座位号________ 专业________ 学院________ 学号________ 姓名________

（密封线内不答题）

密 封 线

诚信应考, 考试作弊将带来严重后果!

华南理工大学期末考试

《线性代数与解析几何 》(B)试卷(18-19年度第1学期)

注意事项：1. 考前请将密封线内填写清楚;

2. 所有答案请直接答在试卷上;

3. 考试形式：闭卷;

4. 本试卷共 8 大题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟.

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得 分									

得分	

一、 (15分) 填空题.

1. 若n阶行列式D的值等于d, 若从第2列开始每一列加上它前面的一列，同时对第1列加上D的第n列, 则得到的行列式的值为$\underline{\left(1+(-1)^{n-1}\right)d}$

2. 设向量$\alpha=(1,1,1)'$, $\beta=(1,\frac{1}{2},0)'$, $A=\alpha\beta'$, 则$A^4=$ $\underline{\frac{27}{8}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}}$

3. 设$f(x)=x^2-5x+3$为正整数, 矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}$, 则$f(A)=$ $\underline{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}$

4. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, 则$A^k=$ $\underline{\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$

5. 设向量组$\alpha_1=(1,1,1)'$, $\alpha_2=(1,2,3)'$, $\alpha_3=(1,1,t)'$线性相关,则$t=$ $\underline{\quad 1 \quad}$.

得分	

二、 (18分) 选择题:

1. 设n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的秩为3,且满足$2\alpha_3-3\alpha_5=0, \alpha_2=2\alpha_4$, 则该向量组的一个极大线性无关组是(A).

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$ (B) $\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ (C) $\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$ (D) $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5$

2. 设A为$m\times n$矩阵,若线性方程组$Ax=0$有非零解, 则必有(B).

(A) $m<n$ (B) $r(A)<n$

(C) A 中有两列对应成比例 (D) A的行向量组线性相关.

3. 设$f(x)=\begin{vmatrix}x-2 & x-1 & x-2 & x-3\\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3\\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5\\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3\end{vmatrix}$, 则$f(x)=0$的根为(D)

(A) 0,1,2,3　　(B) $0,1,2$　　(C) $0,1,1,$　　(D) $0,1.$

4. 设A为一个3阶矩阵,将其第3行乘以5加到第1行, 相当于用一初等矩阵左乘A,这个初等矩阵是(D) .

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, (C) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. 已知矩阵$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$相似, 则$t = $(D).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 3　　(D) 5.

6. 设有二次型$f(x_1, x_2, x_3) = kx_1^2 + kx_2^2 + k^2x_3^2 + 2kx_1x_2 + 2x_1x_3$, 当$k$为(D)时, 二次型$f$必是正定的.

(A) $k > 1$;　　(B) $k^2 > 1$;　　(C) $k < 0$;　　(D) k不存在.

得分	

三、 (7分)计算n阶行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$D_n = 7D_{n-1} - 10D_{n-2} \qquad (+3分)$$

$$D_n - 2D_{n-1} = 5\left(D_{n-1} - 2D_{n-2}\right)$$

$$= \cdots$$

$$= 5^{n-2}\left(D_2 - 2D_1\right) = 5^n \qquad (+2分)$$

$$\mathrm{D_n} = 2D_{n-1} + 5^n$$

$$= 2\left(2D_{n-2} + 5^{n-1}\right) + 5^n = 2^2 D_{n-2} + 2 \cdot 5^{n-1} + 5^n$$

$$= \cdots$$

$$= 2^{n-2}\left(2D_1 + 5^2\right) + 2^{n-3} \cdot 5^3 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-1} + 5^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} 2^i \cdot 5^{n-i} = \frac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{3} \qquad (+2分)$$

得分	

四、(15分) 求解下列非齐次线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad\quad -3x_4 \ -x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 \ +2x_3 \ -x_4 \qquad\quad = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 \ +6x_3 \ +3x_4 \ -4x_5 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 \ -2x_3 \ +4x_4 \ -7x_5 = 2. \end{cases}$$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{6} & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - \frac{7}{6}x_5 = 1 \\ x_2 - x_3 - \frac{5}{6}x_5 = 0 \\ \qquad x_4 - \frac{1}{3}x_5 = 0 \end{cases}$$

$$得\begin{cases} x_1 = -k_1 + \frac{7}{6}k_2 + 1 \\ x_2 = k_1 + \frac{5}{6}k_2 \\ x_3 = k_1 \\ x_4 = \frac{1}{3}k_2 \\ x_5 = k_2 \end{cases}$$

$$通解：\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{5}{6} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad k_1, k_2 是任意常数$$

得分	

五、(15 分) 在$\mathbb{R}^3$中, 求向量$\alpha = (3,7,1)$关于基$\alpha_1 = (1,3,5)$, $\alpha_2 = (6,3,2)$, $\alpha_3 = (3,1,0)$的坐标.

设α 的坐标为(x_1,x_2,x_3),

则有 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \alpha$ （+5分）

$$\left(\alpha_1^T \quad \alpha_2^T \quad \alpha_3^T \mid \alpha^T\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ （+3分）

$$\xrightarrow{\text{若干初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 33 \\ 0 & 1 & 0 & -82 \\ 0 & 0 & 1 & 154 \end{array}\right)$$

坐标$(x_1,x_2,x_3) = (33,-82,154)$ （+7分）

得分	

六、(9分) 求过直线$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$, 且平行于直线$\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$的平面方程.

设所求平面的法向量为$\vec{n}$,

则 $\vec{n} \perp$向量$(2,1,-1)$，$\vec{n} \perp$向量$(2,1,-2)$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -i + 2j$$ （+5分）

点$(1,0,0)$在所求平面上。

所求平面：$-(x-1) + 2y = 0$

即：$x - 2y - 1 = 0$ （+4分）

得分	

七、(15 分) 设$A=\begin{pmatrix}4&-1&-1&1\\-1&4&1&-1\\-1&1&4&-1\\1&-1&-1&4\end{pmatrix}$,

(1) 求A的特征值、特征向量;

(2) 求正交矩阵T, 使得$T^{-1}AT$为对角形.

(1)

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&1&1&-1\\1&\lambda-4&-1&1\\1&-1&\lambda-4&1\\-1&1&1&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-3)^3(\lambda-7)$$ (+5分)

A的特征值为: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=3,\quad \lambda_4=7$

齐次线性方程组$(3E-A)X=0$的一个基础解系为:

$\alpha_1=(1,\ 1,\ 0,\ 0)^T,\alpha_2=(1,\ 0,\ 1,\ 0)^T,\alpha_3=(-1,\ 0,\ 0,\ 1)^T$

A的特征值3的特征向量为: $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$(其中$k_1$, k_2, k_3不全为0)

齐次线性方程组$(7E-A)X=0$的一个基础解系为:

$\alpha_4=(-1,\ 1,\ 1,\ -1)^T$

A的特征值3的特征向量为: $k_4\alpha_4$(其中 k_4不为 0) (+5分)

(2)由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$不正交，对它们做斯密特正交化并单位化

得：$\beta_1=(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0)^T, \beta_2=(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0)^T$,

$\beta_3=(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2})^T$

对α_4单位化得：$\beta_4=\frac{\alpha_4}{|\alpha_4|}=(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$

$$T=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad T^{-1}AT=diag(3,3,3,7).$$ （+5分）

得分	

八、(6分) 设A为一个具有n重特 a的$n\times n$矩阵,证明: A可以对角化的充分必要条件是$A=aE$.

充分性

若$A=aE$, 则 A是对角矩阵，显然，A可以对角化.

必要性

若A可对角化，由于A有n个特征值 a ,则存在可逆矩阵 P，使得

$P^{-1}AP=aE$

$A=P\cdot aE\cdot P^{-1}=aP\cdot P^{-1}=aE$