Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Курсовая работа

«Динамические системы с дискретным временем»

Студент 315 группы
В. К. Гаухов

Преподаватель
к.ф.-м.н., доцент И. В. Востриков

Москва, 2022

Содержание

1 Постановка задачи

Даны системы:

$$u_{t+1} = \sqrt{u_t} e^{r(1-u_t^3)}, r > 0, u_t \leqslant 0, \forall t = 0, 1, ...,$$

$$u_{t+1} = \sqrt{u_t} e^{r(1-u_{t-1}^3)}, r > 0, u_t \leqslant 0, \forall t = 0, 1, ...$$

Необходимо:

1. Найти неподвижные точки.
2. Исследовать устойчивость неподвижных точек в зависимости от значений параметров.
3. Проверить существование циклов длиной 2 и 3.
4. В случае существования цикла длиной 3 построить бифуркационную диаграмму.
5. Построить график показателя Ляпунова в зависимости от значений параметра.
6. В случае системы с запаздыванием проверить возможность возникновения бифуркации Неймарка-Сакера.

2 Исследование первой системы

2.1 Неподвижные точки системы

Рассмотрим дискретную динамическую систему:

$$u_{t+1} = f(u_t), u_t \in \mathbb{R}, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \tag{1}$$

или, в других обозначениях:

$$u \mapsto f(u), u \in \mathbb{R}, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}. \tag{2}$$

Определение 1. Множество всевозможных состояний u_t называется *пространством состояний*(или *фазовым пространством* системы (1).

Определение 2. Множество точек $u_t, t = 0, 1, ...$ называется *траекторией* (или *орбитой*) системы (1).

Определение 3. Неподвижными точками системы (1) называются такие точки пространства состояний u^*, что $f(u^*) = u^*$.

Будем исследовать следующую систему:

$$u_{t+1} = \sqrt{u_t}e^{r(1-u_t^3)}, r > 0, u_t \leqslant 0, \forall t = 0, 1, ...,$$

Для нахождения неподвижных точек будем искать точки пересечения графиков $f(u) = \sqrt{u}e^{r(1-u^3)}$ и $g(u) = u$. Легко заметить, что решениями являются $u_1^* = 0$ и $u_2^* = 1$ (Рис. 1). Других решений нет: для $0 < u < 1$ верно, что $e^{r(1-u^3)} > 1 > \sqrt{u}$, для $u > 1$ наоборот — $e^{r(1-u^3)} < 1 < \sqrt{u}$. Значит, вне зависимости от r существуют только две неподвижные точки $u_1^* = 0$ и $u_2^* = 1$.

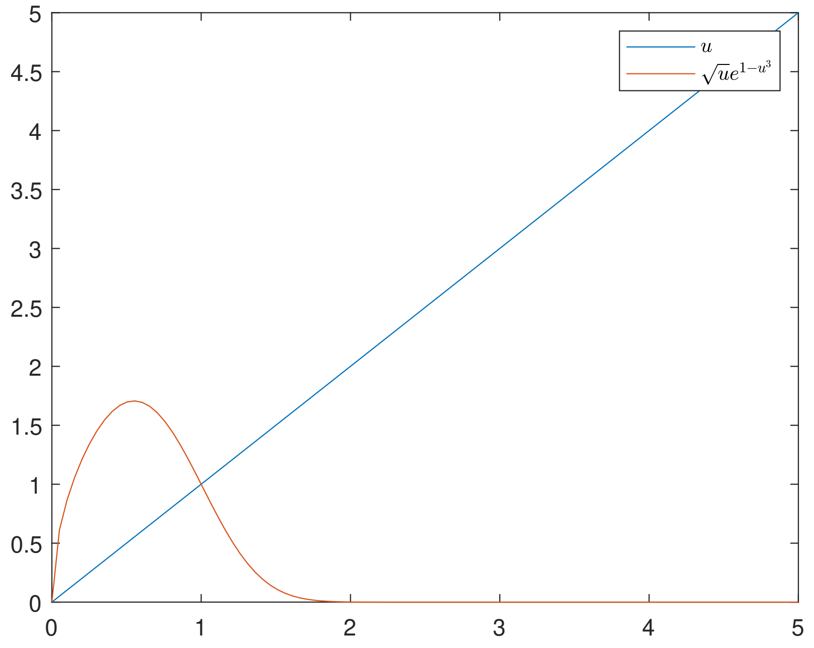

Рис. 1: Графики $f(u)$, $g(u)$.

2.2 Устойчивость неподвижных точек

Определение 4. Неподвижная точка u^* отображения (1) называется *устойчивой по Ляпунову*, если $\forall \epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых начальных данных u_0 из $\delta-$окрестности точки u^* вся траектория системы $u_t, t = 0, 1, ...$ содержится в $\epsilon-$окрестности точки u^*. Если, кроме того, $\lim_{t \to \inf} f(u_t) = u^*$, то точка u^* называется *асимптотически устойчивой.*

Справедливо следующее утверждение:

Утверждение 1. Пусть u^* — неподвижная точка отображения и f обратима в малой окрестности u^*. Тогда u^* асимптотически устойчива, если $|f_u(u^*)| < 1$, и неустойчива, если $|f_u(u^*)| > 1$.

Рассмотрим производную $f_u(u) = \frac{e^{r(1-u^3)}(1-6ru^3)}{2\sqrt{u}}$ в точках u_1^*, u_2^*. Используем утверждение 1 и исследуем их на устойчивость.

1. $u_1^* = 0$:

$$|f_u(u_1^*)| = |\frac{e^r}{2\sqrt{0}}| = +\inf > 1.$$

Следовательно, точка $u_1^* = 0$ является неустойчивой для любого $r > 0$ (Рис. 2).

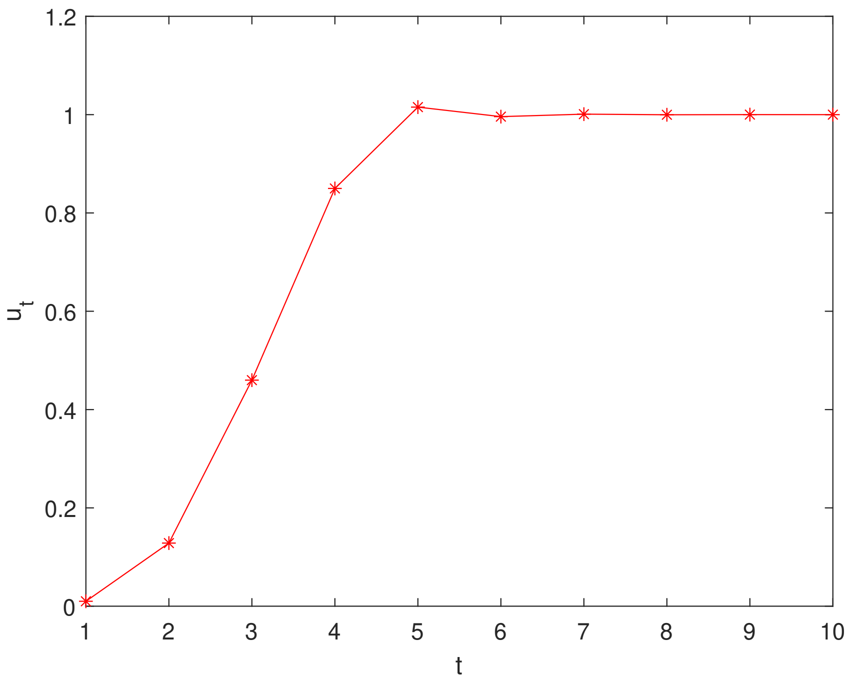

Рис. 2: График зависимости u_t от t. $u_0 = 0.01$, $r = 0.25$. Видно, что траектория устремляется к $u_2^* = 1$.

2. $u_2^* = 1$:

$$|f_u(u_1^*)| = |\frac{1-6r}{2}|.$$

Следовательно, получаем следующие случаи:

- $|f_u(u_2^*)| < 1$, при $0 < r < 0.5 \Rightarrow$ асимптотически устойчивая неподвижная точка (Рис. 3).

- $|f_u(u_2^*)| = 1$, при $r = 0.5 \Rightarrow$ ничего нельзя сказать об устойчивости.
- $|f_u(u_2^*)| > 1$, при $r > 0.5 \Rightarrow$ неустойчивая неподвижная точка (Рис. 4).

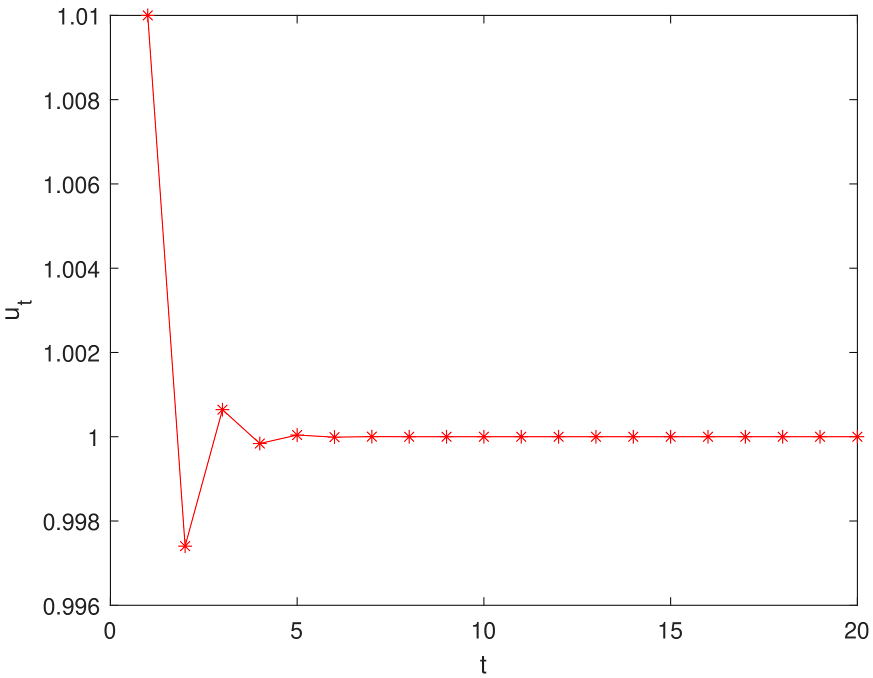

Рис. 3: График зависимости u_t от t. $u_0 = 1.01$, $r = 0.25$. Точка является асимптотически устойчивой.

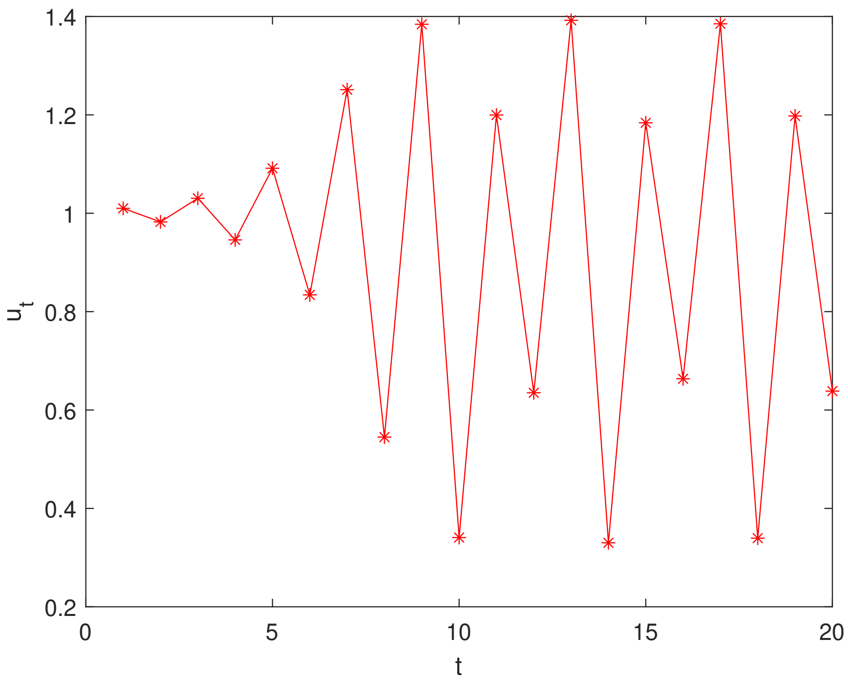

Рис. 4: График зависимости u_t от t. $u_0 = 1.01$, $r = 0.75$. Точка не является асимптотически устойчивой.

2.3 Существование циклов длины 2, 3

Определение 5. *Циклом длины k* системы (1) называется множество различных точек $u_1, u_2, ..., u_k$ таких, что

$$u_2 = f(u_1), ..., u_k = f(u_{k-1}), u_1 = f(u_k).$$

Упорядочим все натуральные числа следующим образом:

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ ... \succ$$

$$\succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ ... \succ$$
$$\succ 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ ... \succ$$
$$\succ ... \succ$$
$$\succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1.$$

Теорема 1. *(Шарковский). Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение, и пусть f имеет цикл длины k. Тогда f имеет цикл длины m для всех таких m, что $k \succ m$ в указанном выше порядке.*

Покажем, что существует цикл длины 3. Для этого найдём решение системы:

$$\begin{cases} f^3(u, r) = u, \\ \frac{df^3(u,r)}{du} = 1, \end{cases} \quad \text{где } f^3 = f \circ f \circ f. \tag{3}$$

Решим систему численно с помощью Matlab. Получим следующие значения: $r = 0.943049, u_1 = 1.621925, u_2 = 0.618031, u_3 = 0.055516$ (Заметим, что результаты согласуются с бифуркационной диаграммой 5). Из существования цикла длины 3 следует существование циклов любой длины (по теореме (2)). Аналогично найдём цикл длины 2 из системы:

$$\begin{cases} f^2(u, r) = u, \\ \frac{df^2(u,r)}{du} = 1, \end{cases} \quad \text{где } f^2 = f \circ f. \tag{4}$$

Получим значения: $r = 0.695, u_1 = 0.499085, u_2 = 1.29817$

2.4 Бифуркационная диаграмма

Определение 6. Две дискретные динамические системы *топологически эквивалентны*, если они имеют равное количество неподвижных точек одинакового характера, расположенных в одинаковом порядке на фазовой прямой. При этом фазовые портреты топологически эквивалентных систем также называются *топологически эквивалентными*.

Определение 7. Появление топологически неэквивалентных фазовых портретов при изменении параметров динамической системы называется *бифуркацией*.

Определение 8. *Бифуркационной диаграммой* динамической системы называется разбиение пространства параметров на максимальные связные подмножества, которые определяются соотношениями топологической эквивалентности и рассматриваются вместе с фазовыми портретами для каждого элемента разбиения.

Построим бифуркационную диаграмму. Будем рассматривать все значения r с начальным значение $r = 0.005$, шагом $\delta = 0.005$ и конечным значением $r = 2$. Для каждого такого r выберем начальное значение u_0, выберем достаточно большое n, на котором система стабилизируется и будем отмечать следующие k точек на графике. На оси абсцисс отмечаются значения r, ординат — полученные значения u. К примеру, можно использовать следующие параметры: $u_0 = 0.1$ или $u_0 = 3, n = 500, k = 100$ (Рис. 5).

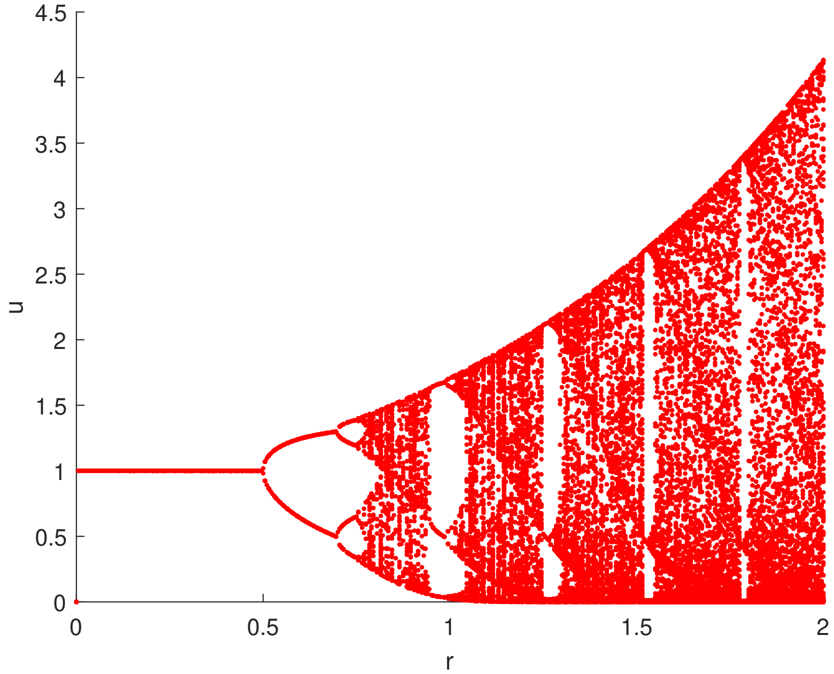

Рис. 5: Бифуркационная диаграмма.

2.5 Показатель Ляпунова

Определение 9. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — гладкое отображение. Показателем Ляпунова траектории $u_1, u_2, ...$ называется величина:

$$h(u_1) = \lim_{n \to \inf} \frac{\ln|f'(u_1)| + \ln|f'(u_2)| + ... + \ln|f'(u_n)|}{n},$$

если этот предел существует.

Определение 10. Орбиту $\{u_i\}_{i=1}^{\inf}$ дискретной системы $u_{t+1} = f(u_t)$ назовём хаотической, если эта орбита ограничена, не стремится к периодической траектории и её показатель Ляпунова $h(u_1)$ больше нуля.

Построим график зависимости показателя Ляпунова от параметра r. Возьмём параметры: $u_0 = 0.1$, r изменяется от значения 0.005 до 2 с шагом $\Delta = 0.005$, $n = 1000$ (Рис. 6).

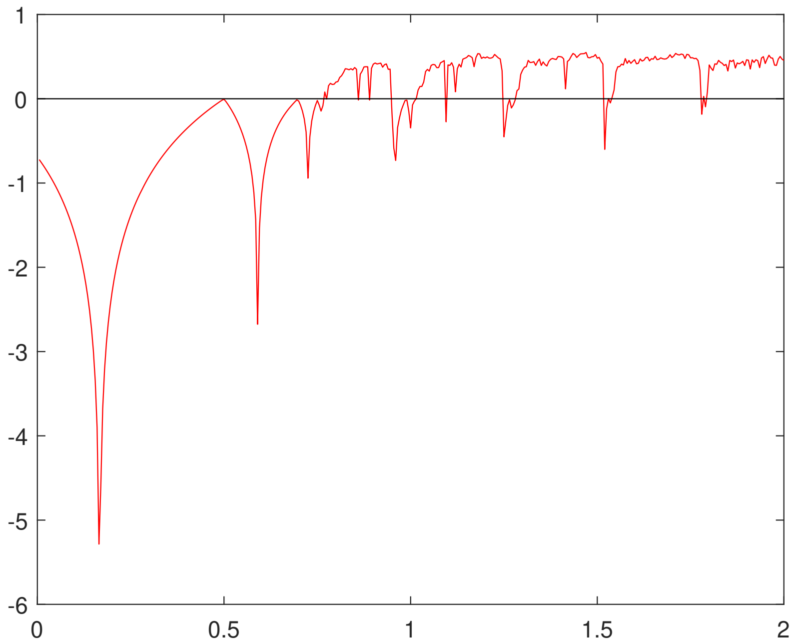

Рис. 6: Зависимость показателя Ляпунова от параметра r.

Показатель Ляпунова является легко вычислимым признаком хаотического поведения. Если $h(u) > 0$, то близкие траектории разбегаются, и в системе может наблюдаться хаотическое поведение. Из графика видно, что на некоторых интервалах в системе наблюдается хаотическое поведение. Интервалы с $h(u) < 0$ соответствуют циклам с небольшим периодом.

3 Исследование второй системы

3.1 Неподвижные точки системы

Рассмотрим систему с запаздыванием:

$$u_{t+1} = \sqrt{u_t} e^{r(1-u_{t-1}^3)}, r > 0, u_t \leqslant 0, \forall t = 0, 1, ...,$$

Перепишем её в другом виде, чтобы избавиться от запаздывания:

$$\begin{cases} u_{t+1} = f(u_t, v_t) = \sqrt{u_t} e^{r(1-v_t^3)}, \\ v_{t+1} = g(u_t, v_t) = u_t. \end{cases} \tag{5}$$

Определение 11. Точка $u^* \in \mathbb{R}$ является *неподвижной точкой* системы

$$u_{t+1} = f(u_t, u_{t-1}), u_t \in \mathbb{R}, f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

если $f(u^*, u^*) = u^*$.

Задача сводится нахождению решений следующей системы:

$$\begin{cases} u^* = \sqrt{u^*} e^{r(1-u^{*3})}, \\ u^* = u^*. \end{cases} \tag{6}$$

Второе уравнение обращается в тождество, а первое уравнение было рассмотрено при исследовании первой системы. Получим неподвижные точки: $u_1 = (0, 0), u_2 = (1, 1)$.

3.2 Устойчивость неподвижных точек

Теорема 2. *Пусть дана динамическая система с дискретным временем:*

$$u_{t+1} = f(u_t), u_t \in \mathbb{R}^n, f \text{ — гладкое отображение } \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Тогда неподвижная точка u^* асимптотически устойчива, если все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ матрицы Якоби функции $f(u)$, вычисленные в точке u^*, таковы, что $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, ..., n$. Если хотя бы одно собственное значение λ_i таково, что $|\lambda_i| > 1$, то неподвижная точка u^* неустойчива.

Рассмотрим матрицу Якоби для системы (5):

$$J(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{e^{r(1-v^3)}}{2\sqrt{u}} & -3rv^2\sqrt{u}e^{r(1-v^3)} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. $u_1 = (0, 0)$.
   Значение матрицы Якоби в этой точке не определено. Об устойчивости точки u_1 ничего нельзя сказать.

2. $u_2 = (1, 1)$:
   $$J(1, 1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -3r \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
   Найдём собственные значения матрицы:
   $$det(J(1, 1) - \lambda I) = det(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -3r \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}) = \lambda^2 - \frac{\lambda}{2} + 3r.$$
   Получим корни: $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-48r}}{4}$.

   - При $0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{48}$ имеем два вещественных корня, и $|\lambda_i| < 1, i = 1, 2$. Из теоремы (2) следует, что точка u_2 является асимптотически устойчивой(Рис. 7).
   - При $r > \frac{1}{48}$ имеем два комплексных корня, и $|\lambda_i| = \sqrt{3r}$. Значит, при $\frac{1}{48} < r < \frac{1}{3}$ точка u_2 является асимптотически устойчивой(Рис. 8). При $r > \frac{1}{3}$ — неустойчивой(Рис. 9).

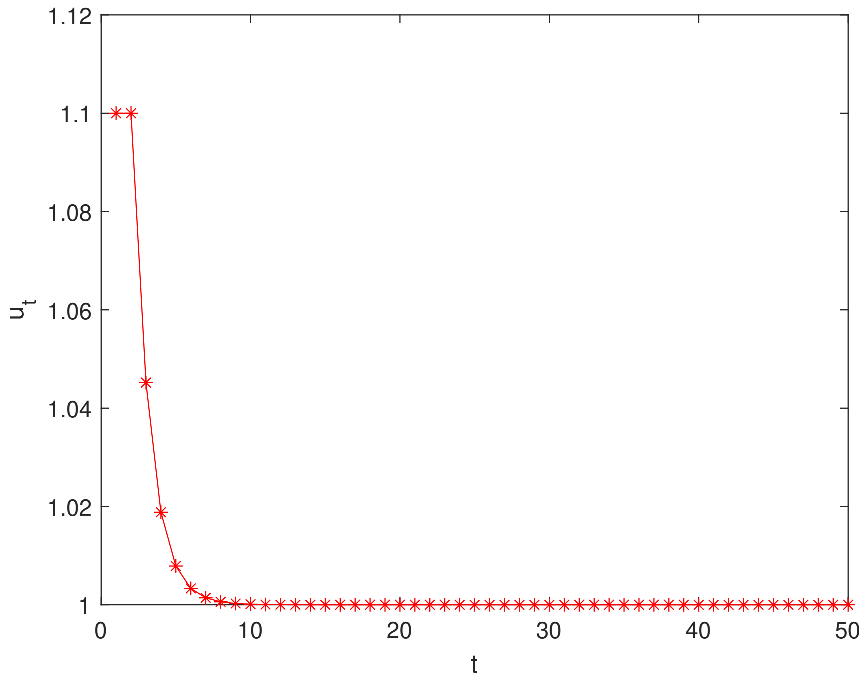

Рис. 7: График зависимости u_t от r. $r = \frac{1}{96}, u_0 = u_1 = 1.1$.

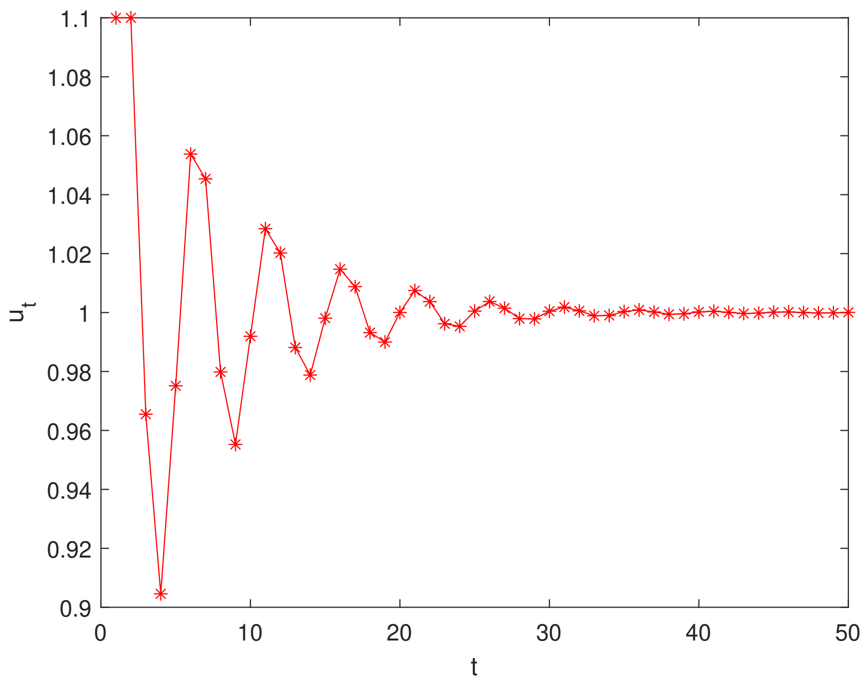

Рис. 8: График зависимости u_t от r. $r = \frac{1}{4}, u_0 = u_1 = 1.1$.

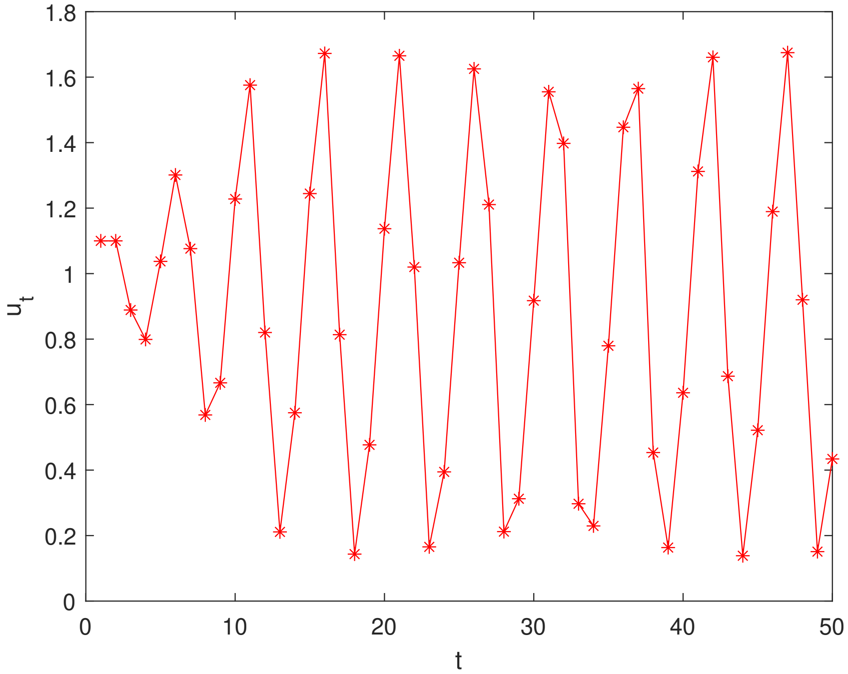

Рис. 9: График зависимости u_t от r. $r = \frac{1}{2}, u_0 = u_1 = 1.1$.

3.3 Существование циклов длины 2 и 3

Проверим существование цикла длины 2. Для этого решим систему:

$$\begin{cases} f(u,v) = \sqrt{u}e^{r(1-v^3)}, \\ g(u,v) = u, \\ f(f(u,v),g(u,v)) = u, \\ g(f(u,v),g(u,v)) = v. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\sqrt{u}e^{r(1-v^3)}}e^{r(1-u^3)} = u, \\ \sqrt{u}e^{r(1-v^3)} = v. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{r(3-v^2e^{-6r(1-v^3)}-2v^3)} = v^{1.5}, \\ u = v^2e^{-2r(1-v^3)}. \end{cases}$$

Заметим, что $f_1(v) = e^{r(3-v^2e^{-6r(1-v^3)}-2v^3)}$ — монотонно убывающая функция, а $f_2(v) = v^{1.5}$ — монотонно возрастающая функция. Значит, уравнение имеет один корень $v^* = 1$. Но пара $(u,v) = (1,1)$ является неподвижной точкой. Следовательно, цикл длины 2 не может быть образован. Но тогда из теоремы (2) следует, что цикла длины 3 (и всех промежуточных) не существует.

3.4 Бифуркация Неймарка-Сакера

Определение 12. Бифуркацией положения равновесия в системе (5), соответствующая появлению собственных значений $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1, \lambda_1 = \bar{\lambda_2}$, называется бифуркацией Неймарка-Сакера.

Условия для бифуркации Неймарка-Сакера выполняются только для значения $r = \frac{1}{3}$. При этом установлено, что для $r < \frac{1}{3}$ точка $(1,1)$ является асимптотически устойчивой, а для $r > \frac{1}{3}$ — неустойчивой. Из графика (Рис. 10) видно, что траектории из окрестности точки $(1,1)$ медленно сходятся к этой точке.

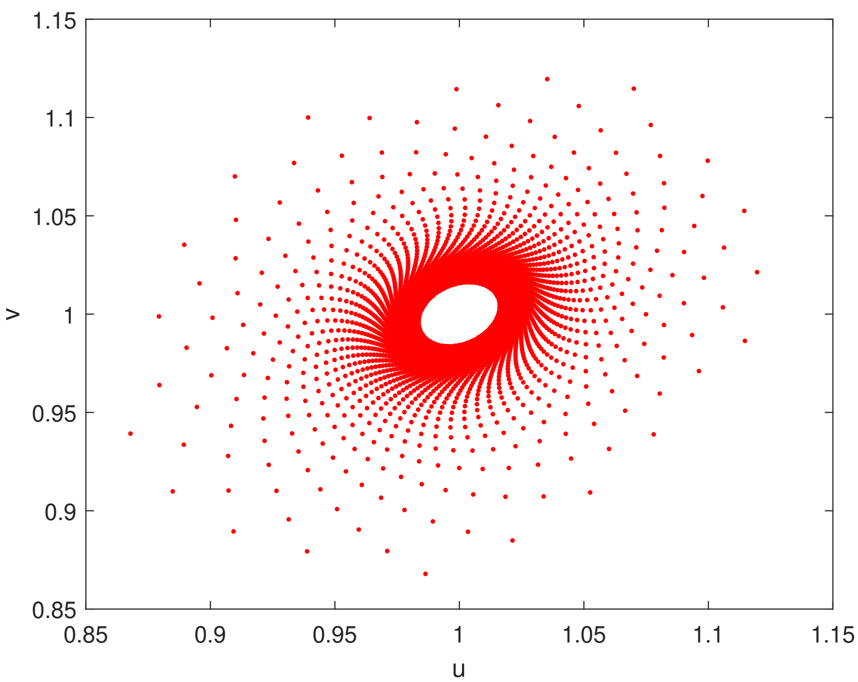

Рис. 10: Траектории в окрестности точки $(1,1)$ при $r = \frac{1}{3}$.

При $r < \frac{1}{3}$ точка $(1,1)$ также является устойчивой (Рис. 11).

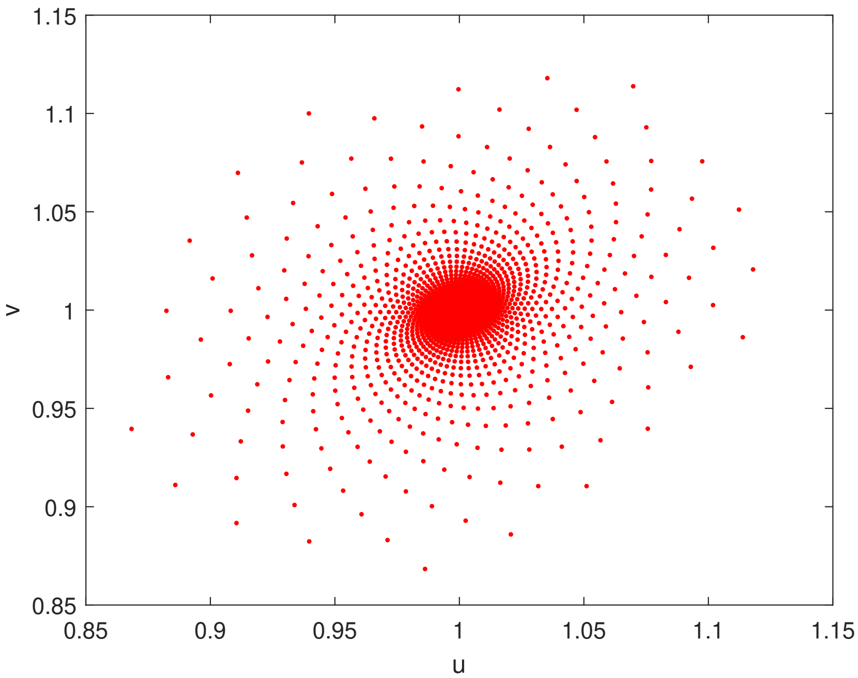

Рис. 11: Траектории в окрестности точки $(1,1)$ при $r = \frac{1}{3} - 0.001$.

При $r > \frac{1}{3}$ точка $(1,1)$ является неустойчивой. При выборе достаточно близкого начального приближения траектории будут ограничены замкнутой инвариантной кривой (Рис. 12) и стремятся к ней при $t \to \inf$. Для начального приближения вне кривой будет происходить обратная ситуация — кривая будет ограничивать внутреннюю область (Рис. 13). Таким образом, происходит *мягкая* потеря устойчивости, а бифуркация системы является *суперкритической*.

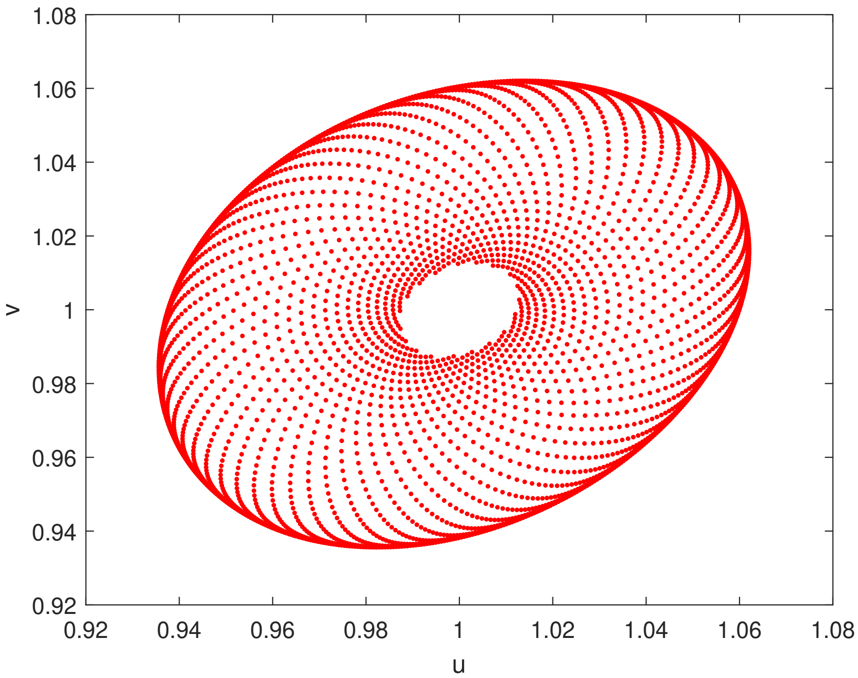

Рис. 12: Траектории в малой окрестности точки $(1,1)$ при $r = \frac{1}{3} + 0.001$.

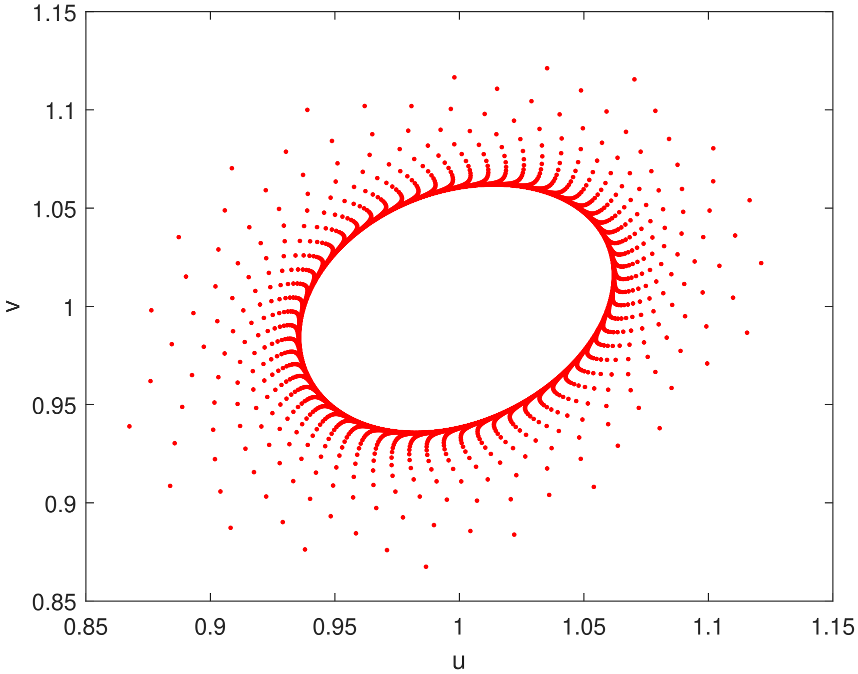

Рис. 13: Траектории вне кривой при $r = \frac{1}{3} + 0.001$.

Список литературы

[1] А. С. Братусь, А. С. Новожилов, А. П. Платонов. Динамические системы и модели биологии. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.