第二次上机

PB18061443 江昊霖

2023 年 4 月 9 日

1 实验目的

通过使用 C/C++ 语言实现下面两种线性方程组求解的算法:

- 列主元 Gauss 消元
- Gauss-Seidel 迭代法

分析比较两种算法的表现。

2 实验要求

考虑两点边值问题

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} = a, & 0 < a < 1 \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \end{cases}$$

容易知道它的精确解为

$$y = \frac{1-a}{1-\mathrm{e}^{-1/\varepsilon}} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right) + ax$$

为了把微分方程离散, 把 $[0,1]$ 区间 n 等分, 令 $h = \frac{1}{n}$,

$$x_i = ih, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

得到差分方程

$$\varepsilon \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = a$$

简化为

$$(\varepsilon + h) y_{i+1} - (2\varepsilon + h) y_i + \varepsilon y_{i-1} = ah^2,$$

从而离散后得到的线性方程组的系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} -(2\varepsilon + h) & \varepsilon + h & & & \\ \varepsilon & -(2\varepsilon + h) & \varepsilon + h & & \\ & \varepsilon & -(2\varepsilon + h) & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \varepsilon + h \\ & & & \varepsilon & -(2\varepsilon + h) \end{bmatrix}$$

对 $\varepsilon = 1, a = \frac{1}{2}, n = 100$, 分别用列主元 Gauss 消元法, Gauss-Seidel 迭代方法求线性方程组的解, Gauss-Seidel 方法要求有 4 位有效数字, 然后比较与精确解的误差. 对 $\varepsilon = 0.1, \varepsilon = 0.01, \varepsilon = 0.0001$, 考虑同样的问题.

3 实验结果

ε	列主元 Gauss 消元	Gauss-Seidel 迭代法
1	0.010442	0.009636
0.1	0.0133884	0.01333
0.01	0.0342812	0.03428
0.001	0.0651735	0.06517