases} u(x,t)=e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{u_o(x+at)+u_o(x-at)}{2}+\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{i_o(x-at)-i_o(x+at)}{2}\right] \\ i(x,t)=e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{i_o(x+at)+i_o(x-at)}{2}+\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{u_o(x-at)-u_o(x+at)}{2}\right] \end{cases}$$

2. Bài toán hỗn hợp - Phương trình sóng của dây hữu hạn:

a. Khái niệm chung: Bài toán hỗn hợp của phương trình loại hyperbolic trong trường hợp một chiều là bài toán giải phương trình:

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+f(x,t)\qquad\qquad 0\le x\le l,\ 0\le t\le T$$

với các điều kiện : $u(x,t)\big|_{t=0}=u_o(x);\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=u_1(x)$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = \phi_1(t); \qquad u(x,t)\big|_{x=l} = \phi_2(t)$$

Ta phân bài toán hỗn hợp này thành các bài toán nhỏ sau:

b. Bài toán 1: Giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad\qquad 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T$$

với các điều kiện:

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u_o(x); \ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = u_1(x)$$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = 0; \qquad u(x,t)\big|_{x=l} = 0$$

Bài toán này mô tả quá trình truyền sóng của dây hữu hạn với hai đầu dây cố định. Biết dạng ban đầu của dây là $u_o(x)$ và vận tốc ban đầu của các thành phần dây là $u_1(x)$. Ta giải bài toán này bằng phương pháp tách biến, nghĩa là tìm nghiệm của phương trình dưới dạng tích hai hàm số, một hàm chỉ phụ thuộc vào toạ độ x và hàm kia chỉ phụ thuộc t. Như vậy nghiệm u(x,t) có dạng:

$$u(x,t) = X(x).T(t)$$

Sau khi lấy đạo hàm và thay vào phương trình ta có:

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Do vế phải chỉ phụ thuộc t và vế trái chỉ phụ thuộc x nên chúng phải cùng bằng một hằng số mà ta kí hiệu là $-\lambda$. Khi đó ta nhận được hệ phương trình:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

Nghiệm của bài toán phải thoả mãn điều kiện đã cho nên:

$$X(0) = 0; \qquad X(l) = 0$$

Khi giải phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 hệ số hằng ta có nhận xét về giá trị của λ như sau:

* Nếu $\lambda = 0$ thì nghiệm tổng quát của phương trình có dạng:

$$X(x) = C_1(x) + C_2$$

Với điều kiện đầu ta suy ra $C_1 = 0$ và $C_2 = 0$. Khi này $X(x) \equiv 0$ không được coi là nghiệm của bài toán.

* Nếu $\lambda < 0$ thì nghiệm tổng quát có dạng:

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

và với các điều biên ta có:

$$\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ X(l) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{cases}$$

Từ hệ trên ta suy ra $C_1 = 0$ và $C_2 = 0$. Khi này $X(x) \equiv 0$ không được coi là nghiệm của bài toán.

Nếu $\lambda > 0$ thì nghiệm tổng quát có dạng:

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

và với các điều biên ta có:

$$\begin{cases} X(0) = C_1 = 0 \\ X(l) = C_2 \sin \lambda l = 0 \end{cases}$$

Để nghiệm không tầm thường thì từ phương trình trên ta thấy $C_2 \neq 0$, suy ra $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$. Như vậy:

$$\sqrt{\lambda}l = \frac{\pi}{2} \text{ hay } \lambda = \frac{k^2\pi^2}{l^2} \ \forall k \in Z$$

nên:

$$X(x) = C_2 \sin\frac{k\pi}{l}x$$

Với giá trị λ vừa tìm được giải phương trình ta có:

$$T_k = A_k \cos\frac{k\pi}{l}at + B_k \sin\frac{k\pi}{l}at$$

Do đó:

$$u_k(x,t) = \left(a_k \cos\frac{k\pi}{l}at + b_k \sin\frac{k\pi}{l}at\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

Nghiệm tổng quát có dạng:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi}{l}at + b_k \sin\frac{k\pi}{l}at\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

Vấn đề còn lại là xác định các hệ số a_k và b_k để thoả mãn các điều kiện đầu và điều kiện biên, nghĩa là phải có:

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u_o(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = u_1(x)$$

Ta giả sử các hàm $u_o(x)$ và $u_1(x)$ là các hàm có thể khai triển thành chuỗi Fourier theo $\sin\frac{k\pi}{l}x$ trên đoạn [0, l]. Khi đó ta có:

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi}{l}x = u_o(x)$$

Do đó:

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l u_o(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx$$

và: $$\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}b_k \sin\frac{k\pi}{l}x = u_1(x)$$

nên: $$b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l u_1(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx$$

Ví dụ : Tìm dao động gắn chặt tại hai mút x = 0 và x = l nếu vị trí ban đầu của dây trùng với trục Ox và vận tốc ban đầu của các thành phần dây được cho bởi hàm số:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \begin{cases} v_o \ \text{khi} \left|x - \frac{l}{3}\right| \leq \frac{2\pi}{h} \\ 0 \ \text{khi} \left|x - \frac{l}{3}\right| > \frac{\pi}{2h} \end{cases}$$

$(0 \le x < l, t > 0)$, h là hằng số sao cho x thoả mãn $\left| x - \frac{l}{3} \right| \le \frac{\pi}{2h}$ chứa trong khoảng $(0, l)$.

Như vậy ta cần giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

với điều kiện đầu đã cho và điều kiện biên:

$$u(x,t)\big|_{t=0} \equiv 0;\ u(x,t)\big|_{x=l} = u(x,t)\big|_{x=l} = 0$$

Như vậy, vì $u_o(x) \equiv 0$ nên:

$$a_k \equiv 0$$

$$b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l u_1(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l v_o \sin\frac{k\pi}{l}xdx = \frac{4v_o l}{k^2\pi^2 a}\sin\frac{k\pi^2 h}{2}$$

và: $$u(x,t) = \frac{4v_o l}{\pi^2 a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\pi}{3}\sin\frac{k\pi^2 h}{2}}{k^2}\sin\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}$$

c. Bài toán 2: Giải phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T$$

với các điều kiện:

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u_o(x);\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x)$$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = 0; \qquad u(x,t)\big|_{x=l} = 0$$

Bài toán này mô tả quá tình truyền sóng của dây hữu hạn có tác động của lực cưỡng bức bên ngoài với hai đầu dây cố định. Dạng ban đầu của dây là $u_o(x)$ và vận tốc ban đầu của dây cho bởi $u_1(x)$. Ta cũng giải bài toán bằng phương pháp phân ly biến số Fourier. Ta tìm nghiệm dưới dạng:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (1)$$

Ta giả sử các hàm $u_o(x)$ và $u_1(x)$ khai triển được dưới dạng chuỗi Fourier theo sin trong khoảng $[0, l]$, khi đó ta có:

$$u_o(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

hay: $$T_k(0) = \frac{2}{l}\int_0^l u_o(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx$$

$$u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T'_k(0)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

hay: $$T'_k(0) = \frac{2}{l}\int_0^l u_o(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx$$

Mặt khác lấy đạo hàm hai lần $u(x, t)$ trong (1) theo x và t ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k''(t) \sin \dfrac{k\pi x}{l} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k(t) \left(\dfrac{k\pi}{l}\right)^2 \sin \dfrac{k\pi x}{l} \end{cases}$$

Khai triển hàm f(x, t) theo sin:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

Trong đó:

$$C_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin \frac{k\pi}{l} x dx$$

Đặt các điều kiện trên vào phương trình của u(x, t) ta có:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[T_k''(t) + \left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 T_k(t) - C_k(t) \right] \sin \frac{k\pi x}{l} = 0$$

Từ đó suy ra $T_k(t)$ trong (1) là nghiệm của phương trình tuyến tính cấp 2 hệ số hằng:

$$T_k''(t) + \left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 T_k(t) = C_k(t)$$

thoả mãn các điều kiện đầu và điều kiện biên

Ví dụ 1: Giải phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1 \qquad 0 \le x \le 1,\ 0 \le t$$

với các điều kiện:

$$u(x,t)\big|_{t=0} = 0; \ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 1$$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = u(x,t)\big|_{x=1} = 0$$

Ta tìm nghiệm dưới dạng (1). Trong ví dụ này $f(x, t) \equiv 1$. Như vậy:

$$C_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin \frac{k\pi}{l} x dx = 2 \int_0^1 \sin k\pi x dx = \frac{2}{k\pi}(1 - \cos k\pi)$$

hay: $C_k = \begin{cases} \dfrac{4}{k\pi} & \text{khi } k = 2n-1 \\ 0 & \text{khi } k = 2n \end{cases}$

Mặt khác $u_1(x) \equiv 1$, $u_o(x) \equiv 0$ nên ta suy ra:

$$T_k = 2\int_0^1 u_1(x) \sin k\pi x dx = 2\int_0^1 \sin k\pi x dx = \begin{cases} \dfrac{4}{k\pi} & \text{khi } k = 2n-1 \\ 0 & \text{khi } k = 2n \end{cases}$$

Vậy với k chẵn ta phải giải phương trình vi phân thường:

$$T_{2n}''(t) + (2n\pi)^2 T_{2n}(t) = 0$$

với điều kiện: $T_{2n}(0) = 0$; $T_{2n}'(0) = 0$

Như vậy $T_{2n}(t) \equiv 0$