附录

本文是《布尔函数向三进制的推广与探究》的附录，用于补充说明原文中略过的一些证明以及探究过程。具体而言，本文主要内容包括以下两个部分：

1. 证明猜想 3
2. 说明构造矩阵 $\hat{B}_n$ 的思路 (注：即满足立方是数量矩阵的 k-符号图邻接矩阵)

目录

附录 A 猜想 3 证明

符号说明：以下我们固定在 k-进制空间讨论，因此将 $T_{k,n}$ 简记为 T_n。相应地，若无特殊说明，ζ 都指代 k 阶本原单位根。

附录 A.1 命题叙述

命题： 存在以 T_n 作为底图的 k-符号图 $\tilde{G}_n$，其邻接矩阵为 $\tilde{C}_n$。$\tilde{C}_n$ 与 $\tilde{C}_{n-1}$ 之间按照固定的分块矩阵递推式定义，且 $\tilde{C}_n^k$ 可以写成对角块相同的 $k \times k$ 分块对角矩阵。一种递推定义方法如下 (合适的时候，数字 k 视为数量矩阵 cI)：

$$\tilde{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \zeta & 0 & \zeta & \dots & \zeta & \zeta \\ \zeta^2 & \zeta^2 & 0 & \dots & \zeta^2 & \zeta^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \zeta^{k-2} & \zeta^{k-2} & \zeta^{k-2} & \dots & 0 & \zeta^{k-2} \\ \zeta^{k-1} & \zeta^{k-1} & \zeta^{k-1} & \dots & \zeta^{k-1} & 0 \end{bmatrix}_{k \times k}$$

$$\tilde{C}_{n+1} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \zeta & \zeta\tilde{C}_n & \zeta & \dots & \zeta & \zeta \\ \zeta^2 & \zeta^2 & \zeta^2\tilde{C}_n & \dots & \zeta^2 & \zeta^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \zeta^{k-2} & \zeta^{k-2} & \zeta^{k-2} & \dots & \zeta^{k-2}\tilde{C}_n & \zeta^{k-2} \\ \zeta^{k-1} & \zeta^{k-1} & \zeta^{k-1} & \dots & \zeta^{k-1} & \zeta^{k-1}\tilde{C}_n \end{bmatrix}_{k^{n+1} \times k^{n+1}}$$

附录 A.2　证明准备

在这一部分，我们列举证明所需的所有记号，以及一些相关的简单的性质。
若无特别说明，以下列出的矩阵都是 k 阶方阵或 k 阶分块方阵。
此外数字与矩阵的运算均视作相应的数量矩阵 cI 与矩阵的运算。

1. **基础循环矩阵**

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{k \times k}$$

易见如下性质成立：

(a) 对于 $0 \le t \le k$：

$$J^t = \begin{bmatrix} 0_{k \times (k-t)} & I_t \\ I_{k-t} & 0_{(k-t) \times k} \end{bmatrix}$$

特别地，$J^k = I$.

(b) J 的特征多项式为 $\lambda^k - 1$，特征值为 $1, \zeta, \dots, \zeta^{k-1}$.

(c) 若记：

$$J^* := J + J^2 + \cdots + J^{k-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{k \times k}$$

则有 J^* 的特征多项式为 $(\lambda-1)^{k-1}(\lambda+k-1)$，特征值为 $1, k-1$.

（注意：在下面的证明中，J 中的 1 往往指的是单位矩阵 I，但不影响这些性质的成立）

2. **单位根对角阵**

   记 $D := diag(1, \zeta, \ldots, \zeta^{k-1})$. 易验证如下性质：

   (a) $D^k = I$

   (b)

$$DJ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \zeta & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \zeta^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \zeta^{k-1} & 0 \end{bmatrix} = \zeta JD$$

（注意：在下面的证明中，D 中的常数往往指的是常量矩阵，但不影响这些性质的成立）

3. **域同构存在性引理**

   设 F 是一个域，$P(x) \in F[x]$ 是一个不可约多项式，则存在一个域扩张 K/F 使得 $P(x)$ 在 K 内有根. 设 $F(\alpha_1), F(\alpha_2)$ 是两个单代数扩张，α_1, α_2 是 $P(x)$ 的两个根，则 $F(\alpha_1)$ 到 $F(\alpha_2)$ 有一个 F-同构 η 使得 $\eta(\alpha_1) = \alpha_2$.

   （参见《代数学引论》P210）

4. **关于不动域的命题**

   如果域 F 上的多项式 f 在某个域自同构群 G 的所有同构下不变，那么它的系数一定在 G 的不动域中。

附录 A.3 命题证明

证明思路：

直接计算 $\tilde{C}_n$ 的 k 次幂有些过于复杂，但幸运的是它有足够好的结构。我们的思路是，将 $\tilde{C}_n$ 展开成关于矩阵 J 的多项式，然后证明 $\tilde{C}_n^k$ 展开式中所有的矩阵 J 都消去了，从而得到 $\tilde{C}_n^k$ 是对角矩阵。为了证明这一点，我们将 $\tilde{C}_n^k$ 展开式视作 $\tilde{C}_{n-1}$ 的多项式，其系数都在扩环 $\mathbb{Q}(\zeta, J)$ 上。然后我们将上面关于不动域的命题巧妙应用于环扩张：构造出一组环同构，使得扩环 $\mathbb{Q}(\zeta, J)$ 在其上的不动域就是数域 $\mathbb{Q}(\zeta)$，从而达到消除 J 的目标。

简单介绍一下**证明流程：**

准备：将 $\tilde{C}_n^k$ 写成 x 的多项式，其中系数均在扩环 $\mathbb{Q}(\zeta, J)$ 上

引理 1：证明上述多项式在构造出的两类环自同构作用下保持不变

引理 2：证明多项式系数不含 J

（事实上如果承认不动域命题同样适用于环扩张，那么引理 2 是不必要的。但因为我们并没有环扩张的相应命题，所以引理 2 相当于针对本命题特例的严格化证明）

引理 3：证明多项式系数不含 ζ

引理 4：具体写出多项式

命题 附录 A.3.1. $\tilde{C}_n^k$ 是对角块相同的分块对角矩阵

此命题将依次由几个引理推导出来，在此之前我们需要进行一些记号的简化以及矩阵计算。

首先，为了记号的简便，以下我们暂时用参量 x 代替 $\tilde{C}_n$ 递推式中的 $\tilde{C}_{n-1}$ 矩阵块，并且用 C 代替 $\tilde{C}_n$:

$$C=\begin{bmatrix} x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \zeta & \zeta x & \zeta & \dots & \zeta & \zeta \\ \zeta^2 & \zeta^2 & \zeta^2 x & \dots & \zeta^2 & \zeta^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \zeta^{k-2} & \zeta^{k-2} & \zeta^{k-2} & \dots & \zeta^{k-2}x & \zeta^{k-2} \\ \zeta^{k-1} & \zeta^{k-1} & \zeta^{k-1} & \dots & \zeta^{k-1} & \zeta^{k-1}x \end{bmatrix}$$

显然，这样定义的 C 可以写成如下和式：

$$\begin{aligned} C &= Dx + DJ + DJ^2 + \cdots + DJ^{k-1} \\ &= D(x + J + J^2 + \cdots + J^{k-1}) \end{aligned}$$

注意到 D 与 J 不可交换，求次幂时需要利用前面的性质$DJ=\zeta JD$ 逐渐把中间的 D 交换到最前面：

(此处，我们假定参量 x 可以与任意矩阵交换)

$$\begin{aligned} C^2 &= D(x + J + J^2 + \cdots + J^{k-1})D(x + J + J^2 + \cdots + J^{k-1}) \\ &= D^2(x + \zeta J + \zeta^2 J^2 + \cdots + \zeta^{k-1}J^{k-1})(x + J + J^2 + \cdots + J^{k-1}) \end{aligned}$$

类似上面，一步步交换 D 得（注意 $D^k = I$）：

$$\begin{aligned} C^k &= [D(x + J + J^2 + \cdots + J^{k-1})]^k \\ &= D^k \prod_{i=0}^{k-1}(x + \zeta^i J + \zeta^{2i} J^2 + \cdots + \zeta^{(k-1)i} J^{k-1}) \\ &= \prod_{i=0}^{k-1}(x + \zeta^i J + \zeta^{2i} J^2 + \cdots + \zeta^{(k-1)i} J^{k-1}) \end{aligned}$$

继续展开显然会陷入困境，因此我们需要从另外的角度思考上面的式子.

非常关键的一点是，在每个因式中，各阶 k 次本原单位根的出现具有一定的对称性。显然对称性对我们的证明有好处，因为：$1+\zeta+\ldots+\zeta^{k-1}=0$.

倘若我们记 $P(J) = J + J^2 + \cdots + J^{k-1}$，则上式化为：

$$C^k = \prod_{i=0}^{k}(x + P(\zeta^i J)) \tag{1}$$

那么该如何描述并且利用这种对称性呢？我们自然想到了置换群。观察到上面任意将 ζ 换成其它 k 次本原单位根 ζ^j，各个因式只是顺序发生变化，而最终乘积不受影响。这样的结构，很容易让人联想到上个学期在抽象代数中学习的域扩张理论。

我们考虑 $\mathbb{Q}$ 的代数单扩张域 $\mathbb{Q}(\zeta)$. 倘若我们将常数等同于数量矩阵，那么 $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(\zeta)$ 都可以嵌入到复矩阵环 $M(\mathbb{C})$ 中成为它的子环。我们考虑在 $\mathbb{Q}(\zeta)$ 中添加矩阵 J，从而生成一个更大的环 $R := \mathbb{Q}(\zeta, J)$，但是很遗憾，这样生成的环不再是域，因为通过矩阵的加法与乘法可以发现 R 中有不可逆矩阵。但是，注意到 $J, \zeta^i J$ 在域 $\mathbb{Q}(\zeta)$ 上的极小多项式均为 $x^k - 1$，我们仍然能够类比于上面的域同构存在性引理，得到由如下根置换扩充成的环 R 的自同构（每个置换都扩充成一个单独的自同构）：

$\eta_i(J) = \zeta^i J$;

$\phi_i(\zeta) = \zeta^i$，其中 $(i, k) = 1$;

对于满足如上条件的环同构存在性的说明，参见本节的补充说明部分；

在以上假定下，我们开始证明命题附录 A.3.1，需要以下引理：

引理 1. 记 $C(x) = \prod_{i=0}^{k}(x + P(\zeta^i J))$(定义如上)是环 $R = \mathbb{Q}(\zeta, J)$ 上关于变量 x 的多项式，则 $C(x)$ 在以上两类环同构的作用下保持不变。

证明. 证明：我们对多项式 $C(x)$ 施加上述定义的环同构：

$$\begin{aligned}
\eta_j(C(x)) &= \prod_{i=0}^{k-1} \eta_j(x + P(\zeta^i J)) \\
&= \prod_{i=0}^{k-1}(x + \eta_j(P(\zeta^i J))) \\
&= \prod_{i=0}^{k-1}(x + P(\zeta^{i+j} J)) \\
&= C(x); \\
\phi_j(C(x)) &= \prod_{i=0}^{k-1} \phi_j(x + P(\zeta^i J)) \\
&= \prod_{i=0}^{k-1}(x + P(\zeta^{ji} J)) \\
&= C(x), \text{where } (j, k) = 1.
\end{aligned}$$

可见 $C(x)$ 在上述环同构下不变，说明其系数在环同构的作用下保持不动。

命题的关键在于以下引理 2 的证明，倘若我们说明了这一点，那么 $C(x)$ 中将只包含 x 与数量矩阵的运算，那么很容易发现，此时计算结果将也是 (包含参数 x 的) 数量矩阵.

引理 2. 关于 x 的多项式 $C(x)$ 的各次项系数均不含 J.

证明. 任取 $0 \le t < k$，设 x^t 的系数是 $g(J) \in R$. 按照定义，$g(J)$ 是系数在 $\mathbb{Q}(\zeta)$ 中的关于 J 的多项式。且由于 $J^k = I$，不妨设 $\deg g < k$.

下面利用 $g(J)$ 关于环同构 η_i 不变的性质验证 $g(J)$ 只有常数项:

不妨设 $0 < i < k$，且 $g(J)$ 的 i 次项系数为 $a_i \in \mathbb{Q}(\zeta)$. 设 $(i,k) = d < k$，则 ζ^i 是 k/d 次本原单位根，故有:

$$\frac{k}{d} g(J) = \sum_{j=0}^{k/d-1} g(\zeta^j J)$$

比较左右 J^i 项系数得：$\frac{k}{d} a_i = (\sum_{j=0}^{k/d} \zeta^{ij}) a_i = 0$，因此 $a_i = 0, \forall i \neq 0$.

综上所述，$g(J) = a_0 \in \mathbb{Q}(\zeta)$.

进一步，我们有:

引理 3. 关于 x 的多项式 $C(x)$ 的各次项系数均为有理数

由引理 2知道，$C(x)$ 的各项系数都在 $\mathbb{Q}(\zeta)$ 中，因此是域 $\mathbb{Q}(\zeta)$ 上的多项式；

接下来，由于 $C(x)$ 关于环同构 ϕ_i 也不动，我们可以直接利用 Galois 扩张中的相关定理，得到 $C(x)$ 的各项系数属于同构群 $\{\phi_i | (i,k) = 1\}$ 的不动域，也即 $\mathbb{Q}$ 中。

综上所述，$C^k = C(x) \in \mathbb{Q}[x]$，并设多项式 $C(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$.

在此基础上，我们可以完全求出 $C(x)$:

引理 4. $C(x) = (x+1)^{k-1}(x-k+1)$

证明. 如上 (注意到由多项式 C(x) 的定义,$C(xI) = C^k$)，我们已经得到:

$$C^k = \begin{bmatrix} C(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C(x) \end{bmatrix}$$

求行列式得 $|C|^k = |C^k| = (C(x))^k$.

显然 $|C|$ 可以视作域 $\mathbb{Q}[x]$ 上关于 x 的 k 次多项式 (C 的定义)，所以由上式必有 $|C| =$

$\zeta^i C(x)$，因此求 $C(x)$ 转换成了求 C 的行列式。而：

$$\begin{aligned}|C| &= \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \zeta & \zeta x & \zeta & \dots & \zeta & \zeta \\ \zeta^2 & \zeta^2 & \zeta^2 x & \dots & \zeta^2 & \zeta^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \zeta^{k-2} & \zeta^{k-2} & \zeta^{k-2} & \dots & \zeta^{k-2}x & \zeta^{k-2} \\ \zeta^{k-1} & \zeta^{k-1} & \zeta^{k-1} & \dots & \zeta^{k-1} & \zeta^{k-1}x \end{vmatrix} \\ &= \zeta^{\frac{k(k-1)}{2}} |xI + J^*| \\ &= (-1)^{k-1}(-1)^k |-xI - J^*| \\ &= -(-x-1)^{k-1}(-x+k-1) \\ &= (-1)^{k+1}(x+1)^{k-1}(x-k+1)\end{aligned}$$

其中利用了 J^* 的特征多项式。

比较最高次项系数得 $C(x) = (x+1)^{k-1}(x-k+1)$

命题的证明：

证明. 注意到在以上引理的证明中，我们仅仅假定了变元 x 与矩阵 D, J 交换。所以我们可以将任何满足此条件的元素代入多项式 $C(x)$. 特别地，我们取 $x = 0$, 得到：$\tilde{C}_1^k = 1 - k$，也即 $C_1^k = (1-k)I$.

正如前面提到过的，前文的 D, J 是分块意义下的矩阵，其中的每一个数字元素实际上都是一个与 $\tilde{C}_{n-1}$ 同阶的数量矩阵块，因此显然有 $\tilde{C}_{n-1}$ 与 D, J 可交换。所以我们也可以把 $\tilde{C}_{n-1}$ 代入多项式 $C(x)$：$\tilde{C}_n^k = C(\tilde{C}_{n-1}) = a_k \tilde{C}_{n-1}^k + \cdots + a_1 \tilde{C}_{n-1} + a_0 I$，显然，这是一个对角元均为 $C(\tilde{C}_{n-1})$ 的分块对角矩阵。

至此，我们已经完成了命题的证明，并且把 $\tilde{C}_n^k$ 具体表达式算出来了.

附录 A.4　补充说明

在这一部分，我们补充说明之前证明中使用的环同构的存在性，以及简单地对上面的证明方法进行小结。

引理 5. 存在环 $R := \mathbb{Q}(\zeta, J)$ 的自同构 η_i, ϕ_i，满足：$\eta_i(J) = \zeta^i J$;

$\phi_i(\zeta) = \zeta^i$，其中 $(i, k) = 1$;

证明. 显然，R 由所有如下形式的循环矩阵构成：

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_{k-1} & c_{k-2} & \cdots & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_{k-1} & \cdots & c_3 & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_0 & \cdots & c_4 & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{k-2} & c_{k-3} & c_{k-4} & \cdots & c_0 & c_{k-1} \\ c_{k-1} & c_{k-2} & c_{k-3} & \cdots & c_1 & c_0 \end{bmatrix}_{k\times k}$$

其中 $c_i \in \mathbb{Q}(\zeta)$. 因此有 $C = c_0 I + c_1 J + \cdots + c_{k-1}J^{k-1}$，显然 $R \cong Q(\zeta)[x]/(x^k-1)$，商去的理想不是极大理想，因此 R 不是域。但由于矩阵 J 的极小多项式是 x^k-1，因此 C 在此商环中的表示方式还是唯一的。

我们令 $\eta_i(C) = c_0 I + c_1\zeta^i J + \cdots + c_{k-1}\zeta^{i(k-1)}J^{k-1}$，由表示方式唯一，这是一个良定义的映射，不难验证 $\forall i, \eta_i$ 是环同构。

显然，当 $(i,k)=1$ 时，ζ^i 与 ζ 在 $\mathbb{Q}$ 上的极小多项式均为 k 阶分圆多项式，因此由域同构存在引理，存在满足第二个条件的 $Q(\zeta)$ 上的域同构 ϕ_i. 再按如下规则进一步扩充为 R 的自同构：$\phi_i(C) = \phi_i(c_0) + \cdots + \phi_i(c_{k-1})J^{k-1}$.

这就是环同构在它的多项式环上的自然延拓，显然是良定义的，且不难验证 ϕ_i 是 R 的自同构。

命题的证明使用了部分抽象代数中的知识，因此有一个问题自然而然出现了：为什么不用高等代数的知识直接算？其一是计算的复杂性，我之前试图用矩阵对角化的方法直接算，但发现好像特征值都不会求，所以就放弃了。当然因为我高代忘了不少，所以也可能有只用矩阵相关的知识计算的方法，只是我没想到。此外，上面的方法的优势在于，对于具有循环矩阵特点以及单位根 ζ 规律分布的一类矩阵，这种方法都有可能适用，因此我认为，以上方法还是具有一定参考价值的。

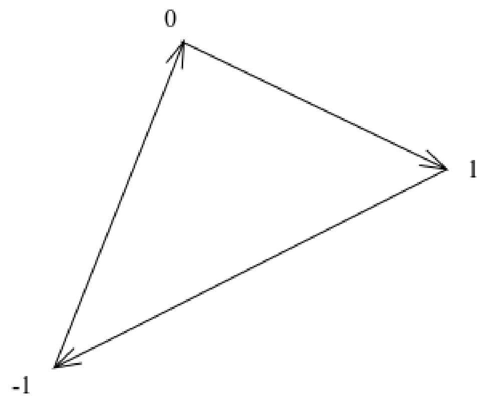
附录 B　$\hat{B}_n$ 的构造思路

待探究问题： 对于三进空间 T^n 的邻接矩阵 B_n，我们也想要通过放宽对矩阵元素的要求，找到一个类似的 $\tilde{B}_n$，使得它的特征值有类似 $\tilde{A}_n$ 的特征值分布。

附录 B.1　思路 1

首先想到的是既然是三个点相连，可不可以直接把原图变成有向图，出边取 1，入边取-1。

先考虑最简单的 B_1，为了实现对称性，我们不妨把 T_1 边加方向，构成一个三角形环:



相应的 B_1 为：

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

求出特征多项式为 $f_1(\lambda) = \lambda(\lambda^2+3)$，确实特征值均匀分布在虚轴上，实现了某种对称性，但这并不是我们一开始想要的**两点分布**。

不过我们也可以顺着这个思路继续算一算，按照积图的定义以及相应的邻接矩阵运算，我们有：

$$\tilde{B}_{n+1} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_n & I & -I \\ -I & \tilde{B}_n & I \\ I & -I & \tilde{B}_n \end{bmatrix}$$

同样的方法计算特征多项式，我们有 $f_{n+1}(\lambda) = f_n(\lambda)f_n(\lambda-\sqrt{3}i)f_n(\lambda+\sqrt{3}i)$，因此 B_n 所有特征值为 $\{-k\sqrt{3}i|k=-n,\dots,n\}$ 重数的计算似乎没有什么太好的方法，但它的递推关系看起来像是什么广义的杨辉/帕斯卡三角形。

从以上计算结果可以发现，当我们均匀地给 $\tilde{B}_n$ 加上了一些负号后（矩阵所有元素平均值变成 0），它的特征值的分布也变得更加均匀了，表现为关于原点对称分布。由此可见，矩阵特征值的对称性可以刻画矩阵本身的对称性。

附录 B.2 思路 2

上面这种思路似乎得到的特征值分布还是与 B_n 类似地离散均匀地分布，没有达到我们想要的结果，所以我们还需要重新考虑黄皓构造的 $\tilde{A}_n$. 我们发现，$\tilde{A}_n$ 的符号都是加在 $\tilde{A}_{n-1}$ 上的，所以我们也尝试这样构造：

$$\tilde{B}_{n+1} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_n & I & I \\ I & -\tilde{B}_n & I \\ I & I & \tilde{B}_n \end{bmatrix}$$

$|\lambda I - \tilde{B}_{n+1}| = |(\lambda^3-3\lambda-2)I + \tilde{B}_n^3 - \lambda\tilde{B}_n^2 - \lambda^2\tilde{B}_n|$，涉及复杂的交错项，没法直接得到特征值的递推式。看来我们需要找到一些方法，把涉及 $\tilde{B}_n$ 的项减少。

附录 B.3　思路 3

最后，突然想到 $\tilde{A}_n$ 的构造之所以乘以-1，也许是因为-1 是二次单位根！所以对于三元结构 T_n，我们理应借助三次单位根 ω. 考虑到上面 $\tilde{A}_n$ 的构造，是在第二行的 $\tilde{A}_{n-1}$ 上乘以-1，所以我们也应该给每个 $\tilde{B}_{n-1}$ 乘以三次单位根，具体构造如下：

$$\hat{B}_{n+1}=\begin{bmatrix}\hat{B}_n & I & I\\ I & \omega\hat{B}_n & I\\ I & I & \omega^2\hat{B}_n\end{bmatrix}$$

我们期望，在计算 $\hat{B}_n$ 的特征多项式时，出现像 $|\lambda I-\tilde{A}_n|=|(\lambda^2-1)I-\tilde{A}_{n-1}^2|$ 这样的递推式，因为这样可以得到 $\lambda_n^2-1=\lambda_{n-1}^2$，进而推出特征值分布在 $\pm\sqrt{n}$ 上。

然而，实际计算时，我们发现 $|\lambda I-\hat{B}_n|=|(\lambda^3-3\lambda+2)I-\hat{B}_{n-1}^3|$，并不是我们期望的，因为有一些讨厌的低次项。(这样导致的结果是得到的递推式是 $(\lambda_n-1)^2(\lambda_n+2)=\lambda_{n-1}^3$，似乎解出来都是不规则的东西)

那么我们如何去掉低次项呢？我们可以从上面的计算中找到一些启发。

$$|\lambda I-\hat{B}_{n+1}|=\begin{vmatrix}\lambda I-\hat{B}_n & -I & -I\\ -I & \lambda I-\omega\hat{B}_n & -I\\ -I & -I & \lambda I-\omega^2\hat{B}_n\end{vmatrix}$$

观察如上分块矩阵行列式计算，我们类比正常行列式计算，其中低次项来源位于反对角线以及与之平行的两个三角形，如上图所示。有趣的是，我们发现 $\hat{B}_n$ 的低于三次项都被消去了，为什么呢？原因是单位根的对称性：不同行的 $\hat{B}_n$ 前面是不同的三次单位根，注意到 $1+\omega+\omega^2=0$，所以全消去了。但是 λ 的系数全是 1，所以 λ 的低次项在运算中保留。基于这样的观察，我们可以矩阵的某些单位矩阵块 I 前面，也加上一些三次单位根，从而赋予 λ 的系数某些对称性。

经过繁杂的尝试及运算，终于找到一种添加系数方法：

$$\hat{B}_{n+1}=\begin{bmatrix}\hat{B}_n & I & I\\ I & \omega\hat{B}_n & \omega I\\ \omega^2 I & I & \omega^2\hat{B}_n\end{bmatrix}$$

此时我们再计算特征多项式：

$$|\lambda I - \hat{B}_{n+1}| = \begin{vmatrix} \lambda I - \hat{B}_n & -I & -I \\ -I & \lambda I - \omega \hat{B}_n & -\omega I \\ -\omega^2 I & -I & \lambda I - \omega^2 \hat{B}_n \end{vmatrix}$$

$$= |(\lambda^3 - 2)I - \hat{B}_n^3|$$

可以发现，因为两个额外的三次单位根的引入，λ 在合并系数过程中消去了，而且我们得到了特征值递推式 $\lambda_n^3 + 2 = \lambda_{n-1}^3$。注意到 $\tilde{A}_1$ 的特征值为 ± 1，平方相同，便于递推。我们也希望调整一下 $\hat{B}_1$ 使之特征值立方相同，例如这样：（想法是与上面递推式形式一样）

$$\hat{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \omega \\ \omega^2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则它的特征多项式为 $f_1(\lambda) = \lambda^3 - 2$，因此我们得到 $\hat{B}_n$ 的所有特征值为 $\{\omega\sqrt[3]{2n}, \omega^2\sqrt[3]{2n}, \sqrt[3]{2n}\}$，而且由于 $tr(\hat{B}_n) = 0$，所有特征值和为 0，我们不难得出这三个特征值的重数相等，均为 3^{n-1}.