

诚信应考, 考试作弊将带来严重后果!

华南理工大学本科生期末考试

《工科数学分析(上)》期末考试(A)

- 注意事项: 1. 考前请将密封线内填写清楚;
2. 考试形式: 闭卷;
3. 请用蓝色或黑色水笔答题, 不要用铅笔或者其他颜色的笔答题;
4. 交卷时除了草稿纸不用交之外, 每页试卷都要交;
5. 本试卷共 10 大题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得 分											

一、(10分)用 $\epsilon-N$ 语言叙述 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 的定义. 并用定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b} = 1(b > 1)$.

二、 (10分)计算下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\alpha x)^\beta - (1+\beta x)^\alpha}{x^2}.$$

三、 (10分)完成下面两题

(1) 令 $f(x) = x^n e^x$, 求 $f^{(n)}(x)$;

(2) 定义函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

求 $f'(x)$, 并讨论其连续性, 说明理由.

四、(10分)计算以下两题

(1) $\int e^x \sin x \, dx,$

(2) 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$) 所围区域的面积.

五、 (10分) 设 $f(x) \in C[0, 1]$ 并且可微, 满足 $\forall x \in [0, 1]$ 有 $0 < f(x) < 1$ 并且 $f'(x) \neq 1$. 证明: $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有唯一的不动点, 即存在唯一的 $x_0 \in [0, 1]$, 使得 $f(x_0) = x_0$.

六、 (10分)设旋轮线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (a > 0, t \in [0, 2\pi]).$$

(1) 求旋轮线上斜率为1的切线.

(2) 求旋轮线与 x 轴所围区域的面积.

七、 (10分)证明：若 $p > 1$, 则对一切 $x, y \in \mathbb{R}$ 有

$$|x + y|^p \leq 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p).$$

八、 (10分)设 $f(x) \in C[a, b]$, 若 $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$, 并且 $\int_a^b f(x)dx = 0$, 则在 $[a, b]$ 上 $f(x) \equiv 0$.

九、 (10分)完成下面两题

(1) 根据定积分的定义把下列极限表示成定积分

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{i}{n} \right);$$

(2) 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{2}{n} \right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n} \right) \right)^{1/n}.$$

十、 (10分) 设 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则对任何正整数 n

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx;$$

(2) 由此证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \right)^2 = \frac{\pi}{2}.$$