座位号________ 专业________ 学院________ 学号________ 姓名________

（密封线内不答题）

密 封 线

诚信应考,考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学 2018 级期末考试

《 微积分（上） 》试卷 A

（试卷号：2018.12.24 时间 120 分钟，总分 100）

注意事项：1. 考前请将密封线内填写清楚；

2. 所有答案请直接答在试卷上(密封线装订区内、草稿纸上答题均无效)；

3．考试形式：闭卷；

4. 本试卷共 五 大题，满分 100 分， 考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
评卷人						

一、计算题（每小题 5 分，25 分）

1．计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2n+k}$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2n+k}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2+\dfrac{k}{n}}=\int_0^1\dfrac{1}{2+x}dx=\ln\left(2+x\right)\Big|_0^1=\ln 3-\ln 2$

2．计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+e^n+\pi^n}$ ，其中 e 与 π 分别为自然对数的底数和圆周率

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+e^n+\pi^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\pi\left[\pi^{-n}+\left(\dfrac{e}{\pi}\right)^n+1\right]^{1/n}=\pi\left(0+0+1\right)^0=\pi$

另解 由 $\pi\le\sqrt[n]{1+e^n+\pi^n}\le\sqrt[n]{3}\pi$ ， $\lim\limits_{n\to\infty}\pi=\lim\limits_{n\to\infty}3^{1/n}\pi=3^0\pi=3^0\pi$ ，

由夹逼准则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+e^n+\pi^n}=\pi$

3．计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln\left(1+x\right)}{x^2}-\dfrac{1}{\sin x}\right]$

解 由 $\ln\left(1+x\right)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o\left(x^3\right),\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)$

从而 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln\left(1+x\right)}{x^2}-\dfrac{1}{\sin x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\ln\left(1+x\right)-x^2}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\ln\left(1+x\right)-x^2}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right]\left(x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right)-x^2}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right)-x^2}{x^3}=-\frac{1}{2}$$

另解 $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x^2}-\frac{1}{\sin x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\ln(1+x)-x^2}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\ln(1+x)-x^2}{x^3}$,

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\ln(1+x)+\frac{1}{1+x}\sin x-2x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\cos x\ln(1+x)+\sin x-2x(1+x)}{3x^2(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\cos x\ln(1+x)+\sin x-2x-2x^2}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\ln(1+x)+(1+x)(-\sin x)\ln(1+x)+2\cos x-2-4x}{6x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\ln(1+x)}{6x}-\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\sin x\ln(1+x)}{6x}-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x}-\frac{2}{3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{6x}-\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)x^2}{6x}-\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{6x}-\frac{2}{3}=\frac{\cos 0}{6}-0-0-\frac{2}{3}=\frac{1-4}{6}=-\frac{1}{2}$$

4．计算极限 $\lim_{x\to 0+}x^{\sin x}$

解 $\lim_{x\to 0+}x^{\sin x}=\lim_{x\to 0+}e^{\sin x\ln x}=\exp\left(\lim_{x\to 0+}\sin x\ln x\right)=\exp\left(\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\csc x}\right)$

$$=\exp\left(\lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-\csc x\cot x}\right)=\exp\left(\lim_{x\to 0+}\frac{\sin^2 x}{-x\cos x}\right)=e^0=1$$

5. 设 $x=0$ 和 $x=\pm 1$ 都是函数 $f(x)=\frac{x^2-x}{|x-a|\left(x^2-b\right)}$ 的间断点，求 a 和 b 的值并判定间断点的类型。

解 由题设，$x=0$ 和 $x=\pm 1$ 都是函数 $f(x)$ 没有定义的点或相应极限不存在的点，由于

$\lim_{x\to 0}\left(x^2-x\right)=0,\lim_{x\to 1}\left(x^2-x\right)=0,\lim_{x\to -1}\left(x^2-x\right)=2$，

进而必有 $|-a|(-b)=0,|1-a|(1-b)=0,|-1-a|(1-b)=0$，即 $a=0,b=1$，否则矛盾。

从而 $f(x)=\frac{x^2-x}{|x|\left(x^2-1\right)},f(0+)=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{|x|(x+1)}=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x+1}=1$，

$f\left(0-\right)=\lim\limits_{x\to 0-}\frac{x}{|x|\left(x+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0-}\frac{-1}{x+1}=-1$，$f\left(1-\right)=\lim\limits_{x\to 1-}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}=f\left(1+\right)$，

$f\left(-1-\right)=\lim\limits_{x\to -1-}\frac{-1}{x+1}=+\infty, f\left(-1+\right)=\lim\limits_{x\to -1-}\frac{-1}{x+1}=-\infty$，

由间断点分类定义，$x=0$ 为第一类跳跃型间断点，$x=1$ 为第一类可去型间断点，$x=-1$ 为第二类无穷型间断点。

二、计算题（每小题 5 分，25 分）

6、设函数 f 在点 $x=1$ 处可导，且 $f\left(1\right)=f'\left(1\right)=2$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f^3\left(1+x\right)-f^3\left(1\right)}{x}$

解　由题设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f\left(1+x\right)-f\left(1\right)}{x}=f'\left(1\right),\lim\limits_{x\to 0}f\left(1+x\right)=f\left(1\right)$，从而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f^3\left(1+x\right)-f^3\left(1\right)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f\left(1+x\right)-f\left(1\right)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left[f^2\left(1+x\right)+f\left(1+x\right)f\left(1\right)+f^2\left(1\right)\right]$

$=f'\left(1\right)\cdot\left[3f^2\left(1\right)\right]=2\cdot\left[3\cdot 2^2\right]=24$

7、求方程 $\left(\cos x\right)^y=\left(\sin y\right)^x$ 确定的隐函数 $y=y\left(x\right)$ 的导数

解　两边取对数 $y\ln\left(\cos x\right)=x\ln\left(\sin y\right)$，

两边对 x 求导，视 $y=y\left(x\right)$ 得 $y'\ln\left(\cos x\right)+y\cdot\frac{-\sin x}{\cos x}=\ln\left(\sin y\right)+xy'\cdot\frac{\cos y}{\sin y}$，

移项得 $y'\ln\left(\cos x\right)-xy'\cot y=\ln\left(\sin y\right)+y\tan x, y'=\frac{\ln\left(\sin y\right)+y\tan x}{\ln\left(\cos x\right)-x\cot y}$

8、已知阿基米德螺线的极坐标方程为 $r=\theta$，求该曲线上 $\theta=\pi$ 对应的点处切线的直角坐标方程。

解　由 $r=\theta$ 得直角坐标系下 $x=r\cos\theta=\theta\cos\theta, y=r\sin\theta=\theta\sin\theta$，

进而 $\theta=\pi$ 时 $x_0=\pi\cos\pi=-\pi, y_0=\pi\sin\pi=0$，

$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta},\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi}=\frac{0-\pi}{-1-0}=\pi$，切线方程为 $y-0=\pi\left(x+\pi\right), y=\pi x+\pi^2$

9、设 $f\left(x\right)=x^2\ln\left(1+x\right)$，求 $f^{(2018)}\left(0\right)$

解　由 $\ln\left(1+x\right)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots-\left(-1\right)^{2016}\frac{x^{2016}}{2016}+o\left(x^{2016}\right)$，

进而 $f(x)=x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{3}+\cdots-(-1)^{2016}\frac{x^{2018}}{2016}+o\left(x^{2018}\right)$，

故 $\frac{f^{(2018)}(0)}{2018!}=-\frac{1}{2016}, f^{(2018)}(0)=-\frac{2018!}{2016}$

另解　由牛顿莱布尼茨公式

$$f^{(2018)}(x)=x^2\left[\ln(1+x)\right]^{(2018)}+C_{2018}^1\cdot 2x\left[\ln(1+x)\right]^{(2017)}+C_{2018}^2\cdot 2\left[\ln(1+x)\right]^{(2016)},$$

从而 $f^{(2018)}(0)=2C_{2018}^2\cdot\left[\frac{1}{1+x}\right]^{(2015)}\Bigg|_{x=0}=2\cdot\frac{2018!}{2!\cdot 2016!}\cdot\left[\frac{1}{1+x}\right]^{(2015)}\Bigg|_{x=0}$

$$=\frac{2018!}{2016!}\cdot\left[\frac{(-1)}{(1+x)^2}\right]^{(2014)}\Bigg|_{x=0}=\frac{2018!}{2016!}\cdot\left[\frac{(-1)(-2)}{(1+x)^3}\right]^{(2014)}\Bigg|_{x=0}$$

$$=\frac{2018!}{2016!}\cdot\left[\frac{(-1)(-2)\ldots(-2015)}{(1+x)^{2016}}\right]\Bigg|_{x=0}=-\frac{2018!}{2016}$$

10、设 $f(x)$ 为连续函数，求 $y=\int_0^x(x-t)f(t)dt$ 的微分 dy

解　因 $y=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt, y'=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)$，

故 $dy=y'dx=\left(\int_0^x f(t)dt\right)dx$

三、计算题（每小题 5 分，共 20 分）

11、计算不定积分 $\int\sqrt{4-x^2}dx$。

解 1　$\int\sqrt{4-x^2}dx=x\sqrt{4-x^2}-\int x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}dx=x\sqrt{4-x^2}-\int\frac{4-x^2-4}{\sqrt{4-x^2}}dx$

$$=x\sqrt{4-x^2}-\left(\int\sqrt{4-x^2}dx-\int\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}dx\right)=x\sqrt{4-x^2}-\int\sqrt{4-x^2}dx+4\arcsin\frac{x}{2}$$

$$\int\sqrt{4-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}+c$$

解 2　令 $x=2\sin t, t=\arcsin\frac{x}{2}$，

得 $\int\sqrt{4-x^2}dx=\int\sqrt{4-\sin^2 t}\cdot 2\cos tdt=4\int\cos^2 tdt=2\int(1+\cos 2t)dt$

$$=2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=2t+2\sin t\cos t+c=2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+c$$

12、计算不定积分$\int x\tan x\sec^2 xdx$ 。

解 $\int x\tan x\sec^2 xdx=\int x\sec xd\sec x=\frac{1}{2}\int xd\sec^2 x=\frac{x}{2}\sec^2 x-\frac{1}{2}\int\sec^2 xdx$

$=\frac{x}{2}\sec^2 x-\frac{1}{2}\tan x+c$

或$\int x\tan x\sec^2 xdx=\int x\tan xd\tan x=\frac{1}{2}\int xd\tan^2 x=\frac{x}{2}\tan^2 x-\frac{1}{2}\int\tan^2 xdx$

$=\frac{x}{2}\tan^2 x-\frac{1}{2}\int\left(\sec^2 x-1\right)dx=\frac{x}{2}\tan^2 x-\frac{1}{2}\tan x+\frac{x}{2}+c=\frac{x}{2}\sec^2 x-\frac{1}{2}\tan x+c$

13、计算定积分$\int_0^{2018\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$

解 由周期函数的定积分性质$\int_0^{2018\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=2018\int_0^{\pi}\sqrt{2\sin^2 x}dx$

$=2018\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin xdx=2018\sqrt{2}\left(-\cos x\right)\Big|_0^{\pi}=-2018\sqrt{2}\left(\cos\pi-\cos 0\right)=4036\sqrt{2}$

14、计算无穷积分$\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$

解 因$\int xe^{-x}dx=-\int xde^{-x}=-\left(xe^{-x}-\int e^{-x}dx\right)=-xe^{-x}-\int e^{-x}d\left(-x\right)=-xe^{-x}-e^{-x}+c$

故$\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=-\lim\limits_{b\to+\infty}\left(x+1\right)e^{-x}\Big|_0^{b}=-\lim\limits_{b\to+\infty}\left[\left(b+1\right)e^{-b}-1\right]=1-\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{b+1}{e^b}$

$=1-\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1+0}{e^b}=1$

四、 应用题（每小题 5 分，共 20 分）

15、求心形线$r=a\left(1+\cos\theta\right)$与圆$r=a\left(a>0\right)$各自所围区域的公共部分的面积

解 由$\begin{cases}r=a\\r=a\left(1+\cos\theta\right)\end{cases}$知$\cos\theta=0,\theta=\pm\frac{\pi}{2}$，得交点及坐标为$\left(\frac{\pi}{2},a\right),\left(-\frac{\pi}{2},a\right)$,

进而所求面积为$S=\frac{1}{2}\pi a^2+2\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{2}a^2\left(1+\cos\theta\right)^2 d\theta$

$=\frac{1}{2}\pi a^2+a^2\int_{\pi/2}^{\pi}\left(1+2\cos\theta+\cos^2\theta\right)d\theta=\frac{1}{2}\pi a^2+a^2\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$

$$=\frac{1}{2}\pi a^2+a^2\left(\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}=\frac{1}{2}\pi a^2+a^2\left[\frac{3}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)+2\left(0-1\right)+\frac{1}{4}\left(0-0\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\pi a^2+a^2\left(\frac{3\pi}{4}-2\right)=\left(\frac{5\pi}{4}-2\right)a^2$$

16、求曲线 $y=x^2$，直线 $x=2$ 及 x 轴所围区域绕 y 轴旋转一周所成旋转体的体积。

解 作图知 $V=\pi\cdot 2^2\cdot 4-\int_0^4 \pi x^2 dy=16\pi-\int_0^4 \pi y dy=16\pi-\frac{\pi y^2}{2}\Big|_0^4=16\pi-8\pi=8\pi$ ，

或 $V=\int_0^2 2\pi\cdot x\cdot x^2 dx=2\pi\int_0^2 x^3 dx=2\pi\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^2=8\pi$

17、计算星形线 $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}\left(0\le t\le 2\pi\right)$ 的弧长。

解 由 $\begin{cases}dx=3\cos^2 t\left(-\sin t\right)dt\\ dy=2\sin^2 t\cos t dt\end{cases}$ ，得 $ds=\sqrt{\left(dx\right)^2+\left(dy\right)^2}=\sqrt{9\sin^2 t\cos^2 t}dt$ ，

进而 $s=\int_0^{2\pi} ds=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9\sin^2 t\cos^2 t}dt=12\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t dt=12\cdot\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\pi/2}=6$

18. 向宽为 a 米的河修建一宽为 b 米的运河，二者成直角相交。问能通过这直角河道的船，其最大长度是多少？（船体理想化为直线段）。

解 由题意，设 $s=\frac{a}{\sin\theta}+\frac{b}{\cos\theta}$ ，

再令 $\frac{ds}{d\theta}=\frac{-a\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{-b\left(-\sin\theta\right)}{\cos^2\theta}=\frac{b\sin^3\theta-a\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=0$ ，

解得 $b\sin^3\theta=a\cos^3\theta,\sin\theta=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\cos\theta$ ，结合 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\left(\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}+1\right)\cos^2\theta=1$ ，

$$\cos^2\theta=\frac{b^{2/3}}{a^{2/3}+b^{2/3}},\cos\theta=\frac{b^{1/3}}{\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}},\sin\theta=\frac{a^{1/3}}{\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}} ,$$

进而能通过这直角河道的船，其最大长度是 $s=\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}$ 。

五、证明题（每小题 5 分，共 15 分）

19、设函数 f 在 $\left[a,b\right]$ 上有连续导数，$f\left(a\right)=f\left(b\right)=0$ 。试证明 $\left|\int_a^b f\left(x\right)dx\right|\le\frac{M}{4}\left(b-a\right)^2$ ，

其中 $M=\max\limits_{a\le x\le b}\left|f'\left(x\right)\right|$

证 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(x)d\left(x-\frac{a+b}{2}\right)=\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\Big|_a^b-\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)dx$

进而 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|=\left|-\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)dx\right|\le\frac{M}{2}\int_a^b\left|x-\frac{a+b}{2}\right|dx$

$$=\frac{M}{2}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx-\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx\right)=M\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\Bigg|_{\frac{a+b}{2}}^b=\frac{M}{4}(b-a)^2$$

另证 1　由题设，当 $x\in(a,b)$ 时，存在 $\xi_1\in(a,x),\xi_2\in(x,b)$ 使得

$f(x)=f(x)-f(a)=f(\xi_1)(x-a)=f(x)-f(b)=f(\xi_2)(x-b)$，

取 $c=\frac{a+b}{2},\left|\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\right|\le\int_a^c|f(x)|dx+\int_c^b|f(x)|dx$

$\le\int_a^c M(x-a)dx+\int_c^b M(b-x)dx=M\left[\frac{1}{2}(x-a)^2\Big|_a^c-\frac{1}{2}(b-x)^2\Big|_c^b\right]$

$=\frac{M}{2}\left[(c-a)^2+(b-c)^2\right]$ 要 $\forall c\in[a,b]$ 成立，从而

$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{M}{2}\min\left[(c-a)^2+(c-b)^2\right]=\frac{M}{4}(b-a)^2$

另证 2　令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt,x\in[a,b]$，由题设 $F'(x)=f(x),F'(a)=0$，

分别取 $x_0=a$ 对 $F(x)$ 作泰勒展开，得

$F(x)=F(a)+F'(a)(x-a)+\frac{F''(\xi_1)}{2!}(x-a)^2=\frac{f'(\xi_1)}{2}(x-a)^2,\xi_1\in(a,x)$，

令 $G(x)=\int_b^x f(t)dt,x\in[a,b]$，由题设 $G'(x)=f(x),G'(b)=0$，

分别取 $x_0=b$ 对 $G(x)$ 作泰勒展开，得

$G(x)=G(b)+G'(b)(x-b)+\frac{G''(\xi_2)}{2!}(x-b)^2=\frac{f'(\xi_2)}{2}(x-b)^2,\xi_2\in(x,b)$，

即 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\int_a^x f(x)dx-\int_b^x f(x)dx\right|\le\left|\int_a^x f(x)dx\right|+\left|\int_b^x f(x)dx\right|$

$=\frac{\left|f'(\xi_1)\right|}{2}(x-a)^2+\frac{\left|f'(\xi_2)\right|}{2}(x-b)^2\le\frac{M}{2}\left[(x-a)^2+(x-b)^2\right]$要 $\forall x\in[a,b]$成立，从而

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{M}{2}\min\left[(x-a)^2+(x-b)^2\right]=\frac{M}{4}(b-a)^2$$

另证 3　令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt,x\in[a,b]$，由题设 $F'(x)=f(x),F'(a)=F'(b)=0$，

分别取 $x_0=a,b$ 对 $F(x)$ 作泰勒展开，得

$$F(x)=F(a)+F'(a)(x-a)+\frac{F''(\xi_1)}{2!}(x-a)^2=\frac{f'(\xi_1)}{2}(x-a)^2,\xi_1\in(a,x),$$

$$F(x)=F(b)+F'(b)(x-b)+\frac{F''(\xi_2)}{2!}(x-b)^2=F(b)+\frac{f'(\xi_2)}{2}(x-b)^2,\xi_2\in(x,b),$$

再两式相减得 $0=F(b)+\frac{f'(\xi_2)}{2}(x-b)^2-\frac{f'(\xi_1)}{2}(x-a)^2$，

即 $\int_a^b f(x)dx=F(b)=\frac{f'(\xi_1)}{2}(x-a)^2-\frac{f'(\xi_2)}{2}(x-b)^2$，

即 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|==\frac{\left|f'(\xi_1)\right|}{2}(x-a)^2+\frac{\left|f'(\xi_2)\right|}{2}(x-b)^2\le\frac{M}{2}\left[(x-a)^2+(x-b)^2\right]$

要 $\forall x\in[a,b]$成立，从而$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{M}{2}\min\left[(x-a)^2+(x-b)^2\right]=\frac{M}{4}(b-a)^2$

20、设函数 f 在$[a,b]$上二阶可导且 $f''(x)$恒正。试证明：对区间$[a,b]$中的任意 n 个互不相同的数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，都有 $f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$。

证　对区间$[a,b]$中的任意 n 个互不相同的数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，设 $x_0=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，

由题设用泰勒公式，存在 ξ 在 x,x_0 之间，使得

$$f(x_i)=f(x_0)+f'(x_0)(x_i-x_0)+\frac{f''(\xi_i)}{2}(x_i-x_0)^2\ge f(x_0)+f'(x_0)(x_i-x_0)\ ,$$

$x_i\ne x_0$时成立严格不等式，于是 $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)>nf(x_0)$，即结论成立。