诚信应考,考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学 2016 级期末考试

《　　微积分（上）　　》试卷 A

（试卷号：2017.1.3 时间 120 分钟，总分 100）

注意事项：1. 考前请将密封线内填写清楚；
2. 所有答案请直接答在试卷上（密封线装订区内、草稿纸上答题均无效）；
3．考试形式：闭卷；
4. 本试卷共 五 大题，满分 100 分， 考试时间 120 分钟。

题　号	一	二	三	四	五	六	总分
得　分							
评卷人							

一、填空题（每小题 4 分，20 分）

1．设 $x\to 0$ 时，$\mathrm{e}^{x\cos x^2}-\mathrm{e}^{x}$ 与 x^n 是同阶无穷小,则 $n=$___5___；

解　$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\cos x^2}-\mathrm{e}^{x}}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\mathrm{e}^{x\cos x^2-x}-1\right)\mathrm{e}^{x}}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x^{2}\ x}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^4}{x^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2x^{n-5}}$$

为非零常数，则必须 $n-5=0, n=5$；

2．设 $f(1)=f'(1)=2$，求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(1+x)-f^2(1)}{x}$.

解　$$\lim_{x\to 0}\frac{f^2(1+x)-f^2(1)}{x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(1+x)-f(1)}{x}\left[f(1+x)+f(1)\right]\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}\lim_{x\to 0}\left[f(1+x)+f(1)\right]=f'(1)\cdot 2f(1)=2\cdot 2\cdot 2=8$$

3．$\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_{x^3}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}\right)=\underline{\dfrac{-3x^2}{\sqrt{1+x^6}}}$____

解　$$\frac{d}{dx}\left(\int_{x^3}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}\right)=-\frac{d}{du}\left(\int_{1}^{u}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}\right)\left(x^3\right)'=\frac{-3x^2}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{-3x^2}{\sqrt{1+x^6}}\text{。}$$

4．广义积分 $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{e^x+e^{2-x}}dx=\underline{\frac{\pi}{4e}}$_______

解　$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{e^x+e^{2-x}}dx=\int_{1}^{+\infty}\frac{e^x}{e^{2x}+e^2}dx=\lim_{b\to 0}\int_{1}^{b}\frac{de^x}{e^{2x}+e^2}=\lim_{b\to 0}\frac{1}{e}\arctan\frac{e^x}{e}\bigg|_{1}^{b}$$

姓名______ 学号______ 学院______ 专业______ 座位号______

（密封线内不答题）

密 封 线

$$=\lim_{b\to 0}\frac{1}{e}\left(\arctan e^{b-1}-\arctan 1\right)=\frac{1}{e}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4e}。$$

5.函数 $y=x^2+x\sqrt{a^2-x^2}$ 在 $[-a,a]$ 上的平均值为 $\underline{\frac{a^2}{3}}$________

解 平均值 $\bar{y}=\frac{1}{a-(-a)}\int_{-a}^{a}\left(x^2+x\sqrt{a^2-x^2}\right)dx=\frac{1}{2a}\left[2\int_0^a x^2dx+0\right]=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{3}\cdot x^3\Big|_0^a=\frac{a^2}{3}$。

二、解答下列各题（每小题 5 分，共 20 分）

6、设 $f(x+1)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n-2}\right)^n$，求 $f(x)$ 的表达式。

解　$x\neq -2$ 时

$$f(x+1)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n-2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+2}{n-2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x+2}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{x+2}}\right]^{\frac{n(x+2)}{n-2}}=e^{x+2},$$

当 $x=-2$ 时

$$f(x+1)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n-2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}1^n=1=e^{x+2}\Big|_{x=-2}。$$

综上 $f(x+1)=e^{x+2}=e^{(x+1)+1}, f\left(x\right)=e^{x+1}$。

7、设数列 $\{x_n\}$ 满足：$0<x_1<\pi$，且 $x_{n+1}=\sin x_n$（$n=1,2,\cdots$），（1）证明：

$\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求出此极限值.（2）计算 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{1/x_n}$

解　（1）由 $0<x_1<\pi$，得 $x_2=\sin x_1\in[0,1]\subseteq\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，且 $0\le x_2=\sin x_1\le x_1$，进而

$x_3=\sin x_2\in[0,1]\subseteq\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，且 $0\le x_3=\sin x_2\le x_2$，归纳得 $0\le x_n=\sin x_{n-1}\le x_{n-1}$.

因而数列 $\{x_n\}$ 是单调有界数列，极限 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$，则 $x_{n+1}=\sin x_n$ 两边取极限，得 $a=\sin a$，由 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 中 $y=x, y=\sin x$ 的单调性，惟一的解应为 $a=0$，即此极限值 $\lim_{n\to\infty}x_n$ =0.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x_n-x_n}{x_n}=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\sin t-t}{t}=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\cos t-1}{1}=0$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{x_n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x_n-x_n}{x_n^2}=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\sin t-t}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\cos t-1}{2t}=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{-\sin t}{2}=0$，故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{1/x_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n}\right)^{1/x_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n}\right)^{\frac{x_n}{x_{n+1}-x_n}}\right]^{\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n^2}}=e^0=1$$

8、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$

解　因为在积分区间内 $0\le\dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\le x^n$，

从而由比较性质 $0\le\int_0^1\dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx\le\int_0^1 x^n dx=\dfrac{1}{n+1}$，　而 $\lim\limits_{n\to\infty}0=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$，

由夹逼准则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx=0$。

解法 2　因为 $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 连续，x^n 不变号。由积分第一中值定理（教材例题）

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\int_0^1 x^n dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\frac{1}{n+1}=0,\xi\in[0,1]$$

注意，如果是下面的做法有问题的：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx=\lim_{n\to\infty}\xi^n\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=0,\xi\in[0,1]$$

解法 3　所有 $\varepsilon>0$，$0<\int_{1-\varepsilon/2}^{1}\dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx<\int_{1-\varepsilon/2}^{1}dx=\dfrac{\varepsilon}{2}$，

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{1-\varepsilon/2}\dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\xi_n^n}{\sqrt{1+\xi_n^2}}\left(1-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)=0,0\le\xi_n\le 1-\dfrac{\varepsilon}{2}<1$，进而对 $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{2}>0$，存

在 $N>0$，当 $n>N$ 时有 $0<\int_0^{1-\varepsilon/2}\dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx<\dfrac{\varepsilon}{2}$，进而

所有 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时使得 $\left|\int_0^1\dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx-0\right|<\varepsilon$，

由定义 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx=0$。

9、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n+n)^2})$.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n+n)^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{(n+1)^2}+\frac{n^2}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n^2}{(n+n)^2}\right)\frac{1}{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}\right)\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^2}\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx$

$=\left.\frac{-1}{1+x}\right|_0^1=\frac{-1}{1+1}-\frac{-1}{1+0}=\frac{1}{2}$。

三、计算下列各题（每小题 5 分，共 15 分）

10、设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内具有二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$.

求 $f(0),f'(0)$ 和 $f''(0)$.

解：由已知 $\mathrm{e}^3=\lim\limits_{x\to0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)\right\}$

$=\exp\left[\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left(x+\frac{f(x)}{x}\right)\right]=\exp\left(1+\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}\right)$,

从而 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=3-1=2,\ f(x)=2x^2+o(x^2)$,

$f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=0,\ f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^2+o(x^2)-0}{x-0}=0$,

对比函数的二阶泰勒公式可知 $\frac{f''(0)}{2!}=2,\ f''(0)=2\cdot2!=4$。

11、设 $f(x)=e^{2x}\sin x$，求 $f^{(4)}(0)$

解　由泰勒公式 $f(x)=\left[1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+o(x^3)\right]\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)$

$$=x+2x^2+2x^3+\frac{4x^4}{3}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right)=x+2x^2+\frac{11}{6}x^3+x^4+o\left(x^4\right)$$

由泰勒展开的唯一性，可得 $\frac{f^{(4)}(0)}{4!}=1, f^{(4)}(0)=4!=24$。（死算四阶导数，方法较烦！）

12、设 $y=y(x)$ 是由方程 $\ln(x^2+y+1)=x^3y+\sin x$）确定.

（1）求曲线 $y=y(x)$ 在 $(0,y(0))$ 处的切线方程；

（2）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}ny(\frac{2}{n})$.

解 （1）由 $\ln(x^2+y+1)=x^3y+\sin x$，令 $x=0$，得 $\ln(y+1)=0+\sin 0=0,\ y(0)=0$。

方程两边对 x 求导，视 $y=y(x)$，则有

$\frac{2x+y'}{x^2+y+1}=3x^2y+x^3y'+\cos x$，令 $x=0,y=0$，得 $\frac{0+y'}{0+1}=0+0+\cos 0, y'(0)=1$，

于是曲线 $y=y(x)$ 在 $(0,y(0))$ 处的切线方程为 $y-0=1(x-0), y=x$；

（2）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}ny(\frac{2}{n})=2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y(\frac{2}{n})-y(0)}{\frac{2}{n}}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{y(x)-y(0)}{x}=2y'(0)=2$.

四、计算下列积分（各 6 分，共 18 分）

13、$\int\frac{1}{1+\sin x}dx$

解 1 $\int\frac{1}{1+\sin x}dx=\int\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$

$$=\int\sec^2 xdx-\int\sec x\tan xdx=\tan x-\sec x+c$$

解 2 $\int\frac{1}{1+\sin x}dx=\int\frac{1}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx=\int\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}dx$

$$=-\int\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}d\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+c$$

解 3 用万能代换 $t=\tan\frac{x}{2}, x=2\arctan t:\int\frac{1}{1+\sin x}dx=\int\left(\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\right)dt$

$$=\int\frac{2}{(1+t)^2}dt=\int\frac{2}{(1+t)^2}d(t+1)=\frac{-2}{1+t}+c=\frac{-2}{1+\tan\frac{x}{2}}+c$$

（$=\dfrac{-2}{\tan\frac{x}{2}+1}+c=-\cot\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)+c=\tan\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)+c$）

14、求积分$\int\sec^3 xdx$

解 1 $\int\sec^3 x\,dx=\int\sec x\,d\tan x=\sec x\tan x-\int\tan x\,d\sec x$

$$=\sec x\tan x-\int\left(\sec^2 x-1\right)\sec xdx=\sec x\tan x-\int\sec^3 xdx+\int\sec xdx$$

$$=\sec x\tan x-\int\sec^3 xdx+\ln\left|\sec x+\tan x\right|,$$

从而$\int\sec^3 xdx=\dfrac{1}{2}\left(\sec x\tan x+\ln\left|\sec x+\tan x\right|\right)+c$

解 2

$$\int\sec^3 xdx=\int\frac{1}{\cos^3 x}dx=\int\frac{\cos x}{\cos^4 x}dx=\int\frac{d\sin x}{\left(1-\sin^2 x\right)^2}=\int\frac{du}{\left(1-u^2\right)^2}=\int\frac{du}{(1+u)^2(1-u)^2}$$

化部分分式，令$\dfrac{1}{(1+u)^2(1-u)^2}=\dfrac{A}{1+u}+\dfrac{B}{1-u}+\dfrac{C}{(1+u)^2}+\dfrac{D}{(1-u)^2}$

$=\dfrac{A(1+u)(1-u)^2+B(1+u)^2(1-u)+C(1-u)^2+D(1+u)^2}{(1+u)^2(1-u)^2}$，从而

$A(1+u)(1-u)^2+B(1+u)^2(1-u)+C(1-u)^2+D(1+u)^2\equiv 1$，

令$u=1$得$D=\dfrac{1}{4}$，令$u=-1$得$D=\dfrac{1}{4}$，令$u=0$得$A+B+C+D=1,\Rightarrow A+B=\dfrac{1}{2}$；

令$u=2$得$3A-9B+C+9D=1,\Rightarrow 3A-9B=1-\dfrac{10}{4}=-\dfrac{3}{2},A-3B=-\dfrac{1}{2}$，进而解得

$4B=1$，$B=\dfrac{1}{4},A=\dfrac{1}{4}$。

$$\int\sec^3 xdx=\frac{1}{4}\left[\int\frac{du}{1+u}+\int\frac{du}{1-u}+\int\frac{du}{(1-u)^2}+\int\frac{du}{(1+u)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\ln(1+u)-\ln(1-u)+\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}\right]+c$$

$$=\frac{1}{4}\left[\ln(1+\sin x)-\ln(1-\sin x)+\frac{1}{1-\sin x}-\frac{1}{1+\sin x}\right]+c$$

$$=\frac{1}{4}\left[\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+\frac{2\sin x}{1-\sin^2 x}\right]+c=\frac{1}{4}\left[\ln\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}+\frac{2\sin x}{\cos^2 x}\right]+c$$

$$=\frac{1}{4}\left[\ln\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}+\frac{2\sin x}{\cos^2 x}\right]+c=\frac{1}{4}\left[2\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|+\frac{2\sin x}{\cos^2 x}\right]+c$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\left|\sec x+\tan x\right|+\sec x\tan x\right)+c$$

15、$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

解 1 $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^{-3}\sqrt{1+x^{-2}}}=-\int_1^{\sqrt{3}}\frac{d\left(1+x^{-2}\right)}{2\sqrt{1+x^{-2}}}=-\sqrt{1+x^{-2}}\Big|_1^{\sqrt{3}}$

$$=-\left(\sqrt{1+\frac{1}{3}}-\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}-\sqrt{\frac{4}{3}}=\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

解 2　令 $x=\tan t$，则当 $x=1$ 时取 $t=\frac{\pi}{4}$，当 $x=\sqrt{3}$ 时取 $t=\frac{\pi}{3}$，$dx=\sec^2 tdt$，进而

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\sec^2 tdt}{\tan^2 t\sqrt{1+\tan^2 t}}=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\sec tdt}{\tan^2 t}=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\cos tdt}{\sin^2 t}=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{d\sin t}{\sin^2 t}$$

$$=\left(-\frac{1}{\sin t}\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/3}=-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

五、解答下列各题（每小题 6 分，共 12 分）

16、求由曲线 $r=a\left(1+\sin\theta\right)\left(a>0\right)$ 所围成的平面图形的面积。

解　$A=\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2\left(1+\sin\theta\right)^2d\theta=\frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\left(1+2\sin\theta+\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$

$$=\frac{1}{2}a^2\left(\frac{3}{2}\theta-2\cos\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{3\pi}{2}a^2.$$

17、求由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 所围成的图形绕 x 轴旋转所得的立体的体积。

解　由对称为第一卦限部分旋转所得体积的两倍，从而

$$V=2\int_0^a\pi y^2dx=2\int_0^a\pi\left(b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}\right)dx=2\pi\left(b^2x-\frac{b^2x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a=2\pi\left(b^2a-\frac{b^2a^3}{3a^2}\right)=\frac{4\pi}{3}ab^2$$

六、证明下列各题（每小题 5 分，共 15 分）

18、证明费马引理：设函数 $f\left(x\right)$ 在 x_0 的某个邻域 $U\left(x_0\right)$ 内有定义，且在 x_0 处取得极值。

如果 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则有 $f'(x_0)=0$

常见证法（见教材） 由已知 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0)$，不妨设 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值，

进而 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$，$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$，

从而可得 $f'(x_0)=0$。

反证法证 若 $f'(x_0)\ne 0$ 不妨设 $f'(x_0)>0$，从而由定义 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$，

于是由极限的局部保号性，存在一个邻域 $U(x_0,\ \delta)\subseteq U(x_0)$ 有 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$，进而

当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时 $f(x)-f(x_0)>0, f(x)>f(x_0)$，

当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时 $f(x)-f(x_0)<0, f(x)<f(x_0)$，这与 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值矛盾，

而推理无误，因而可得 $f'(x_0)=0$。

19、利用函数的凸性证明：$\dfrac{1}{2}\left(a^p+b^p\right)>\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^p$，其中 $a>0,b>0,a\ne b,p>1$。

证　令 $g(t)=t^p$，则由已知可得 $g(t)$ 在（$0,+\infty$）内连续，且对任何 $t>0$，

$g'(t)=pt^{p-1},g''(t)=p(p-1)t^{p-2}>0$，从而 $g(t)$ 在（$0,+\infty$）内为凹。

由定义可得，$\dfrac{1}{2}\left(g(a)+g(b)\right)>g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$，即 $\dfrac{1}{2}\left(a^p+b^p\right)>\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^p$。

20、设 $c(x)$ 和 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上给定的连续函数，再设 $y(x)$ 在区间 $[a,b]$ 满足下列不等式 $y'(x)+c(x)y(x)\le f(x)$。证明：$y(x)\le y(a)e^{-\int_a^x c(t)dt}+\int_a^x f(s)e^{-\int_s^x c(t)dt}ds$

证 1　由 $y'(x)+c(x)y(x)\le f(x)$ 等已知条件，

$$\left(y(x)e^{\int_a^x c(t)dt}\right)'=y'(x)e^{\int_a^x c(t)dt}+c(x)\le f(x)e^{\int_a^x c(t)dt},$$

进而由比较性质 $\int_a^x \left(y(x) e^{\int_a^x c(t)dt} \right)' dx \le \int_a^x f(x) e^{\int_a^x c(t)dt} dx$，即

$$y(x)e^{\int_a^x c(t)dt} - y(a) \le \int_a^x f(x)e^{\int_a^x c(t)dt}dx, y(x) \le y(a)e^{-\int_a^x c(t)dt} + e^{-\int_a^x c(t)dt}\int_a^x f(x)e^{\int_a^x c(t)dt}dx,$$

$$y(x) \le y(a)e^{-\int_a^x c(t)dt} + e^{-\int_a^x c(t)dt}\int_a^x f(s)e^{\int_a^s c(t)dt}ds = y(a)e^{-\int_a^x c(t)dt} + \int_a^x f(s)e^{-\int_s^x c(t)dt}ds。$$

证法 2　由 $y'(x)+c(x)y(x) \le f(x)$ 等已知条件，$y'(s)+c(s)y(s) \le f(s)$

从而由比较性质，$\int_a^x f(s)e^{-\int_s^x c(t)dt}ds \ge \int_a^x \left[y'(s)+c(s)y(s)\right]e^{-\int_s^x c(t)dt}ds$

$$= \int_a^x y'(s)e^{-\int_s^x c(t)dt}ds + \int_a^x c(s)y(s)e^{-\int_s^x c(t)dt}ds = \int_a^x e^{-\int_s^x c(t)dt}dy(s) + \int_a^x c(s)y(s)e^{-\int_s^x c(t)dt}ds$$

$$= e^{-\int_s^x c(t)dt}y(s)\Big|_{s=a}^{s=x} - \int_a^x y(s)\frac{de^{-\int_s^x c(t)dt}}{ds}ds + \int_a^x c(s)y(s)e^{-\int_s^x c(t)dt}ds$$

$$= y(x) - e^{-\int_a^x c(t)dt}y(a) - \int_a^x y(s)\left[e^{-\int_s^x c(t)dt}c(s)\right]ds + \int_a^x c(s)y(s)e^{-\int_s^x c(t)dt}ds，即得$$

$$\int_a^x f(s)e^{-\int_s^x c(t)dt}ds \ge y(x) - e^{-\int_a^x c(t)dt}y(a)，即 y(x) \le y(a)e^{-\int_a^x c(t)dt} + \int_a^x f(s)e^{-\int_s^x c(t)dt}ds。$$

证法 3　令 $F(x) = y(x)e^{\int_a^x c(t)dt} - y(a) - \int_a^x f(s)e^{\int_a^s c(t)dt}ds$，则 $F(a)=0$，由已知 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且可导，$F'(x) = y'(x)e^{\int_a^x c(t)dt} + y(x)c(x)e^{\int_a^x c(t)dt} - 0 - f(x)e^{\int_a^x c(t)dt}$，

由已知即得 $F'(x) = \left[y'(x)+y(x)c(x)-f(x)\right]e^{\int_a^x c(t)dt} \le 0$，从而 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调不增，故 $x\in[a,b]$ 时 $F(x) = y(x)e^{\int_a^x c(t)dt} - y(a) - \int_a^x f(s)e^{\int_a^s c(t)dt}ds \le F(a) = 0$，即

$$y(x) \le y(a)e^{-\int_a^x c(t)dt} + e^{-\int_a^x c(t)dt}\int_a^x f(s)e^{\int_a^s c(t)dt}ds = y(a)e^{-\int_a^x c(t)dt} + \int_a^x f(s)e^{-\int_s^x c(t)dt}ds。$$