Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Курсовая работа

«Исследование нелинейных динамических систем на плоскости»

Студент 315 группы
В. К. Гаухов

Преподаватель
к.ф.-м.н., доцент И. В. Востриков

Москва, 2022

Содержание

1 Постановка задачи

Дана система уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{ax^2(K-x)}{K(N+x)} - bxy, \\ \dot{y} = -cy + dxy, \end{cases} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+; K, N, a, b, c, d > 0. \tag{1}$$

Необходимо:

1. Дать биологическую интерпретацию характеристик системы.

2. Ввести новые безразмерные переменные, максимально уменьшив число входящих параметров. Выбрать два свободных параметра. Если число параметров больше двух, то считать остальные параметры фиксированными.

3. Найти неподвижные точки системы и исследовать их характер в зависимости от значений параметров. Результаты исследования представить в виде параметрического портрета системы.

4. Для каждой характерной области параметрического портрета построить фазовый портрет. Дать характеристику поведения системы в каждом из этих случаев.

5. Исследовать возможность возникновения предельного цикла. В положительном случае найти соответствующее первое ляпуновское число. Исследовать характер предельного цикла (устойчивый, неустойчивый, полуустойчивый).

6. Дать биологическую интерпретацию полученным результатам.

2 Биологическая интерпретация системы

Система является моделью "хищник-жертва где x — численность жертв, а y — численность хищников. Жертвы являются автотрофами и питаются за счёт некоторого биологического ресурса, не связанного с системой. Хищники являются гетеротрофами и питаются жертвами.

- Параметр K характеризует биологическую ёмкость системы. Если численность жертв достигает значения К, то размножение жертв прекращается.
- Параметр N характеризует резкое уменьшение скорости роста популяции при $x \ll N$.
- Параметр a характеризует скорость размножения жертв.
- Параметр b характеризует скорость истребления жертв хищниками.
- Параметр c характеризует скорость вымирания хищников в отсутствии жертв.
- Параметр d характеризует эффективность поедания жертв хищниками.

3 Введение безразмерных параметров

Пусть $x = Au$, $y = Bv$, $t = T\tau$. Тогда система (1) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{A\dot{u}}{T} = \frac{aA^2u^2(K-Au)}{K(N+Au)} - bAuBv, \\ \frac{B\dot{v}}{T} = -cBv + dAuBv. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = \frac{aTu^2}{\frac{N}{A}+u}(1 - \frac{A}{K}u) - bTBuv, \\ \dot{v} = -cTv + dATuv. \end{cases} \tag{2}$$

Пусть $dAB = bTB = \frac{N}{A} = 1$. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{\frac{a}{dN}u^2}{1+u}(1 - \frac{A}{K}u) - uv, \\ \dot{v} = -\frac{c}{dN}v + uv. \end{cases} \tag{3}$$

Сделаем замену переменных: $\alpha = \frac{a}{dN}, \beta = \frac{A}{K}, \gamma = \frac{c}{dN}$. Получим систему:

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{\alpha u^2}{1+u}(1 - \beta u) - uv, \\ \dot{v} = -\gamma v + uv. \end{cases} \tag{4}$$

Зафиксируем параметр $\beta = 1$. Будем исследовать систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\alpha x^2}{1+x}(1 - x) - xy, \\ \dot{y} = -\gamma y + xy. \end{cases} \tag{5}$$

4 Исследование неподвижных точек

4.1 Поиск неподвижных точек

Определение 1. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется неподвижной точкой динамической системы $\dot{x_i} = f_i(x_1, ..., x_n), i = \overline{1, n}, f = (f_1, ..., f_n)$, если $f(x_0) = 0$.

Для нахождения неподвижных точек решим систему:

$$\begin{cases} \frac{\alpha x^2}{1+x}(1-x) - xy = 0, \\ -\gamma y + xy = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Из второго уравнения следует, что должно выполняться $y = 0$ или $x = \gamma$.

- Если $y = 0$, то из первого уравнения следует, что $x = 0$ или $x = 1$. Получим точки $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$.
- Если $y \neq 0$, то $x = \gamma$. Тогда из первого уравнения следует, что $y = \frac{a\gamma(1-\gamma)}{1+\gamma}$. Но численность популяции не может стать отрицательной, поэтому эта точка существует только при $\gamma \in (0, 1)$. Для этих параметров получим неподвижную точку $P_3 = (\gamma, \frac{a\gamma(1-\gamma)}{1+\gamma})$.

4.2 Устойчивость неподвижных точек

Теорема 1. *Пусть u^* - положение равновесия, а $J(u)$ - матрица Якоби исследуемой динамической системы. Тогда неподвижная точка u^* асимптотически устойчива, если все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ матрицы Якоби, вычисленные в точке u^*, таковы, что $Re(\lambda_i) < 0$, $i = 1, ..., n$. Если хотя бы одно собственное значение λ_i таково, что $Re(\lambda_i) > 0$, то неподвижная точка u^* неустойчива.*

Рассмотрим матрицу Якоби системы (9):

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} -2ax\frac{x^2+x-1}{(1+x)^2} - y & -x \\ y & x - \gamma \end{bmatrix}.$$

4.2.1 $P_1 = (0, 0)$

$$J(P_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix}.$$

Найдём собственные значения:

$$\det(J(P_1) - \lambda I) = \det(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda - \gamma \end{bmatrix}) = \lambda(\lambda + \gamma).$$

Получим значения $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\gamma$. $Re(\lambda_1) \geqslant 0$, поэтому теорема (1) неприменима.

4.2.2 $P_2 = (1, 0)$

$$J(P_2) = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & 1 - \gamma \end{bmatrix}.$$

Найдём собственные значения:

$$\det(J(P_2) - \lambda I) = \det(\begin{bmatrix} -\lambda - \frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & -\lambda + 1 - \gamma \end{bmatrix}) = (\lambda + \frac{\alpha}{2})(\lambda - 1 + \gamma).$$

Получим значения $\lambda_1 = -\frac{\alpha}{2}, \lambda_2 = 1-\gamma$. $\alpha > 0$, поэтому $\lambda_1 < 0$. Получим следующие случаи:

- $\gamma \in (0,1)$. Тогда $\lambda_2 > 0$ и точка P_2 является неустойчивым седлом.
- $\gamma = 1$. Тогда $\lambda_2 = 0$ и происходит бифуркация "седло-узел".
- $\gamma > 1$. Тогда $\lambda_2 < 0$ и точка P_2 является устойчивым узлом.

4.2.3 $P_3 = (\gamma, \frac{\alpha\gamma(1-\gamma)}{1+\gamma})$

$$J(P_3) = \begin{bmatrix} -\alpha\gamma\frac{\gamma^2+2\gamma-1}{(\gamma+1)^2} & -\gamma \\ \frac{\alpha\gamma(1-\gamma)}{1+\gamma} & 0 \end{bmatrix}.$$

Найдём собственные значения:

$$\det(J(P_3)-\lambda I) = \det(\begin{bmatrix} -\lambda-\alpha\gamma\frac{\gamma^2+2\gamma-1}{(\gamma+1)^2} & -\gamma \\ \frac{\alpha\gamma(1-\gamma)}{1+\gamma} & -\lambda \end{bmatrix}) = \lambda^2 + \alpha\gamma\lambda\frac{\gamma^2+2\gamma-1}{(\gamma+1)^2} + \alpha\gamma^2\frac{1-\gamma}{1+\gamma}.$$

Для удобства, введём след матрицы и определитель:

$$\operatorname{Tr} J = -\alpha\gamma\frac{\gamma^2+2\gamma-1}{(\gamma+1)^2},$$

$$\det J = \alpha\gamma^2\frac{1-\gamma}{1+\gamma}.$$

Тогда собственные значения будут иметь вид:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{Tr} J \pm \sqrt{(\operatorname{Tr} J)^2 - 4\det J}}{2}.$$

Заметим, что $\det J > 0, \forall\gamma \in (0,1)$, поэтому знак вещественной части λ_1 совпадает со знаками λ_2 и $\operatorname{Tr} J$. Значит, $\operatorname{sgn}(Re(\lambda_1)) = \operatorname{sgn}(Re(\lambda_2)) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Tr} J) = -\operatorname{sgn}(\gamma^2+2\gamma-1)$. Поэтому вещественная часть собственных значений положительна при $\gamma \in (0, -1+\sqrt{2})$ и отрицательна при $\gamma \in (-1+\sqrt{2}, 1)$. Рассмотрим знак подкоренного выражения:

$$(\operatorname{Tr} J)^2 - 4\det J = \frac{\alpha\gamma^2}{\gamma+1}(\alpha\frac{(\gamma^2+2\gamma-1)^2}{(\gamma+1)^3} - 4(1-\gamma)).$$

Следовательно, собственные значения будут вещественными при $\alpha \geqslant 4\frac{(1-\gamma)(\gamma+1)^3}{(\gamma^2+2\gamma-1)^2}$ и комплексными при $\alpha < 4\frac{(1-\gamma)(\gamma+1)^3}{(\gamma^2+2\gamma-1)^2}$.

В результате получим следующие случаи:

1. $\begin{cases} \gamma \in (0, -1+\sqrt{2}), \\ \alpha \geqslant 4\frac{(1-\gamma)(\gamma+1)^3}{(\gamma^2+2\gamma-1)^2}. \end{cases}$ $\Rightarrow$ точка P_3 является неустойчивым узлом.

2. $\begin{cases} \gamma \in (-1+\sqrt{2}, 1), \\ \alpha \geqslant 4\frac{(1-\gamma)(\gamma+1)^3}{(\gamma^2+2\gamma-1)^2}. \end{cases}$ $\Rightarrow$ точка P_3 является устойчивым узлом.

3. $\begin{cases} \gamma \in (0, -1+\sqrt{2}), \\ \alpha \leqslant 4\frac{(1-\gamma)(\gamma+1)^3}{(\gamma^2+2\gamma-1)^2}. \end{cases}$ $\Rightarrow$ точка P_3 является неустойчивым фокусом.

4. $\begin{cases} \gamma \in (-1+\sqrt{2}, 1), \\ \alpha \leqslant 4\frac{(1-\gamma)(\gamma+1)^3}{(\gamma^2+2\gamma-1)^2}. \end{cases}$ $\Rightarrow$ точка P_3 является устойчивым фокусом.

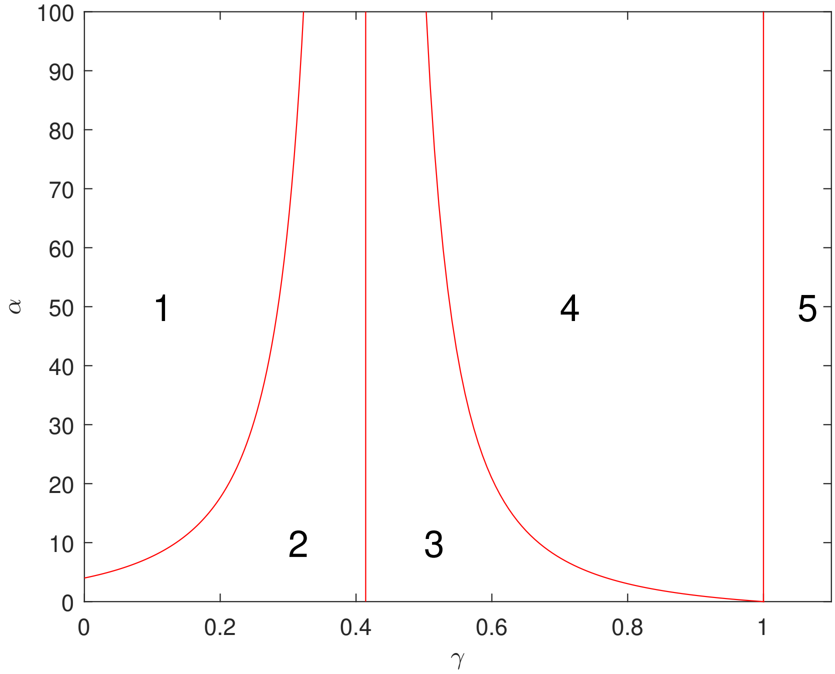

Рис. 1: Параметрический портрет

5 Фазовые портреты

Построим фазовые портреты для каждой из областей.

1. Возьмём $\alpha = 20, \gamma = 0.2$. Точка P_2 является неустойчивым седлом, P_3 - неустойчивым узлом (Рис. 2).

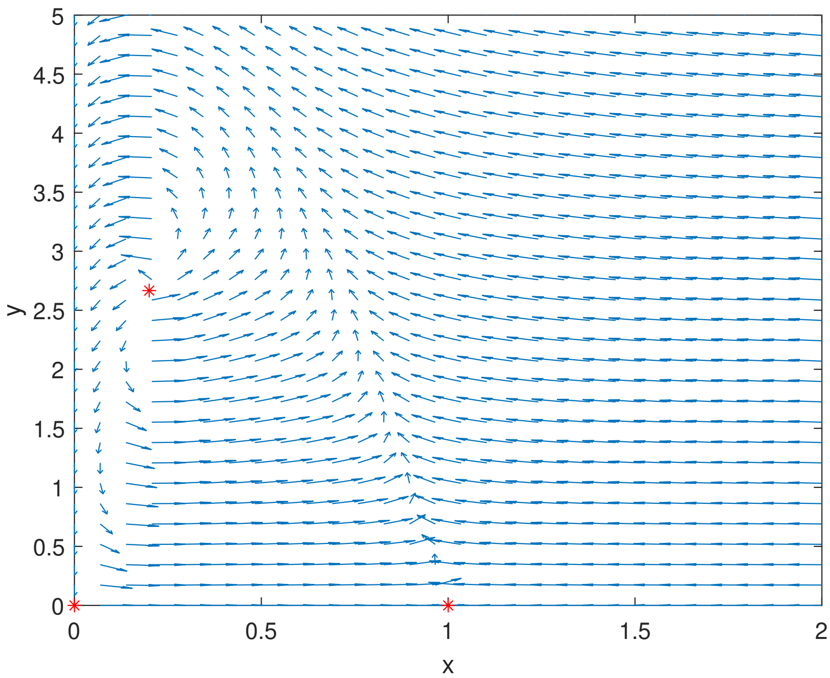

Рис. 2: Фазовый портрет. $\alpha = 20, \gamma = 0.2$.

2. Возьмём $\alpha = 10, \gamma = 0.2$. Точка P_2 является неустойчивым седлом, P_3 - неустойчивым фокусом (Рис. 3).

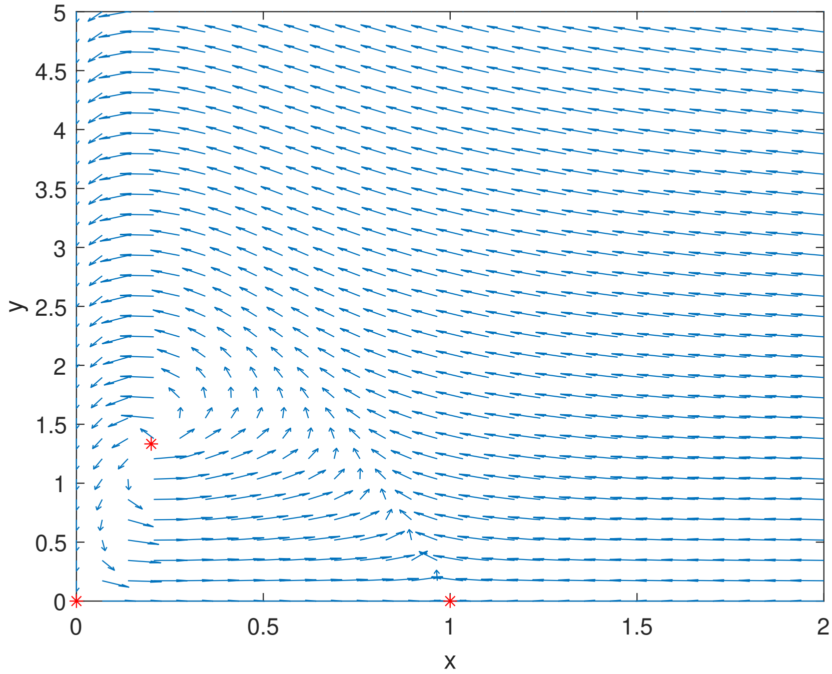

Рис. 3: Фазовый портрет. $\alpha = 10, \gamma = 0.2$.

3. Возьмём $\alpha = 20, \gamma = 0.45$. Точка P_2 является неустойчивым седлом, P_3 - устойчивым фокусом (Рис. 4).

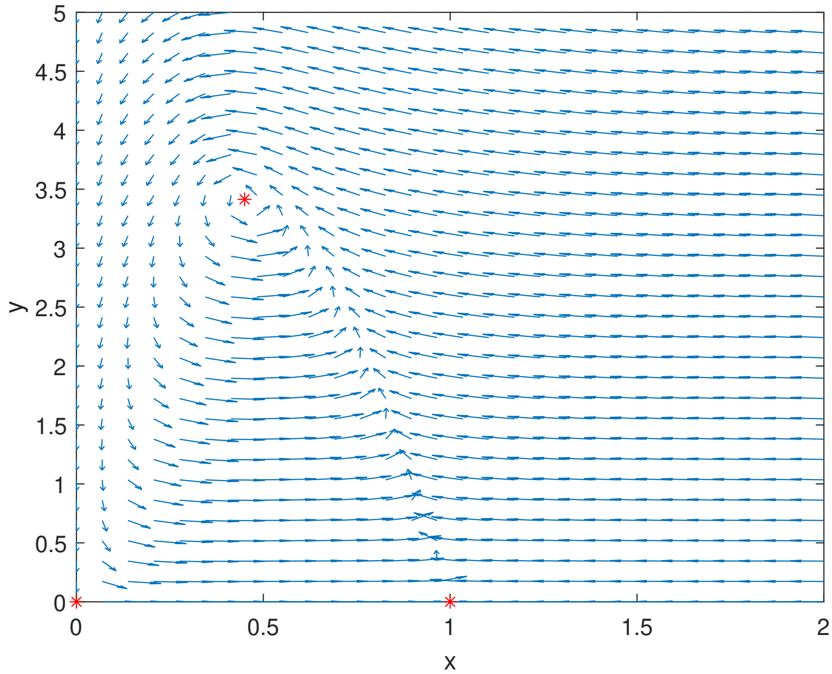

Рис. 4: Фазовый портрет. $\alpha = 20, \gamma = 0.45$.

4. Возьмём $\alpha = 30, \gamma = 0.7$. Точка P_2 является неустойчивым седлом, P_3 - устойчивым узлом (Рис. 5).

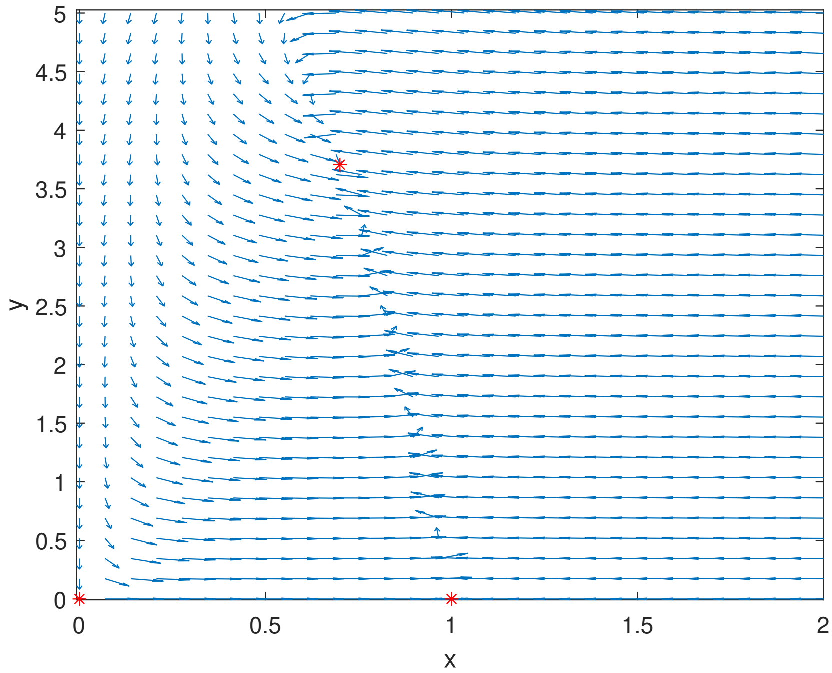

Рис. 5: Фазовый портрет. $\alpha = 30, \gamma = 0.7$.

5. Возьмём $\alpha = 20, \gamma = 1.1$. Точка P_2 является устойчивым узлом (Рис. 6).

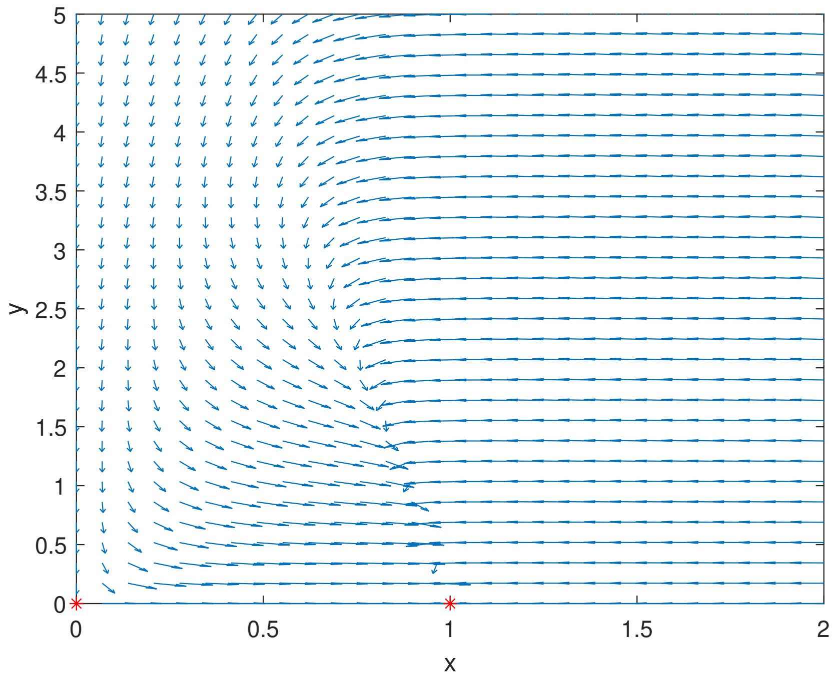

Рис. 6: Фазовый портрет. $\alpha = 20, \gamma = 1.1$.

6 Возникновение предельного цикла

Определение 2. Бифуркация положения равновесия, соответствующая появлению собственных чисел $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$, называется бифуркацией Пуанкаре-Андронова-Хопфа или бифуркацией рождения цикла.

Рассмотрим систему, которая при $\alpha = 0$ имеет положение равновесия $u = 0$ с собственными числами $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$. Без потери общности предположим систему в виде

$$\dot{u} = A(\alpha)u + F(u;\alpha),$$

где F - вектор-функция, имеющая разложение в ряд Тейлора, начинающееся по крайней мере с квадратичных членов. $p(\alpha), q(\alpha)$ - собственные вектора $A(\alpha)$.

Теорема 2. *Любая двумерная однопараметрическая система $\dot{u} = f(u;\alpha)$, имеющая при достаточно малых $|\alpha|$ положение равновесия $u = 0$ с собственными числами $\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha), \mu(0) = 0, \omega(0) = \omega_0 > 0$ и удовлетворяющая условиям невырожденности*

$$\frac{d}{d\alpha}\mu(\alpha)\bigg|_{\alpha=0} \neq 0, \tag{7}$$

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0} Re(ig_{20}(0)g_{11}(0) + \omega_0 g_{21}(0)) \neq 0, \tag{8}$$

где

$$g_{kl}(\alpha) = \frac{\delta^{k+l}}{\delta z^k \delta \bar{z}^l} \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha)) \rangle\bigg|_{z=\bar{z}=0}$$

в окрестности начала координат локально топологически эквивалентна одной из двух динамических систем

$$\dot{v_1} = \alpha v_1 - v_2 + \operatorname{sgn} l_1(0) v_1(v_1^2 + v_2^2),$$
$$\dot{v_2} = v_1 + \alpha v_2 + \operatorname{sgn} l_1(0) v_2(v_1^2 + v_2^2).$$

Собственные значения вида $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ возникают только в точке P_3 при $\gamma = sqrt(2) - 1 = \gamma_{cr}$. Проверим первое условие невырожденности:

$$\frac{d}{d\gamma}\mu(\gamma)\bigg|_{\gamma=0} = -\frac{\alpha}{2(\gamma+1)^3}(\gamma^3 + 3\gamma^2 + 5\gamma - 1)\bigg|_{\gamma=\sqrt{2}-1} = \alpha(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1).$$

Зафиксируем $\gamma = \gamma_{cr}$. Сделаем сдвиг координат с помощью введения новых переменных:

$$x = x_1 + \gamma,$$

$$y = y_1 + \alpha\gamma\frac{1-\gamma}{1+\gamma}.$$

В новых координатах точка P_3 будет иметь координаты $(0,0)$. Для удобства оставим название переменных в начальном виде. Система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\alpha(x+\gamma)^2}{1+x+\gamma}(1 - x - \gamma) - (x+\gamma)(y + \alpha\gamma\frac{1-\gamma}{1+\gamma}), \\ \dot{y} = x(y + \alpha\gamma\frac{1-\gamma}{1+\gamma}). \end{cases} \tag{9}$$

Матрица Якоби при $\gamma = \sqrt(2) - 1$ имеет вид:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1-\sqrt{2} \\ \alpha(3-2\sqrt{2}) & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha(\sqrt{2}-1)^3}$. Им соответствуют собственные вектора p, q матриц J, J^T, нормированные так, чтобы $\langle p, q \rangle = \bar{p_1}q_1 + \bar{p_2}q_2 = 1$ и $\langle \bar{p}, q \rangle = 0$:

$$p = \begin{bmatrix} \frac{i}{2\sqrt{\alpha(\sqrt{2}-1)}} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$q = \begin{bmatrix} i\sqrt{\alpha(\sqrt{2}-1)} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислим коэффициенты g_{20}, g_{11}, g_{21} и первое ляпуновское число l_1 с помощью Matlab. Получим следующий результат:

$$l_1(0) = -a(1.243a + 1.207)$$

$l_1(0) < 0$, $\forall \alpha > 0$, следовательно, бифуркация суперкритическая (мягкая), с рождением единственного устойчивого предельного цикла (Рис. 7).

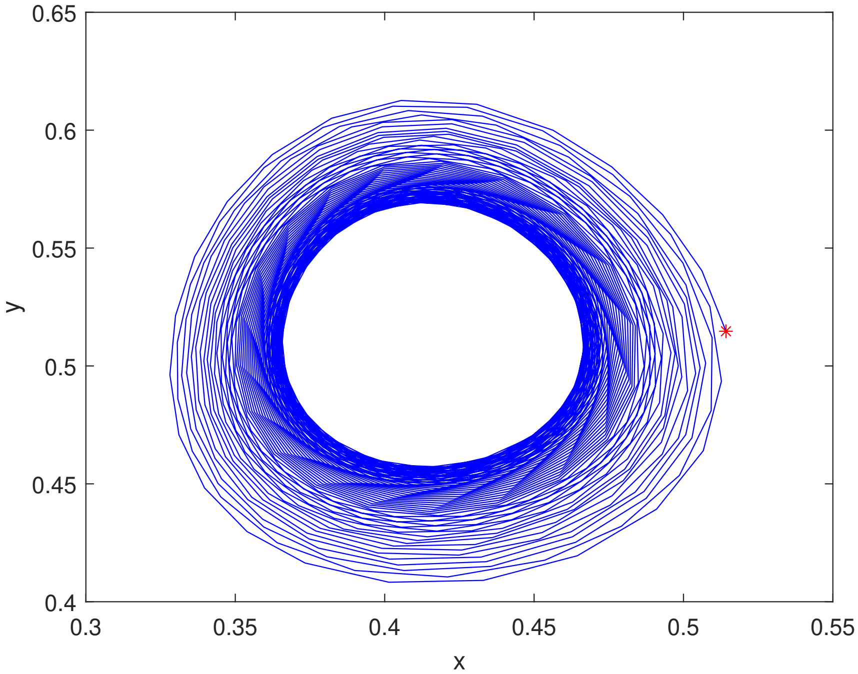

Рис. 7: Бифуркация при $\alpha = 3$. Начальное приближение отмечено $*$.

7 Биологическая интерпретация результатов

Рассмотрим биологическую интерпретацию полученных результатов:

- Для областей 1-2 не существует устойчивых точек. Численность жертв растёт только при малой численности хищников до некоторого значения, после которого будет расти численность хищников. При большой численности хищников, число жертв будет резко устремляться к нулю.

- Для областей 3-4 существует устойчивая точка. Численность жертв и хищников будет стабилизироваться вблизи этой точки.

- Для области 5 существует единственная устойчивая точка. Численность хищников растёт только при большом числе жертв. Но это число жертв превышает биологическую ёмкость система, поэтому жертвы будут вымирать до определенного момента. В этот момент хищники станут стремительно вымирать.

Список литературы

[1] А. С. Братусь, А. С. Новожилов, А. П. Платонов. Динамические системы и модели биологии. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.