1 Cardinality

(1) $\mathbb{Q}$의 cardinality가 $\aleph_0$임을 증명하라.

① 다음의 명제는 참인 명제이다.

1. $f: X \to Y$인 전단사 함수가 존재한다 $\Leftrightarrow |X| = |Y|$
2. 임의의 두 집합에 대하여 $X \subset Y$이면 $|X| \leq |Y|$이다.

	1	2	3	4	
1	1	1/2	1/3	1/4	⋯
2	2/1	2/2	2/3	2/4	
3	3/1	3/2	3/3	3/4	
4	4/1	4/2	4/3	4/4	
	⋮	⋮	⋮	⋮	

격자 & notation

격자에 존재하는 수의 집합 : Y

양의 유리수 집합 : $\mathbb{Q}^+$

음의 유리수 집합 : $\mathbb{Q}^-$

유리수 집합 : $\mathbb{Q}$

자연수 집합 : $\mathbb{N}$

② $\mathbb{Q}^+ \subset Y$이므로 $|\mathbb{Q}^+| \leq |Y|$이다. (by 명제2)

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}^+$이므로 $|\mathbb{N}| = \aleph_0 \leq |\mathbb{Q}^+|$ 이다. (by 명제2)

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{N} & \xrightarrow{f} & Y \\
1 & \longrightarrow & 1 \\
2 & \longrightarrow & 1/2 \\
3 & \longrightarrow & 2/1 \\
4 & \longrightarrow & 3/1 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
$$

③ 위와 같이 $f: \mathbb{N} \to Y$인 전단사함수가 존재하므로 명제1에 의해서 $|Y| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$이다.

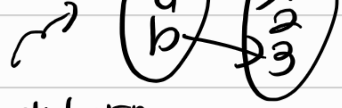
따라서 ①, ②에 의하여 $|\mathbb{N}| = \aleph_0 \leq |\mathbb{Q}^+| \leq |Y| = \aleph_0$ 이므로, $|\mathbb{Q}^+| = \aleph_0$이다.

위와 동일한 과정으로 $|\mathbb{Q}^-| = \aleph_0$임을 알 수 있다.

여기서 $\aleph_0 \times 2 = \aleph_0$, $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$ 이므로

$|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}| = \aleph_0$이다.

(2) $\mathbb{R}$의 cardinality가 $\aleph_0$가 아님을 증명하라.



① 두 집합 X→Y 사이에 단사함수는 존재하지만 전사함수는 존재하지 않는다면 $|X|<|Y|$ 이다.

그러므로, 여기서는 'N→R인 단사함수는 존재하지만 전사함수는 존재하지 않음'을 보여서 $\aleph_0<|R|$ 이고 $|R|\neq\aleph_0$ 임을 보인다.

↳ 명제 A

② 1) 먼저 $f: N\to R$인 단사함수가 존재함을 보인다.

$X\subset Y \Rightarrow f: X\to Y$ 인 단사함수가 존재한다.

$N\subset R$ 이므로 $f: N\to R$인 단사함수가 존재한다.

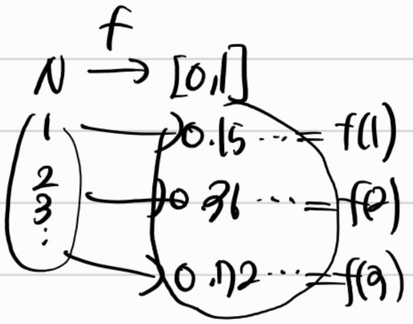
③ 2) $f: N\to R$인 전사함수가 존재하지 않음을 보인다.

'$f: N\to[0,1]$인 전사함수가 존재하지 않는다.'는 위의 명제가 참이기 위한 충분조건이므로 여기서는 이 명제를 증명한다.

↳ 명제 B

④ 여기서는 귀류법을 사용하여 '$f: N\to[0,1]$인 전사함수가 존재한다'라 가정하고 모순을 이끌어내보자.

$f: N\to[0,1]$인 아래와 같은 전사함수를 생각해보자. ↳ 명제 C



① $0.x_1x_2x_3\ldots$을 생각해보자.

$0.x_1x_2x_3\in[0,1]$ 이며 $x_1\neq f(1)$의 소수점 첫째자리, $x_2\neq f(2)$의 소수점 첫째자리 ... 인 수이다.

② 각각에서 소수점 첫째자리가 다르기 때문에 $0.x_1\notin\{f(1)\}$, $0.x_1x_2\notin\{f(1),f(2)\}$, ... $0.x_1x_2x_3\ldots\notin\{f(1),f(2),f(3),\ldots\}$ 이다.

③ 여기서 $\{f(1),f(2),f(3),\ldots\}=[0,1]$ 이다. 전사함수는 공역과 치역이 같기 때문이다.

④ 하지만 ②,③에 의하면 $0.x_1x_2x_3\ldots$은 0과 1사이의 수임에도

$0.x_1x_2x_3\ldots\notin\{f(1),f(2),f(3)\ldots\}=[0,1]$ 이라는 모순이 생긴다.

귀류법에 의해 명제 C에는 모순이 생기며 따라서 명제 B, A는 참이고 $\aleph_0<|R|$ 이기 때문에

∴ 결과적으로, $|R|\neq|N|=\aleph_0$ 이다.

2 - σ-field

(1), (2) → σ(A)를 구하는 문제, 풀이 필요 X

(3), (4) → 풀이가 필요한 문제

풀이에 필요한 증명.

σ-field가 만족해야 하는 조건은 정의에 의해 다음과 같다.

1. $\Omega\in\mathcal{F}$

2. $\forall A \subset \Omega : A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ (complement)

3. $\forall A_1, A_2, \dots, \subset \Omega : A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

조건3은 다음의 조건들 도출할 수 있다.

4. $\forall A, B \subset \Omega : A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$ (union) → 5.4는 3이 imply되므로 조건이 안붙어도 됨.

5. $\forall B_1, B_2, \dots \subset \Omega$ such that $B_1, B_2, \dots$ are disjoint $: B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{F}$

$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ 이므로 조건 2, 4에 의하여

6. $\forall A, B \subset \Omega : A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c, B^c \in \mathcal{F} \Rightarrow (A^c \cup B^c) \in \mathcal{F} \Rightarrow (A^c \cup B^c)^c = A \cap B \in \mathcal{F}$

즉, $\forall A, B \subset \Omega : A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$ (intersection)

$A - B = A \cap B^c$ 이므로 조건 2, 6에 의하여

7. $\forall A, B \subset \Omega : A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A, B^c \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B^c = A - B \in \mathcal{F}$

즉, $\forall A, B \subset \Omega : A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A - B \in \mathcal{F}$ (difference)

3 확률과 확률변수.

1)

- key point

1) $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ 인 set function. (집합이 argument)

2) $X : \Omega \to \mathbb{R}$ 인 measurable function이다.

(outcome이 argument)

3) 그래서 어케 풂? : 1) 확률변수에 < 값이 들어가면 → O, 집합 들어가면 → X

2) 확률에 < 값이 들어가면 → X, 집합 들어가면 → O

1. $X(a)$ → O
2. $X(\{b\})$ → X
3. $P(a)$ → X
4. $P(\{a\})$ → O
5. $P(X=1)$ → O
6. O

2)

- key point

1) 확률변수의 정의 : 두 개의 가측공간 $(\Omega, \mathcal{F})$, $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ 이 주어져 있을 때, 확률변수 X는 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ 인 함수에서 다음을 만족한다.

$\forall B \in \mathcal{R} : X^{-1}(B) = \{w : X(w) \in B\} \in \mathcal{F}$

쉽게 풀자면, R에 속하는 $\underbrace{\text{각각의 모든 원소}}_{\text{각각의 집합}}$에 대한 역상이 $\underbrace{\mathcal{F}}_{\text{정의역에 대한 시그마 필드}}$에 속해야 한다.

2) 그래서 어떻게 풂? : 1) Borel sets R을 구하고

2) 모든 원소에 대해 역상을 구해봐

3) 단 하나라도 $\notin \mathcal{F}$이면 확률변수 아님, 모든 원소 $\in \mathcal{F}$이면 확률변수임.

Let, $\Omega = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$ where $\mathcal{A} = \{\{a\}\}$

1) $X : \Omega \to A = \{1, 2, 3, 4\}$ 인데 이고 다음과 같이 정의된다 하자.

$$\begin{cases} a \mapsto 1 \\ b \mapsto 2 \\ c \mapsto 3 \\ d \mapsto 4 \end{cases}$$

X는 $(\Omega, \mathcal{F}) \to (A, 2^A)$인 확률변수인가?

확률변수의 정의는 아래와 같다.

두 개의 measurable space $(\Omega, \mathcal{F}), (\mathbb{R}, \mathcal{R})$가 있다고 하자.

확률변수 X는 $X : \Omega \to \mathbb{R}$인 함수이며 아래의 조건을 만족한다.

- $\forall B \in \mathcal{R} : X^{-1}(B) = \{w : X(w) \in B\} \in \mathcal{F}$

위 문제의 경우 $\mathcal{R} = 2^A = \{\Omega, \{1\}, \{2\}, \dots, \{1, 2\}, \dots, \{1, 2, 3\}, \dots, \overset{\{1,2,3,4\}}{\Omega}\}$

$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d\}, \Omega\}$

$B = \{2\}$일 경우, $X^{-1}(\{2\}) = \{w : X(w) \in \{2\}\} = \{b\}$이며 $\{b\} \notin \mathcal{F}$이므로

X는 확률변수가 아니다.

2) $Y : \Omega \to B = \{1, 2\}$이고 다음과 같이 정의된다고 하자.

$$\begin{cases} a \mapsto 1 \\ b \mapsto 2 \\ c \mapsto 2 \\ d \mapsto 2 \end{cases}$$

Y는 $(\Omega, \mathcal{F}) \to (B, 2^B)$의 확률변수인가?

확률변수의 정의는 다음과 같다.

두 개의 measurable space $(\Omega, \mathcal{F})$, $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$이 존재할 때

확률변수 Y는 $Y: \Omega \to \mathbb{R}$의 함수에서 아래를 만족한다.

- $\forall B \in \mathcal{R} : X^{-1}(B) = \{w : X(w) \in B\} \in \mathcal{F}$

동전의 경우

$\mathcal{R} = 2^{B} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \Omega\}$

$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c,d\}, \Omega\}$ 이다.

$X^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{F}$

$X^{-1}(\{1\}) = a \in \mathcal{F}$

$X^{-1}(\{2\}) = b \in \mathcal{F}$

$X^{-1}(\Omega) = \{b,c,d\} \in \mathcal{F}$

에서 확률변수의 정의를 만족하므로, B는 확률변수이다.