Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Линейная задача быстродействия»

Студент 315 группы
В. К. Гаухов

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2022

Содержание

1 Постановка задачи

Задана линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = Ax + Bu + f, \quad t \in [t_0, +\infty]$$

Здесь $x, f, \in \mathbb{R}^2, A \in \mathbb{R}^{2x2}, B \in \mathbb{R}^{2x2}, u \in \mathbb{R}^2$. На значения управляющих параметров u наложено ограничение: $u \in \mathcal{P}$. Пусть $\mathcal{X}_0$ - начальное множество значений фазового вектора, $\mathcal{X}_1$ - целевое множество значений фазового вектора. Необходимо решить задачу быстродействия, т.е. найти минимальное время $T > 0$, за которое траектория системы, выпущенная в момент времени t_0 из некоторой точки множества $\mathcal{X}_0$, может попасть в некоторую точку множества $\mathcal{X}_1$.

$$\mathcal{P} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : ax_1^2 - b \leqslant x_2 \leqslant -ax_1^2 + b\}, \quad a, b > 0;$$

$$\mathcal{X}_0 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{s(x_1 - p)^2 + (x_2 - q)^2, |x_1| + s|x_2|\} \leqslant r\}, \quad s, r > 0; ;$$

$$\mathcal{X}_1 = \{\tilde{x}_1\}.$$

1. Необходимо написать в среде Matlab программу с пользовательским интерфейсом, которая по заданным параметрам $A, B, f, t_0, a, b, p, q, r, s, \tilde{x}_1$ определяет, разрешима ли задача быстродействия. Если задача разрешима, то программа должна (приближенно) найти значение T, построить графики компонент оптимального управления, компонент оптимальной траектории, сопряженных переменных. Программа должна рассчитывать погрешность выполнения условий трансверсальности для найденной "оптимальной"траектории. Программа должна давать пользователю возможность постепенно улучшать результаты расчетов за счет изменения параметров численного метода и анализа получающихся приближенных результатов.

   Замечание. В программе не должно быть перебора по $x(t_0)$.

2. В соответствующем заданию отчете необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе решения задачи оптимального управления, привести примеры построенных оптимальных управлений и траекторий (с иллюстрациями) для различных параметров системы (обязательно для различных собственных значений матрицы A). Необходимо также исследовать на непрерывность велечину T по начальному (целевому) множеству фазовых переменных.

2 Принцип максимума

Пусть дана линейная задача быстродействия:

$$\dot{x} = Ax + Bu + f, \quad t \in [t_0, +\infty],$$

$$x(t_0) \in \mathcal{X}_0, x(t_1) \in \mathcal{X}_1,$$

$$u \in \mathcal{P},$$

$$t_1 - t_0 \to \inf.$$

Теорема 1. *Пусть $(x^*(t), u^*(t))$ - оптимальная пара, $u^*(t)$ переводит фазовую точку из положения $x(t_0) \in \mathcal{X}_0$ в положение $x(t_1) \in \mathcal{X}_1$ за время t_1, тогда существует непрерывная вектор-функция $\psi(t)$, нигде не обращающаяся в нуль и удовлетворяющая следующим условиям:*

$$\dot{\psi} = -A^T\psi,$$

$$\langle B^T\psi, u^* \rangle = \rho(B^T\psi \mid \mathcal{P}),$$

$$\langle \psi(t_0), x(t_0) \rangle = \rho(\psi(t_0) \mid \mathcal{X}_0),$$

$$\langle -\psi(t_1), x(t_1) \rangle = \rho(-\psi(t_1) \mid \mathcal{X}_1).$$

3 Вычисление опорных функций

Рассмотрим множество $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : ax_1^2 - b \leqslant x_2 \leqslant -ax_1^2 + b\}, \quad a, b > 0.$$

Оно ограничено двумя параболами и симметрично по осям Ox и Oy, поэтому рассмотрим только первую четверть - в остальных меняется только знак у компонент опорной точки. Найдём $\rho(l|\mathcal{P})$ для вектора $l = (l_1, l_2) : l_1, l_2 \geqslant 0$. Опорная точка является решением системы в первой четверти:

$$\begin{cases} l_2 x_1 - l_1 x_2 = 0, \\ -ax_1^2 + b = x_2. \end{cases}$$

При $l_1 = 0$ решением является пара $(0, \sqrt{\frac{b}{a}})$; Иначе: $(\frac{-\frac{l_2}{l_1} + \sqrt{\frac{l_2^2}{l_1^2} + 4ab}}{2a}, \frac{l_2}{l_1}\frac{-\frac{l_2}{l_1} + \sqrt{\frac{l_2^2}{l_1^2} + 4ab}}{2a})$. Подставим точки в определение опорной функции:

$$\rho(l|\mathcal{P}) = \sup_{x \in \mathcal{P}} \langle x, l \rangle = \begin{cases} \sqrt{\frac{b}{a}} l_2, & l_1 = 0, \\ l_1 \frac{-\frac{l_2}{l_1} + \sqrt{\frac{l_2^2}{l_1^2} + 4ab}}{2a} + \frac{l_2^2}{l_1} \frac{-\frac{l_2}{l_1} + \sqrt{\frac{l_2^2}{l_1^2} + 4ab}}{2a}, & l_1 > 0. \end{cases}$$

Используем свойство симметрии и обобщим на $\mathbb{R}^2$:

$$\rho(l|\mathcal{P}) = \sup_{x \in \mathcal{P}} \langle x, l \rangle = \begin{cases} \sqrt{\frac{b}{a}} |l_2|, & l_1 = 0, \\ l_1 \frac{-|\frac{l_2}{l_1}| + \sqrt{\frac{l_2^2}{l_1^2} + 4ab}}{2a} + l_2 |\frac{l_2}{l_1}| \frac{-|\frac{l_2}{l_1}| + \sqrt{\frac{l_2^2}{l_1^2} + 4ab}}{2a}, & |l_1| > 0. \end{cases}$$

4 Алгоритм поиска оптимального управления

Используем принцип максимума для поиска оптимального решения. Вектор ψ однозначно находится из системы:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = A^T\psi, \\ \psi(t_0) = \psi_0. \end{cases}$$

Вектор ψ_0 заранее неизвестен. Заметим, что если ψ удовлетворяет условиям теоремы 1, то им удовлетворяет и $k\psi$ $\forall k > 0$. Значит, не ограничивая общности, будем считать $\|\psi_0\| = 1$. Будем перебирать значения на единичной окружности и проверять условия теоремы.

Множество $\mathcal{P}$ строго выпукло, поэтому $u^*(t)$ из условие максимума - опорный вектор для направления $l(t) = (l_1(t), l_2(t)) = B^T\psi(t)$:

$$u^*(t) = \begin{cases} (0, \sqrt{\frac{b}{a}}), & l_1(t) = 0, \\ \left(\frac{-\frac{l_2(t)}{l_1(t)} + \sqrt{\frac{l_2(t)^2}{l_1(t)^2} + 4ab}}{2a}, \frac{l_2(t)}{l_1(t)} \frac{-\frac{l_2(t)}{l_1(t)} + \sqrt{\frac{l_2(t)^2}{l_1(t)^2} + 4ab}}{2a}\right), & |l_1(t)| > 0. \end{cases}$$

Если система вполне управляема, то $B^T\psi(t) = 0$ не более чем на счётном наборе t, на котором можно выбрать произвольное $u \in \mathcal{P}$. Случай неполной управляемости сведём к предыдущему регуляризацией матрицы B(добавим к B матрицу ϵI с пренебрежимо малым ϵ). Если $B = 0$, выбор u никак не влияет на результат.

Будем решать задачу в обратном времени, для этого поменяем знак матриц A, B, f и в программе учтём обратное течение времени. В результате получим задачу, в которой начальной точкой станет $\tilde{x}_1$, а конечной - $x_0 \in \mathcal{X}_0$. Заметим, что условие трансверсальности на правом конце обращается в тождество.

С помощью стандартной функции Matlab ode45, можно найти траекторию x^*, соответствующую u^* из системы:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = Ax^*(t) + Bu^*(t) + f, \\ x^*(t_1) = \tilde{x}_1. \end{cases}$$

Путём перебора найдём ψ_0 при котором достигается наименьшее время. Этот результат можно уточнить при большем разбиении(глобальном или локальном, в окрестности текущего наилучшего ψ_0).

5 Проверка условиия трансверсальности

Проверить погрешность вычисления можно с помощью условия трансверсальности на левом конце:

$$\langle \psi(t_0), x(t_0) \rangle = \rho(\psi(t_0) \mid \mathcal{X}_0).$$

Оно означает, что вектор $v = \psi(t_0)$ и вектор нормали $n = n(x(t_0))$ множества $\mathcal{X}_0$ в точке $x(t_0)$ должны быть коллинеарны. Будем оценивать погрешность с помощью косинуса:

$$\cos(v \hat{,} n) = \frac{\langle v, n \rangle}{\|v\|\|n\|}.$$

Множество $\mathcal{X}_0$ является пересечением внутренностей ромба и эллипса, поэтому компоненты нормали будут зависеть от того, на границе какой фигуры лежит точка $x(t_0) = (x_0, y_0)$. Если точка лежит на эллипсе, то нормаль иммет вид: $n = (\frac{s(x_0-p)}{r}, \frac{y_0-q}{r})$. Если точка лежит на ромбе: $n = (\text{sgn}(x_0)r, \text{sgn}(y_0)\frac{r}{s})$. Отдельно рассмотрим случаи, когда точка $x(t_0)$ является крайней точкой ромба или точкой пересечения и ромба, и эллипса. В случае крайней точки получаем множество нормалей, из которых выберем нормаль, составляющую с вектором v наименьший угол. Множество нормалей N_i можно задать через множество их углов с осью Ox:

$$\alpha_1 \in \{\arctan(\frac{1}{s}), \pi - \arctan(\frac{1}{s})\} - \text{для верхней точки},$$

$$\alpha_2 \in \{-\arctan(\frac{1}{s}), \arctan(\frac{1}{s})\} - \text{для правой точки},$$

$$\alpha_3 \in \{\arctan(\frac{1}{s}) - \pi, -\arctan(\frac{1}{s})\} - \text{для нижней точки},$$

$$\alpha_4 \in \{-\arctan(\frac{1}{s}) + \pi, \arctan(\frac{1}{s}) + \pi\} - \text{для левой точки}.$$

В случае попадения в точку пересечения ромба и эллипса, множество нормалей аналогично задаётся через углы между нормалью к ромбу и нормалью к эллипсу, которые вычисляются из формул выше.

6 Примеры работы программы

6.1 Пример №1

Рассмотрим систему с вещественными собственными значениями матрицы A. Введём параметры:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, p = 0, q = 0, s = 3, r = 1, a = 1, b = 2.$$

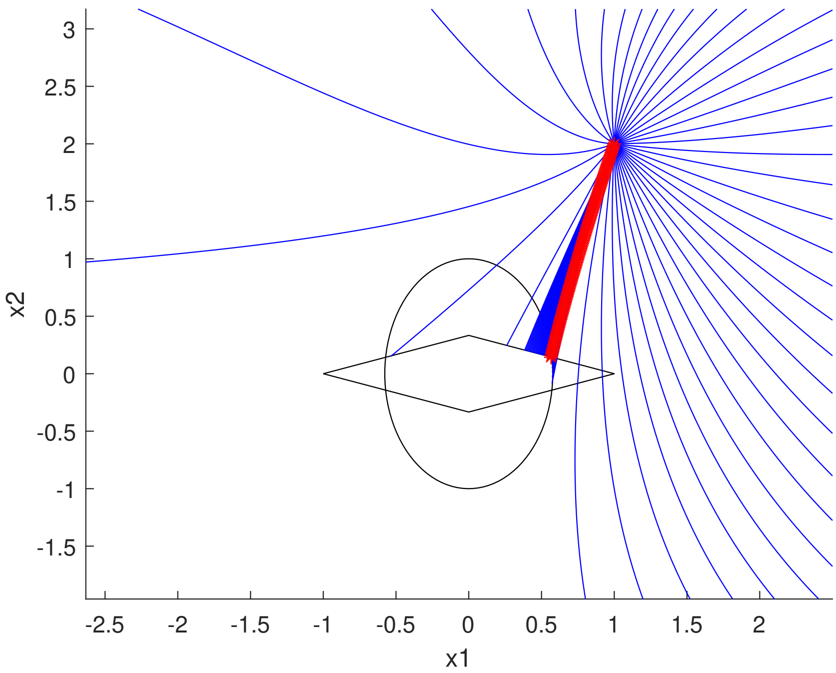

Рис. 1: Полученные траектории: красным выделена оптимальная.

Задача разрешима, переключений управления нет. Полученное оптимальное время - $t_{\min} = 0.338703$, оно достигается при $\psi_0 = \begin{bmatrix} -0.886988 \\ -0.461792 \end{bmatrix}$.

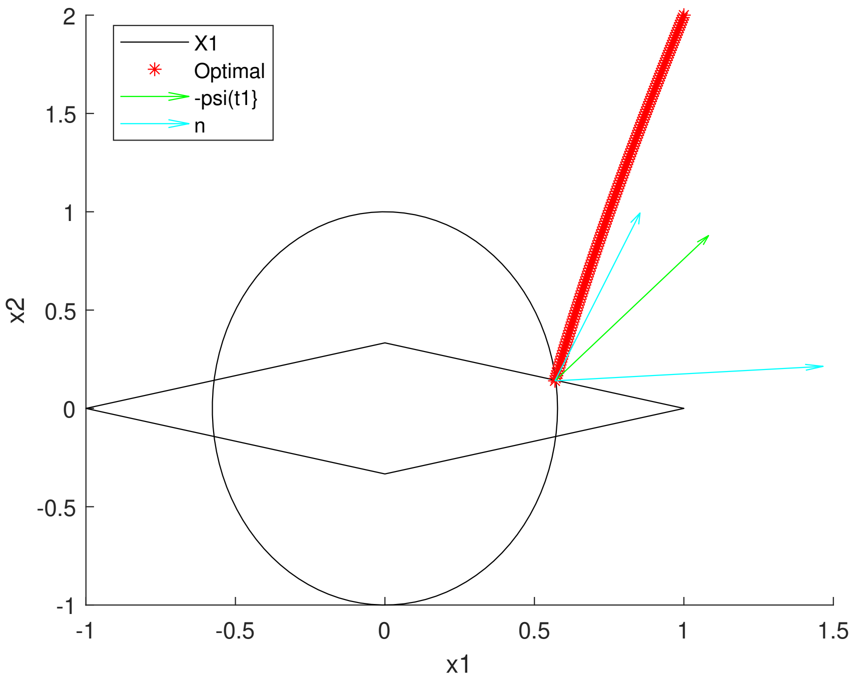

Рис. 2: Проверка условия трансверсальности

Проверка условия трансверсальности: $1 - \cos(\psi(t1), n) = 0.000000$.

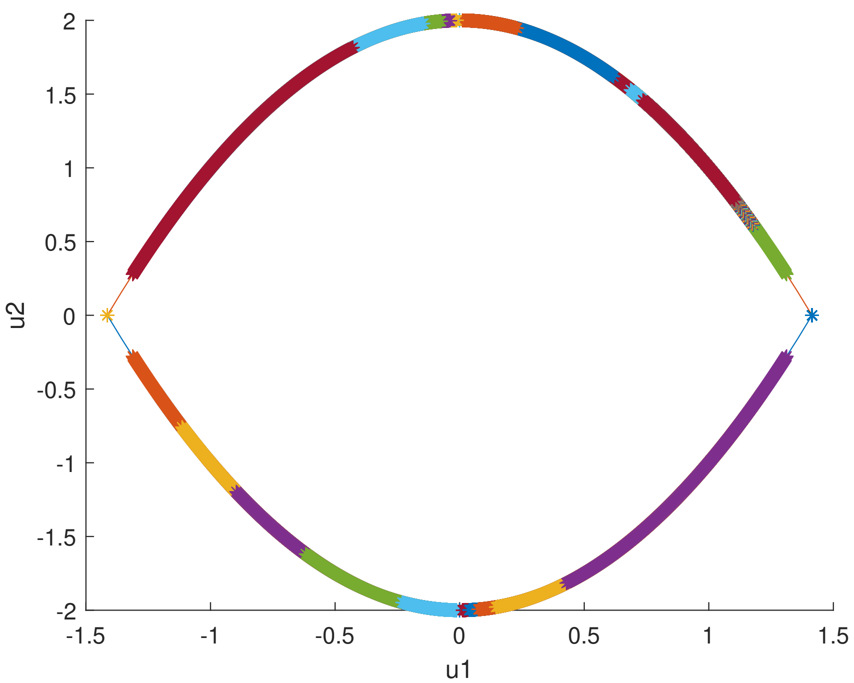

Рис. 3: График зависимости $u_1 u_2$

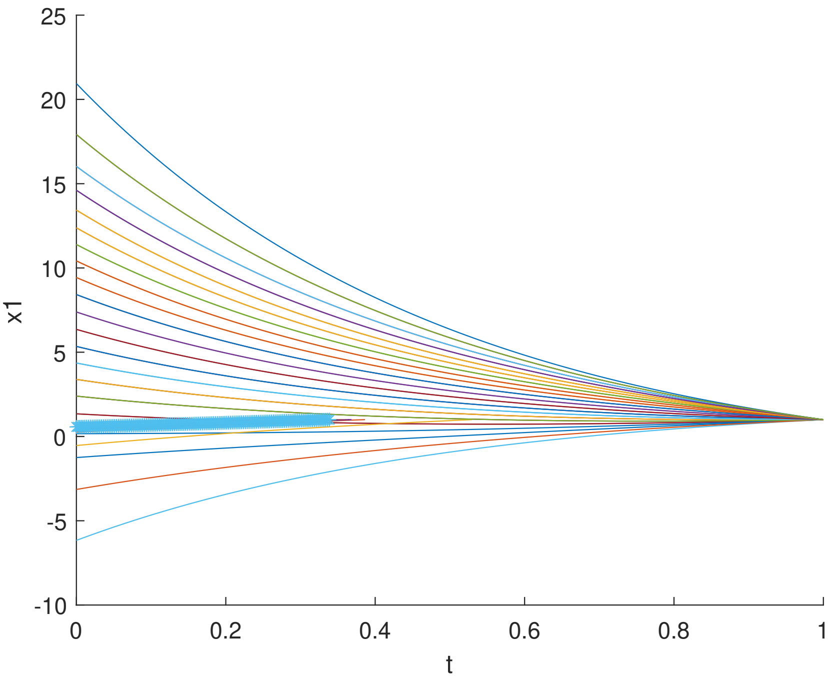

Рис. 4: График зависимости $x_1(t)$

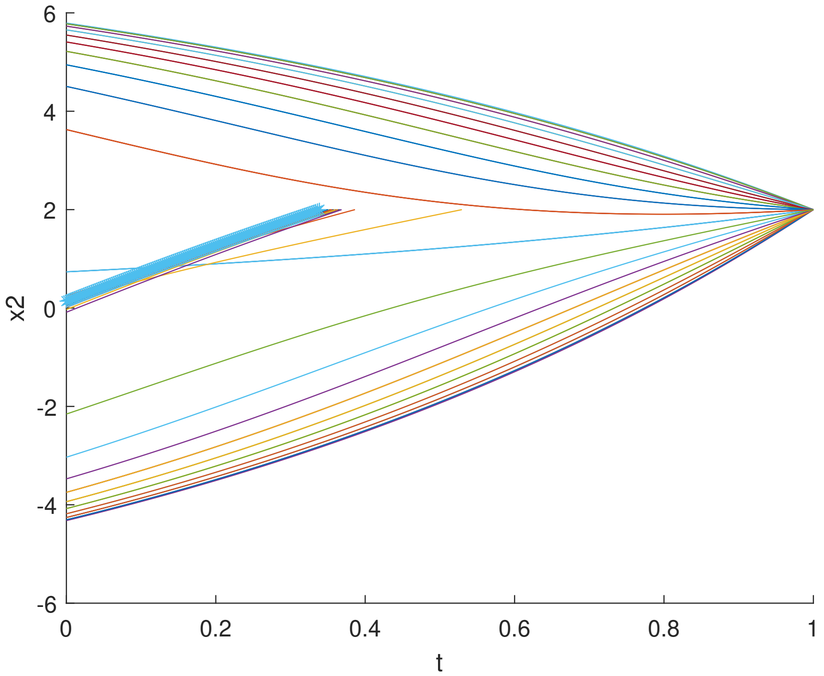

Рис. 5: График зависимости $x_2(t)$

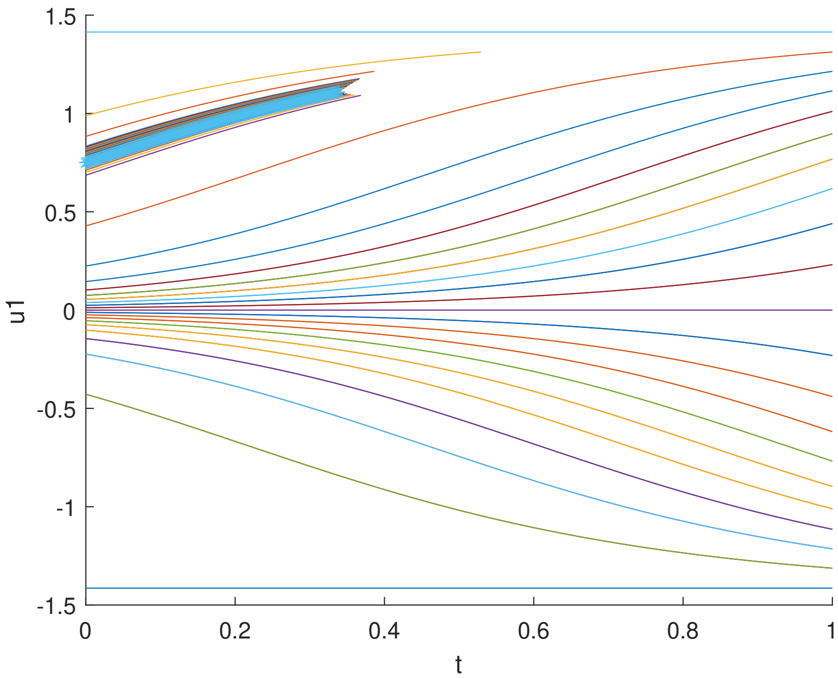

Рис. 6: График зависимости $u_1(t)$

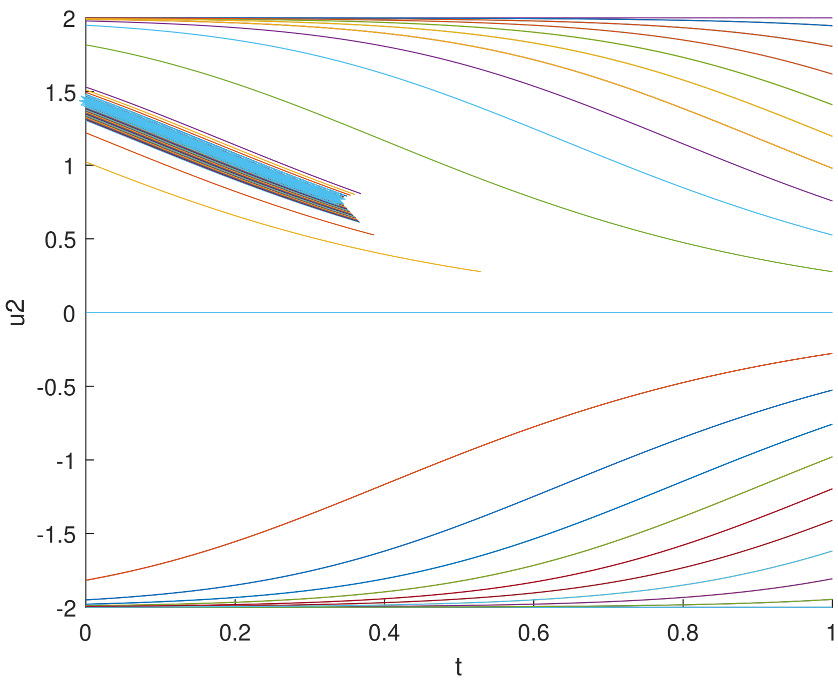

Рис. 7: График зависимости $u_2(t)$

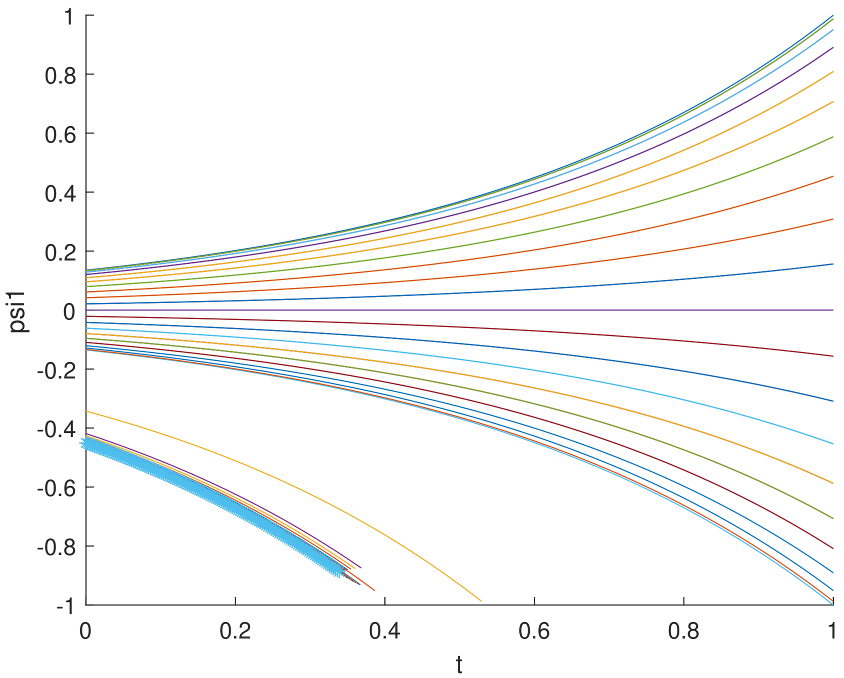

Рис. 8: График зависимости $\psi_1(t)$

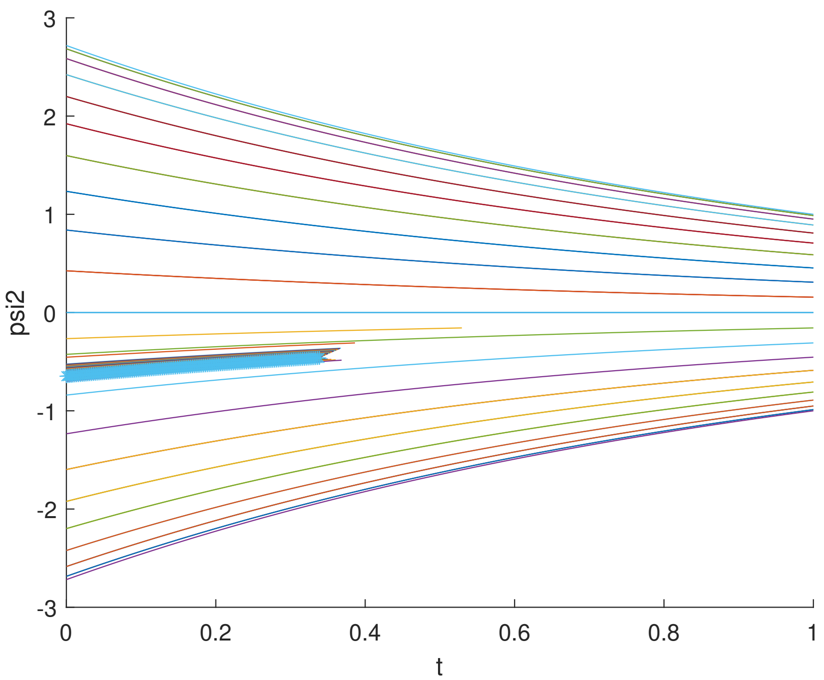

Рис. 9: График зависимости $\psi_2(t)$

6.2 Пример №2

Рассмотрим систему с комплексными собственными значениями матрицы A. Введём параметры:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, p = 1, q = 1, s = 6, r = 3, a = 2, b = 5.$$

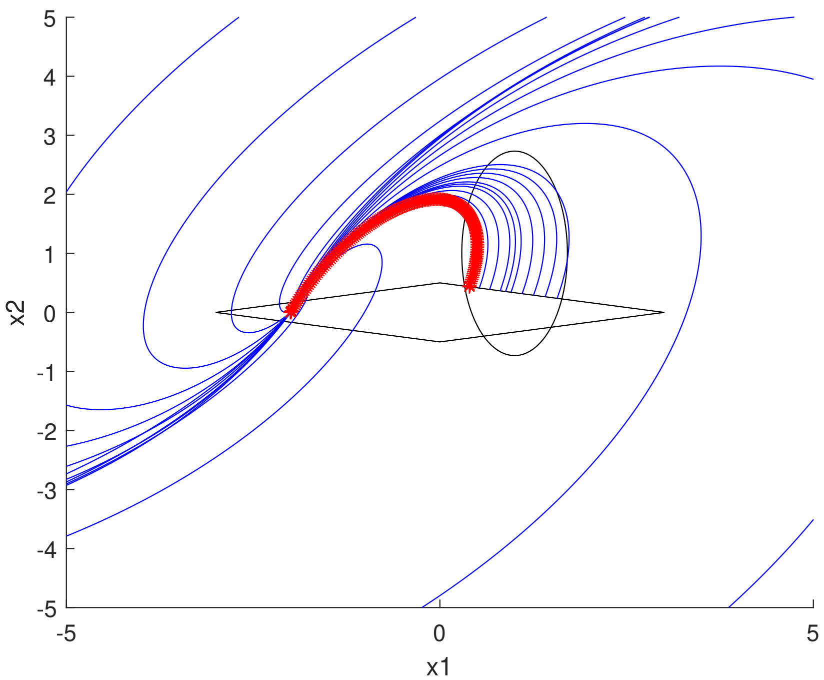

Рис. 10: Полученные траектории: красным выделена оптимальная.

Задача разрешима, переключений управления нет. Полученное оптимальное время - $t_{\min} = 0.408202$, оно достигается при $\psi_0 = \begin{bmatrix} 0.974030 \\ 0.226419 \end{bmatrix}$.

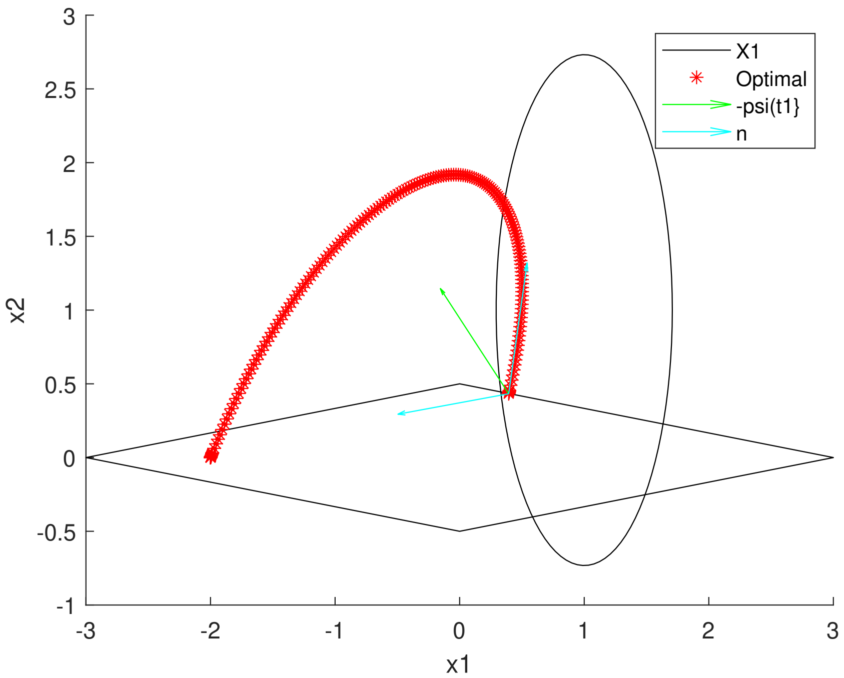

Рис. 11: Проверка условия трансверсальности

Проверка условия трансверсальности: $1 - \cos(\psi(t1), n) = 0.000000$.

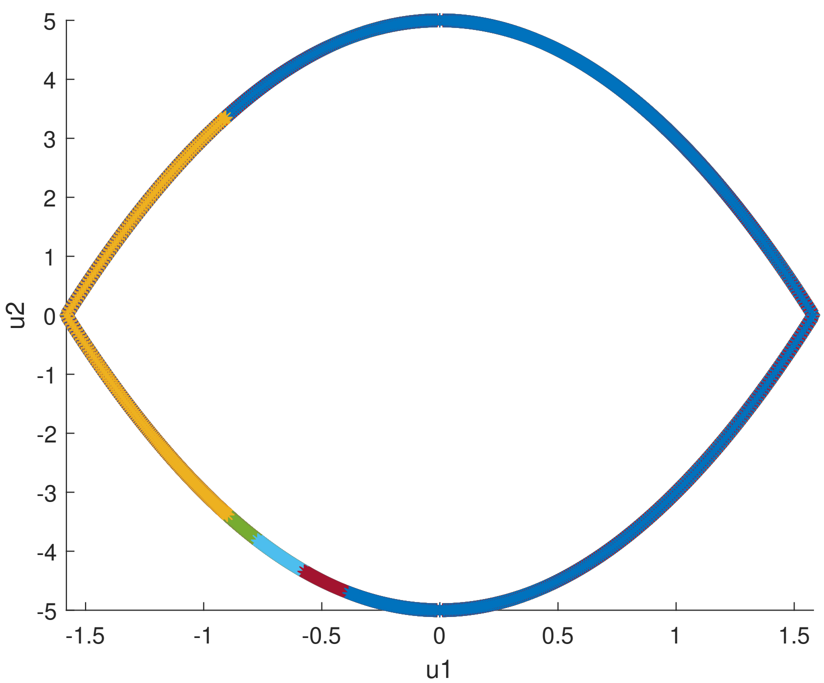

Рис. 12: График зависимости $u_1 u_2$

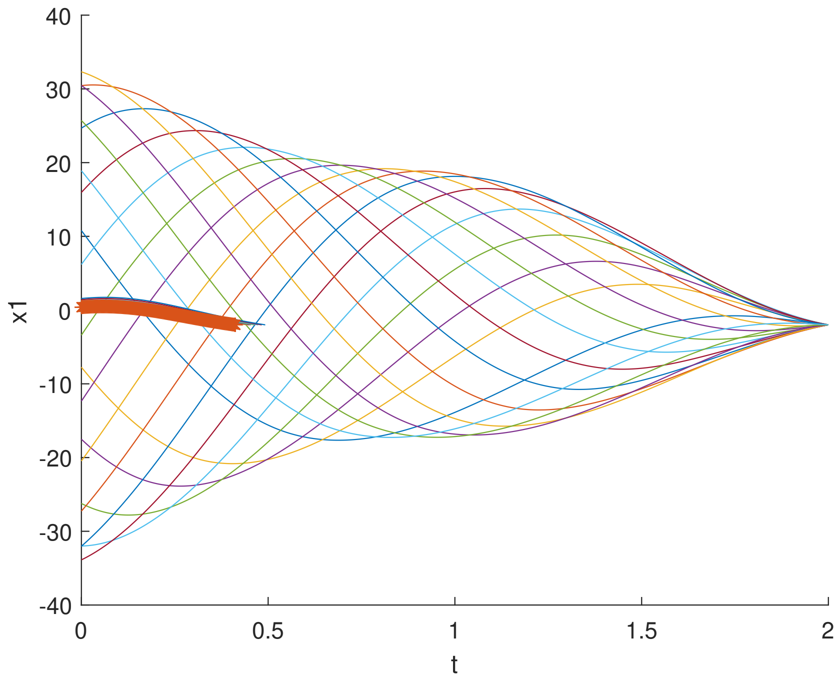

Рис. 13: График зависимости $x_1(t)$

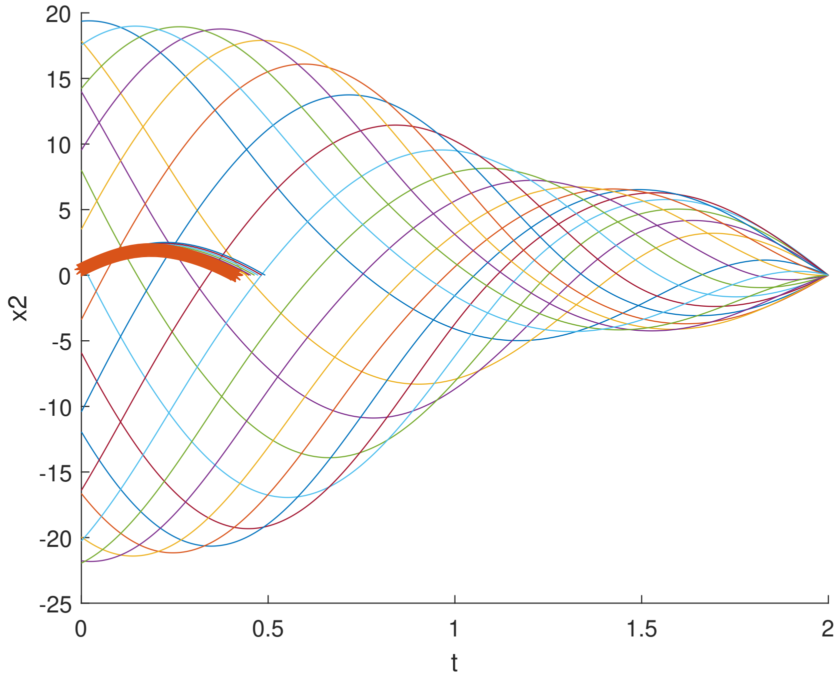

Рис. 14: График зависимости $x_2(t)$

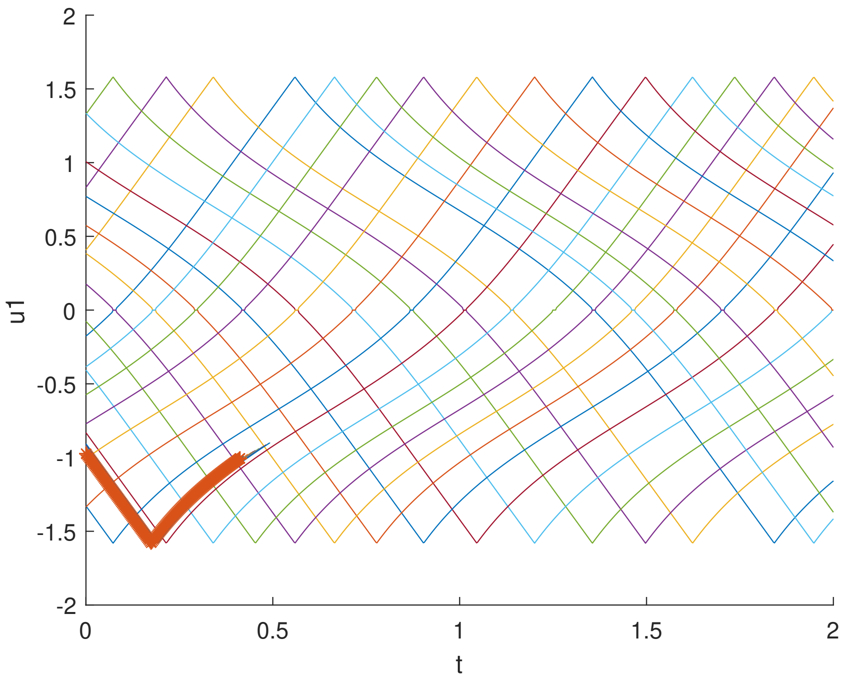

Рис. 15: График зависимости $u_1(t)$

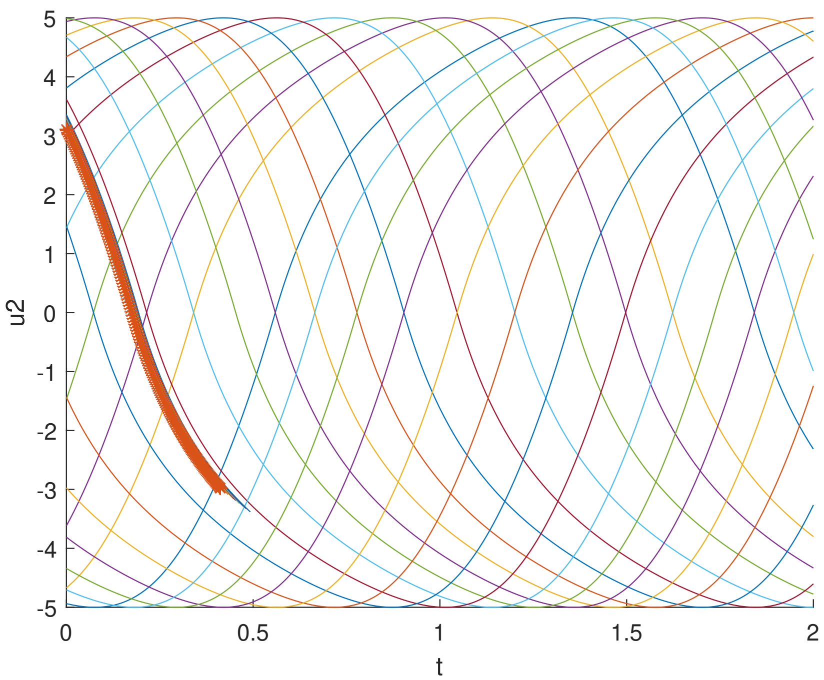

Рис. 16: График зависимости $u_2(t)$

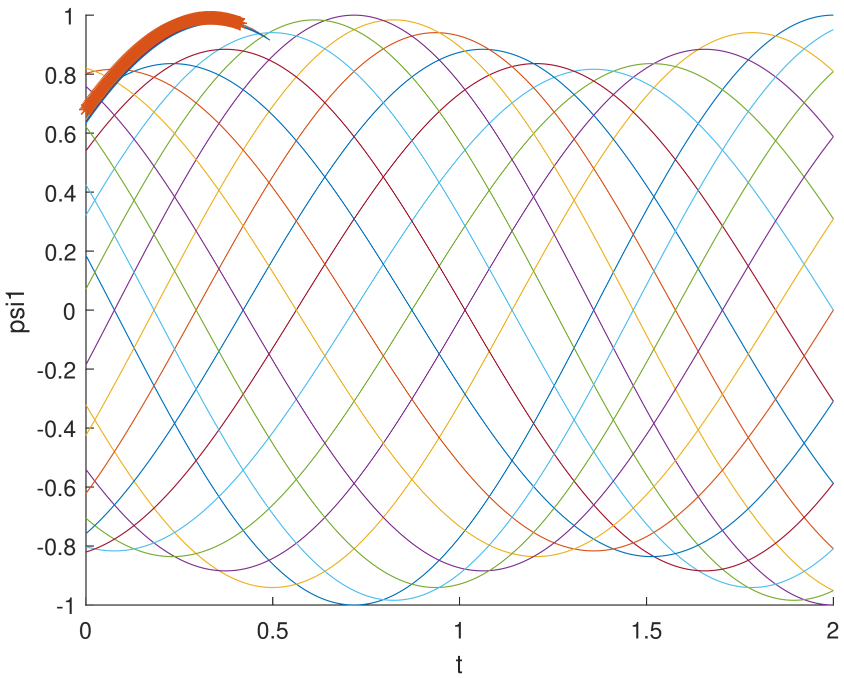

Рис. 17: График зависимости $\psi_1(t)$

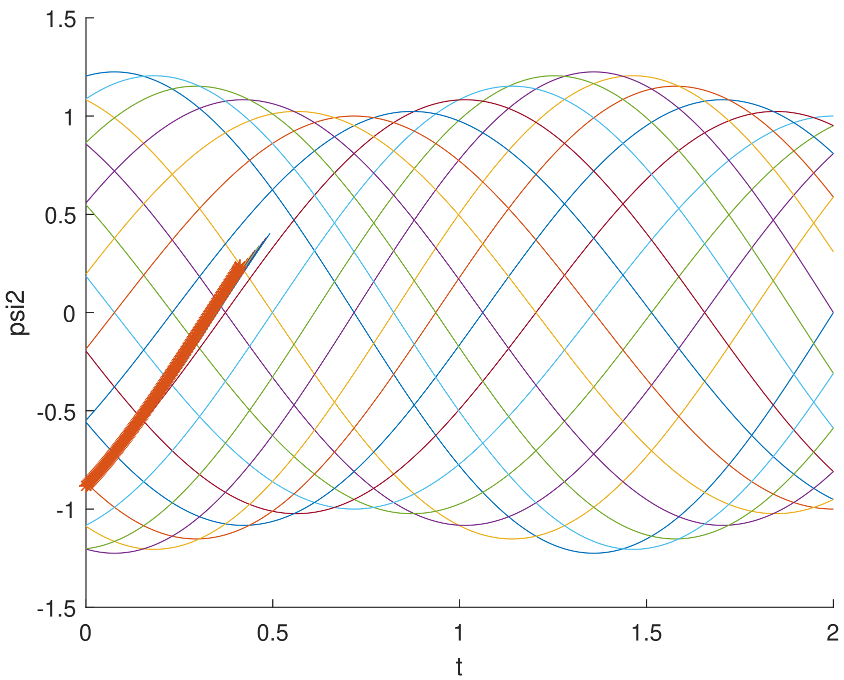

Рис. 18: График зависимости $\psi_2(t)$

6.3 Пример №3

Покажем, что малое изменение данных, может вызвать разрыв оптимального времени. Рассмотрим систему со следующими параметрами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.7 \end{bmatrix}, p = 0, q = 0, s = 1, r = 1, a = 2, b = 1.$$

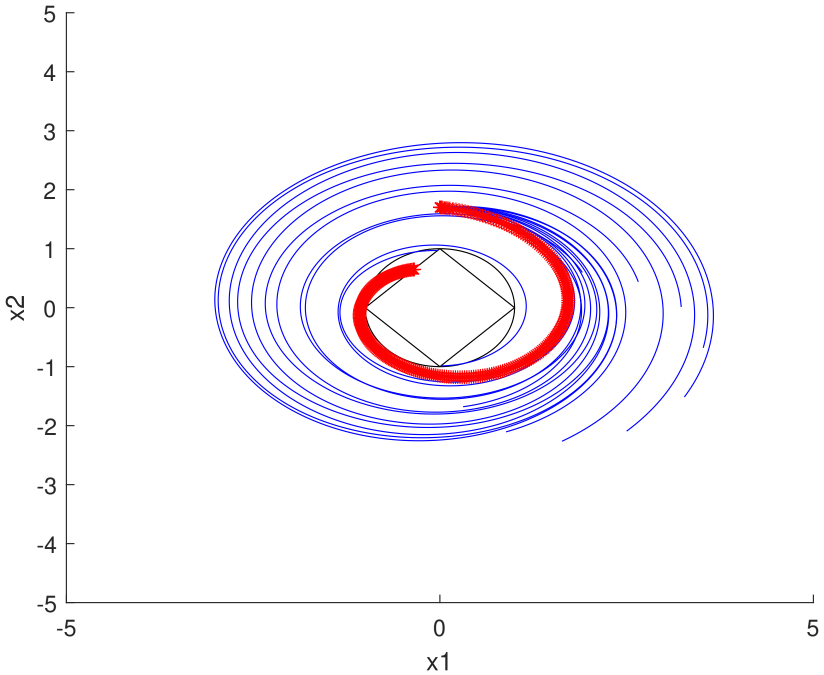

Рис. 19: Полученные траектории: красным выделена оптимальная.

Оптимальная траектория достигается за время $t_{min} = 0.7003$. Пусть теперь $x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \end{bmatrix}$:

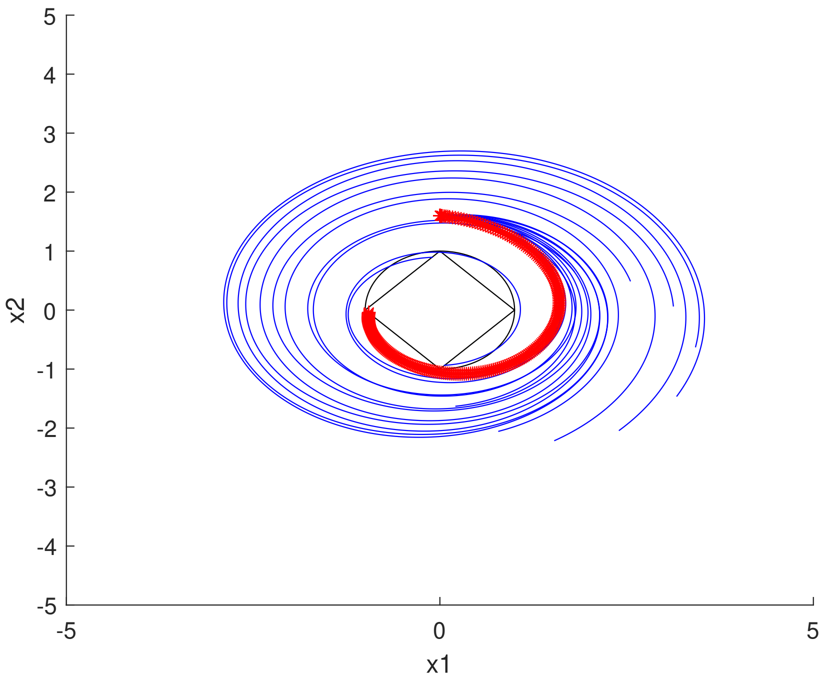

Рис. 20: Полученные траектории: красным выделена оптимальная.

Теперь оптимальная траектория достигается за время $t_{min} = 0.5531$. Время значительно сократилось, потому что при небольшом изменении начальной точки нашлась траектория, которая проходит через левую вершину ромба.

Список литературы

[1] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976.