XÁC SUẤT THỐNG KÊ

KHOA CƠ BẢN

ĐẠI HỌC GTVT TP.HCM

GIỚI THIỆU GIẢNG VIÊN

GIỚI THIỆU HỌC PHẦN

Học phần này cung cấp các kiến thức cơ bản về: lý thuyết xác suất, biến ngẫu nhiên và luật phân phối xác suất, lý thuyết mẫu, các bài toán ước lượng tham số, các bài toán kiểm định giả thiết thống kê; bài toán phân tích tương quan và phân tích hồi quy.

Qua đó rèn luyện cho sinh viên các kỹ năng về tư duy, đánh giá được khả năng xảy ra của một số các biến cố ngẫu nhiên có thể xảy ra trong các bài toán thực tế; ứng dụng kiến thức về biến ngẫu nhiên và thống kê toán học cũng như nghiên cứu được sự phụ thuộc của các biến số để giải quyết một số vấn đề có liên quan đến số liệu thống kê, lý thuyết dự báo trong các lĩnh vực giáo dục, sản xuất, dinh dưỡng, kinh tế, kỹ thuật,…

Học phần 3 tín chỉ (45 tiết) học trong 15 tuần.

NỘI DUNG HỌC PHẦN

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Bộ môn Toán, *Bài giảng Xác suất thống kê – Xử lý số liệu thực nghiệm* (lưu hành nội bộ), Trường đại Học GTVT TP.HCM, 2022.

[2] Nguyễn Cao Văn, Trần Thái Ninh, *Lý thuyết xác suất và Thống kê toán*, NXB Khoa học Kỹ thuật, 1996.

[3] Đặng Hùng Thắng, *Thống kê và ứng dụng*, NXB Giáo dục, 1999.

[4] Đào Hữu Hồ, *Xác suất thống kê*, NXB Đại học Quốc gia Hà nội, 2006.

[5] Lê Sĩ Đồng, *Xác suất thống kê và ứng dụng*, NXB Giáo dục Việt Nam, 2011

CÁCH ĐÁNH GIÁ HỌC PHẦN

- **Điểm quá trình 50% bao gồm:**

+ Điểm chuyên cần: Chiếm 20%, Vắng không phép -1 điểm/buổi, vắng có phép -0.5 điểm/buổi, sử dụng điện thoại làm việc riêng -2 điểm/lần, ngủ trong lớp -1điểm/lần, trốn học giữa buổi -1 điểm/lần.

+ Phát biểu: +0,25đ/câu hỏi, +0,5đ/câu hỏi khó, +0,75đ/câu hỏi rất khó.

+ Đánh giá bài tập: xung phong giải đúng +0,25đ/bài dễ, +0,5 điểm/bài khó, +0,75đ/bài rất khó.

+ Kiểm tra giữa kỳ: Chiếm 30%, kiểm tra tự luận vào tuần thực học thứ 5.

- **Điểm thi kết thúc học phần chiếm 50%:** *Thi tự luận*
- **Chú ý:** *Sinh viên không được nghỉ quá 20% số tiết.*

PHẦN I: XÁC SUẤT

CHƯƠNG 1

LÝ THUYẾT XÁC SUẤT

Bài 1: Giải tích tổ hợp

- **1.1 Quy tắc cộng**

Một công việc được hoàn thành khi thực hiện một trong k trường hợp

Trường hợp 1 có n_1 cách thực hiện

....

Trường hợp k có n_k cách thực hiện

Các cách thực hiện ở trường hợp i không trùng với bất kỳ cách thực hiện nào ở trường hợp j (với mọi i khác j) thì số cách thực hiện công việc là $n_1 + n_2 + ... + n_k$

Ví dụ 1.1. Từ một lớp có 10 nam và 20 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một người (nam hoặc nữ)?

Giải. Chọn một người thì có 2 trường hợp, hoặc chọn nam hoặc chọn nữ. Chọn "nam": có 10 cách chọn, chọn "nữ" : có 20 cách chọn và chọn nam thì không chọn nữ và ngược lại. Do đó theo quy tắc cộng sẽ có:N=10+20=30 (cách chọn một người - nam hoặc nữ)

Bài 1: Giải tích tổ hợp

- **<u>1.2 Quy tắc nhân</u>**

Một công việc được chia ra k giai đoạn liên tiếp nhau:

Giai đoạn 1 có n_1 cách thực hiện

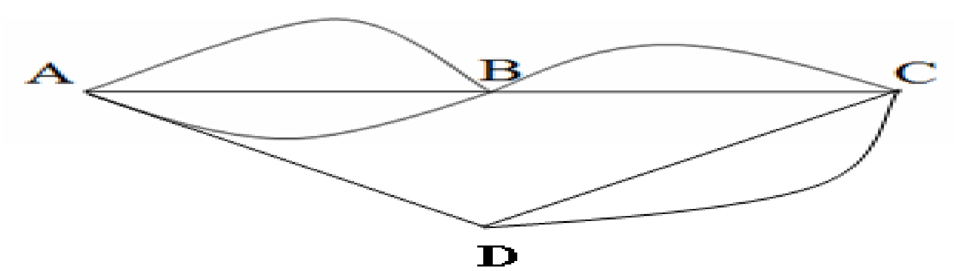
Giai đoạn 2 có n_2 cách thực hiện

……………………………………………

Giai đoạn k có n_k cách thực hiện

Công việc sẽ được thực hiện bằng $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ cách

- **BT1:** Có bao nhiêu cách đi từ A đến C ?



Bài 1: Giải tích tổ hợp

- **1.3 Hoán vị:**

  Số hoán vị: $P_n = n!$

- **1.4 Chỉnh hợp:**

  Số chỉnh hợp: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

- **1.5 Tổ hợp:**

  Số tổ hợp $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

- **1.6 Nhị thức Newton:**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^n \, b^{n-k}$$

Bài 1: Giải tích tổ hợp

BT 1: Có bao nhiêu cách sắp xếp 10 học sinh theo một hang ngang?

BT 2: Có bao nhiêu cách chọn một tổ trưởng và một tổ phó trong tổ gồm 10 người?

BT 3: Một hộp gồm 6 bi trắng và 4 bi đỏ.

a. Có bao nhiêu cách chọn ra 4 viên bi từ hộp?

b. Có bao nhiêu cách chọn ra 4 viên bi, trong đó có 2 trắng và 2 đỏ?

BT 4: Có bao nhiêu số điện thoại của một tổng đài nội bộ gồm 4 chữ số (ko tính 0000)?

HẾT BÀI 1

Bài 2:

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

2.1 Phép thử ngẫu nhiên và biến cố

- **Phép thử ngẫu nhiên** là thực hiện một phép đo, hay một thí nghiệm, hay một sự quan sát nào đó mà ta không biết trước được kết quả xảy ra. Kí hiệu: T.
- **Không gian mẫu**: là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử. Kí hiệu Ω
- **Biến cố** là kết quả có thể có của phép thử. Kí hiệu: A, B, C, …
- **Biến cố chắc chắn** là biến cố nhất định xảy ra khi thực hiện phép thử. Kí hiệu: Ω
- **Biến cố không thể** là biến cố nhất định không xảy ra khi thực hiện phép thử. Kí hiệu: ϕ

2.1 Phép thử ngẫu nhiên và biến cố

- ***Ví dụ:*** Xét phép thử tung một con xúc xắc.

  Gọi A_i là biến cố "xuất hiện mặt i chấm".

  Kgm: $\Omega = \{A_1, A_2, ..., A_6\}$

  *B*iến cố "con xúc xắc xuất hiện mặt có số chấm lớn hơn 6" là biến cố $\varnothing$

  *B*iến cố "con xúc xắc xuất hiện mặt có số chấm bé thua hoặc bằng 6" là biến cố Ω

2.2 Biến cố thuận lợi và biến cố tương đương

- Biến cố A được gọi là ***biến cố thuận lợi*** cho biến cố B , ký hiệu $A \subset B$, nếu A xảy ra thì B xảy ra.
- Nếu vừa có $A \subset B$ và $B \subset A$ thì ta nói A và B là hai ***biến cố tương đương*** hay biến cố bằng nhau, ký hiệu là $A = B$.
- **Lưu ý:** Với mọi biến cố A, ta luôn có $A \subset \Omega$, $\phi \subset A$, $A \subset A$

Ví dụ . Có 7 lá phiếu, trong đó có 2 lá phiếu trúng thưởng. Bạn Nam kiểm tra ngẫu nhiên lần lượt 3 phiếu.

- Gọi Ai là bc: "lá phiếu kiểm tra lần thứ *i* có thưởng" $i = (1,2,3)$,
  B là bc : "Bạn Nam kiểm tra được phiếu có thưởng",
  C là bc : "Bạn Nam kiểm tra được 2 phiếu có thưởng",
  D là bc : "Bạn Nam kiểm tra được ít nhất 1 phiếu có thưởng".
  Khi đó, ta có: $Ai \subset B$, $C \subset B$, $B = D$

2.3. Phép cộng và phép nhân các biến cố

- **2.3.1 Phép cộng** : C = A+B (hoặc $C = A \cup B$)

Biến cố C được gọi là biến cố tổng của hai biến cố A và B nếu C xảy ra khi và chỉ khi A xảy ra hoặc B xảy ra hoặc cả A và B cùng xảy ra (nghĩa là có ít nhất một trong hai biến cố A hoặc B xảy ra).

- **Tổng quát:** Tổng $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ (hay $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$) xảy ra khi và chỉ khi có ít nhất một trong *n* biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ xảy ra.
- ***Ví dụ:*** Tung một con xúc xắc.

Gọi A_i là biến cố "xuất hiện mặt i chấm".

A là biến cố " xuất hiện mặt có số chấm chẵn";

B là biến cố "xuất hiện mặt có số chấm chia hết cho 3"

Hãy biểu diễn biến cố A và B qua A_i .

2.3. Phép cộng và phép nhân các biến cố

- **2.3.2 Phép nhân:** $C = A.B$ hoặc $C = A \cap B$

  Biến cố C được gọi là tích của hai biến cố A và B nếu C xảy ra khi và chỉ khi đồng thời cả hai biến cố A và B cùng xảy ra.

  Tổng quát: Tích $A_1.A_2...A_n$ (hay $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$) xảy ra khi và chỉ khi cả *n* biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$ cùng xảy ra.

☞ ***Ví dụ:*** Hai người cùng bắn vào một con thú.

Gọi A là bc “người 1 bắn trượt”,

B là bc “người 2 bắn trượt”;

C là bc “con thú ko bị bắn trúng”.

Khi đó: C=AB

2.4 Quan hệ giữa các biến cố

- **Biến cố xung khắc:**

  Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc nếu chúng không thể xảy ra đồng thời trong cùng một phép thử.

  Ký hiệu: $A.B = \phi$

- **Xung khắc từng đôi:** Nhóm n biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là xung khắc từng đôi (hay đôi một xung khắc) nếu hai biến cố khác nhau bất kỳ trong n biến cố đó là xung khắc với nhau, nghĩa là $A_i.A_j = \phi \;\; i, j = \overline{1,n}$
- **Biến cố đối lập:** Hai biến cố A và B được gọi là đối lập nếu trong phép thử có đúng một biến cố xảy ra. Biến cố đối lập của biến cố A ký hiệu là $\overline{A}$. Nghĩa là $\begin{cases} A + \overline{A} = \Omega \\ A.\overline{A} = \phi \end{cases}$

2.4 Quan hệ giữa các biến cố

- **Hệ đầy đủ:** các biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$ được gọi là một hệ đầy đủ nếu khi thực hiện phép thử thì luôn có ít nhất một trong các biến cố đó xảy ra:

  Khi đó ta có: $A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega$

☞ ***Nhận xét:*** Hai bc A và $\overline{A}$ là hệ đầy đủ

? Một hộp đựng 3 loại bi trắng, xanh, vàng. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 1 viên. Gọi T là bc lấy được viên bi trắng, X là bc lấy được viên bi xanh, V là bc lấy được viên bi vàng. Hệ biến cố T,X,V có phải là hệ đầy đủ?

2.5 Các tính chất của phép toán biến cố

- 1. Giao hoán: A+B=B+A; AB=BA
- 2. Kết hợp: A+(B+C)=(A+B)+C=A+B+C

  A(BC)=(AB)C=ABC
- 3. Phân phối: A(B+C)=AB+AC
- 4. Lũy đẳng: A+A=A, A.A=A
- 5. $A+\Omega=\Omega;\ A.\Omega=A;\ A+\phi=A;\ A.\phi=\phi$
- 6. Nếu $B=\overline{A}$ thì $A=\overline{B}$ hay $\overline{\overline{A}}=A$
- 7. Luật đối ngẫu De Morgan:

$$\overline{A+B}=\overline{A}.\overline{B};\quad \overline{A.B}=\overline{A}+\overline{B}$$

Bài tập

- ☞ ? Hai người cùng bắn, mỗi người bắn một viên vào bia. Gọi A_i là bc người thứ i bắn trúng bia, i=1,2. Hãy viết các biến cố sau theo A_1, A_2 :

  a. Chỉ có người thứ nhất bắn trúng bia?

  b. Có đúng một người bắn trúng: ?

  c. Có ít nhất một người bắn trúng: ?

  d. Cả hai đều bắn trúng: ?

  e. Không ai bắn trúng: ?

  f. Có không quá một người bắn trúng:

Bài 3: Xác suất của biến cố

3.1.1 Định nghĩa XS cổ điển:

Giả sử phép thử có *n* biến cố sơ cấp đồng khả năng có thể xảy ra, trong số đó có *n(A)* biến cố sơ cấp thuận lợi cho biến cố A. Khi đó xác suất của biến cố A được tính theo công thức sau: $$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

n(A) là số biến cố sơ cấp thuận lợi cho *A*

$n(\Omega)$ là tổng số biến cố sơ cấp đồng khả năng

3.1.2 Định nghĩa XS theo quan điểm hình học: Giả sử Ω và A có thể biểu diễn bằng các miền hình học. Kí hiệu $m(\Omega)$ *m(A)* là kích thước của chúng. Khi đó $$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

Tính chất của xác suất

Tính chất:

1. $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

2. $P(\phi) = 0$

3. $0 \leq P(A) \leq 1$

4. Nếu $A \subset B$ thì $P(A) \leq P(B)$

Ví dụ 3.1. Một lớp có 25 sinh viên nam và 15 sinh viên nữ. Tính xác suất để chọn ngẫu nhiên 3 SV được một nam và hai nữ.

Giải. Số cách chọn 3 sinh viên từ lớp học là:

$$n(\Omega) = C_{40}^{3}$$

Gọi A là biến cố " chọn được một nam và hai nữ".

$$n(A) = C_{25}^{1} C_{15}^{2}$$

Vậy xác suất để được một nam và hai nữ là:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{25}^{1} C_{15}^{2}}{C_{40}^{3}} \approx 0.266$$

Bài tập

- Tung một con xúc xắc. Gọi A là bc xuất hiện mặt có số chấm chẵn, B là bc xuất hiện mặt có số chấm lẻ, C là bc xuất hiện mặt có số chấm chia hết cho 3. Tính P(A), P(B), P(C)?
- Một hộp có 6 bi trắng và 4 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 2 bi.
  - a. Tính xác suất lấy được 2 viên bi trắng.
  - b. Tính xác suất lấy được 2 viên bi đỏ.
  - c. Tính xác suất lấy được 1 bi đỏ và 1 bi trắng
- Gieo một đồng xu 5 lần. Xác suất để cả 5 lần đều xuất hiện mặt ngửa là bao nhiêu?
- Từ cỗ bài tú lơ khơ 52 con rút ngẫu nhiên 4 con. Xác suất để được 1 con át và 3 con K là bao nhiêu?

3.2: Một số công thức xác suất quan trọng

<u>3.2.1 Công thức cộng xác suất</u>: Cho hai biến cố A và B ta có

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)}$$

Nếu A, B xung khắc thì $P(A+B)=P(A)+P(B)$

- **Mở rộng**

$$\boxed{P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)}$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)+\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1\ldots A_n)$$

- **Lưu ý:** $P(A)+P(\overline{A})=1$, với mọi biến cố A.

3.2: Một số công thức xác suất quan trọng

☞ ***Ví dụ:*** Một lớp có 45 học sinh. Trong đó có 25 học sinh giỏi văn, 30 hs giỏi toán, 20 hs giỏi cả văn và toán. Chọn ngẫu nhiên một bạn trong lớp. Tìm xác suất để chọn được một bạn giỏi ít nhất một môn trong hai môn văn và toán.

Giải: Gọi F là bc hs giỏi ít nhất một môn trong hai môn văn và toán; A là bc hs giỏi văn, B là bc hs giỏi toán.Ta có: $F = A + B$ $\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)}$

Áp dụng ct cộng: $P(F) = P(A) + P(B) - P(A.B)$

$$P(F) = \frac{25}{45} + \frac{30}{45} - \frac{20}{45} = \frac{7}{9}$$

3.2. Một số công thức xác suất quan trọng

- Một lô hàng có 10 sản phẩm, trong đó có 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên ko hoàn lại từ lô hàng 6 sản phẩm. Tìm XS để có không quá 1 phế phẩm trong 6 sản phẩm được lấy ra.

HD:

Gọi A là bc ko có phế phẩm nào trong 6 sp được lấy ra,

B là bc có đúng 1 phế phẩm trong 6 sp được lấy ra,

C là bc có không quá 1 phế phẩm trong 6 sp được lấy ra

A,B xung khắc;   C=A+B. Đ/s: 2/3

☞ *Ví dụ:*

Trong một lớp học, tỉ lệ sinh viên giỏi Toán là 15%, giỏi Lý là 8%, giỏi Hoá là 7%, giỏi cả Toán và Lý là 6%, giỏi cả Toán và Hoá là 5%, giỏi cả Lý và Hoá là 4%, giỏi cả ba môn là 3%. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong lớp. Tính xác suất để sinh viên đó:

a) Giỏi ít nhất một môn Toán hoặc Lý,

b) Giỏi ít nhất một môn,

c) Giỏi cả 3 môn

Giải.

Gọi T, L, H tương ứng là biến cố chọn được sinh viên giỏi Toán, Lý, Hóa.

a) Gọi A là biến cố "được SV giỏi ít nhất một môn Toán hoặc Lý".

$$A = T + L$$

$$\Rightarrow P(A) = P(T + L) = P(T) + P(L) - P(TL) = 0,15 + 0.08 - 0.06 = 0.17$$

b) Gọi B là biến cố "được SV giỏi ít nhất một môn"

$$B = T + L + H$$

$$\Rightarrow P(B) = P(T + L + H)$$

$$= P(T) + P(L) + P(H) - P(TL) - P(TH) - P(LH) + P(TLH)$$

$$= 0.15 + 0.08 + 0.07 - 0.06 - 0.05 - 0.04 + 0.03 = 0.18$$

C) GọI C là biến cố "được SV giỏi cả 3 môn"

$$C = TLH$$

$$\Rightarrow P(C) = P(TLH) = 0.03$$

3.2 Một số công thức xác suất quan trọng

<u>3.2.2 Xác suất có điều kiện</u>: Xác suất có điều kiện của biến cố *A* biết biến cố *B* đã xảy ra (với *P(B)>0*), ký hiệu P(A/B) là xác suất của biến cố *A* nhưng được tính trong trường hợp biến cố *B* đã xảy ra.

$$\boxed{P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)};}$$

- Tương tự ta có

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

- Nhận xét: $P(A/B)+P(\overline{A}/B)=1$
- Lưu ý: $P(A/B)+P(A/\overline{B})\neq 1$

Ví dụ:

☞ **Ví dụ 1:** Tung một con xúc xắc

Gọi A={con xúc xắc xuất hiện mặt có số chấm nhỏ hơn 3}

B={con xúc xắc xuất hiện mặt có số chấm chẵn}. Tính P(A/B).

Giải: A={con xúc xắc xuất hiện mặt có số chấm nhỏ hơn 3}

B={con xúc xắc xuất hiện mặt có số chấm chẵn}.

$$P(A/B)=\frac{P(A.B)}{P(B)}$$

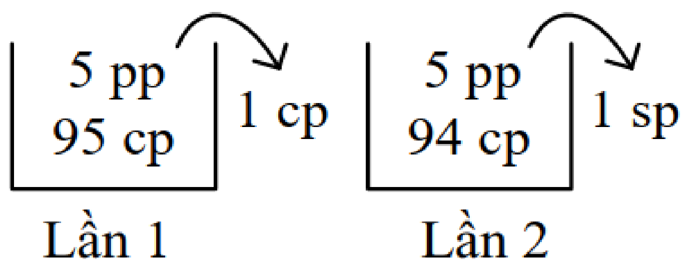
$$A=\{1;2\};\quad B=\{2;4;6\}\Rightarrow n(B)=3$$

$$A.B=\{2\}\Rightarrow n(AB)=1$$

$$P(AB)=\frac{n(AB)}{n(\Omega)}=\frac{1}{6},\ P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{3}{6}\ \Rightarrow P(A/B)=\frac{P(A.B)}{P(B)}=\frac{1}{3}$$

Ví dụ:

- **Ví dụ 2:** Một lô hàng có 100 sản phẩm, trong đó có 95 chính phẩm và 5 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên lần lượt ra 2 sản phẩm (không hoàn lại). Tìm xác suất để lần thứ 2 lấy được phế phẩm, biết rằng lần thứ nhất lấy được chính phẩm.



Giải. Gọi A_i, B_i tương ứng là biến cố lần thứ i $(i = 1,2)$ lấy được chính phẩm, phế phẩm.

Ta có: $$P(B_2 / A_1) = \frac{5}{99} \approx 0,05051$$

Bài tập:

BT 1: Trong hộp có 5 bi trắng và 3 bi đen. Lấy lần lượt ra 2 viên bi (ko hoàn lại). Biết lần 1 lấy được bi trắng, tìm XS để lần 2 lấy được bi trắng.

Đ/s: 4/7

Bài tập:

BT 2: Có 100 câu hỏi môn XSTK được phân bố theo bảng sau:

Số lượng	Câu dễ	Câu khó
Câu lý thuyết	25	10
Câu bài tập	45	20

Chọn ngẫu nhiên một câu trong 100 câu hỏi. Tính xác suất:

a) Được câu lý thuyết,

b) Được câu bài tập,

c) Được câu dễ,

d) Được câu khó,

e) Được câu khó biết rằng đó là câu lý thuyết,

f) Được câu dễ biết rằng đó là câu bài tập.

3.2.3 Công thức nhân xác suất:

+) Với 2 biến cố A, B ta có

$$\boxed{P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)}$$

+) Với 3 biến cố A, B và C ta có

$$\boxed{P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB)}$$

+) Với n biến cố

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1})$$

3.2. Một số công thức xác suất

- ***Ví dụ 1:*** Một bình có 10 viên bi, trong đó có 5 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên lần lượt (ko hoàn lại) từ trong bình ra 3 bi. Tính xác suất để 3 bi đều là bi đỏ.

Giải: Gọi A={bi lấy lần thứ nhất là bi đỏ}

B={bi lấy lần thứ hai là bi đỏ}

C={bi lấy lần thứ ba là bi đỏ}

$$\Rightarrow P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB) = \frac{5}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{8} = \frac{1}{12}$$

*Biến cố độc lập:

Biến cố độc lập: A và B độc lập nếu việc xảy ra hay ko xảy ra của bc A ko ảnh hưởng đến khả năng xảy ra của B và ngược lại.

$$P(A/B) = P(A) \text{ và } P(B/A) = P(B)$$

Hệ các biến cố $A_1, \ldots, A_n$ gọi là ***độc lập từng đôi*** nếu A_i độc lập với A_j, $\forall i \neq j$.

Hệ các biến cố $A_1, \ldots, A_n$ gọi là ***độc lập toàn phần*** nếu A_i độc lập với $A_{j_1} A_{j_1} \ldots A_{j_k}$ với mọi $\{A_{j_1}, A_{j_1}, \ldots, A_{j_k}\} \subset \{A_1, \ldots, A_n\} \setminus \{A_i\}, \forall i$.

Từ định nghĩa trên ta thấy hệ độc lập toàn phần thì độc lập từng đôi nhưng điều ngược lại nói chung là không đúng. Khi nói họ $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ độc lập mà không nói gì thêm thì ta hiểu đó là độc lập toàn phần.

- **Xác suất của tích các biến cố độc lập**

Nếu A, B độc lập thì: $P(AB) \overset{dl}{=} P(A).P(B)$ **(5)**

Nếu hệ các biến cố $A_1, ..., A_n$ độc lập toàn phần thì

$$P(A_1 A_2 ... A_n) \overset{dl}{=} (A_1).P(A_2)...P(A_n) \qquad \textbf{(6)}$$

3.2.3: Công thức nhân xác suất

☞ ***Ví dụ 2:*** Một bình có 10 viên bi trong đó có 3 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên lần lượt **có hoàn lại** từ trong bình ra 2 bi. Tính xác suất để 2 bi đều là bi đỏ.

Giải: Gọi A={bi lấy lần thứ nhất là bi đỏ},

B={bi lấy lần thứ hai là bi đỏ}. Vì lấy có hoàn lại nên A và B độc lập.

$$\Rightarrow P(AB) = P(A)P(B) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$$

BT1: Hộp thứ nhất có 2 bi trắng và 10 bi xanh. Hộp thứ hai có 8 bi trắng và 4 bi xanh. Từ mỗi hộp lấy ra 1 bi. Tìm XS để:

a. Cả 2 bi đều trắng (Đ/s 1/9)

b. 1 bi trắng, 1 bi xanh (Đ/s: 11/18)

Ví dụ

- **Ví dụ 3:** Có 2 lô hàng cũ. Lô I có 10 cái tốt, 2 cái hỏng. Lô II có 12 cái tốt, 3 cái hỏng. Từ mỗi lô lấy ngẫu nhiên ra một cái. Tìm xác suất để:

  a) Nhận được 2 cái tốt.

  b) Nhận được 2 cái cùng chất lượng.

  c) Nếu lấy từ cùng một lô ra 2 cái thì nên lấy từ lô nào để được 2 cái tốt với khả năng cao hơn.

Lời giải:

Nhận xét: Ở câu a), b) cùng một phép thử, còn câu c) là phép thử khác.

Gọi T_i ={Sản phẩm lấy từ lô I là sản phẩm tốt}, $i=\overline{1,n}$

a) Ta có: A={Nhận được hai cái tốt} $\Rightarrow A=T_1.T_2$

$$P(A)=P(T_1.T_2)=P(T_1).P(T_2)=\frac{10}{12}.\frac{12}{15}=0,667$$

b) B={Nhận được hai cái cùng chất lượng}

$$\Rightarrow B=T_1.T_2+\overline{T_1}.\overline{T_2}$$

$$P(B)=P(T_1.T_2+\overline{T_1}.\overline{T_2})=P(T_1).P(T_2)+P(\overline{T_1}).P(\overline{T_2})$$

$$=\frac{10}{12}.\frac{12}{15}+\frac{2}{12}.\frac{3}{15}=0,7$$

c) Phép thử ở câu c là lấy một lần theo nghĩa tổ hợp. Theo định nghĩa cổ điển dễ dàng tính được

Xác suất lấy được 2 cái tốt từ lô I là

$$\frac{C_{10}^2}{C_{12}^2} = \frac{45}{66} = 0,682$$

Xác suất lấy được 2 cái tốt từ lô II là

$$\frac{C_{12}^2}{C_{15}^2} = \frac{66}{105} = 0,629$$

Vậy từ lô I ta sẽ nhận được 2 cái tốt với với xác suất cao hơn.

- **Ví dụ 4:** Một cơ quan có 3 chiếc xe ô tô. Khả năng có sự cố của mỗi xe tương ứng là 5%, 20%, 10%. Tìm khả năng xảy ra các tình huống sau:

  a) cả 3 xe ô tô cùng bị sự cố.

  b) Có ít nhất một xe hoạt động tốt.

  c) Có đúng 1 xe hoạt động tốt.

  d) Cả 3 xe ô tô cùng hoạt động tốt.

  e) Có không quá 2 xe ô tô bị sự cố.

Lời giải:

- Gọi A_i ={Xe ô tô thứ I bị sự cố}, i=1,2,3

Ba biến cố A_1, A_2, A_3 không xung khắc nhưng độc lập với nhau.

$$P(A_1) = 0,05; P(A_2) = 0,2; P(A_3) = 0,1.$$

a) Gọi A là bc "Cả 3 ô tô cùng bị sự cố", $A = A_1.A_2.A_3$,

$$P(A) = P(A_1.A_2.A_3) = P(A_1).P(A_2).P(A_3) = 0,05.0,2.0,1 = 0,001.$$

b) Gọi B là biến cố "Có ít nhất một xe hoạt động tốt".

Khi đó, $\overline{B}$ là biến cố "Không có xe nào hoạt động tốt" , tức là " cả 3 xe cùng bị sự cố".

$$\overline{B} = A \Rightarrow P(\overline{B}) = P(A) = 0,001 \Rightarrow P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0,001 = 0,999$$

c) Gọi C là bc "Có đúng một xe hoạt động tốt"

$$C = \overline{A_1}A_2A_3 + A_1\overline{A_2}A_3 + A_1A_2\overline{A_3}$$

$$\Rightarrow P(C) = P(\overline{A_1}A_2A_3 + A_1\overline{A_2}A_3 + A_1A_2\overline{A_3})$$

$$= P(\overline{A_1}A_2A_3) + P(A_1\overline{A_2}A_3) + P(A_1A_2\overline{A_3})$$

$$= P(\overline{A_1}).P(A_2).P(A_3) + P(A_1).P(\overline{A_2}).P(A_3) + P(A_1).P(A_2).P(\overline{A_3})$$

$$= 0,95.0,2.0,1 + 0,05.0,8.0,1 + 0,05.0,2.0,9 = 0,032$$

d) Gọi D là bc " cả 3 xe hoạt động tốt", $A = \overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}$

$$\Rightarrow P(A) = P(\overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}) = P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}).P(\overline{A_3}) = 0,95.0,8.0,9 = 0,684$$

e) Gọi E là bc "Có không quá 2 xe bị sự cố"="Có ít nhất 1 xe hoạt động tốt}=B. Do đó, P(E)=P(B)=0,999.

- **Ví dụ 5:** Một người săn thỏ ở trong rừng. Khả năng anh ta bắn trúng thỏ trong mỗi lần bắn là tỷ lệ nghịch với khoảng cách bắn. Anh ta bắn lần đầu ở khoảng cách 20 mét với xác suất trúng thỏ là 50%. Nếu bị trượt, anh ta bắn viên thứ hai ở khoảng cách 30 mét. Nếu lại trượt lần nữa, anh ta cố bắn viên thứ ba ở khoảng cách 50 mét. Tìm xác suất để người thợ săn bắn trúng thỏ trong cuộc đi săn này.

Lời giải:

Gọi T_i là bc " Thợ săn bắn trúng thỏ ở lần bắn thứ i", i=1,2,3

Ba bc T_1, T_2, T_3 không độc lập nhau.

Theo bài ra, ta có: $P(T_1) = k/20 = 0,5 \Rightarrow k = 10$

Do đó: $P(T_2 / \overline{T_1}) = 10/30 = 1/3; P(T_3 / \overline{T_1}.\overline{T_2}) = 10/50 = 1/5 = 0,2$

a) Gọi T là bc "Thợ săn bắn trúng thỏ trong cuộc săn này"

$$T = T_1 + \overline{T_1}T_2 + \overline{T_1}.\overline{T_2}T_3$$

$$\Rightarrow P(T) = P(T_1 + \overline{T_1}T_2 + \overline{T_1}.\overline{T_2}T_3) = P(T_1) + P(\overline{T_1}T_2) + P(\overline{T_1}.\overline{T_2}T_3)$$

$$= P(T_1) + P(\overline{T_1})P(T_2 / \overline{T_1}) + P(\overline{T_1}).P(\overline{T_2} / \overline{T_1}).P(T_3 / \overline{T_1}.\overline{T_2})$$

$$= 0,5 + (1-0,5).1/3 + (1-0,5).(1-1/3).0,2 = 22/30 \approx 0,733$$

Lưu ý: Nhiều khi để tính xác suất của biến cố A mà phức tạp quá thì ta nên nghĩ đến biến cố đối $\overline{A}$ và dùng công thức $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ để tính.

Cách 2: Gọi $\overline{T}$ là bc "Thợ săn không bắn trúng thỏ"

$$\overline{T} = \overline{T_1}.\overline{T_2}.\overline{T_3}$$

$$\Rightarrow P(\overline{T}) = P(\overline{T_1}.\overline{T_2}.\overline{T_3}) = P(\overline{T_1}).P(\overline{T_2}/\overline{T_1}).P(\overline{T_3}/\overline{T_1}.\overline{T_2})$$

$$= (1-0,5).(1-1/3).(1-0,2) = 4/15 \approx 0,267$$

$$\Rightarrow P(T) = 1 - P(\overline{T}) = 1 - 0,267 = 0,733$$

Chú ý: Một số bạn biểu diễn $T = T_1 + T_2 + T_3$, nghĩa là thỏ bị bắn trúng ít nhất một lần. Ở đây thỏ chỉ bị bắn trúng một lần, vì thỏ bị bắn trúng rồi, không ai bắn tiếp nữa. Phép thử này là: Bắn cho tới khi trúng được thỏ thì dừng.

BÀI TẬP

BÀI 1. Có ba người A, B, C cùng thi tuyển (một cách độc lập) vào một công ty. Khả năng thi đậu của A, B, C lần lượt là 0,8; 0,9 và 0,7.

a) Tính xác suất cả ba người cùng đậu,

b) Tính xác suất có đúng hai người đậu,

c) Tính xác suất có ít nhất một người đậu,

d) Tính xác suất người A đậu biết rằng có hai người đậu.

BÀI 2: Một lô hàng có 100 sản phẩm, trong đó có 90 sản phẩm tốt và 10 phế phẩm. Kiểm tra ngẫu nhiên liên tiếp không hoàn lại 4 sản phẩm. Nếu có ít nhất 1 phế phẩm trong 4 sản phẩm kiểm tra đó thì không nhận lô hàng. Tìm xác xuất để nhận lô hàng.

Bài tập:

BT3: Trong một hộp có 10 sản phẩm trong đó có 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên lần lượt hai sản phẩm. Tính xác suất để cả hai sản phẩm đều là phế phẩm trong mỗi trường hợp sau:

a) Lấy có hoàn lại.

b) Lấy không hoàn lại.

BT4: Một phân xưởng có 3 máy cùng hoạt động độc lập nhau. Xác suất để trong một ca sản xuất các máy bị hư hỏng tương ứng là 0,1; 0,2; 0,3. Tính xác suất để trong một ca sản xuất:

a) Cả ba máy cùng bị hư hỏng.

b) Có đúng một máy bị hư hỏng.

c) Có ít nhất một máy bị hư hỏng.

d) Có không quá hai máy bị hư hỏng

BT 5: Có ba lô sản phẩm (sp). Lô I có 15 sp trong đó có 3 sp kèm vé thưởng trị giá 20 ngàn đồng; lô II có 20 sp trong đó có 4 sp kèm vé thưởng trị giá 10 ngàn đồng và 2 sp kèm vé thưởng trị giá 20 ngàn đồng; Lô III có 25 sp trong đó có 5 sp kèm vé thưởng trị giá 10 ngàn đồng. Chọn ngẫu nhiên mỗi lô ra một sản phẩm.

a) Tính xác suất được ít nhất một sp có thưởng.

b) Tính xác suất được ít nhất hai sp không có thưởng.

c) Tính xác suất để tổng giá trị các vé trưởng là 10 ngàn đồng.

d) Tính xác suất để tổng giá trị các vé trưởng là 30 ngàn đồng.

3.2.4 Công thức xác suất đầy đủ, công thức Bayes

a. Công thức xác suất toàn phần:

Giả sử các biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$ là nhóm các biến cố đầy đủ và xung khắc từng đôi. A là một biến cố bất kỳ.

Khi đó ta có

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A/A_i) = P(A_1)P(A/A_1) + ... + P(A_n)P(A/A_n)}$$

b. Công thức Bayes:

$$\boxed{P(A_i/A) = \frac{P(A_i)P(A/A_i)}{P(A)}}$$

Lưu ý:

- Biến cố A cần tìm xác suất có quan hệ với nhóm đầy đủ như sau: Biến cố A xảy ra thì suy ra xảy ra một biến cố B_i nào đó; còn ngược lại nếu xảy ra một biến cố B_i nào đó thì chưa thể khẳng định A xảy ra.
- Nếu bài toán đề cập đến 2 phần, biến cố A liên quan trực tiếp đến phần sau thì nhóm đầy đủ cần tìm chính là các trường hợp có thể xảy ra ở phần đầu. Tương tự, nếu phép thử gồm 2 bước hay 2 gian đoạn, biến cố A liên quan trực tiếp đến bước sau hay giai đoạn sau thì nhóm đầy đủ cần tìm chính là các trường hợp có thể của bước một hay giai đoạn một.

c. Ví dụ

Ví dụ 1: Xét một lô sản phẩm trong đó số sản phẩm do nhà máy I sản xuất chiếm 20%, nhà máy II sản xuất chiếm 30%, nhà máy III sản xuất chiếm 50%. Xác suất phế phẩm 3 nhà máy tương ứng là 0.001, 0.005, 0.006. Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm.

a. Tìm XS để sản phẩm lấy ra là phế phẩm

b. Giả sử sản phẩm lấy ra là phế phẩm, tính XS để sản phẩm đó là của nhà máy II sản xuất.

Ví dụ 1:

Giải: a. Gọi A là bc "sản phẩm lấy ra là phế phẩm".
A_i là bc "sản phẩm lấy ra là của nhà máy i" i=1,2,3
$\Rightarrow$ A_1, A_2, A_3 là hệ đầy đủ, xung khắc.
Theo công thức xác suất đầy đủ, ta có

$$P(A) = P(A_1)P(A/A_1) + P(A_2)P(A/A_2) + P(A_3)P(A/A_3)$$
$$= 0.2\times 0.001 + 0.3\times 0.005 + 0.5\times 0.006 = 0.0047$$

b. Theo công thức Bayes, ta có:

$$P(A_2/A) = \frac{P(A_2)P(A/A_2)}{P(A)} = \frac{0.3\times 0.005}{0.0047} \approx 0.32$$

Ví dụ 2:

Tại một bệnh viện, theo kết quả điều trị thấy rằng những người mắc bệnh M đến khám tại bệnh viện thì tỉ lệ người mắc bệnh này trong giai đoạn 1, giai đoạn 2, giai đoạn 3 tương ứng là 50%, 35%, 15%. Biết rằng, nếu mắc bệnh trong giai đoạn 1,giai đoạn 2, giai đoạn 3 thì xác suất điều trị khỏi bệnh M tương ứng là 96%, 89%, 75%. Một người vào bệnh viện khám thì phát hiện mắc bệnh M.

a) Tính xác suất người này được điều trị khỏi bệnh M,
b) Giả sử được điều trị khỏi bệnh M, tính xác suất người này mắc bệnh ở giai đoạn 3,
c) Giả sử điều trị không khỏi bệnh M. Hỏi khả năng người đó được phát hiện bệnh trong giai đoạn nào cao nhất?

Ví dụ 2: Giải

Gọi *Ai* là biến cố "người đến khám mắc bệnh M ở giai đoạn *i*" (i= 1,2,3).

Hệ $\{A_1, A_2, A_3\}$ là đầy đủ và xung khắc từng đôi.

$$P(A_1) = 0.5, P(A_2) = 0.35, P(A_3)=0.15$$

a) Gọi *A* là biến cố người này được điều trị khỏi bệnh B.

$$P(A / A_1) = 0.96, P(A / A_2) = 0.89, P(A / A_3)=0.75$$

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ, ta có:

$$p(A) = P(A_1)P(A / A_1) + P(A_2)P(A / A_2) + P(A_2)P(A / A_3)$$

$$=0.5\times 0.96+0.35\times 0.89+0.15\times 0.75=0.904$$

c) Theo công thức Bayes có

$$P(A_3 / A) = \frac{P(A_3).P(A / A_3)}{P(A)} = \frac{0.15\times 0.75}{0.904} \approx 0.1244$$

Ví dụ 2:

d) Ta có $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.904 = 0.096$

$P(\overline{A}/A_1) = 1 - 0.96 = 0.04, P(\overline{A}/A_2) = 0.11, P(A/A_3)=0.25$

Áp dụng công thức Bayes, ta có:

$$P(A_1/\overline{A}) = \frac{P(A_1).P(\overline{A}/A_1)}{P(\overline{A})} = \frac{0.5 \times 0.04}{0.096} \approx 0.208$$

$$P(A_2/\overline{A}) = \frac{P(A_2).P(\overline{A}/A_2)}{P(\overline{A})} = \frac{0.35 \times 0.11}{0.096} \approx 0.401$$

$$P(A_3/\overline{A}) = \frac{P(A_3).P(\overline{A}/A_3)}{P(\overline{A})} = \frac{0.15 \times 0.25}{0.096} \approx 0.391$$

Vậy có khả năng được phát hiện bệnh trong giai đoạn 2 nhất.

Ví dụ 3: Có 2 lô sản phẩm. Lô I có 10 chính phẩm và 2 phế phẩm. Lô II có 16 chính phẩm và 4 phế phẩm. Từ mỗi lô ta lấy ngẫu nhiên ra 1 sản phẩm. Sau đó trong 2 sản phẩm vừa thu được, ta lại lấy hú họa ra 1 sản phẩm. Tìm xác suất để sản phẩm lấy ra sau cùng là chính phẩm.

Ví dụ 4: Có 2 lô gà giống. Lô I gồm 15 con, trong đó có 3 con trống. Lô II gồm 20 con, trong đó có 4 con trống. Một con từ lô II nhảy sang lô I. từ lô I ta bắt ngẫu nhiên ra 1 con. Tìm xác suất để con gà bắt ra là gà trống?

Ví dụ 3: Giải:

Phép thử ở đây gồm 2 bước, cho nên nhóm đầy đủ các biến cố gồm các trường hợp có thể xảy ra ở bước I.

Gọi B_i là bc "sản phẩm lấy ra ở bước 1 có i chính phẩm", i=0,1,2.

Khi đó

$$P(B_0) = (2/12).(4/20) = 1/30$$

$$P(B_1) = (10/12).(4/20) + (2/12).(16/20) = 3/10$$

$$P(B_2) = (10/12).(16/20) = 4/6$$

Đặt A là bc " sản phẩm lấy ra sau cùng là chính phẩm"

Ta có

$$P(A/B_0) = 0; P(A/B_1) = 1/2; P(A/B_2) = 1$$

Theo công thức xác suất đầy đủ, ta có:

$$P(A) = P(B_0).P(A/B_0) + P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2)$$

$$= (1/30).0 + (3/10).(1/2) + (4/6).1 \approx 0,8167$$

Ví dụ 4: Giải:

Phép thử gồm 2 bước.

Bước I: con gà từ lô II nhảy sang lô I.

Bước II: Con gà bị bắt ra .

Gọi A là bc "Con gà bị bắt ra là gà trồng".

Bước I có 2 khả năng có thể xảy ra, nên nhóm đầy đủ có 2 biến cố: B và $\overline{B}$, trong đó B là bc "Con gà nhảy từ lô II sang là trống.

Ta có P(B)=4/20=0,2 và $P(\overline{B}) = 1 - 0,2 = 0,8$

P(A/B)=4/16 (lô I bây giờ có 16 con trong đó có 4 trống).

$P(A/\overline{B}) = 3/16$ (lô I bây giờ có 16 con trong đó có 3 trống).

Theo công thức xs đầy đủ, có

$$P(A) = P(B).P(A/B) + P(\overline{B})P(A/\overline{B}) = 0,2.\frac{4}{16} + 0,8.\frac{3}{16} = 0,2$$

Bài tập:

BT1: Cho 3 hộp linh kiện máy tính mà khả năng lựa chọn của mỗi hộp là như nhau. Hộp I có 30 linh kiện, trong đó có 20 tốt và 10 xấu. Hộp II có 30 linh kiện đều tốt. Hộp III có 30 linh kiện, trong đó có 15 tốt và 15 xấu. Chọn ngẫu nhiên một hộp và từ đó lấy ngẫu nhiên một linh kiện.

a) Tính XS để linh kiện lấy ra là tốt

b) Giả sử linh kiện lấy ra là tốt. Tìm XS để linh kiện đó là của hộp III

Đ/s: a. 13/18 b. 0.23

Bài tập:

BT2: Trong kho có chứa 20 thùng hàng, trong đó có 12 thùng loại 1 chứa 90% sản phẩm tốt, số thùng còn lại thuộc loại 2 chứa 60% sản phẩm tốt. Chọn ngẫu nhiên 1 thùng và từ đó lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm.

a) Tính xác suất để sản phẩm lấy ra là sản phẩm tốt.

b) Giả sử sản phẩm lấy ra là sản phẩm tốt. Tính xác suất để thùng hàng loại 1 được chọn

BT3: Tại một vùng dân cư, tỷ lệ người nghiện hút thuốc lá là 20%. Biết rằng tỷ lệ viêm họng trong số người nghiện hút thuốc lá là 70% và với người không nghiện là 25%. Khám ngẫu nhiên 1 người thì thấy người đó bị viêm họng. Tính xác suất để người đó nghiện thuốc lá.

BT4 : Tỷ lệ người đến khám tại một bệnh viện mắc bệnh A là 55%, trong số những người mắc bệnh A có 46% mắc cả bệnh B, còn trong số những người không mắc bệnh A có 73% mắc bệnh B.

a) Khám cho một người thì thấy người đó mắc bệnh B. Tính xác suất để người được khám cũng mắc bệnh A.

b) Nếu người được khám không mắc bệnh B tìm xác suất để người đó không mắc bệnh A.

BT5: Một lô hàng do 3 xí nghiệp sản xuất, trong đó xí nghiệp 1 sản xuất 50%, xí nghiệp 2 sản xuất 30%, xí nghiệp 3 sản xuất 20% số hàng hoá. Tỉ lệ phế phẩm của từng xí nghiệp lần lượt là 1%, 2%, 3%. Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm từ lô hàng.

a) Tính xác suất lấy được phế phẩm.

b) Giả sử lấy được sản phẩm tốt. Tính xác suất để sản phẩm này do xí nghiệp 1 sản xuất.

c) Tính xác suất lấy được phế phẩm do xí nghiệp 2 sản xuất.

3.2.5 Công thức Bernoulli

- **Dãy phép thử Bernoulli**

Tiến hành n phép thử độc lập trong những điều kiện như nhau. Giả sử trong mỗi phép thử, biến cố A xuất hiện với xác suất p không đổi, phép thử này được gọi là phép thử Bernoulli, và dãy gồm n phép thử như trên được gọi là dãy phép thử Bernoulli. Xác suất p được gọi là xác suất thành công của biến cố A.

- **Công thức Bernoulli**

Xác suất để biến cố A xuất hiện k lần trong n phép thử của dãy phép thử Bernoulli, ký hiệu là $P_n(k, p)$ được tính theo công thức sau và gọi là công thức Bernoulli:

$$P_n(k, p) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

3.2.5 Công thức Bernoulli

- **Số có khả năng nhất**
  Số $m_0 \in \{0,1,2,...,n\}$ mà $P_n(m_0, p)$ lớn nhất được gọi là số có khả năng nhất của dãy n phép thử Bernoulli.
- **Định lý:** Số m_0 thỏa mãn điều miện sau:

$$(n+1)p-1 \le m_0 \le (n+1)p$$

- **Quy tắc tìm:**

- Nếu $(n+1)p-1$ là số nguyên thì $m_0=(n+1)p-1$ và $m_0=(n+1)p$

- Nếu $(n+1)p-1$ là số thập phân thì $m_0=[(n+1)p-1]+1$

Là số nguyên bé nhất nhưng lớn hơn số thập phân đó.

Ví dụ:

Ví dụ 1: Khả năng nảy mầm của một loại hạt giống là 0,73.

a) Tính xác suất có đúng 15 hạt nảy mầm khi gieo 20 hạt giống,

b) Tính xác suất có nhiều nhất 18 hạt nảy mầm khi gieo 20 hạt giống,

c) Hỏi số hạt nảy mầm có khả năng cao nhất là bao nhiêu khi gieo 20 hạt giống?

Giải. Gọi $A_i, i=\overline{1,20}$ là biến cố có i hạt giống nảy mầm, A là biến cố có nhiều nhất 18 hạt nảy mầm.

Áp dụng công thức Bernoulli với $n\ p = = 20\ ;\ 0{,}73$, ta có:

a) $P(A_{15}) = P_{20}(15;0,73) = C_{20}^{15}(0,73)^{15}(1-0,73)^5 = 0,198201$

b) $\overline{A} = A_{19} + A_{20}$; $P(\overline{A}) \underset{=}{\underline{xk}} P(A_{19}) + P(A_{20})$

$$P(\overline{A}) = C_{20}^{19}(0,73)^{19}(0,27)^1 + C_{20}^{20}(0,73)^{20}(0,27)^0 \approx 0,01551$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) \approx 0,98449$$

c) Ta có: $n = 20; p = 0.73$

$(n+1)p - 1 \le m_0 \le (n+1)p \Rightarrow 14.33 \le m_0 \le 15.33,\ m_0 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow m_0 = 15$

Vậy số hạt giống nảy mầm có khả năng cao nhất là 15 hạt.

Ví dụ 1:

Theo kết quả điều tra về bệnh lao, tỷ lệ người bị lao ở vùng nọ là 0,001. Tìm xác suất để khi khám cho 10 người:

a) Có 2 người bị lao.

b) Không có ai bị lao.

c) Có 9 người bị lao.

d) Có ít nhất 1 người bị lao.

e) Số người không bị lao có khả năng nhất.

Ví dụ 1:

Lời giải: Khám cho 10 người chính là 10 phép thử Bernoulli với biến cố $A = \{$Gặp người bị lao$\}$ và $p = 0,001$. Do đó ta có:

a) $P_{10}(2;0,001) = C_{10}^{2}\,(0,001)^2\,(0,999)^8$.

b) $P_{10}(0;0,001) = (0,999)^{10}$.

c) $P_{10}(9;0,999) = P_{10}(1;0,001) = C_{10}^{9}\,(0,999)^9\,(0,001)$

$= C_{10}^{1}\,(0,001)(0,999)^9$.

d) $P_{10}(m \geq 1;\,0,001) = 1 - P_{10}(0;0,001) = 1 - (0,999)^{10}$.

e) Ta có $10.0,999 + 0,999 - 1 = 9,989$; suy ra $m_0 = 10$.

Ví dụ 2: Một chiến sỹ tự vệ tập bắn súng, xác suất bắn trúng tâm trong mỗi lần bắn là 0,3. Hỏi phải bắn ít nhất bao nhiêu viên để với xác suất không bé hơn 80% chiến sỹ này bắn trung tâm ít nhất 1 viên?

Ví dụ 2:

Giải: Gọi số viên đạn chiến sỹ này cần bắn là n. Thực hiện bắn n viên đạn vào tâm chính là n phép thử Bernoulli với A là bc “Bắn trúng tâm” và P(A)=p=0,3.

Ta có:

$$P_n(m \geq 1; 0,3) = 1 - P_n(0; 0,3) = 1 - (0,7)^n \geq 0,8$$

$$\Rightarrow (0,7)^n \leq 0,2$$

$$\Rightarrow n = 5$$

Bài tập:

BT1. Gieo 100 hạt đậu tương. Xác suất nảy mầm của mỗi hạt là 0,9. Tính xác suất để trong 100 hạt:

a) Có đúng 80 hạt nảy mầm.

b) Có ít nhất 1 hạt nảy mầm.

c) Có nhiều nhất 98 hạt nảy mầm.

BT2. Trong một cuộc thi bắn súng quốc tế, mỗi xạ thủ bắn 60 viên đạn vào bia. Xạ thủ Việt Nam bắn trúng tâm với xác suất 0,92. Tính xác suất:

a) Xạ thủ Việt Nam bắn trúng tâm cả 60 viên.

b) Xạ thủ Việt Nam bắn trượt ngoài tâm 2 viên.

c) Xạ thủ này bị trượt ngoài tâm ít nhất 1 viên.

d) Tìm số viên đạn trúng tâm có khả năng nhất.

BT3. Một nữ công nhân phụ trách 12 máy dệt. xác suất để mỗi máy dệt trong khoảng thời gian t cần đến sự chăm sóc của nữ công nhân là 0,3. Tính xác suất trong khoảng thời gian t :

a) Có 4 máy cần đến sự chăm sóc của nữ công nhân.

b) Số máy dệt cần đến sự chăm sóc của nữ công nhân không bé hơn 3 và không lớn hơn 6.

BT4. Tỷ lệ khách uống cà phê tại một quán giải khát là 65%.

a) Tính xác suất để trong 6 khách vào quán này có ít nhất 2 khách uống cà phê.

b) Trong số 35 khách vào quán này thì số khách uống cà phê có nhiều khả năng nhất là bao nhiêu?

BT5. Bắn 6 viên đạn vào bia, xác suất trúng bia của mỗi viên đạn là 0,7. Bia sẽ bị hỏng nếu có ít nhất 3 viên trúng. Tính xác suất để bia không bị hỏng.

BÀI TẬP CHƯƠNG I

- **BÀI 1:** Có 30 đề thi trong đó có 10 đề khó, 20 đề trung bình. Tìm xác suất để:

  a) Một học sinh bốc 1 đề, gặp được đề trung bình.

  b) Một học sinh bốc 2 đề, được ít nhất 1 đề trung bình.

- **BÀI 2:** Trong bình có 10 viên bi, trong đó có 4 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên. Tính XS để có một hoặc hai viên bi đỏ.

- **BÀI 3:** Trong một hộp có 12 bóng đèn trong đó có 3 bóng hỏng. Lấy ngẫu nhiên ***có thứ tự không hoàn lại*** 3 bóng để dùng.

  Tìm xác suất để:

  a) Cả 3 bóng đều hỏng?

  b) Cả 3 bóng đều không hỏng?

BÀI TẬP CHƯƠNG I

- **BÀI 4:** XS vi trùng kháng mỗi loại thuốc A, B, C lần lượt là: 5%, 10%, 20%. Nếu dùng cả 3 loại để diệt vi trùng. Tính XS vi trùng kháng thuốc (giả sử các loại thuốc độc lập nhau)

- **BÀI 5:** Một công nhân đứng 3 máy. XS để trong 1 ca làm việc máy I không hư hỏng là 0,7, máy II không hư hỏng là 0,8 và máy III không hư hỏng là 0,9. Tìm XS để trong ca làm việc:

  a. Cả 3 máy không hư hỏng.

  b. Cả 3 máy đều hư hỏng.

  c. Ít nhất 1 máy hư hỏng.

  d. Ít nhất 1 máy không hỏng.

BÀI TẬP CHƯƠNG I

- **BÀI 6:** Trong một thúng cam có 42% cam TQ, 24% cam TL, 26% cam CP và 8% cam VN. Trong số đó có một số cam hư gồm: 20% của số cam TQ, 10% của số cam TL, 12% của số cam CP và 2% của số cam VN.

  a. Tính xác suất để 1 người mua phải 1 trái cam hư.

  b. Biết một người đã mua phải 1 trái cam hư. Tính xác suất để trái cam ấy là của CP.

- **BÀI 7:** Cho một bình có 10 viên bi trong đó có 2 bi đỏ. Cho hai người lần lượt bốc ngẫu nhiên mỗi người 1 bi (không hoàn lại), nếu bốc trúng bi đỏ thì có thưởng. Hỏi người bốc trước hay bốc sau có lợi hơn?

BÀI TẬP CHƯƠNG I

- **BÀI 8:** Hộp thứ nhất có 8 lọ thuốc (có 3 lọ kém phẩm chất). Hộp thứ hai có 5 lọ thuốc (có 2 lọ kém phẩm chất). Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra một lọ. Tìm xác suất

  a. Lấy được 2 lọ thuốc tốt.

  b. Lấy được 1 lọ tốt và 1 lọ kém phẩm chất.

  c. Nếu lấy được 1 lọ tốt và 1 lọ kém phẩm chất. Tính xác suất để lọ kém phẩm chất là của hộp thứ nhất.

- **BÀI 9:** Hộp thứ nhất có 8 lọ thuốc (có 3 lọ kém phẩm chất). Hộp thứ hai có 5 lọ thuốc (có 2 lọ kém phẩm chất). Chọn ngẫu nhiên 1 hộp, từ hộp đã chọn lấy ngẫu nhiên 2 lọ. Tính xác suất

  a. Lấy được 2 lọ thuốc tốt.

  b. Lấy được 1 lọ tốt và 1 lọ kém phẩm chất.

  c. Nếu lấy được 1 lọ tốt và 1 lọ kém phẩm chất. Tính xác suất để lọ kém phẩm chất là của hộp thứ nhất.

BÀI TẬP CHƯƠNG I

- **BÀI 10:** Một hộp đựng 3 bi đỏ và 7 bi trắng. Rút ngẫu nhiên từ hộp ra một bi rồi sau đó bỏ vào hộp một bi khác màu với viên bi rút ra, sau đó rút tiếp một bi từ hộp.

  a. Tìm xác suất để bi rút ra lần sau từ hộp là viên bi đỏ?

  b. Nếu hai bi rút ra cùng màu, tìm XS để hai bi màu trắng?

- **BÀI 11:** Cho 2 hộp, hộp I có 3 quả bóng màu đỏ và 4 quả bóng màu trắng, hộp II có 5 quả bóng màu đỏ và 3 quả bóng màu trắng. Bốc ngẫu nhiên 1 quả bóng từ hộp I bỏ vào hộp II, rồi từ hộp II lấy ngẫu nhiên 1 quả bóng. Tính xác suất quả bóng lấy từ hộp II là quả bóng màu trắng.

- **BÀI 12:** Hai bình đựng bi giống nhau, mỗi bình đựng 5 bi trắng,7 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên mỗi bình 1 bi. Từ 2 bi này chọn ngẫu nhiên 1 bi. Tính XS để bi chọn ra sau cùng là bi trắng.

BÀI TẬP CHƯƠNG I

BT 13. Một khẩu pháo bắn vào một mục tiêu với xác suất trúng là 0,6. Tìm xác suất mục tiêu bị tiêu diệt sau 3 lần bắn liên tiếp, biết rằng khả năng mục tiêu bị tiêu diệt khi có 1, 2, 3 viên trúng tương ứng là 0,2; 0,5 và 0,8.

BT 14. Trong 4 lần thử, mỗi lần thử biến cố A xuất hiện với xác suất là 0,6. Nếu A xuất hiện quá 2 lần thì chắc chắn biến cố B sẽ xuất hiện, nếu A xuất hiện 1 hoặc 2 lần thì xác suất xuất hiện của biến cố B tương ứng là 0,4 và 0,7; nếu A không xuất hiện thì biến cố B sẽ không xuất hiện. Hãy tính xác suất xuất hiện của biến cố B.

BÀI TẬP CHƯƠNG I

BT 15. Một hộp đậu giống gồm 2 hạt đậu trắng và 4 hạt đậu đỏ. Một hộp khác gồm 3 hạt đậu trắng và 4 hạt đậu đỏ. Tỉ lệ nảy mầm là 0,8 đối với mỗi hạt đậu trắng, là 0,7 đối với mỗi hạt đậu đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 2 hạt đem gieo.

a) Tính xác suất để cả 4 hạt đều nảy mầm.

b) Biết 4 hạt đem gieo đều nảy mầm. Tính xác suất để 4 hạt đều là hạt đậu đỏ.

HẾT CHƯƠNG 1