

# 【华工包打听说明】

此答案由某位学生提供，包打整理无偿分享给大家，禁止用于资料买卖或他用

答案仅供参考，不保证正确。

更多资料欢迎大家关注包打听（QQ 号、微信号或公众号）

校园资讯，问题答疑，感情树洞  
万事皆可找包包

进入华工社群，探索华园更多玩法  
黑市，学习群，二手交易，考试资料...  
你能想到的，我们都愿意帮你实现

我们是华工包打听，由校内学生组建而成的校园自媒体  
立志成为陪伴华园学子度过漫长岁月的一盏灯



SCUT包打听（新）



华工包打听



华工卫星站



包打听公众号



包打听QQ

由于华工包打听、华工卫星站好友人数已满，请加SCUT包打听或包打听QQ

更多资料、资讯，可加包打听公众号获取！

诚信应考, 考试作弊将带来严重后果!

## 华南理工大学期末考试

### 《线性代数与解析几何》(A)试卷(17-18年度第1学期)

注意事项: 1. 考前请将密封线内填写清楚;

2. 所有答案请直接答在试卷上;

3. 考试形式: 闭卷;

4. 本试卷共 8 大题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟.

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一、(15分) 填空题.

得分	
----	--

1. 若 $n$ 阶行列式 $D$ 的值等于 $d$ , 则将 $D$ 的每个第 $(i, j)$ 元素 $a_{ij}$ 换到第 $(n-i+1, n-j+1)$ 元素的位置上, 得到的新行列式的值为  $d$ .

2. 设 $A, B$ 为可逆阵, 则  $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$

3. 设 $n$ 为正整数, 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ , 则 $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

4. 与矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 乘法可交换的所有矩阵为  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

5. 设 $\alpha_1 = (1, 4, 1), \alpha_2 = (2, 1, 0), \alpha_3 = (6, 2, -16), \beta = (2, t, 3)$ , 当 $t = \underline{\text{任意实数}}$ 时,  $\beta$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

二、(18分) 选择题:

得分	
----	--

1. 行列式  $\begin{vmatrix} 8 & 27 & 64 & 125 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = ( \text{ A } ).$

(A) 12, (B) -12, (C) 16, (D) -16

2. 矩阵 $A$ 是 $n$ 阶方阵,  $A^*$ 是其伴随矩阵, 则下列结论错误的是( D ).

- (A) 若 $A$ 可逆, 则 $A^*$ 可逆 (B) 若 $A$ 不可逆, 则 $A^*$ 也不可逆  
(C) 若 $|A^*| \neq 0$ , 则 $A$ 是可逆的 (D)  $|AA^*| = |A|$ .

3. 要下列齐次线性方程组有非零解, 只需条件( D ) 满足:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

- (A)  $m \leq n$ , (B)  $m = n$ , (C)  $m > n$ , (D) 系数矩阵的秩小于 $n$ .

4. 设3阶矩阵 $A$ 的特征值为1, 0,  $-1$ ,  $f(x) = x^2 - 2x - 1$ , 则 $f(A)$ 的特征值为( A )

- (A)  $-2, -1, 2$ , (B)  $-2, -1, -2$ , (C)  $0, 1, -1$ , (D)  $2, 0, -2$ .

5. 若矩阵 $A$ 只和自己相似, 则( C ).

- (A)  $A$ 必为单位矩阵; (B)  $A$ 必为零矩阵;  
(C)  $A$ 必为数量矩阵; (D)  $A$ 为任意对角矩阵.

6. 在下列二次型中, 属于正定二次型的是( C ).

- (A)  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$ ;  
(B)  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_3^2$ ;  
(C)  $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3$ ;  
(D)  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ .

三、(7分)计算行列式:

得	
分	

$$D = \begin{vmatrix} a & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & a+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & a+2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & a+n-1 \end{vmatrix}.$$

$$D = \begin{vmatrix} a + \frac{(n-1)(n+2)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n \\ a + \frac{(n-1)(n+2)}{2} & a+1 & 3 & \cdots & n \\ a + \frac{(n-1)(n+2)}{2} & 2 & a+2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a + \frac{(n-1)(n+2)}{2} & 2 & 3 & \cdots & a+n-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (+3分) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} a + \frac{(n-1)(n+2)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (+3分) \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \left[ a + \frac{(n-1)(n+2)}{2} \right] (a-1)^{n-1} \quad (+1分)$$

四、(15分) 求解下列非齐次线性方程组：

得分	
----	--

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12, \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -16 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 - 5x_5 = -16 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = k_1 + k_2 + 5k_3 - 16 \\ x_2 = -2k_1 - 2k_2 - 6k_3 + 23 \\ x_3 = k_1 \\ x_4 = k_2 \\ x_5 = k_3 \end{cases}$$

$$\text{通解: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

↓

五、(15 分) 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 求由基 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\varepsilon_2 = (1, 1, 0)$ ,  $\varepsilon_3 = (1, 1, 1)$ 到基 $\eta_1 = (1, 2, 3)$ ,  $\eta_2 = (2, 3, 1)$ ,  $\eta_3 = (3, 1, 2)$ 的过渡矩阵, 并求向量 $\xi = (1, 0, 1)$ 在这两组基下的坐标.

得分	
----	--

$$(\varepsilon_1^T \quad \varepsilon_2^T \quad \varepsilon_3^T \mid \eta_1^T \quad \eta_2^T \quad \eta_3^T) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

+5分

$$\text{从基 } \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \text{ 到基 } \eta_1, \eta_2, \eta_3 \text{ 的过渡矩阵 } P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

设 $\xi$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 的坐标为 $(x_1, x_2, x_3)$

$$x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + x_3 \varepsilon_3 = \xi$$

$$(\varepsilon_1^T, \varepsilon_2^T, \varepsilon_3^T, \xi^T) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

+5分

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, -1, 1)$$

所以,  $\xi$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 的坐标为 $(0, -1, 1)$

设 $\xi$ 在基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ 的坐标为 $(y_1, y_2, y_3)$

$$y_1 \eta_1 + y_2 \eta_2 + y_3 \eta_3 = \xi$$

$$(\eta_1^T, \eta_2^T, \eta_3^T, \xi^T) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/9 \\ 0 & 1 & 0 & -2/9 \\ 0 & 0 & 1 & 4/9 \end{array} \right)$$

+5分

$$(y_1, y_2, y_3) = \left( \frac{1}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{9} \right)$$

所以,  $\xi$ 在基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ 的坐标为 $\left( \frac{1}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{9} \right)$

六、(10分) 求过点(1, 1, 1), 且垂直于平面 $x - y + z = 7$ 和 $3x + 2y - 12z + 5 = 0$ 的平面方程.

得分	
----	--

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -12 \end{vmatrix} = 10\vec{i} + 15\vec{j} + 5\vec{k} \quad (+6\text{分})$$

$$10(x-1) + 15(y-1) + 5(z-1) = 0$$

$$\text{平面方程: } 2(x-1) + 3(y-1) + (z-1) = 0 \quad (+4\text{分})$$

$$\text{即: } 2x + 3y + z - 6 = 0$$

七、(15 分) 设3阶实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ ,

得分	
----	--

(1) 求 $A$ 的特征值、特征向量; (2) 求正交矩阵 $T$ , 使得 $T^{-1}AT$ 为对角形.

(1)

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-6 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda-3 & -2 \\ -4 & -2 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-11) \stackrel{\text{令}}{=} 0$$

$$\text{特征值: } \lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 11$$

对  $\lambda=2$ :

$$(\lambda E - A) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda E - A)X = 0 \text{ 的基础解系: } \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{对应 } \lambda=2 \text{ 的特征向量为: } \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

对  $\lambda=11$ :

$$(11E - A) = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(11E - A)X = 0 \text{ 的基础解系, 也是对应 } \lambda=11 \text{ 的特征向量 : } \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \alpha_1, \alpha_2 \text{ 正交化: } \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_1, \beta_2, \alpha_3 \text{ 单位化: } \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4/(3\sqrt{5}) \\ -2/(3\sqrt{5}) \\ \sqrt{5}/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\text{得正交矩阵 } T = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} & -4/(3\sqrt{5}) & 2/3 \\ 2/\sqrt{5} & -2/(3\sqrt{5}) & 1/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\text{使得 } T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

八、(5分) 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $m \times k$  矩阵, 且  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,  $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$  是它们的列向量构成的分块矩阵. 假定对每个  $\beta_j$ , 分块矩阵  $(A, \beta_j)$  的秩与  $A$  的秩相等. 令  $C = (A, B)$  为由  $A, B$  构成的分块矩阵, 证明:  $r(C) = r(A)$ .

得	
分	

因为  $r(A, \beta_i) = r(A)$

$\beta_i$  可以表示为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  的线性组合,  $i = 1, 2, \dots, k$

则  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示

所以,  $r(A, B) \leq r(A)$

又  $r(A, B) \geq r(A)$

因此,  $r(C) = r(A, B) = r(A)$