Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Лабораторная работа №2»

Студент 315 группы
В. К. Гаухов

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2021

Содержание

1 Задание №8

Постановка задачи

Подготовить 3 примера с аналитически рассчитанными опорными функциями: эллипс, квадрат, ромб. В каждом случае центр не обязательно нулевой — центр и полуоси являются параметрами. Выписать вывод опорных функций.

Определение 1. Опорная функция выпуклого замкнутого множества $E \subset \mathbb{R}^n, \quad n \in \mathbb{N}$:

$$\rho(l|E) = \sup_{x \in E} \langle x, l \rangle.$$

1.1 Эллипс

1. Рассмотрим эллипс с центром в точке $c =$ *(0,0)* , с полуосями равными a, b. Главная полуось составляет с осью Ox угол α

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} \leqslant 1 \right\},$$

где x', y' — координаты, в которых полуось эллипса лежит на прямой Ox:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Матрица поворота имеет вид:

$$C = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Матрица коэффциентов имеет вид:

$$T^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}.$$

Матрица конфигурации имеет вид:

$$P = C' \cdot T^2 \cdot C.$$

Единичный шар с центром в начале координат — множество

$$B_1(0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \leqslant 1 \right\}.$$

Множество E можно представить в виде:

$$E = C \cdot T \cdot B_1(0).$$

Тогда опорная функция для вектора l имеет вид:

$$\rho(l\,|E) = \|TC'l\| = \sqrt{\langle TC'l, TC'l \rangle} = \sqrt{\langle l, Pl \rangle}.$$

2. Эллипс с центром в точке $c = (c_1, c_2)$ можно представить в виде:

$$E_c = E + c.$$

Его опорная функция имеет вид:

$$\rho(l\,|E_3) = \rho(l\,|E_2 + c) = \sqrt{\langle l, Pl \rangle} + \langle l, c \rangle.$$

1.2 Квадрат

1. Рассмотрим квадрат с центром в точке $c =$ *(0,0)* и длиной стороны a
$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|x|, |y|) \leqslant \frac{a}{2}\right\}.$$
Его опорная функция имеет вид:
$$\rho(l|S) = \sup_{x\in S}\langle x, l\rangle = \sup_{x\in S}\sum_{i=1}^{2} x_i l_i \leqslant \frac{a}{2}\sum_{i=1}^{2}|l_i| = \frac{a}{2}\|l\|_1.$$
При этом неравенство обращается в равенство для
$$x_0=(\tfrac{a}{2}\ \mathrm{sgn}(l_1),\ \tfrac{a}{2}\ \mathrm{sgn}(l_2))\in S.$$
Значит
$$\rho(l|S) = \frac{a}{2}\|l\|_1.$$

2. Квадрат с центром в точке $c = (c_1, c_2)$ и стороной длины a можно представить в виде:
$$S_c = S + c, \quad a > 0.$$
Тогда опорная функция будет иметь вид:
$$\rho(l|S_c) = \rho(l|S) + \langle l, c\rangle = \frac{a}{2}\|l\|_1 + \langle l, c\rangle.$$

1.3 Ромб

1. Рассмотрим ромб с центром в точке $c =$ *(0,0)* и диагоналями длины 2
$$R = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{i=1}^{2}|x_i| \leqslant 1\right\}.$$
$$\rho(l|R) = \sup_{x\in R}\langle x, l\rangle \leq \sup_{x\in R}\sum_{i=1}^{2}|l_i||x_i| \leqslant \sup_{x\in R}\max_{i=1,2}|l_i|\sum_{i=1}^{2}|x_i| = \max_{i=1,2}|l_i|.$$
Если
$$\max_{i=1,2}|l_i| = |l_1|,$$
тогда неравенство обращается в равенство для
$$x_0 = (\mathrm{sgn}(l_1), 0).$$
Иначе:
$$x_0 = (0, \mathrm{sgn}(l_2)).$$
Получим, что
$$\rho(l|R) = \max_{i=1,2}|l_i|.$$

2. Ромб с центром в точке $c = (c_1, c_2)$, с диагоналями длины a_1, a_2 можно представить в виде:
$$R_c = TR + c, \quad T = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{2} \end{bmatrix}.$$
Тогда опорная функция будет иметь вид:
$$\rho(l|R_c) = \rho(l|TR) + \langle l, c\rangle = \rho(T'l|R) + \langle l, c\rangle = \max_{i=1,2}\frac{|a_i l_i|}{2} + \langle l, c\rangle. \qquad (1)$$

2 Задание №10

Постановка задачи

Выписать вывод уравнений, описывающих поляру для одного из рассмотренных примеров.

Определение 2. Полярой множества $E \subset \mathbb{R}^n,\ n \in \mathbb{N}$ называется множество

$$E^\circ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x|E) \leqslant 1 \right\}.$$

Рассмотрим ромб с центром в точке $c = (c_1, c_2)$ и диагоналями длины $a_1,\ a_2$:

$$R_c = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \sum_{i=1}^{2} \frac{2|x_i - c_i|}{a_i} \leqslant 1 \right\}.$$

Опорная функция ромба имеет вид (1):

$$\rho(l|R_c) = \max_{i=1,2} \frac{|a_i l_i|}{2} + \langle l, c \rangle.$$

Подставим функцию в определение:

$$R_c^\circ = \left\{ l \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \max_{i=1,2} \frac{|a_i l_i|}{2} + \langle l, c \rangle \leqslant 1 \right\}.$$

Список литературы

[1] А. В. Арутюнов. Лекции по выпуклому и многозначному анализу. Москва, изд. ФИЗМАТЛИТ, 2014.