

1 Cardinality

(1) \mathbb{Q} 의 cardinality가 \aleph_0 임을 증명하자.

① 대수적 증명은 정리(증명)이다.

1. $f: X \rightarrow Y$ 인 전사 함수가 존재한다 $\Leftrightarrow |X| = |Y|$

2. 유한의 두 집합에 대하여 $X \subset Y$ 이면 $|X| \leq |Y|$ 이다.

1	2	3	4			
1	1	$1/2$	$1/3$	$1/4$		
2	$2/1$	$2/2$	$2/3$	$2/4$		
3	$3/1$	$3/2$	$3/3$	$3/4$		
4	$4/1$	$4/2$	$4/3$	$4/4$		
:	:	:	:			

not & notation

증거에 존재하는 쇠집합: Y

양의 유리수집합: Q^+

음의 유리수집합: Q^-

유리수집합: Q

자연수집합: N

② $Q^+ \subset Y$ 이므로 $|Q^+| \leq |Y|$ 이다. (by 증거 2)

$N \subset Q^+$ 이므로 $|N| = \aleph_0 \leq |Q^+|$ 이다. (by 증거 2)

$$\begin{aligned} N &\xrightarrow{f} Y \\ 1 &\rightarrow 1 \\ 2 &\rightarrow 1/2 \\ 3 &\rightarrow 2/1 \\ 4 &\rightarrow 3/1 \\ \vdots &\vdots \end{aligned}$$

③ 유한함수 $f: N \rightarrow Y$ 인 전사함수가 존재함으로 증명(1) 의해서 $|Y| = |N| = \aleph_0$ 이다.

따라서 ①, ②의 결과에 $|N| = \aleph_0 \leq |Q^+| \leq |Y| = \aleph_0$ 이므로, $|Q^+| = \aleph_0$ 이다.

유한집합의 카드inality $|Q| = \aleph_0$ 은 알 수 있다.

증명 1) $\aleph_0 \times 2 = \aleph_0$, $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$ 이다.

$|Q| = |Q^+ \cup Q^- \cup \{0\}| = \aleph_0$ 이다.

(2) \mathbb{R} 의 cardinality가 \aleph_0 가 아님을 증명하자.



① 두 집합 $X \rightarrow \{1, 2, 3\}$ 단사함수는 존재하지 않거나 $|X| < |A|$ 이다.

그리고, 여기서는 $N \rightarrow R$ 인 단사함수는 존재하지 않음을 보여서 $\aleph_0 < |R|$ 이고 $|R| \neq \aleph_0$ 입니다.

② 1) 예시 $f: N \rightarrow R$ 인 단사함수가 존재하는지를 보여라 \hookrightarrow 문제 A

$X \subset Y \Rightarrow f: X \rightarrow Y$ 인 단사함수가 존재한다,

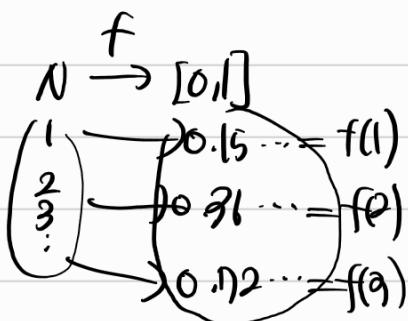
$N \subset R$ 이므로 $f: N \rightarrow R$ 인 단사함수가 존재한다.

③ 2) $f: N \rightarrow R$ 인 전사함수가 존재하지 않을지를 보여라.

' $f: N \rightarrow [0, 1]$ 인 전사함수가 존재하지 않는다.'는 유의 증명을 찾기 위한 출발점으로 여기서는 이 문제를 증명한다. \hookrightarrow 문제 B

여기서는 귀류법을 사용하여 ' $f: N \rightarrow [0, 1]$ 인 전사함수가 존재한다'라 가정하고 모순을 이끌어내자.

$f: N \rightarrow [0, 1]$ 인 아래와 같은 전사함수를 생각해보자. \hookrightarrow 문제 C



① $0.x_1x_2x_3\dots$ 을 생각해보자.

$0.x_1x_2x_3 \in [0, 1]$ 이며 $x_1 \neq f(1)$ 의 소수집합과 $x_2 \neq f(2)$ 의 소수집합과 ... 인 것이다.

② 각각에서 소수집합과 차이가 다르기 때문이다 $0.x_1 \notin \{f(1)\}$, $0.x_1x_2 \notin \{f(1), f(2)\}$, ..., $0.x_1x_2x_3\dots \notin \{f(1), f(2), f(3), \dots\}$

이므로,

③ 여기서 $\{f(1), f(2), f(3), \dots\} = [0, 1]$ 이므로 전사함수는 공집합 차원이 같기 때문이다.

④ 반면 ③에서의 예제 $0.x_1x_2x_3\dots$ 은 어떤 대상의 속성에도

$0.x_1x_2x_3\dots \notin \{f(1), f(2), f(3), \dots\} = [0, 1]$ 이라는 모순이 생긴다.

귀류법에 의해 명제(에는)는 모순이 생기며 따라서 명제 B, A는 참이고 $\aleph_0 < |R|$ 이다 대충이

\therefore 결과적으로, $|R| \neq |N| = \aleph_0$ 이다.

2 - σ-field

(1), (2) $\rightarrow \sigma(A)$ 을 구하는 문제, 끌어올려 X

(3), (4) \rightarrow 끌어가 필요한 문제

문제 1번은 $\sigma(A)$ 에 속하는지 판별하는 문제

문제 2번은 $\sigma(A)$ 에 속하는지 판별하는 문제, 가장 큰 특징은 어떤 증명법을 사용하는지

끌어가 필요한 경우, $\sigma(A)$ 에 속하는지 판별하는 경우.

σ-field가 만족해야 하는 조건은 정의에 의해 다음과 같다.

1. $\emptyset \in \sigma$

2. $\forall A \subset \mathcal{A} : A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ (complement)

3. $\forall A_1, A_2, \dots, C \subset \mathcal{A} : A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

그리고 다음의 조건을 충족할 수 있다.

4. $\forall A, B, C \subset \mathcal{A} : A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$ (union)

5. $\forall B_1, B_2, \dots \subset \mathcal{A}$ such that B_1, B_2, \dots are disjoint : $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{A}$

6. $A \cap B = (A \cup B)^c$ 이므로 조건 2, 4에 의하여

7. $\forall A, B, C \subset \mathcal{A} : A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c, B^c \in \mathcal{A} \Rightarrow (A^c \cup B^c) \in \mathcal{A} \Rightarrow (A^c \cup B^c)^c = A \cap B \in \mathcal{A}$

즉, $\forall A, B, C \subset \mathcal{A} : A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$ (intersection)

8. $A - B = A \cap B^c$ 이므로 조건 2, 6에 의하여

9. $\forall A, B, C \subset \mathcal{A} : A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B^c \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B^c = A - B \in \mathcal{A}$

즉, $\forall A, B \subset \mathcal{A} : A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A - B \in \mathcal{A}$ (difference)

3 확률과 확률변수.

1)

• key point

1) $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ 인 set function. (집합의 argument)

2) $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 인 measurable function이자.

(outcome of argument)

3) 그래서 여기 끝? : 1) 확률변수 $| \begin{array}{l} \text{간단한 경우} \rightarrow 0 \\ \text{집합의 경우} \rightarrow X \end{array}$

2) 확률변수 $| \begin{array}{l} \text{간단한 경우} \rightarrow X \\ \text{집합의 경우} \rightarrow 0 \end{array}$

1. $X(a) \rightarrow 0$

2. $X(\{b\}) \rightarrow X$

3. $P(a) \rightarrow X$

4. $P(\{a\}) \rightarrow 0$

5. $P(X=1) \rightarrow 0$

6. 0

2)

• key point

1) 확률변수의 정의 : 두 개의 가측집합 $(\Omega, \mathcal{A}), (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ 이 주어져 있을 때, 확률변수 $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 은
함수이며 다음을 만족한다.

$\forall B \in \mathcal{R} : X^{-1}(B) = \{w : X(w) \in B\} \in \mathcal{F}$

즉 X 가 측정 가능한 \mathcal{F} 에 대응하는 모든 $B \in \mathcal{R}$ 에 대해 $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ 이어야 한다.

즉 X 가 측정 가능한

측정 가능한 시스템

2) X 가 측정 가능한인가? : 1) $\text{Borel sets } \mathcal{R}$ 을 구하고

2) 모든 원소에 대해 속성을 갖도록

3) 단위집합 $\{a\}$ 에 대한 확률이 정해져야 함, 모든 $w \in \Omega$ 에 확률이 정해져야 함.

Let, $\Omega = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{F} = \sigma(A)$ where $A = \{\{a\}\}$

1) $X : \Omega \rightarrow A = \{1, 2, 3, 4\}$ 일 때 a 로 1 에 대해 확률을 정해보자.

$$\begin{cases} a \mapsto 1 \\ b \mapsto 2 \\ c \mapsto 3 \\ d \mapsto 4 \end{cases}$$

X 는 $(\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (A, 2^A)$ 인 확률변수인가?

확률변수의 정의는 아래와 같다.

두 개의 measurable space $(\Omega, \mathcal{F}), (\Omega, \mathcal{R})$ 가 있고 해자.

확률변수는 $X : \Omega \rightarrow \Omega$ 인 함수이며 아래의 조건을 만족한다.

• $\forall B \in \mathcal{R} : X^{-1}(B) = \{w : X(w) \in B\} \in \mathcal{F}$

예를 들어 $\mathcal{R} = 2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots, \{1, 2\}, \dots, \{1, 2, 3\}, \dots, \Omega\}$

$\mathcal{F} = \sigma(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d\}, \Omega\}$

$B = \{2\}$ 일 때, $X^{-1}(\{2\}) = \{w : X(w) \in \{2\}\} = \{b\}$ 이며 $\{b\} \notin \mathcal{F}$ 이다

X 는 확률변수가 아니다.

2) $Y : \Omega \rightarrow B = \{1, 2\}$ 로 a 에 1에 대해 정해보자.

$$\begin{cases} a \mapsto 1 \\ b \mapsto 2 \\ c \mapsto 2 \\ d \mapsto 2 \end{cases}$$

Y 는 $(\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (B, 2^B)$ 의 확률변수인가?

확률변수의 정의는 다음과 같다.

두개의 measurable space $(\mathcal{A}, \mathcal{F})$, $(\mathcal{B}, \mathcal{G})$ 이 주어질 때

함수 $X: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 의 측도가 되도록 만든다.

- $\forall B \in \mathcal{G} : X^{-1}(B) = \{w : X(w) \in B\} \in \mathcal{F}$

증명

$$\mathcal{B} = 2^{\mathcal{B}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \mathcal{B}\}$$

$$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d\}, \mathcal{A}\} \text{ oft.}$$

$$X^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{F}$$

$$X^{-1}(\{1\}) = \{a\} \in \mathcal{F}$$

$$X^{-1}(\{2\}) = \{b\} \in \mathcal{F}$$

$$X^{-1}(\mathcal{B}) = \{b, c, d\} \in \mathcal{F}$$

여기 확률론적 정의를 막론하고, B 는 확률론적 정의로 정의된다.

2-2

$$\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4\}, A = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$$

$$\sigma(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{2\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \mathcal{A}\}$$

2-3

$$\mathcal{A} = \{1, 2, 3, \dots, 100\}, A = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

$$\sigma(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, 100\}\}$$

$$, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$$

$$, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \dots \}$$

