

诚信应考, 考试作弊将带来严重后果!

# 华南理工大学本科生期末考试

## 《工科数学分析 (二)》

2016-2017 学年第二学期期末考试试卷 B 卷

注意事项:

- 一、 开考前请将密封线内各项信息填写清楚;
- 二、 所有答案请直接答在试卷上;
- 三、 考试形式: 闭卷;
- 四、 本试卷共 6 大题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
得 分							

一、 填空题: 共 5 题, 每题 2 分, 共 10 分。

1. 由方程  $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$  所确定的函数  $z = z(x, y)$  在点  $(1, 0, -1)$  处的全微分  $dz = \underline{dx - \sqrt{2}dy}$  ;

2. 设  $\Gamma$  为椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  取逆时针方向, 则第二类曲线积分  $\oint_{\Gamma} xdy - ydx = \underline{12\pi}$  ;

3. 向量场  $x^2yz\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k}$  在点  $(1, 1, 1)$  的散度为 6 ;

4. 初值问题  $\begin{cases} y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^3} \\ y|_{x=1} = 1 \end{cases}$  的解为  $\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$  ;

5. 设  $f(x) = \pi x + x^2, -\pi < x < \pi$  的傅里叶 (Fourier) 级数为  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ ,  
则其中系数  $b_2 = \underline{-\pi}$  ;

二、单选题：共 5 题，每题 2 分，只有一个正确选项，共 10 分

1. 二元函数  $f(x, y)$  在点  $(a, b)$  处的两个偏导数  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$  和  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$  存在，则 ( C )

- A.  $f(x, y)$  在点  $(a, b)$  处连续      B.  $f(x, y)$  在点  $(a, b)$  处可微  
C.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x, b)$  和  $\lim_{y \rightarrow b} f(a, y)$  都存在      D.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$  存在

2. 已知曲面  $z = 4 - x^2 - y^2$  上点  $P$  处的切平面平行于平面  $2x + 2y + z = 1$ ，则  $P$  点的坐标是 ( C )

- A.  $(1, -1, 2)$       B.  $(-1, 1, 2)$       C.  $(1, 1, 2)$       D.  $(-1, -1, 2)$

3. 一个均匀物体由曲面  $z = x^2 + y^2$  及  $z = 1$  围成，则该物体的质心坐标为 ( B )

- A.  $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$       B.  $(0, 0, \frac{2}{3})$       C.  $(0, 0, 1)$       D.  $(\frac{2}{3}, 0, 0)$ .

4. 微分方程  $(y - \ln x)dx + xdy = 0$  是 ( B )

- A. 可分离变量方程      B. 一阶非齐次线性方程  
C. 一阶齐次线性方程      D. 非线性方程

5. 下列级数条件收敛的是 ( D )

- A.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$       B.  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{1}{n})$       C.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$       D.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

### 三、计算题：共 4 题，每题 7 分，共 28 分

1. 设函数  $u(x, y) = yf\left(\frac{x}{y}\right) + xg\left(\frac{y}{x}\right)$ ，其中  $f$  和  $g$  具有连续的二阶导数，计算  $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 。

解：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= f'\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{y}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right) + g'\left(\frac{y}{x}\right).\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} &= -\frac{1}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right).\end{aligned}$$

因此，

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = -f'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{y}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right).$$

2. 计算二重积分  $\iint_D \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} dx dy$ ，其中  $D$  是区域  $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ 。

解：利用极坐标换元

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

有

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{1-r^2}{1+r^2} r dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{2r}{1+r^2} - r dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2 - \frac{1}{2} d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} (2 \ln 2 - 1).\end{aligned}$$

3. 计算三重积分  $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是平面  $x + y + z = 1$  与三个坐标面围成的区域。

解: 应用先重后单的方法, 有

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz &= \int_0^1 dz \iint_{\substack{x+y \leq 1-z \\ x \geq 0, y \geq 0}} z^2 dx dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} z^2 (1-z)^2 dz \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{1}{60}.\end{aligned}$$

4. 计算第一类曲面积分  $\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS$ , 其中  $\Sigma$  为平面  $y + z = 5$  被柱面  $x^2 + y^2 = 25$  所截得的部分。

解: 曲面  $\Sigma$  有显式方程  $z = 5 - y$ , 因此, 曲面面积微元为

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{1 + 0^2 + (-1)^2} dx dy = \sqrt{2} dx dy.$$

因此,

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 25} (x + y + 5 - y) \sqrt{2} dx dy \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^5 (r \cos \theta + 5) r dr \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{125}{3} \cos \theta + \frac{125}{2} d\theta \\ &= 125\sqrt{2}\pi.\end{aligned}$$

四、解答题：共 4 题，每题 8 分，共 32 分。

1. 求方程  $y'' + 4y' + 3y = 0$  的一个解  $y = y(x)$ ，使其在点  $(0, 2)$  处与直线  $x - y + 2 = 0$  相切。

解：方程  $y'' + 4y' + 3y = 0$  是一个二阶常系数齐次微分方程，其特征方程为

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0.$$

特征方程有两个实数根  $\lambda_1 = -3$  和  $\lambda_2 = -1$ 。因此微分方程的通解为

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}.$$

积分曲线在点  $(0, 2)$  处与直线  $x - y + 2 = 0$  相切，因此

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$$

即，

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 2. \\ y'(0) = -3C_1 - C_2 = 1. \end{cases}$$

由此解得，

$$C_1 = -\frac{3}{2}, \quad C_2 = \frac{7}{2}.$$

所求解为

$$y = -\frac{3}{2}e^{-3x} + \frac{7}{2}e^{-x}.$$

2. 求圆柱面  $x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0$  介于  $xOy$  平面和曲面  $z = xy$  之间的部分的面积。

解：由微元法，可知所求面积可表示为第一类曲线积分

$$S = \int_{\Gamma} xy \, ds$$

其中  $\Gamma$  为四分之一圆弧  $x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0$ 。

曲线  $\Gamma$  有参数方程

$$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

因此，其弧长微元为

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = 2dt.$$

所以，

$$\begin{aligned} S &= \int_{\Gamma} xy \, ds \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos t \sin t \cdot 2dt \\ &= 4. \end{aligned}$$

3. 设  $\Sigma$  是锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被平面  $z = 0$  及  $z = 1$  截下的部分的下侧,

计算第二类曲面积分  $\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + (z^2 - 2z)dxdy$ 。

解: 记  $\Sigma_1$  为平面  $z = 1$  被锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  截下的部分的上侧, 则  $\Sigma$  和  $\Sigma_1$  围成闭区域

$$\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\}.$$

由 Gauss 公式

$$\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + (z^2 - 2z)dxdy + \iint_{\Sigma_1} xdydz + ydzdx + (z^2 - 2z)dxdy = \iiint_{\Omega} 2z dxdydz.$$

先计算右端的三重积分,

$$\iiint_{\Omega} 2z dxdydz = 2 \int_0^1 dz \iint_{x^2+y^2 \leq z^2} z dxdy = 2 \int_0^1 \pi z^3 dz = \frac{1}{2} \pi.$$

在曲面  $\Sigma_1$  上,

$$\iint_{\Sigma_1} xdydz + ydzdx + (z^2 - 2z)dxdy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} -1 dxdy = -\pi.$$

因此,

$$\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + (z^2 - 2z)dxdy = \frac{3}{2} \pi.$$

4. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  的收敛域, 并在收敛域上求其和函数。

解: 先求幂级数的收敛半径

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

因此, 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  的收敛半径为 1. 当  $x = 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散. 当  $x = -1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

是一个交错级数, 由 Leibniz 判别法知其收敛. 因此, 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  的收敛域为  $[-1, 1)$ , 记其和函数为

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad x \in [-1, 1).$$

则

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1).$$

因此,

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1).$$

注意到  $f(0) = 0$ , 我们有

$$f(x) = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1).$$

当  $x = -1$  时, 由幂级数的性质知  $f(x)$  在  $x = -1$  连续. 而函数  $-\ln(1-x)$  也在  $x = -1$  连续.

因此,

$$f(x) = -\ln(1-x), \quad x \in [-1, 1).$$

五、证明题：共 2 题，每题 6 分，共 12 分。

1. 证明：曲面  $z = xe^{\frac{y}{x}}$  上所有点处的切平面都过一定点。

证明：设  $(x_0, y_0, z_0)$  为曲面  $z = xe^{\frac{y}{x}}$  上任意一点，曲面在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处的法向量为

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \left( -\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \\ &= \left( -\left(1 - \frac{y}{x}\right)e^{\frac{y}{x}}, -e^{\frac{y}{x}}, 1 \right) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \\ &= \left( -\left(1 - \frac{y_0}{x_0}\right)e^{\frac{y_0}{x_0}}, -e^{\frac{y_0}{x_0}}, 1 \right). \end{aligned}$$

因此，曲面在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处的切平面方程为

$$-\left(1 - \frac{y_0}{x_0}\right)e^{\frac{y_0}{x_0}}(x - x_0) - e^{\frac{y_0}{x_0}}(y - y_0) + (z - z_0) = 0.$$

因为点  $(x_0, y_0, z_0)$  在曲面上， $z_0 = x_0 e^{\frac{y_0}{x_0}}$ 。因此，

$$\left(1 - \frac{y_0}{x_0}\right)x_0 e^{\frac{y_0}{x_0}} + y_0 e^{\frac{y_0}{x_0}} - z_0 = x_0 e^{\frac{y_0}{x_0}} - z_0 = 0.$$

即，点  $(0, 0, 0)$  总落在曲面过  $(x_0, y_0, z_0)$  的切平面上。

2. 证明：函数项级数  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  在  $(0, 1)$  点态收敛，但不一致收敛。

证明：函数项级数  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  的前  $n$  项和为

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

对于任意给定的  $x \in (0, 1)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n+1} = 0.$$

因此，

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}.$$

即，函数项级数  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  在区间  $(0, 1)$  上点态收敛于  $S(x) := \frac{1}{1-x}$ 。

但是，可以取到区间  $(0, 1)$  中的数列  $\{x_n = 1 - \frac{1}{n} \in (0, 1), n = 1, 2, \dots\}$  使得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |S_n(x_n) - S(x_n)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} = +\infty \neq 0.$$

因此，函数项级数  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  不一致收敛。

## 六、应用题：共 1 题，共 8 分。

从斜边长为  $l$  的直角三角形中，求周长最大的直角三角形。

解：设直角三角形的两个直角边长分别为  $x$  和  $y$ 。则其周长为

$$f(x, y) = x + y + l, \quad 0 < x < l, 0 < y < l.$$

且它们满足勾股定理

$$x^2 + y^2 = l^2.$$

这是在约束条件  $x^2 + y^2 = l^2$  之下求目标函数  $f(x, y)$  的最大值的问题。

设 Lagrange 函数

$$L(x, y, \lambda) = x + y + l - \lambda(x^2 + y^2 - l^2).$$

则最大值点应满足方程

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 1 - 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 1 - 2\lambda y = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 - l^2) = 0. \end{cases}$$

解此方程组，得

$$(x, y, \lambda) = \left( \frac{l}{\sqrt{2}}, \frac{l}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}l} \right) \text{ 或 } \left( -\frac{l}{\sqrt{2}}, -\frac{l}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}l} \right).$$

注意到直角边的长度  $x > 0, y > 0$ 。所以，当两直角边长度都为  $\frac{l}{\sqrt{2}}$  时，直角三角形周长最大，最大周长为  $(1 + \sqrt{2})l$ 。