座位号________

线

[illegible]________

封

学院________

（密封线内不答题）

学号________

密

姓名________

诚信应考，考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学本科生期末考试

《概率论与数理统计》A卷

注意事项：1. 开考前请将密封线内各项信息填写清楚；

2. 所有答案请直接答在试卷上；

3. 考试形式：闭卷；

4. 本试卷共八大题，满分 100 分， 考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得 分									

注意：$\Phi(1.67)=0.9525$ $\Phi(1.96)=0.975$ $\Phi(1.45)=0.926$

$t_{0.975}(15)=2.132$ $t_{0.95}(16)=1.746$ $t_{0.95}(15)=$ 15

$\chi^2_{0.975}(4)=11.143$ $\chi^2_{0.025}(4)=0.484$

$\chi^2_{0.95}(5)=11.071$ $\chi^2_{0.05}(5)=1.145$

$\chi^2_{0.975}(5)=12.833$ $\chi^2_{0.025}(5)=0.831$

一、（12 分）设有 n 个人排成一行，甲与乙是其中的两个人，求这 n 个人的任意排列中，甲与乙之间恰有 r 个人的概率。如果这 n 个人围成一圈，试证明甲与乙之间恰有 r 个人的概率与 r 无关。(甲到乙是顺时针)

解：

$$1)P(A)=\frac{C_2^1(n-r-1)(n-2)!}{n!}=\frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}$$

$$2)P(A)=\frac{C_{n-2}^{r}(n-r-2)!r!}{(n-1)!}=\frac{1}{n-1}$$

二、（10 分） 甲、乙、丙三车间加工同一产品，加工量分别占总量的 25%、35%、40%，次品率分别为 0.03、0.02、0.01。现从所有的产品中抽取一个产品，试求

（1）该产品是次品的概率；

（2）若检查结果显示该产品是次品，则该产品是乙车间生产的概率是多少？

解：设 A_1， A_2， A_3 表示甲乙丙三车间加工的产品，B 表示此产品是次品。

（1）所求事件的概率为 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$

$=0.25\times0.03+0.35\times0.02+0.4\times0.01=0.0185$

（2） $P(A_2|B)=\dfrac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\dfrac{0.35\times0.02}{0.0185}\approx0.38$

三、 **(10 分)** 假设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2，机器发生故障时全天停止工作，若一周 5 个工作日里无故障，可获利润 10 万元；发生一次故障可获利润 5 万元；发生二次故障所获利润 0 元；发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元，求一周内期望利润是多少？

解　由条件知 $X\sim B(5,0.2)$，即 $P\{X=k\}=\binom{5}{k}0.2^k0.8^{5-k},k=0,1,\cdots,5$

$$Y=g(X)=\begin{cases}10, & X=0;\\ 5, & X=1;\\ 0, & X=2;\\ -2, & X\geq3\end{cases}$$

$$\begin{aligned}EY=Eg(X)&=\sum_{k=0}^{5}g(k)P\{X=k\}\\&=10\times P\{X=0\}+5\times P\{X=1\}+0\times P\{X=2\}\\&\quad-2\times[P\{X=3\}+P\{X=4\}+P\{X=5\}]\\&=10\times0.328+5\times0.410-2\times0.057=5.216(万元)\end{aligned}$$

四、(15 分)　设随机变量 X 和 Y 的联合分布在以点 $(0,1),(1,0),(1,1)$ 为顶点的三角形区域上服从均匀分布,试求

(1)　关于 X 的边缘密度

(2)　X 和 Y 的协方差

(3)　随机变量 $U=X+Y$ 的方差.

解 三角形区域为$G=\{(x,y):0\le x\le 1,0\le y\le 1,x+y\ge 1\}$;随机变量 X 和 Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2 & 当(x,y)\in G\\ 0 & 当(x,y)\notin G\end{cases}$$

以 $f_1(x)$表示 X 的概率密度,则当 $x\le 0$或 $x\ge 1$时，$f_1(x)=0$;当$0<x<1$时,有

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_{1-x}^{1}2dy=2x$$

因此
$$EX=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3},\quad EX^2=\int_0^1 2x^3dx=\frac{1}{2}$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$$

同理可得，$EY=\dfrac{2}{3},DY=\dfrac{1}{18}$.

现在求 X 和 Y 的协方差

$$EXY=\iint\limits_G 2xydxdy=2\int_0^1 xdx\int_{1-x}^{1}ydy=\frac{5}{12}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EX\cdot EY=\frac{5}{12}-\frac{4}{9}=-\frac{1}{36}$$

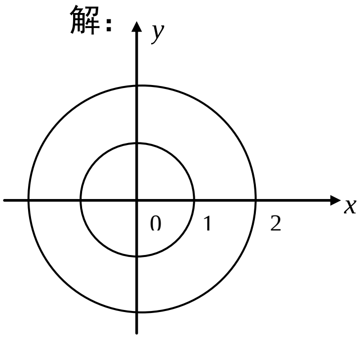
于是
$$DU=D(X+Y)=DX+DY+2\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{1}{18}+\frac{1}{18}-\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

五、（12）向一目标射击，目标中心为坐标原点，已知命中点的横坐标 X 和纵坐标 Y 相互独立，且均服从$N(0,2^2)$分布. 求

（1）命中环形区域$D=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 2\}$的概率；

（2）命中点到目标中心距离$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$的数学期望.

解：



（1） $P\{X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

$$=\iint\limits_D \frac{1}{2\pi\cdot 4}e^{-\frac{x^2+y^2}{8}}dxdy=\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\int_1^2 e^{-\frac{r^2}{8}}rdrd\theta$$

$$=-\int_1^2 e^{-\frac{r^2}{8}}d(-\frac{r^2}{8})=-e^{-\frac{r^2}{8}}\bigg|_1^2=e^{-\frac{1}{8}}-e^{-\frac{1}{2}}$$

（2） $EZ=E(\sqrt{X^2+Y^2})=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{8\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{8}}dxdy$

$$=\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}re^{-\frac{r^2}{8}}rdrd\theta=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{r^2}{8}}r^2dr$$

$$=-re^{-\frac{r^2}{8}}\bigg|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{r^2}{8}}dr=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{r^2}{8}}dr=\sqrt{2\pi}$$

.

六、（10 分）某种电子器件的寿命(小时)具有数学期望μ(未知),方差$\sigma^2=400$.为了估计μ,随机地取n只这种器件,在时刻$t=0$投入测试(设测试是相互独立的)直到失败,测得寿命为$X_1,X_2,\cdots,X_n$,以$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$作为$\mu$的估计,为了使$P\left\{\left|\bar{X}-\mu\right|<1\right\}\geq 0.95$,问$n$至少为多少?

解、 由于$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立同分布,且$EX_i=\mu,DX_i=\sigma^2=400$.

由林德伯格-列维定理得

$$P\left\{\left|\bar{X}-\mu\right|<1\right\}=P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right|<\frac{1}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right\}\approx\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)-1=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{20}\right)-1\geq 0.95$$

即$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{20}\right)\geq 0.975$,查表得$\frac{\sqrt{n}}{20}\geq 1.96$,故$n\geq 400\times 1.96^2=1536.64$.

因此n至少为 1537.

七、（10分）

(1) 设某机器生产的零件长度（单位：cm）$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，今抽取容量为16的样本，测得样本均值 $\bar{x}=10$，样本方差 $s^2=0.16$．求 μ 的置信度为0.95的置信区间.

(2) 某涤纶厂的生产的维尼纶的纤度（纤维的粗细程度）在正常生产的条件下，服从正态分布 N(1.405 , 0.048^2)，某日随机地抽取 5 根纤维，测得纤度为

1.32 ， 1.55 ， 1.36 ， 1.40 ， 1.44

问一天涤纶纤度总体 X 的均方差是否正常（α=0.05）**?**

解：（1） μ 的置信度为 $1-\alpha$ 下的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n-1}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1),\quad \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n-1}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$$

$\bar{x}=10$，$s=0.4$，$n=16$，$\alpha=0.05$，$t_{0.975}(15)=15$

所以 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为（9.7868，10.2132）

(2)

$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2=0.048^2$，$\quad H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2.$

$$\chi^2=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2\sim\chi^2(n)$$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)=\chi^2_{0.975}(5)=12.833$$

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)=\chi^2_{0.025}(5)=0.831$$

$$\chi^2=\frac{1}{0.048^2}\left[(1.32-1.405)^2+(1.55-1.405)^2+\cdots+(1.44-1.405)^2\right]$$
$$=13.683$$

因为$\chi^2=13.683>\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)=\chi^2_{0.975}(5)=12.833$，所以拒绝$H_0$，

即这一天涤纶纤度ξ的均方差可以认为不正常。

八、**（21 分）** 设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)} & 当x>\theta\\ 0 & 当x\le\theta\end{cases}$$

其中$\theta>0$是未知参数,从总体 X 中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，记

$$\theta=\min\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$$

求:(1) 总体 X 的分布函数 $F(x)$;(2)统计量 θ 的分布函数 $F_\theta(x)$;(3)如果用 θ 作为 θ 的估计量,讨论它是否具有无偏性. (4)计算 θ 的方差 $Var\left[\theta\right]$.

解 (1) $$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}1-e^{-2(x-\theta)} & 当x>\theta \\ 0 & 当x\le\theta\end{cases}$$

(2) $$F_\theta(x)=P\left\{\theta\le x\right\}=P\left\{min\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)\le x\right\}$$

$$=1-P\left\{min\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)>x\right\}=1-P\left\{X_1>x, X_2>x, \cdots, X_n>x\right\}$$

$$=1-\left[1-F(x)\right]^n=\begin{cases}1-e^{-2n(x-\theta)} & 当x>\theta \\ 0 & 当x\le\theta\end{cases}$$

(3) θ 的概率密度为

$$f_\theta(x)=\frac{dF_\theta(x)}{dx}=\begin{cases}2ne^{-2n(x-\theta)} & 当x>\theta \\ 0 & 当x\le\theta\end{cases}$$

因为 $$E\theta=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_\theta(x)dx=\int_{\theta}^{+\infty} 2nxe^{-2n(x-\theta)}dx=\theta+\frac{1}{2n}\ne\theta$$

所以 θ 作为 θ 的估计量不具有无偏性.

(4)

$$E\theta^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\theta(x)dx=\int_{\theta}^{+\infty} 2nx^2e^{-2n(x-\theta)}dx=\frac{2\theta^2n^2+2\theta n+1}{2n^2}$$

$$D\theta=E\theta^2-\left(E\theta\right)^2=\frac{1}{4n^2}$$