# 笔记

**笔记本:** 日记
**创建时间:** 2019/7/31 21:34　　**更新时间:** 2019/7/31 21:35
**位置:** 31°17'16 N 121°27'23 E

3. 过河问题求解

距离 $dh = h_1 + h_2 + \cdots + h_n$

$= v_1 t_1 + v_2 t_2 + \cdots + v_n t_n$

$= v\cdot\sin a_1 \frac{s_1}{v\cos a_1} + \cdots + v\sin a_n \cdot \frac{s_n}{v\cos a_n}$

$= s_1\tan a_1 + s_2\tan a_2 + \cdots + s_n\tan a_n$

设 $h(a_1, a_2, \ldots a_n) = dh = s_1\tan a_1 + s_2\tan a_2 + \cdots + s_n\tan a_n$

$= \sum_{i=1}^{n} s_i\tan a_i$

由题中意思 $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = T$

$\Rightarrow \frac{1}{v}\left(\frac{s_1}{\cos a_1} + \cdots + \frac{s_n}{\cos a_n}\right) = T$

$\Rightarrow \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{\cos a_i} = T$

令 $g(a_1, a_2, \ldots a_n) = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{\cos a_i}$

最终问题变为求解 $\max h(a_1, a_2, \ldots a_n)$，约束条件为 $g(a_1, a_2 \ldots a_n) = T$

通过拉格朗日乘数法将问题转化为：求解

$L(a_1, a_2, \ldots a_n, \lambda) = h(a_1 \ldots a_n) + \lambda[g(a_1, a_2 \ldots a_n) - T]$

的极值.

通常解法是对 $L(a_1, \ldots a_n, \lambda)$ 对 $a_i$ 求偏导，令导数为零

$$\begin{cases} \frac{\partial L(a_1, \ldots a_n, \lambda)}{\partial a_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L(a_1, \ldots a_n, \lambda)}{\partial a_n} = 0 \\ g(a_1, a_2 \cdots a_n) = T \end{cases}$$

由以上 $(n+1)$ 个方程，求解出 $L$ 取极值时的 $a_1', a_2', \ldots a_n'$

代入 $h(a_1, a_2 \cdots a_n)$ 即得 $dh$ 的极值.