FÖRELÄSNING 10

VÅGUTBREDNING I HOMOGENA OCH ISOTROPA DIELEKTRIKA

Fredrik Jonsson, Uppsala Universitet, 26 november 2025

Elektromagnetiska vågekvationen i homogena dielektrika

Under den förra föreläsningen tog vi ur Maxwells ekvationer fram de generella vågekvationerna för **E**- och **B**-fälten. Dessa visade sig ha en gemensam form på källtermerna i högerledet som

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\mathbf{J}_{\mathrm{f}}+\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}+\nabla\times\mathbf{M}\right)}_{\text{gemensam källterm}},$$

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{B}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}=\mu_0\nabla\times\underbrace{\left(\mathbf{J}_{\mathrm{f}}+\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}+\nabla\times\mathbf{M}\right)}_{\text{gemensam källterm}}.$$

Även om de generella vågekvationerna för **E** och **B** enligt tidigare har en viktig betydelse i sig, i och med deras generalitet och frånvaro av approximationer, så är de i rent praktisk mening av begränsad betydelse eftersom de inte ännu klargör hur effekten av mediet för vågpropagationen slår in. Vi kommer därför att nu göra följande förenklingar:

- $\mathbf{J}_{\mathrm{f}}=\mathbf{0}$ (inga fria strömmar)
- $\rho=\mathbf{0}$ (inga fria laddningar)
- $\mathbf{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_{\mathrm{r}}-1)\mathbf{E}$ (*linjärt* medium, och vi antar även homogent $\varepsilon_{\mathrm{r}}(\mathbf{x})=$ konstant)
- $\mathbf{M}=\mathbf{0}$ (försumbar magnetisering, $\mu_{\mathrm{r}}\approx 1$)

Med "linjärt" medium menar vi här att polarisationsdensiteten **P** kort och gott är en linjär funktion av det pålagda elektriska fältet **E**. Genom att införa dessa förenklingar, speciellt för polarisationsdensiteten $\mathbf{P}=\varepsilon_0(1-\varepsilon_{\mathrm{r}})\mathbf{E}$, har vi att

$$\begin{aligned}
\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}&=-\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{P}}{\partial t^2}\\
&=-\mu_0\varepsilon_0(\varepsilon_{\mathrm{r}}-1)\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2},\\
\nabla\times\nabla\times\mathbf{B}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}&=\mu_0\nabla\times\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}\\
&=\mu_0\varepsilon_0(\varepsilon_{\mathrm{r}}-1)\nabla\times\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\\
&=\{\text{ Byt ordning på }\nabla\times\text{ och }\partial/\partial t\ \}\\
&=\mu_0\varepsilon_0(\varepsilon_{\mathrm{r}}-1)\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{E}\\
&=\{\text{ Faradays lag }\}\\
&=-\mu_0\varepsilon_0(\varepsilon_{\mathrm{r}}-1)\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}.
\end{aligned}$$

Vi ser redan här en fundamental egenskap i elektrodynamiken, nämligen att ekvationerna för vågutbredningen av elektriska och magnetiska fält i frånvaro av påverkan av externa källor är *identiska*. Detta får till följd att vi (efter att ha definierat respektive randvillkor och initialvärden till de partiella differentialekvationerna) kan behandla elektriska och magnetiska fält på samma sätt, och om fälten har ett gemensamt ursprung, exempelvis från en antenn, laser eller liknande, så kommer **E**- och **B**-fälten att följas åt då de följer *exakt* samma ekvationer.

Vi kan förenkla vänsterledets spatiala differentialtermer något, genom att först konstatera att

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}.$$

För vågutbredning i *homogena* material *utan fria laddningar* blir termen $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})$ noll, eftersom

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}} \right) = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}} \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}} = 0.$$

Notera dock att Gauss lag för elektriska fältet formellt kommer från $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$, och *ej* från "$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$" (som i grund och botten bara är ett specialfall, om än vanligt förekommande).

För det magnetiska fältet gäller samma sak, speciellt eftersom vi *alltid* har att $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Med andra ord, för *homogena* media utan fria laddningar kan vi ersätta

$$\nabla \times \nabla \times \qquad \rightarrow \qquad -\nabla^2,$$

och ekvationerna för elektromagnetisk vågutbredning antar då formen

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \qquad \nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0.$$

Med detta i bagaget kan vi så länge gå vidare med att enbart studera det elektriska fältet, och konstatera att en analys av det magnetiska fältet följer helt analogt. Notera dock att även om dessa ekvationer skenbart ger vid hand att **E**- och **B**-fälten ser ut att vara helt frikopplade från varandra, så har de fortfarande kopplingen sinsemellan via exempelvis Faradays induktionslag. Därför är det oftast en mer korrekt väg, med färre fällor att ramla ner i vad gäller korrekt formulerade randvillkor och initialvärden, om man först löser fältproblemet för det elektriska fältet och därefter (om man behöver det magnetiska fältet i analysen) använda Faradays eller Ampères lag för att direkt länka in lösningen för magnetfältet.

Plana elektromagnetiska fält och d'Alemberts generella lösning till vågekvationen

Formen med "∇^2" för de elektromagnetiska fältekvationerna är viktig och kan i många fall lösas även analytiskt, givet att geometrin är tillräckligt enkel. Denna form kan användas såväl för att beskriva diffraktion som tidsberoende fenomen som dispersion och pulsbreddning. Denna generella form är självfallet också användbar som utgångspunkt för analys i cylindriska eller sfäriska koordinater, i vilket fall vi får uttrycka ∇^2 i respektive system.

Vi kommer nu dock att ytterligare förenkla beskrivningen genom att anta att vågutbredningen sker i form av *oändligt utsträckta plana vågor*, för vilka vi kan försumma spatial breddning eller fokusering tvärs axeln längs med vilken vågorna breder ut sig. I detta fall ersätter vi, om vi antar vågutbredning längs med z-axeln i ett kartesiskt koordinatsystem,

$$\nabla^2 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Eftersom den elektromagnetiska vågekvationen så långt i approximationen förvisso är på vektoriell form, men med samtliga koefficienter och operatorer som skalärer (även ∇^2!), så kan vi även välja att studera endast en komponent av respektive fält. För att gå vidare endast med det elektriska fältet, eftersom magnetiska fältet som vi sett dessutom följer analogt, så blir den partiella differentialekvationen omformulerad som

$$\frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} \frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial t^2} = 0.$$

Redan här kan vi med viss grad av kunskap om partiella differentialekvationer dra slutsatsen att hastigheten för vågor som beskrivs av denna ekvation måste ha beloppet $(\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r})^{-1/2}$. Vi kommer därför att, enbart för att förenkla notationen, *definiera*

$$c \equiv \frac{1}{(\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r})^{1/2}},$$

även om vi så länge kommer att hålla själva tolkningen av c öppen fram till dess att vi explicit visat hur lösningen ser ut.

Homogena partiella differentialekvationer med termer där derivatorna med avseende på olika variabler är separerade är skolexempel på fall där vi kan tillämpa *variabelseparation*. Vi kommer dock här att beskriva "standardsättet" att angripa vågekvationen på.[1] Först av allt, byt variabler till[2]

$$\xi = z - ct, \qquad \eta = z + ct.$$

För derivatorna med avseende på ξ och η har vi med användande av kedjeregeln i två variabler att

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} &= \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial z}}_{=1}\frac{\partial}{\partial \xi} + \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial z}}_{=1}\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \\
&\Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial E}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 E}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2}, \\
\frac{\partial}{\partial t} &= \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial t}}_{=-c}\frac{\partial}{\partial \xi} + \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial t}}_{=c}\frac{\partial}{\partial \eta} = -c\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\right) \\
&\Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial E}{\partial \xi} - \frac{\partial E}{\partial \eta}\right) = c^2\left(\frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 E}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2}\right).
\end{aligned}$$

Detta för över den partiella differentialekvationen för E till formen

$$\underbrace{\frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 E}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2}}_{=\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}} - \frac{1}{c^2}\underbrace{c^2\left(\frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 E}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2}\right)}_{=\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial^2 E}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

[1] Griffiths väljer tyvärr att inte gå igenom d'Alemberts förhållandevis enkla förklaring till att vågekvationen stödjer godtycklig vågform så länge som vi har argument av formen $z \pm ct$, utan väljer att bara visa att dessa lösningar uppfyller vågekvationen. Se Griffiths sid. 382–385.

[2] Detta tillvägagångssätt följer i stort sett den härledning av den generella lösningen till vågekvationen som gjordes 1747 av den franske matematikern Jean le Rond d'Alembert. Faktum är att d'Alembert-operatorn

$$\Box \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

är uppkallad efter honom. För en detaljerad om än något ostrukturerad beskrivning av metodiken, se Wikipedia-artikeln `https://en.wikipedia.org/wiki/D%27Alembert%27s_formula`.

Denna partiella differentialekvation (PDE) är *linjär*, så superpositionsprincipen – som säger att lösningar som individuellt satisfierar ekvationen kan adderas till varandra och fortfarande (som summa betraktad) bistå med en lösning till ekvationen – gäller generellt. Den speciella formen på ekvationen säger oss också att om vi finner en lösning så kan den *enbart* vara en funktion av *antingen* ξ *eller* η, eftersom andraderivatan i den andra, parvisa, variabeln garanterar att endast lösningar av denna form kommer att satisfiera ekvationen.

$$\text{Alternativ I: Integrera först m.a.p. } \xi: \qquad \frac{\partial E_1(\xi)}{\partial \eta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E_1 = f(\xi)$$

$$\text{Alternativ II: Integrera först m.a.p. } \eta: \qquad \frac{\partial E_2(\eta)}{\partial \xi} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E_2 = g(\eta)$$

Med andra ord måste lösningen bestå av en funktion, säg, $f(\xi) = f(z - ct)$ samt en annan funktion, säg, $g(\eta) = g(z + ct)$ (båda med sina respektive amplituder, som givetvis även kan vara noll). Sammantaget med superpositionsprincipen för linjära (ordinära så väl som partiella) differentialekvationer ger då att

$$E = f(z - ct) + g(z + ct).$$

Denna generella lösning beskriver dels en våg $f(z - ct)$ som rör sig i *positiv* z-led med hastigheten c, dels en våg $g(z + ct)$ som rör sig i *negativ* z-led med samma hastighet. Båda dessa vågor är generella till sin form, och behöver ej vara "klassiska harmoniska sinusvågor". Vågorna behöver ej heller vara repetitiva, utan kan lika väl beskriva solitära pulser.

Det intressanta här är att vi nu har en tolkning av

$$c \equiv \frac{1}{(\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r})^{1/2}}$$

som varandes den hastighet som den elektromagnetiska vågrörelsen har i mediet, och då ljushastigheten i vakuum är

$$c_0 \equiv \frac{1}{(\mu_0 \varepsilon_0)^{1/2}} = 299\,792\,458 \text{ m/s} \qquad \text{(exakt)}$$

så innebär det att vi i c har en våg som propagerar långsammare med en faktor n enligt

$$c = c_0/n,$$

där

$$n \equiv \varepsilon_\mathrm{r}^{1/2}$$

är *brytningsindex* för mediet.

För den formella lösningen för $E(x, t)$ över en domän, säg, $0 \le z \le L$, behöver vi dessutom dels initialvärdet

$$E(z, 0) = f(x) + g(x),$$

men även tidsderivatan

$$\left.\frac{\partial E(z,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = -c\frac{df(z)}{dz} + c\frac{dg(z)}{dz},$$

varefter vi kan integrera lösningen och få fram tidsberoendet hos de framåt- och bakåtpropagerande vågorna. För detaljer kring d'Alemberts lösningsmetodik för dessa initialvärdesproblem, se praktiskt taget vilken standardbok som helst för en grundkurs i partiella differentialekvationer.[3]

[3] Exempelvis D. W. Trim, *Applied Partial Differential Equations* (PWS-Kent, 1990), s. 48.

Tidsharmoniska fält och planvågsuppdelning

I föregående sektion visade vi för en plan våg att vi har en generell lösning i form av en framåtgående och en bakåtgående våg med samma fashastighet c. Detta visade vi för en *generell vågform*, som inte behöver vara av harmonisk karaktär (med vilket vi löst formulerat menar av typen "sinuslösning"). Samtidigt vet vi från teorin bakom differentialekvationer (även partiella sådana) att superpositionsprincipen gäller, varvid vi kan analysera lösningar för olika delar av ett elektromagnetiskt fält, och därefter sammanfoga den totala lösningen för fältet.

Formen på den homogena differentialekvationen,[4]

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \qquad \nabla^2\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = 0,$$

ger dels vid hand att det i det här antagna *isotropa* och *homogena* mediet går att frikoppla olika polarisationstillstånd från varandra (eftersom ekvationerna tillåter att vi helt enkelt skalär-multiplicerar med en enhetsvektor åt något håll och direkt får en frikopplad skalär partiell differentialekvation för just det polarisationstillståndets fält), men även att vi kan dela fälten i deras respektive harmoniska frekvensinnehåll, enligt

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathrm{Re}[\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega(\mathbf{k})t)], \qquad \mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathrm{Re}[\mathbf{B}_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega(\mathbf{k})t)],$$

där $\mathbf{k}$ är *vågvektorn* för komponenten med komplex amplitud $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ samt där $\omega(\mathbf{k})$ är vinkelhastigheten (rad/s) för oscillationen hos fälten i tid. Om vi har generella vågformer som inte är av "sinus-typ", så kan vi alltid få fram dessa genom addition av harmoniska fält till en *Fourier-utveckling*, med respektive amplitud hos varje frekvenskomponent som *Fourier-koefficienter*.

Denna tids- och rums-harmoniska form för över de partiella differentialekvationerna för fälten på formen[5]

$$\Big(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\Big)\mathbf{E} = 0, \qquad \Big(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\Big)\mathbf{B} = 0,$$

från vilket vi direkt (för noll-skilda fält) för beloppet $k = |\mathbf{k}|$ för vågvektorn får att

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{(c_0/n)},$$

där, för att rekapitulera,

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}, \qquad \text{(ljushastigheten i vakuum)}$$

samt

$$n = \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}. \qquad \text{(brytningsindex)}$$

Med den tids- och rums-harmoniska formen får vi även direkt ett par andra karakteristiska egenskaper för elektromagnetisk vågutbredning i homogena och isotropa material, exempelvis från Faradays lag, att

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial z} \qquad \Rightarrow \qquad i\mathbf{k}\times\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = i\omega\mathbf{B}_{\mathbf{k}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{B}_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}\times\mathbf{E}_{\mathbf{k}}/\omega,$$

från vilket vi direkt har ortogonalitet mellan den elektriska fältstyrkan $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ och magnetiska flödestätheten $\mathbf{B}_{\mathbf{k}}$ som

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{B}_{\mathbf{k}} = 0,$$

men även ortogonatlitet mellan magnetiska flödestätheten och vågvektorn, då

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_{\mathbf{k}} = 0.$$

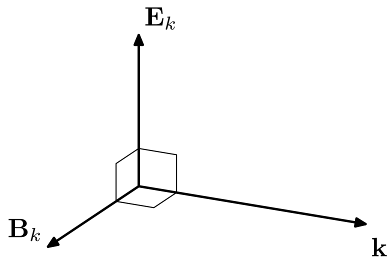
[4] Den följande behandlingen av plana vågor följer i huvudsak Griffiths Kap. 9.2, sid. 393–415.

[5] Eftersom $\nabla \to \mathbf{k}\cdot$ och $\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$.

Från Gauss lag[6] har vi även motsvarande ortogonalitet mellan den elektriska fältstyrkan och vågvektorn som

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}} = 0.$$

Detta sammantaget innebär att vektorerna $(\mathbf{E}_{\mathbf{k}}, \mathbf{B}_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$ bildar ett *högerhands-orienterat system.* Med andra ord, så kan vi sammanfatta detta med att de elektriska och magnetiska fälten i homogena och isotropa media alltid är ortogonala mot varandra samt ortogonala mot vågvektorn (riktningen) för vågutbredningen.



Poynting-vektorn

Som ett mått på den effekt som transporteras per ytenhet i tvärsnitt av ett elektromagnetiskt fält, definieras *Poynting-vektorn* som

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H},$$

med enheten $\mathrm{W/m^2}$.

[6] I frånvaro av fria elektriska laddningar, $\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} \mathbf{E}) = \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ med ε_r som oberoende av rumskoordinater.