姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ □□□□□□□□□□ 座位号＿＿＿＿

（密封线内不答题）

密 封 线

诚信应考，考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学本科生期末考试

《概率论与数理统计》A 卷

注意事项：1. 开考前请将密封线内各项信息填写清楚；

2. 所有答案请直接答在试卷上；

3．考试形式：闭卷；

4. 本试卷共八大题，满分 100 分， 考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得 分									

注意： $\Phi(1.65)=0.95$ $\Phi(1.96)=0.975$ $\Phi(1.45)=0.926$ $\Phi\left(1.40\right)=0.92$

$t_{0.99}(7)=2.998$， $t_{0.95}(7)=1.895$， $t_{0.99}(6)=3.143,$ $t_{0.95}(6)=1.943$

$\chi^2_{0.975}(6)=14.449$ $\chi^2_{0.025}(6)=1.237$

$\chi^2_{0.975}\left(7\right)=16.013$ $\chi^2_{0.025}\left(7\right)=1.690$

一、 填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1、若 $P(A)=0.5$， $P(B)=0.4$， $P(A-B)=0.3$，则 $P(A\cup B)=$__0.7__.

2、设随机变量 X 服从二项分布 $B\left(10,p\right)$，若 X 的方差是 $\frac{5}{2}$，则 $p=$ __$\frac{1}{2}$__.

3、设随机变量 X、Y 均服从正态分布 $N\left(2,\ 0.2\right)$ 且相互独立，则随机变量

$Z=X-2Y+1$ 的概率密度函数为 __$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z+1)^2}{2}}$__.

4、设总体 $X\sim N(0,4)$，而 $X_1,X_2,\cdots,X_{15}$ 为取自该总体的样本，则统计量

$Y=\dfrac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2)}$ 服从__$F(10,5)$__分布.

5、设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中事件 $\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}$ 出现的次数，则 $P\{Y=2\}=$ $\underline{\frac{9}{64}}$.

6、设总体 X 和 Y 相互独立，$X\sim N(0,4)$，$Y\sim N(0,9)$，$\bar{X}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}X_i$，$\bar{Y}=\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}Y_i$，其中 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 以及 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{15}$ 时分布来自总体 X 和 Y 的随机样本，则 $\left|\bar{X}-\bar{Y}\right|$ 的数学期望为________. $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1、设 A,B,C 三个事件两两独立,则 A,B,C 相互独立的充分必要条件是(A).

(A) A 与 $B\ C$ 独立　　(B) $A\ B$ 与 $A\cup C$ 独立

(C) $A\ B$ 与 $A\ C$ 独立　　(D) $A\cup B$ 与 $A\cup C$ 独立

2、设 A，B 是两个随机事件，$P(A)=\frac{2}{5}$，$P(B)=\frac{4}{5}$，$P(B|\bar{A})=\frac{5}{6}$，则（ C ）

$(A)P(\bar{A}|B)=\frac{1}{2}$　$(B)P(\bar{A}|B)=\frac{3}{4}$　$(C)P(\bar{A}|B)=\frac{5}{8}$　$(D)P(\bar{A}|B)=\frac{12}{25}$

3、设 X，Y 为相互独立的两个随机变量，则下列不正确的结论是（ D ）

$(A)E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$　　$(B)E(XY)=E(X)E(Y)$

$(C)D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$　　$(D)D(XY)=D(X)D(Y)$

4．袋中有 4 个白球 2 个黑球，今从中任取 3 个球，则至少一个黑球的概率为(A).

(A) $\frac{4}{5}$　　(B) 1

(C) $\frac{1}{5}$　　(D) $\frac{1}{3}$

5． 设随机变量 X 服从正态分布 (μ_1,σ_1^2), 随机变量 Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 $P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$, 则必有(A).

(A) $\sigma_1 < \sigma_2$ (B) $\sigma_1 > \sigma_2$ (C) $\mu_1 < \mu_2$ (D) $\mu_1 > \mu_2$

6、$X_1, X_2, \cdots X_9$相互独立，$EX_i = 1, \quad DX_i = 1 \quad (i = 1,2,\cdots 9)$,则对任意给定的$\varepsilon > 0$，有(D).

(A)$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{9} X_i - 1\right| < \varepsilon\right\} \ge 1 - \varepsilon^{-2}$ (B)$P\left\{\frac{1}{9}\left|\sum_{i=1}^{9} X_i - 1\right| < \varepsilon\right\} \ge 1 - \varepsilon^{-2}$

(C)$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{9} X_i - 9\right| < \varepsilon\right\} \ge 1 - \varepsilon^{-2}$ (D)$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{9} X_i - 9\right| < \varepsilon\right\} \ge 1 - 9\varepsilon^{-2}$

三、(10 分）甲、乙两人轮流投篮，甲先投。一般来说，甲、乙两人独立投篮的命中率

分别为 0.7 和 0.6。但由于心理因素的影响，如果对方在前一次投篮中投中，紧跟在后面投篮的这一方的命中率就会有所下降，甲、乙的命中率分别变为 0.4 和 0.5。求：

（1）乙在第一次投篮中投中的概率；

（2）甲在第二次投篮中投中的概率。

解：令 A_1 表示事件“乙在第一次投篮中投中”，

令 B_i 表示事件“甲在第 i 次投篮中投中”，$i = 1,2$

（1）$P(A_1) = P(B_1)P(A_1|B_1) + P(\overline{B_1})P(A_1|\overline{B_1})$

$= 0.7\times0.5 + 0.3\times0.6 = 0.53$ （5 分）

（2）$P(A_1) = 0.53, \quad \Rightarrow P(\overline{A_1}) = 0.47$

$P(B_2) = P(A_1)P(B_2|A_1) + P(\overline{A_1})P(B_2|\overline{A_1})$ （5 分）

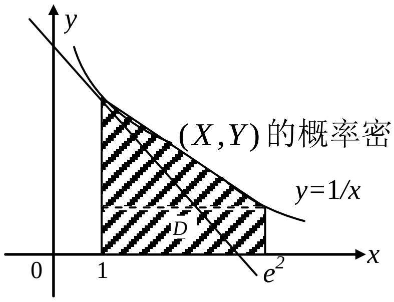
$= 0.53\times0.4 + 0.47\times0.7 = 0.541$

四、（14 分）设(X,Y)在由直线$x=1$，$x=e^2$，$y=0$及曲线$y=\frac{1}{x}$所围成的区域上服从均匀分布，

（1）求边缘密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，并说明 X 与 Y 是否独立.

（2）求 $P(X+Y\ge 2)$.

解： 区域D的面积$S_D=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_1^{e^2}=2$



(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

（1） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}dy, & 1\le x\le e^2,\\ 0\ , & \text{其它}.\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & 1\le x\le e^2,\\ 0\ , & \text{其它}.\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_1^{e^2}\frac{1}{2}dx, & 0\le y\le e^{-2},\\ \int_1^{\frac{1}{y}}\frac{1}{2}dx, & e^{-2}<y\le 1,\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}(e^2-1), & 0\le y\le e^{-2}\\ \frac{1}{2y}-\frac{1}{2}\ , & e^{-2}<y\le 1\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$$

（2）因 $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$，所以$X,Y$不独立

（3） $P(X+Y\ge 2)=1-P(X+Y<2)=1-\iint\limits_{x+y<2}f(x,y)dxdy$

$$=1-\int_1^2 dx\int_0^{2-x}\frac{1}{2}dy=1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=0.75$$

五.（10分）设随机变量 X 与 Y 相互独立且同分布，且 X 的分布律为$X\sim\begin{bmatrix}1 & 2\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$.

记$U=\max(X,Y)$， $V=\min(X,Y)$，试求(U,V)的概率分布，并求$Cov(U,V)$.

解：

$P\{U=1,V=1\}=P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

$P\{U=2,V=1\}=P\{X=1,Y=2\}+P\{X=2,Y=1\}$

$=P\{X=1\}P\{Y=2\}+P\{X=2\}P\{Y=1\}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

$P\{U=1,V=2\}=0$

$P\{U=2,V=2\}=P\{X=2,Y=2\}=P\{X=2\}P\{Y=2\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

故(U,V)的分布律为

$U \backslash V$	1	2	$p_{i\bullet}$
1	$\frac{4}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$
$p_{\bullet j}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

$EU=1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{5}{9}=\frac{14}{9}$

$EV=1\times\frac{8}{9}+2\times\frac{1}{9}=\frac{10}{9}$

$E(UV)=1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{4}{9}+4\times\frac{1}{9}=\frac{16}{9}$

$Cov(U,V)=E(UV)-EU\times EV=\frac{16}{9}-\frac{14}{9}\times\frac{10}{9}=\frac{4}{81}$

六.（10 分）一养鸡场购进 1 万个良种鸡蛋,已知每个鸡蛋孵化成雏鸡的概率为 0.84，每只雏鸡发育成种鸡的概率为 0.90，试计算这批鸡蛋得到种鸡不少于 7500 只的概率。

解 设 $A_k=\{第k只鸡蛋孵化成雏鸡\}$，$B_k=\{第k只鸡蛋育成种鸡\}$，

令 $$X_k=\begin{cases}1 & 当B_k发生\\ 0 & 当B_k不发生\end{cases}\quad (k=1,2,\cdots,10000)$$

则诸 A_k 独立同分布,且

$$P\{X_k=1\}=P\{B_k\}=P\{A_k\}P\{B_k|A_k\}+P\{\overline{A}_k\}P\{B_k|\overline{A}_k\}$$

$$=0.84\times0.9+0=0.756$$

$$P\left\{X_k=0\right\}=P\left\{\overline{B}_k\right\}=0.244$$

显然，$X=\sum_{k=1}^{10000}X_k$ 表示 10000 个鸡蛋育成的种鸡数，则 $X\sim B\left(10000,0.756\right)$,而

$$np=10000\times0.756=7560,\qquad np\left(1-p\right)=7560\times0.244=1844.64$$

根据棣莫佛-拉普拉斯定理可得

$$\frac{X-np}{\sqrt{np\left(1-p\right)}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_k-np}{\sqrt{np\left(1-p\right)}}\sim N\left(0,1\right)$$

于是,所求概率为

$$P\left\{X\geq7500\right\}=P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{10000}X_k-7560}{\sqrt{1844.64}}\geq\frac{7500-7560}{\sqrt{1844.64}}\right\}\approx1-\Phi\left(\frac{-60}{\sqrt{1844.64}}\right)$$

$$=\Phi\left(1.40\right)=0.92$$

因此,由这批鸡蛋得到的种鸡不少于 7500 只的概率为 92%.

七、(10 分)

设总体 X 的分布函数为

$$F\left(x;\beta\right)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x^{\beta}} & 当x>1\\ 0 & 当x\leq1\end{cases}$$

其中未知参数 $\beta>1,X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,求

(1) β 的矩估计;

(2) β 的极大似然估计。

解： X 的概率密度为

$$f\left(x;\beta\right)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}} & 当x>1\\ 0 & 当x\leq1\end{cases}$$

(1)由于 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf\left(x;\beta\right)dx=\int_{1}^{+\infty}x\cdot\frac{\beta}{x^{\beta+1}}dx=\frac{\beta}{\beta-1}$

令 $\frac{\beta}{\beta-1}=\bar{X}$，解得 $\beta=\frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$，所以参数 β 的矩估计量为

$$\beta=\frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$$

(2)似然函数为

$$L\left(\beta\right)=\prod_{i=1}^{n}f\left(x_i;\beta\right)=\begin{cases}\dfrac{\beta^n}{\left(x_1x_2\cdots x_n\right)^{\beta+1}} & \text{当}x_i>1\ \left(i=1,2,\cdots,n\right)\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

当 $x_i>1\ \left(i=1,2,\cdots,n\right)$， $L\left(\beta\right)>0$，取对数得

$$\ln L\left(\beta\right)=n\ln\beta-\left(\beta+1\right)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

两边对 β 求导,得

$$\frac{d\ln L\left(\beta\right)}{d\beta}=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

令 $\frac{d\ln L\left(\beta\right)}{d\beta}=0$,可得

$$\beta=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$$

故 β 的极大似然估计为

$$\beta=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$$

八.（10 分）

(1). 已知多名实习生相互独立地测量同一块土地的面积，设每名实习生得到的测量数据 X 平方米服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，从这些测量数据中随机抽取 7 个，经计算，其平均面积为 125 平方米，标准差为 2.71 平方米。求 μ 的置信度为 90%的置信区间。

(2). 甲乙两厂生产的灯泡，其寿命 X 和 Y 分别服从 $N(\mu_1, 84^2)$ 和 $N(\mu_2, 96^2)$，现从两厂生产的灯泡中各取 60 只，测得平均寿命甲厂为 $\bar{x}=1295$ 小时，乙厂为 $\bar{y}=1230$ 小时，问在显著性水平 α=0.05 下能否认为两厂生产的灯泡寿命无显著差异？

解：（1）μ 的置信度为 $1-\alpha$ 下的置信区间为

$$(\bar{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n-1}},\quad \bar{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n-1}})$$

其中，$\overline{X}$ 表示样本均值，S 表示样本标准差，n 表示样本容量，又

$\bar{X}=125,\ S=2.71,\ n=7,\ \alpha=0.1,\ t_{0.95}(6)=1.943$

所以 μ 的置信度为 90%的置信区间为（122.9，127.1）

（2）

① $H_0: \mu_1=\mu_2$

② $$u=\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}\sim N\left(0,1\right)$$

③ $u_{1-\frac{\alpha}{2}}=u_{0.975}=1.96$

④ $$u=\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}=\frac{1295-1230-0}{\sqrt{\frac{84^2}{60}+\frac{96^2}{60}}}=3.95$$

⑤ 因为 $u=3.95>1.96$，所以拒绝 H_0。

即认为两厂生产的灯泡寿命有显著差异。