《概率论与数理统计》试卷（2 学分 A）参考答案

一. 选择题

A B A C D .

二. 填空题

1. $\frac{5}{7}$；　　2.. 4 ；

3. 5 / 9 ；　　4. 7 / 8 (或 0.875) ；

5. A=B ；

6. $1-0.5e^{-1}-0.5e^{-0.2}\approx 0.4067$

三解：由全概率公式及 Bayes 公式

P(该种子能发芽)＝0.1×0.9+0.9×0.2＝0.27

P(该种子来自发芽率高的一盒)＝(0.1×0.9)/0.27＝1/3

四. 解: (1) 当 $0<x<1$ 时 $f_X(x)=\int_x^1 6xdy=6x(1-x)$ 故

$$f_X(x)=\begin{cases}6x(1-x) & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

当 $0<y<1$ 时，$f_Y(y)=\int_0^y 6xdx=3y^2$ 故 $f_Y(y)=\begin{cases}3y^2 & 0<y<1\\ 0 & 其他\end{cases}$

(2) $P(X+Y\le 1)=\int_0^{1/2}6xdx\int_x^{1-x}dy=\int_0^{1/2}6x(1-2x)dx=\frac{1}{4}$

(3) EX=1/2，EY=3/4，EXY=2/5

cov(X, Y)=1/40

五、解: 由题意知 X,Y 相互独立，且

$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & x<0\end{cases} \quad 与 \quad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0 & y<0\end{cases}.$$

当 $z>0$ 时，

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{\max(X,Y)\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}\\&=P\{X\le z\}P\{Y\le z\}=F_X(z)F_Y(z)\end{aligned}$$

$$f_Z(z)=f_X(z)F_Y(z)+F_X(z)f_Y(z)=2e^{-2z}(1-e^{-z})+(1-e^{-2z})e^{-z}=e^{-z}+2e^{-2z}-3e^{-3z}$$

故 $$f_Z(z)=\begin{cases} e^{-z}+2e^{-2z}-3e^{-3z} & z>0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

六 解：X 的分布函数 $$F(x)=\begin{cases} 1-e^{-\frac{1}{20000}(x-365)}, & x\ge 365 \\ 0, & x<365 \end{cases},$$

于是 $P(X\le 1095)=1-e^{-0.0365}\approx 0.04$

记 $\begin{cases} N = \text{"1000件产品中寿命小于1095的产品件数"} \\ Y = \text{"保险公司的利润"} \end{cases}$

则 $N\sim B(1000,0.04)$，$Y=1000\times P_0-2000N$，

由中心极限定理，$N\sim N(40,6.2^2)$，

于是

（1） 若保费 $P_0=100$ 元/件，则″保险公司亏本″$=\{Y\le 0\}=\{N\ge 50\}$

$$P\{保险公司亏本\}=P\{Y\le 0\}=P\{N\ge 50\}=P\{\frac{N-40}{6.2}\ge\frac{10}{6.2}\}\approx 1-\Phi(1.61)=0.054$$

（2）若保费为 P_0，则″保险公司亏本″$=\{Y\le 0\}=\{N\ge 0.5P_0\}$

$$P\{保险公司亏本\}=P\{N\ge 0.5P_0\}=P\{\frac{N-40}{6.2}\ge\frac{0.5P_0-40}{6.2}\}\approx 1-\Phi(\frac{0.5P_0-40}{6.2})\le 0.01$$

故 $$\Phi(\frac{0.5P_0-40}{6.2})\ge 0.99 \Rightarrow \frac{0.5P_0-40}{6.2}\ge 2.33$$
$$\Rightarrow P_0\ge 2\times(40+6.2\times 2.33)=108.89(元)$$

七解：（1）随机变量(X，Y)的概率密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases} 1/2, & 0<x<2, 0<y<1 \\ 0, & others \end{cases}$$

因为随机变量 X，Y 的边缘密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases} 1/2, & 0<x<2 \\ 0, & others \end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases} 1, & 0<y<1 \\ 0, & others \end{cases}$$

$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以 X，Y 相互独立

随机变量(X，Y)的分布函数为：$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 0.5x, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases},\quad F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ y, & 0<y\le 1\\ 1, & y>1\end{cases}$$

（2）EX=1，DX=1/3，EY=1/2，DY=1/12，

$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=a\operatorname{cov}(X,X)+b\operatorname{cov}(Y,Y)=aDX+bDY$ =1/3a+1/12b=0

$D\eta=a^2DX+b^2DY$ =1

解得：$a=-b/4$，$b=\pm 4\cdot\sqrt{3/5}$

八.　解:　(1) $\dfrac{C_{13}^5C_{13}^5C_{13}^2C_{13}^1}{C_{52}^{13}}$

（2） B={有一张 K}，A={黑桃 K}，P(A|B)=1/4

九.（7 分）　证明：由题设条件知 $ABC\subset D\Rightarrow P(ABC)\le P(D)$，

$$\begin{aligned}
&P(A)+P(B)-P(AB)\le 1\\
\Rightarrow\ &P(A)+P(B)\le 1+P(AB)\\
\Rightarrow\ &P(A)+P(B)+P(C)\le 1+P(AB)+P(C)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad =1+P(AB\cup C)+P(ABC)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \le 2+P(ABC)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \le 2+P(D)
\end{aligned}$$