Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Лабораторная работа №3»

Студент 315 группы
В. К. Гаухов

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2021

Содержание

1 Постановка задачи

Получить аппроксимацию преобразования Фурье $F(\lambda)$ при помощи быстрого преобразования Фурье (БПФ) для функций

1. $$f_1(x) = xe^{-2x^2};$$

2. $$f_2(x) = \mathrm{arctg}(3x) - \mathrm{arctg}(2x);$$

3. $$f_3(x) = \frac{1 - \cos(x^3)}{x^5};$$

4. $$f_4(x) = \frac{e^{-2|x|}}{1 + \sin^2(x)}.$$

Построить графики $F(\lambda)$. Вычислить $F(\lambda)$. в явном виде для $f_1(x)$, $f_2(x)$, сравнить графики из аналитического представления и из аппроксимации через БПФ.

Проиллюстрировать эффект наложения спектра и рябь.

Проиллюстрировать устранение эффекта наложения спектра и ряби.

2 Вычисление преобразований Фурье

Преобразование Фурье для $f(x)$ имеет вид:

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\lambda} dx.$$

2.1 Преобразование Фурье для $f_1(x)$

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-ix\lambda} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x e^{-ix\lambda - 2x^2} dx = e^{-\frac{\lambda^2}{8}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x e^{-(\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}i\lambda}{4})^2} dx =$$

$$= \begin{cases} s = \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}i\lambda}{4} \\ ds = \sqrt{2}dx \end{cases} = \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{8}}}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} s e^{-s^2} ds - \frac{i\lambda e^{-\frac{\lambda^2}{8}}}{4\sqrt{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = 0 - \frac{i\lambda e^{-\frac{\lambda^2}{8}}}{4\sqrt{2}} \sqrt{\pi} = -\frac{i\lambda e^{-\frac{\lambda^2}{8}} \sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}}.$$

2.2 Преобразование Фурье для $f_2(x)$

Найдём преобразование Фурье для $h(a, x) = \operatorname{arctg}(ax)$:

$$H(a, \lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{arctg}(ax) e^{-ix\lambda} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\lambda} ax dx \int\limits_{0}^{1} \frac{dt}{1 + a^2x^2t^2} = \frac{1}{a} \int\limits_{0}^{1} \frac{dt}{t^2} G(\lambda). \tag{1}$$

Введём $g(z) = \frac{z}{z^2+c^2}$, $c = \frac{1}{at}$.

$$G(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{z e^{-iz\lambda}}{z^2 + c^2} dz = \begin{cases} 2i\pi \lim\limits_{z \to ci} \dfrac{z e^{-iz\lambda}}{z + ci}, & \lambda > 0 \\ -2i\pi \lim\limits_{z \to -ci} \dfrac{z e^{-iz\lambda}}{z - ci}, & \lambda < 0 \\ 0, & \lambda = 0 \end{cases} = -2i\pi \operatorname{sgn}(\lambda) \frac{ci e^{c|\lambda|}}{2ci} = -i\pi \operatorname{sgn}(\lambda) e^{c|\lambda|}.$$

Подставим в (1) $G(\lambda)$:

$$H(a, \lambda) = -\frac{i\pi \operatorname{sgn}(\lambda)}{a} \int\limits_{0}^{1} \frac{e^{-\frac{|\lambda|}{at}}}{t^2} dt = -\frac{i\pi \operatorname{sgn}(\lambda)}{a} \int\limits_{1}^{\infty} e^{-\frac{|\lambda| t}{a}} dt = -\frac{i\pi \operatorname{sgn}(\lambda)}{|\lambda|} e^{-\frac{|\lambda|}{a}} = -\frac{i\pi}{\lambda} e^{-\frac{|\lambda|}{a}}.$$

Преобразование Фурье для $f_2(x)$ имеет вид:

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(x) e^{-ix\lambda} dx = H(3, \lambda) - H(2, \lambda) = -\frac{i\pi}{\lambda} (e^{-\frac{|\lambda|}{3}} - e^{-\frac{|\lambda|}{2}}).$$

3 Эффект наложения спектра

Наложение спектра возникает из-за конечной длины выборки сигнала. Если частота Найквиста λ_N на выбранной сетке меньше верхней границы спектральной полосы λ_{max}, то по спектру $F_{\Delta t}(\lambda)$ дискретной функции невозможно восстановить спектр $F(\lambda)$ функции непрерывного аргумента: $F(\lambda) \neq F_{\Delta t}(\lambda)H(\lambda)$ при $\lambda_N \neq \lambda_{max}$, где

$$H(\lambda) = \begin{cases} 1 & \lambda \in [-\lambda_N, \lambda_N]; \\ 0 & \lambda \notin [-\lambda_N, \lambda_N] \end{cases}$$

— оконная функция. В этом случае в сумме периодов спектра перекрываются слагаемые $F(\lambda - k/\Delta x)$ и наложение окна на спектр не позволяет получить без погрешностей спектр функции непрерывного аргумента [1].

Рассмотрим $f_1(x)$. Верхняя граница спектра равна $\lambda_{max} = 0.3$, $T = 10$, частота дискретизации равна $\Delta t = 2$. Происходит наложение спектра (Рис. 1).

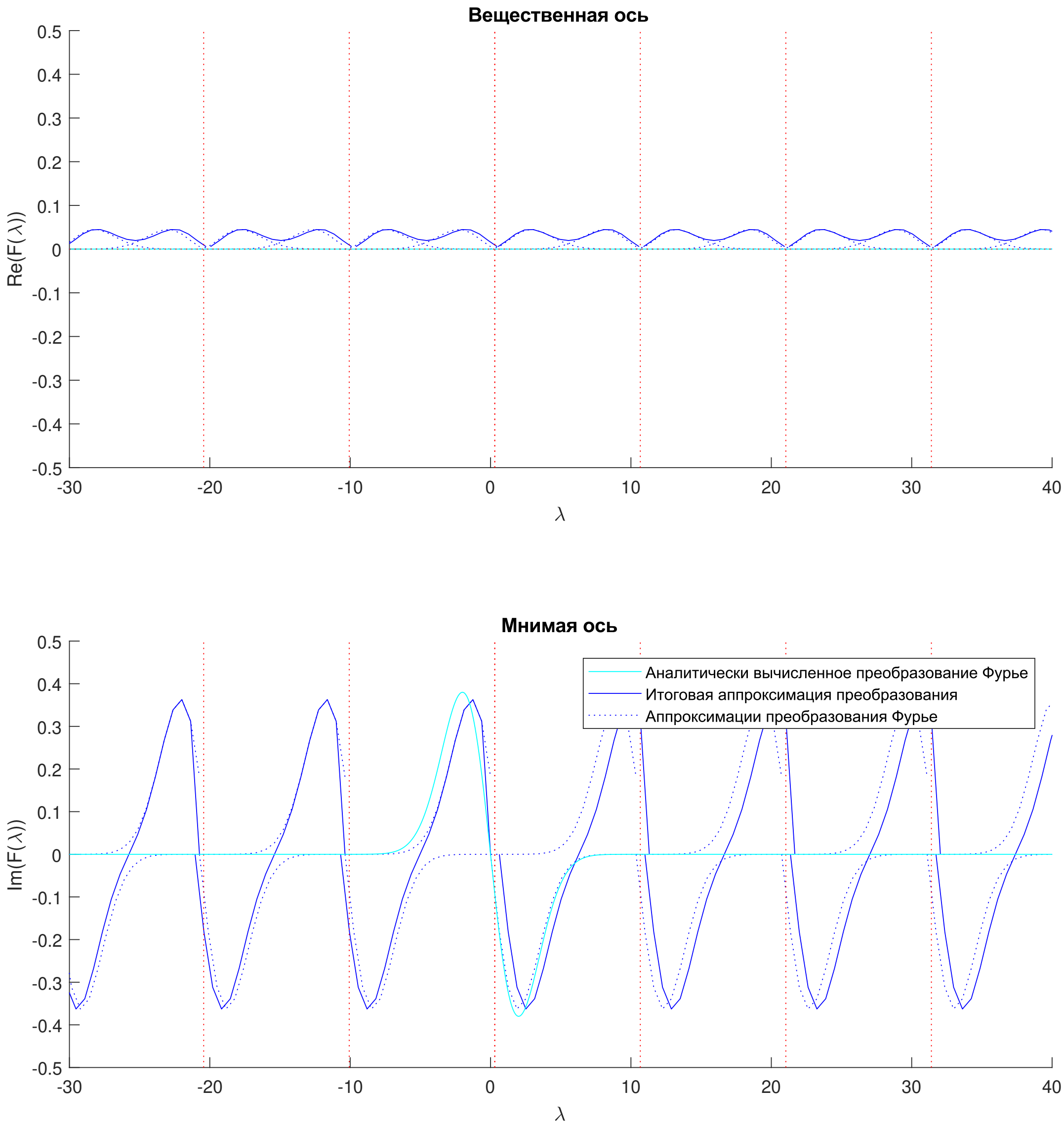

Рис. 1: $T = 10$

Для того чтобы избавиться от наложения спектра, увеличим период до $T = 20$, частота дискретизации будет равна $\Delta t = 1$.Теперь граничная частота Найквиста $\lambda_N = \frac{1}{2\Delta t} > \lambda_{max}$ и наложения спектра не происходит (Рис. 2).

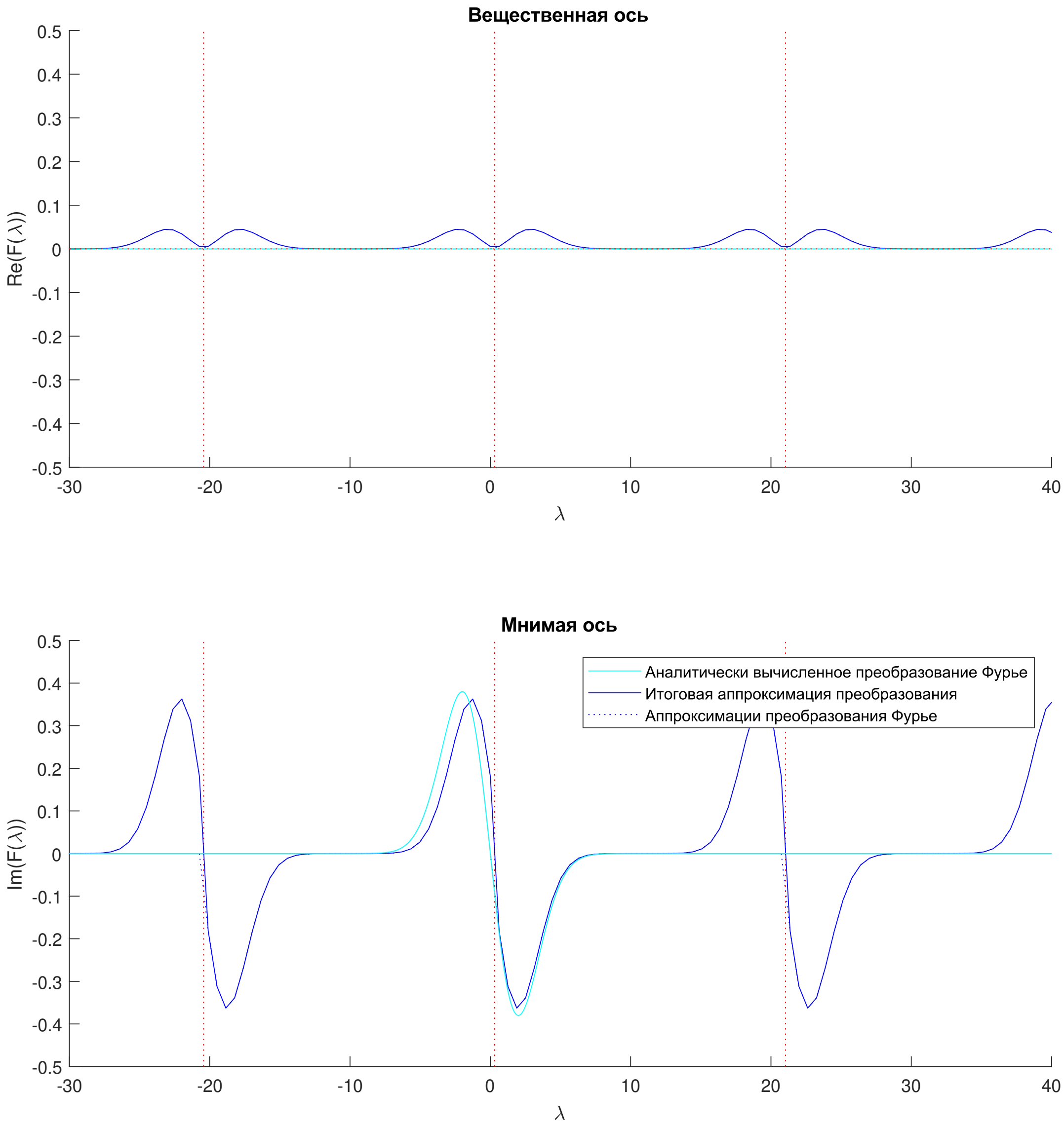
Вещественная ось
Re(F(λ))
λ
Мнимая ось
Im(F(λ))
Аналитически вычисленное преобразование Фурье
Итоговая аппроксимация преобразования
Аппроксимации преобразования Фурье
λ

Рис. 2: $T = 20$

4 Рябь

Рябь возникает из-за усечения сигнала во временной области. Устранить этот эффект нельзя, но можно минимизировать, увеличивая временную область $[a, b]$ или частоту дискретизации сигнала. Рассмотрим функцию $f_2(x)$:

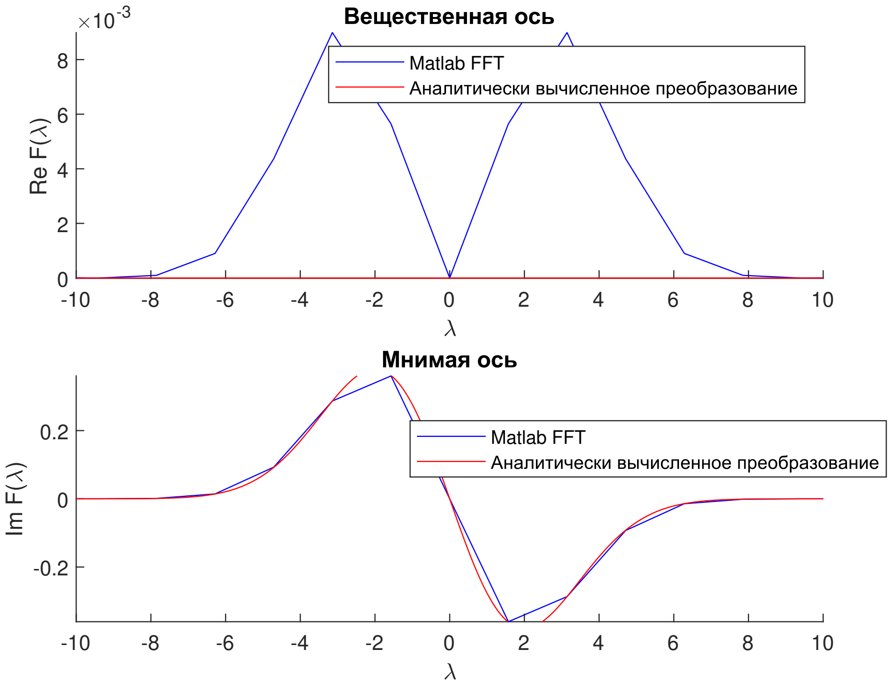

Рис. 3: Преобразование Фурье на отрезке [-5, 5].

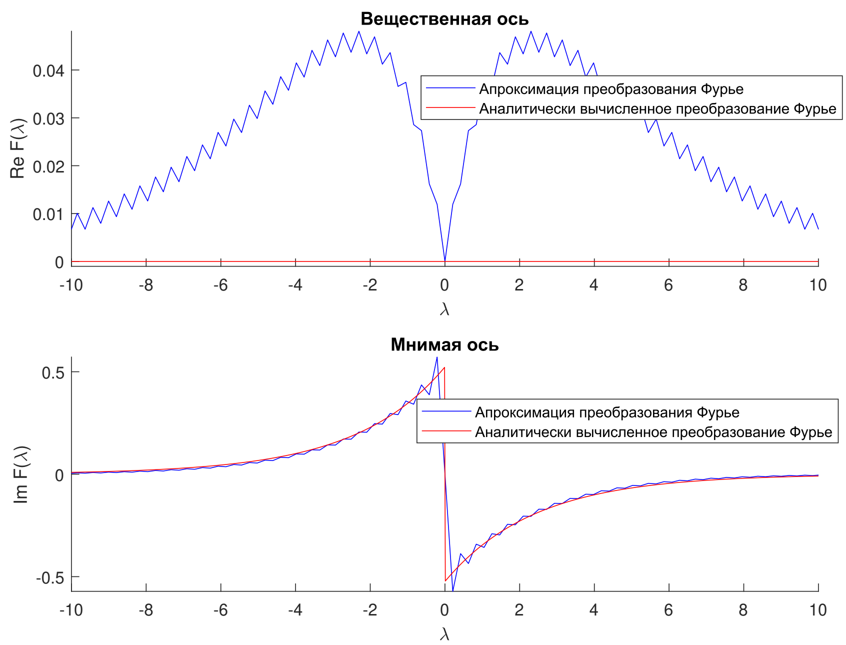

Рис. 4: Преобразование Фурье на отрезке [-15, 15]. Точность приближения увеличилась.

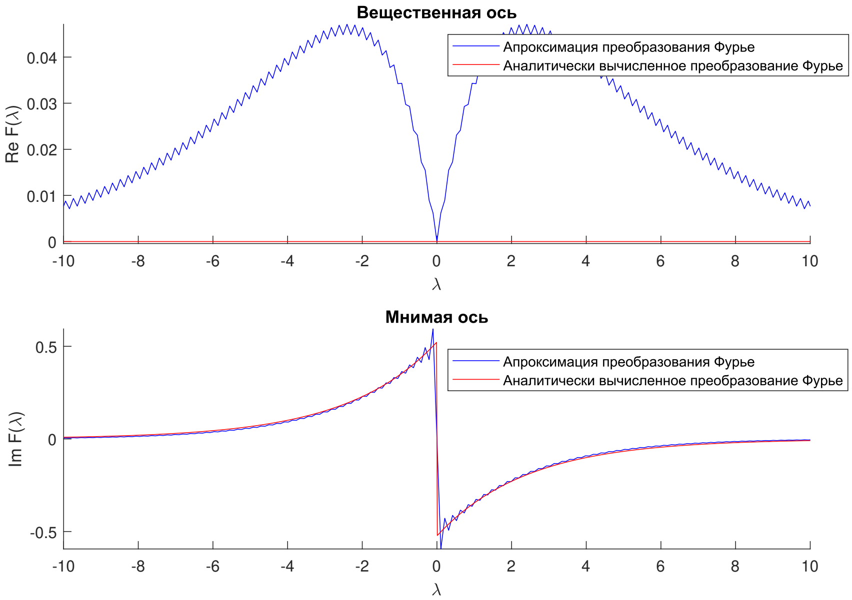

Рис. 5: Преобразование Фурье на отрезке [-30, 30]. Точность приближения ещё увеличилась, но рябь всё еще остаётся.

Список литературы

[1] В. П. Кандидов, С. С. Чесноков, С. А. Шленов. Дискретное преобразование Фурье. Физический факультет МГУ, 2019.