Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Отчет по заданию №6

«Сборка многомодульных программ. Вычисление корней уравнений и определенных интегралов.»

Вариант 8 / 1 / 3

Выполнил:
студент 104 группы
Гаухов В. К.

Преподаватель:
Сенюкова О. В.

Москва
2020

Содержание

Постановка задачи

В данной задаче необходимо было реализовать:

- численный метод, позволяющий вычислять площадь плоской фигуры, ограниченной тремя кривыми, с помощью метода Симпсона(парабол), реализованного в виде отдельной си-функции,
- численный метод, позволяющий вычислять координаты точек пересечения кривых $f_1(x) = exp(x) + 2$, $f_2(x) = -2x + 8$, $f_3(x) = \frac{-5}{x}$ с помощью метода деления отрезка пополам, реализованного в виде отдельной си-функции,

При этом отрезки значений функции для поиска корней и точность вычислений, заданная ε_1 и ε_2, должны быть вычислены аналитически так, чтобы точность вычисления площади была $\varepsilon = 0.001$.

Математическое обоснование

Анализ набора кривых

Построим графики функций $f_1(x) = exp(x) + 2$, $f_2(x) = -2x + 8$, $f_3(x) = \frac{-5}{x}$. Функция $f_1(x)$ принимает только положительные значения. Это означает, что плоская фигура, ограниченная тремя кривыми, может образоваться только при $y >= 0$. Значит, можно не рассматривать область $y < 0$. В силу строгого возрастания $f_1(x)(f_1'(x) = exp(x) > 0)$ и строгого убывания $f_2(x)(f_2'(x) = -2 < 0)$ функции имеют только одну общую точку. $f_1(x)$ и $f_3(x)$ имеют также только одну общую точку(но аналитически доказать нельзя из-за трансцендентности уравнения $exp(x) + 2 = \frac{-5}{x}$). Функции $f_2(x)$ и $f_3(x)$ имеют две общие точки(Дискриминант уравнения $-2x^2 + 8x + 5 = 0$ равен $D = 104 > 0$), но по теореме Виета $x1 * x2 = \frac{c}{a} = \frac{-5}{2} < - =>$ корни имеют разные знаки. Т.к. при $x > 0$ значение функции $f_3(x)$ отрицательно, эту точку(как и всю ветвь гиперболы) можно не учитывать в подсчёте площади фигуры.

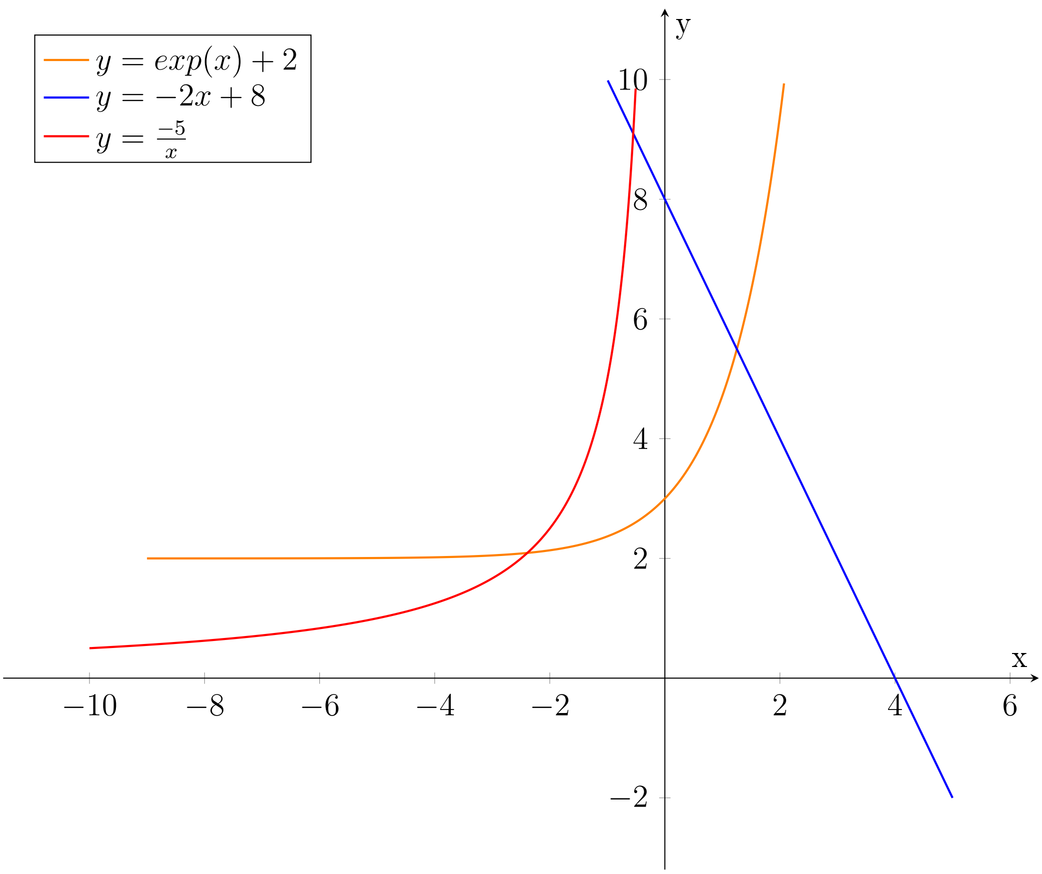

Рис. 1: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

Выбор отрезков для нахождения корней уравнений

Для использования метода деления отрезка пополам необходимо, чтобы выполнялось условия:

- 1)непрерывность функций f, g
- 2)$(f(a) - g(a)) * (f(b) - g(b)) < 0$, где $[a, b]$ - выбранный отрезок, f, g - рассматриваемые функции.

Для функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ подходит отрезок [-5;5] (см. рис) Для функций $f_2(x)$ и $f_3(x)$, а также $f_1(x)$ и $f_3(x)$ подходит отрезок [-10;-0.01]

Выбор точности нахождения корней уравнений

По теореме Лагранжа:
$|f(b) - f(a)| = |f`(k)| * |(b - a)|$, где k ∈ [a;b]
Возьмём за $f = f_i - f_j$, где $i! = j$, $i, j = (1, 2, 3)$. $b = max(x, x + delta)$, $a = min(x, x + delta)$, где x – точное решение уравнения $f(x) = 0$, delta – погрешность нахождения корня. Тогда $b - a = delta$, $|f(b) - f(a)| < \varepsilon_1$.
$|f`(k) * delta| < \varepsilon_1 => |delta| < \varepsilon_1/|f`(k)| < \varepsilon_1/min(|f`(x)|)$, где x принадлежит любому множеству, содержащему отрезок $[min(x, x + delta); max(x, x + delta)]$.Т.к. delta должна быть сравнительно мала, выберем отрезки приблизительно единичной длины, достаточно накрывающие этот промежуток. Для функций $f = f_1 - f_2$ возьмём отрезок $[1; 2](f(1) = exp(1) + 2 + 2 - 8 = e - 4 < 0$, $f(2) = exp(2) + 2 + 4 - 8 = e^2 - 2 > 0)$, для $f = f_1 - f_3$ отрезок $[-3; -2](f(-3) = exp(-3)+2-5/3 = 1/(e^3)+1/3 > 0$, $f(-2) = exp(-2)+2-5/2 = 1/(e^2)-0.5 < 0)$, для $f = f_2 - f_3$ отрезок $[-1, -0.01](f(-1) = 2 + 8 - 5 > 0$, $f(-0.01) = 0.02 + 8 - 5/0.01 < 0)$. Производные функций монотонны($f_1" = exp(x)$, $f_2" = 0$ не убывают, $f_3" = -10/x^3$ возрастает при x<0), поэтому для каждой дельты минимальная производная будет у одной из граничной точки отрезка.
Для вычислений интегралов возьмём погрешность $\varepsilon_2 = \varepsilon/4$, тогда в результате вычислений трёх интегралов мы получим общую погрешность, не превышающую $3 * \varepsilon/4$. Вычисление с данной точностью обеспечивает формула Рунге[1]:
$delta2n = |I2n - I_n|/15$, где $delta2n$ – погрешность вычисления интеграла с числом разбиений 2*n, $I2n$ – значение интеграла, высчитанного с помощью 2*n разбиений, I_n – значение интеграла, высчитанного с помощью n разбиений, 1/15 – коэффициент для формулы Симпсона.
Найдём погрешность вычисления корней, которая существенно не повлияет на вычисление площади (изменение значения площади не более, чем $\varepsilon/10$).
Для этого рассмотрим худший случай, когда все корни будут вычисляться с максимальной погрешностью: тогда вместо площади под графиком функции f_i на отрезке [x;y], где x, y – точные точки пересечения функций будет вычисляться площадь под графиком на отрезке [x – delta; y + delta]. Тогда «лишняя» площадь будет вычисляться на промежутках [x – delta; x], [y; y + delta]. С помощью вычислений интеграла с меньшей погрешностью (TEST_EPS_INTEGRAL = 0.00001) и функции test_root_eps можно вычислить $\varepsilon_1 = 0.000006$, при котором достигается необходимое условие.

Результаты экспериментов

В итоге эксперимента были получены следующие координаты точек пересечения кривых:

Кривые	x	y
1 и 2	1.251757	5.496481
1 и 3	-2.390544	2.091574
2 и 3	-0.549510	9.099022

Таблица 1: Координаты точек пересечения

При этом значение площади фигуры, ограниченной этими прямыми: $S = 9.806945$.

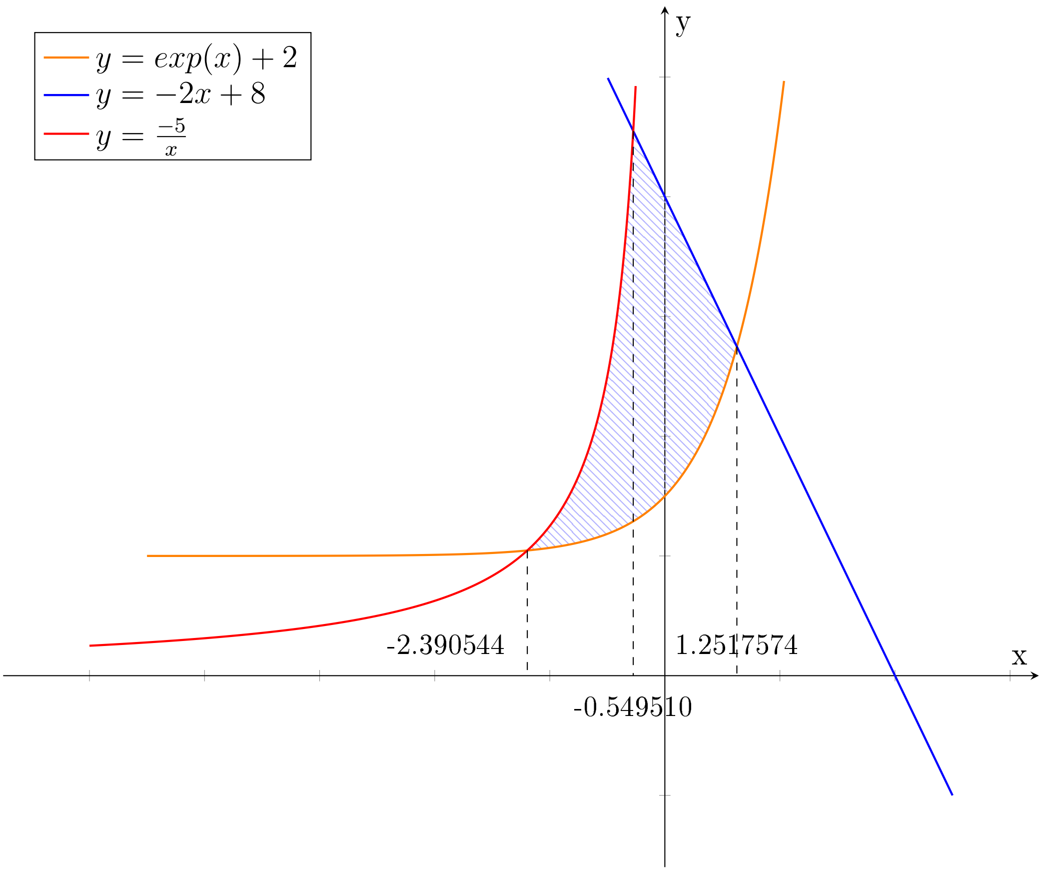

Рис. 2: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

Структура программы и спецификация функций

Спецификация функций

- double f1(double x);
  Вычисляет значение функции $f_1(x) = exp(x) + 2$,
- double f2(double x);
  Вычисляет значение функции $f_2(x) = -2x + 8$,
- double f3(double x);
  Вычисляет значение функции $f_3(x) = \frac{-5}{x}$,
- double df1(double x);
  Вычисляет значение производной функции $df_1 = f_1`(x) = exp(x)$,
- double df2(double x);
  Вычисляет значение производной функции $df_2 = f_2`(x) = -2x + 8$,
- double df3(double x);
  Вычисляет значение производной функции $df_3 = f_3`(x) = \frac{-5}{x}$,
- double f4(double x);
  Вычисляет значение функции $f_4(x) = sin(x)$,
- double f5(double x);
  Вычисляет значение функции $f_5(x) = cos(x)$,
- double f6(double x);
  Вычисляет значение функции $f_6(x) = 2^x + 2$,
- double f7(double x);
  Вычисляет значение функции $f_7(x) = 4^x$,
- double f8(double x);
  Вычисляет значение функции $f_8(x) = log2(x - 1)$,
- double f9(double x);
  Вычисляет значение функции $f_9(x) = -log2(x + 1)$,
- double root(double func1(double),double func2(double),double a, double b, double eps1);
  Вычисляет значение выражения $func1(x) = func2(x)$ на заданном отрезке $[a, b]$ с точностью ε_1 при помощи метода деления отрезка пополам,
- double integral(double f(double),double a, double b, double eps2);
  Вычисляет интеграл вида $\int_a^b f(x)dx$ при помощи метода Симпсона(парабол) с точностью ε_2,
- double test_root_eps();
  Вычисляет ε_1, при которой выполняется точность вычисления площади $\varepsilon = 0.001$.

- void test_root();
  Осуществляет тестирование функции root

- void test_integral();
  Осуществляет тестирование функции integral

Структура программы

Функции f1, f2, f3 описываются в модуле "$file2.asm$", а затем используются в файле "$file1.c$" для вычислений в функциях root и integral. Функции df1, df2, df3 в модуле "$file2.asm$" используются для подсчёта производных функцией test_root_eps из модуля "$file1.c$", которая высчитывает ε_1. Функции f4, f5, f6, f7, f8, f9 из "$file2.asm$" используются для тестирования функциями test_root и test_integral из модуля "$file1.c$". В файле "$file1.c$" также хранится глобальная переменная iterations, которая подсчитывает количество итераций, понадобившееся для вычисления точек пересечения, и функция test_funcs, тестирующая работу функций integral и root. В файл "$main.c$" передаются внешние функции, и глобальная переменная iterations, и происходит вызов данных функций для решения задачи.

Сборка программы (Make-файл)

```
all: prog
prog: main.o file1.o file2.o
	gcc -o prog main.o file1.o file2.o -m32
main.o: main.c
	gcc -c -o main.o main.c -m32
file2.o: file2.asm
	nasm -f elf32 -o file2.o file2.asm
file1.o: file1.c
	gcc -c -o file1.o file1.c -m32
clean:
	rm -f *.o prog
```

Отладка программы, тестирование функций

Тестирование функции root

Для тестирования функции root были применены 3 примера тестовых функций. Для проверки аналитического решения используем функцию test_root и ключ -example_root_test, запускающий её. Функция высчитывает корни выбранных уравнеий и печатает их.

Были реализованы функций $f_4(x) = sin(x)$ и $f_5(x) = cos(x)$:
Аналитическое решение уравнения $f_4(x) - f_5(x) = sin(x) - cos(x) = 0$: $sin(x) = cos(x) \Leftrightarrow tg(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.
Возьмем корень $x = \frac{\pi}{4}$, приблизительно равный $x = 0.7853981634$. Выберем промежуток $[0, pi]$, на котором будет искаться корень.

Была реализована пара функций $f_6(x) = 2^x + 2$ и $f_7(x) = 4^x$:
Аналитическое решения уравнения $f_6(x) - f_7(x) = 2^x + 2 - 4^x = 0$: $4^x - 2^x - 2 = (2^x - 0.5)^2 - 9/4 = 0 => 1)2^x = 3/2 + 1/2 = 2 => x = 1$, $2)2^x = -3/2 + 1/2 = -1$ нет корней. Значит, $x = 1$. Выберем промежуток $[-10; 10]$.

Была реализована пара функций $f_8(x) = ln(x - 1)$, $f_9(x) = -ln(x + 1)$
Аналитическое решения уравнения $f_8(x) - f_9(x) = ln(x - 1) + ln(x + 1) = 0$: $ln(x - 1) + ln(x + 1) = ln((x - 1)(x + 1)) = ln(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.
Возьмем корень $x = \sqrt{2}$, его приближенное значение равно $x = 1.4142135624$. Выберем промежуток $[1.1; 10]$.
С помощью функции test_root, в которой была использована точность ε_1, получим результаты:

- $x1 = 0.785398$
- $x2 = 1.000000$
- $x3 = 1.414212$

Эти результаты с точностью ε_1 совпадают с вычесленными аналитически.

Тестирование функции integral

Для тестирования функции integral воспользуемся функцией test_integral и ключом -example_integral_test, вызывающим её. Функция высчитывает интегралы выбранных функций на выбранных отрезках.

1)Для $f_4(x) = sin(x)$ аналитически подсчитаем интеграл $\int_0^\pi (sin(x))dx$ По формуле Ньютона-Лейбница данный интеграл равен: $\int_0^\pi sin(x)dx = (-cos(\pi)) - (-cos(0)) = 2$

2)Для $f_6(x) = 2^x + 2$ аналитически подсчитаем интеграл $\int_0^2 f_6(x)dx$. $\int_0^2 2^x + 2dx = 2^2/ln2 + 2 * 2 - 2^0/ln2 + 2 * 0 = 3/ln2 + 4$
В приближенном виде $ln2 = 0.6931471$. $3/ln2 + 4 = 8.3280856$

3)Для $df_3(x) = 5/(x^2)$ аналитически подсчитаем интеграл $\int_2^4 df_3(x)dx$:
$\int_2^4 5/(x^2)dx = -5/4 - (-5/2) = 1.25$

С помощью функции test_integral, в которой использовалась точность нахождения интеграла ε_2, получим следующие значения:

- 2.000000
- 8.328085
- 1.250000

Они с точностью до ε_2 совпадают с вычисленными аналитически.

Программа на Си и на Ассемблере

Весь исходный код программы вместе с Makefile хранится в архиве, функции, вычисляющие значения содержатся в файле "$file2.asm$", остальные фукции находятся в файле "$file2.c$", реализация решения задачи хранится в "$main.c$".

Программа поддерживает опции командной строки, весь список которых можно увидеть при запуске программы с ключем -help.

Анализ допущенных ошибок

Были допущены следующие ошибки, устраненные в ходе тестирования:

- Изначально ε_1 и ε_2 были выбраны неверно, из-за чего возникали расхождения в точности.
- Изначально было написано неверное вычисление функции $exp(x) + 2$, что приводило к неправильному ответу.

Список литературы

[1] Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений (том 1), Москва, 1975