



FÖRELÄSNING 6

ELEKTRISKA FÄLT I MATERIAL

Fredrik Jonsson, Uppsala Universitet, 18 november 2025

Sammanfattning

I och med denna föreläsning lämnar vi vakuumbeskrivningen av fält och går in på växelverkan mellan elektriska eller magnetiska fält och materia. Vi börjar med en övergripande bild av hur vi successivt kan gå från en kvantmekanisk beskrivning av denna växelverkan till makroskopiska begrepp som susceptibiliteter och brytningsindex. Den klassiska dipolmodellen för elektrisk polarisering av ett materials molekyler av elektriska fält introduceras, och ett linjärt samband mellan pålagt externt elektriskt fält och det resulterande elektriska dipolmomentet hos mediet erhålls. En medelvärdesbildning över molekylernas elektriska dipolmoment ger den elektriska polarisationsdensiteten hos det dielektriska mediet, och vi formulerar ur denna den elektriska susceptibiliteten χ_e och den relativa elektriska permittiviteten ϵ_r . Vi härleder generaliseringen för Gauss lag för den elektriska flödestätheten \mathbf{D} som $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$, där ρ_f är den fria laddningstätheten. Randvillkor och övergångar mellan olika dielektrika härleds för den elektriska fältstyrkan \mathbf{E} och den elektriska flödestätheten \mathbf{D} , för deras normal- och tangentialkomponenter. Slutligen formulerar vi måttet på upplagrad elektrisk energi i ett dielektrikum.

Tre hållpunkter i föreläsningen

1. Den elektriska polarisationsdensiteten \mathbf{P} beskriver det elektriska dipolmomentet per volymenhets,

$$\mathbf{P} \equiv \left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dV} \right\rangle = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E},$$

där χ_e är den elektriska susceptibiliteten.

2. Den elektriska flödestätheten,

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} \equiv \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E},$$

lyder Gauss lag $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$, där ρ_f är den fria laddningstätheten.

3. Den upplagrade energin hos ett dielektrikum i ett externt pålagt elektriskt fält \mathbf{E} ges av

$$W = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV.$$

Introduktion

Vi kommer i denna föreläsning att behandla hur ett elektriskt icke ledande material (dielektrikum) uppträder då det påverkas av ett pålagt elektriskt fält, specifikt hur vi elektriskt polarisera mediet genom att de atomära eller molekylära elektriska dipolerna linjeras i fältet.

Om man skall sammanfatta vad vi rent makroskopiskt kan uppfatta gällande elektrisk polarisering i material, så kan vi konstatera att denna polarisering är själva grunden till all form av *reflektion*, samt i förlängningen även *refraktion* (ljusbrytning) och *diffraktion*. I och med att allt vi överhuvudtaget ser är spritt ljus, möjligt undantaget en blick direkt in i en ljuskälla, så kan man därmed säga att elektrisk polarisation hos matrial är källan till praktiskt allt vi ser med våra ögon. Elektriska fält i material och elektrisk polarisation har med andra ord en mycket konkret effekt på vårt dagliga liv.

Världskarta

Växelverkan mellan elektriska fält och materia är ett komplext ämne som generellt måste utgå från de intrinsiska (inneboende) egenskaperna hos atomerna som utgör mediet, hur dessa är arrangerade (exempelvis i gitter, som i kristallina material, eller slumpvis, som i en gas eller ett amorft medium). Vi kommer här självfallet inte att gå igenom kvantmekaniken i sig, men det kan vara bra att ha i huvudet vad vi siktar mot att försöka få till en modell för.

Grunden för hur vi går från atomer och deras kvantmekaniska vågfunktioner upp till makroskopiskt observerbara effekter som relativ permittivitet (elektrisk susceptibilitet) kan generellt sammanfattas med följande världskarta:

$$\begin{array}{ll}
 \psi_j(\mathbf{r}, t) & \text{Vågfunktion (från Schrödinger; beroende av } \mathbf{E} \text{)} \\
 \downarrow & \\
 \hat{\rho} = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| & \text{Densitetsmatris/operator (sannolikheter)} \\
 \downarrow & \\
 \mathbf{p} = \langle \hat{\mathbf{p}} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\mathbf{p}}) & \text{Elektrisk polarisation (dipol, } \mathbf{C} \cdot \mathbf{m} \text{)} \\
 \downarrow & \\
 \mathbf{P} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V} & \text{Elektrisk polarisationsdensitet (makrosk., } \mathbf{C}/\mathbf{m}^2 \text{)} \\
 \downarrow & \\
 \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 - \epsilon_r) \mathbf{E} & \text{Elektrisk susceptibilitet } \chi_e \text{ (enhetslös)} \\
 \downarrow & \\
 \mathbf{D} \equiv \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} & \text{Elektrisk flödestäthet } \mathbf{D} \text{ (} \mathbf{C}/\mathbf{m}^2 \text{)}
 \end{array}$$

Från den elektriska susceptibiliteten χ_e öppnar sig därefter en mängd olika discipliner inom fysik, kemi och tillämpad matematik. Några exempel:

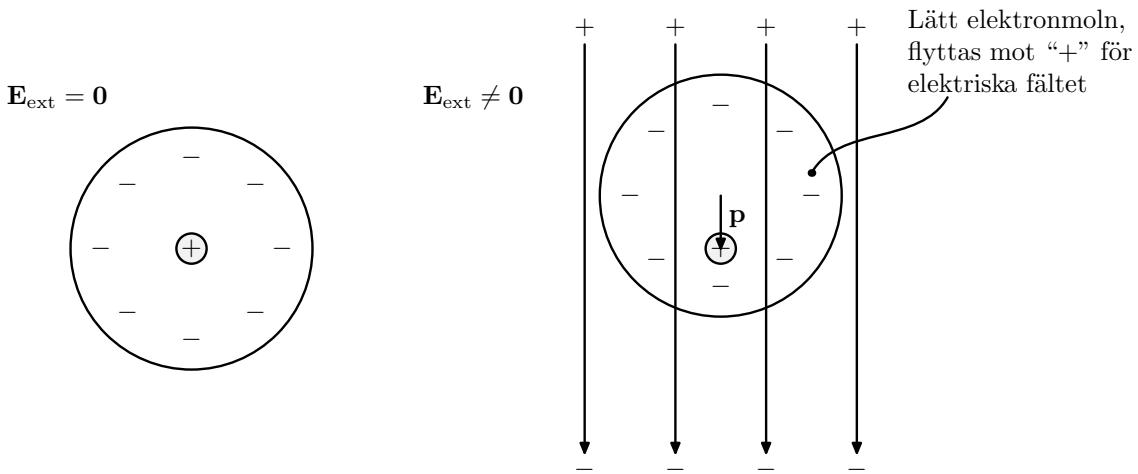
- Brytningsindex $n = \epsilon_r^{1/2}$: Linser, teleskop, optiska fibrer, speglar, radar. "Allt vi kan se."
- Radar, ekolod, skiktröntgen, radiovågspropagation över långa distanser.
- Dispersion med våglängdsberoende brytningsindex, $n = n(\omega)$.
- Dubbelbrytning med brytningsindex beroende på riktning och polarisation hos ljus..
- Solitoner och självfokuserande ljus, med intensitetsberoende brytningsindex $n = n(I, \omega)$.
- Optisk övertonsgenerering med ickelinjär optik, $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$.

Not: Griffiths använder generellt symbolen "V" för att beteckna potentialer, vilket är lite olyckligt, då V normalt används för att beteckna såväl volym som elektrisk spänning (elektrisk potentialskillnad). Vi kommer här därför att istället genomgående använda ϕ för att beteckna en potential.

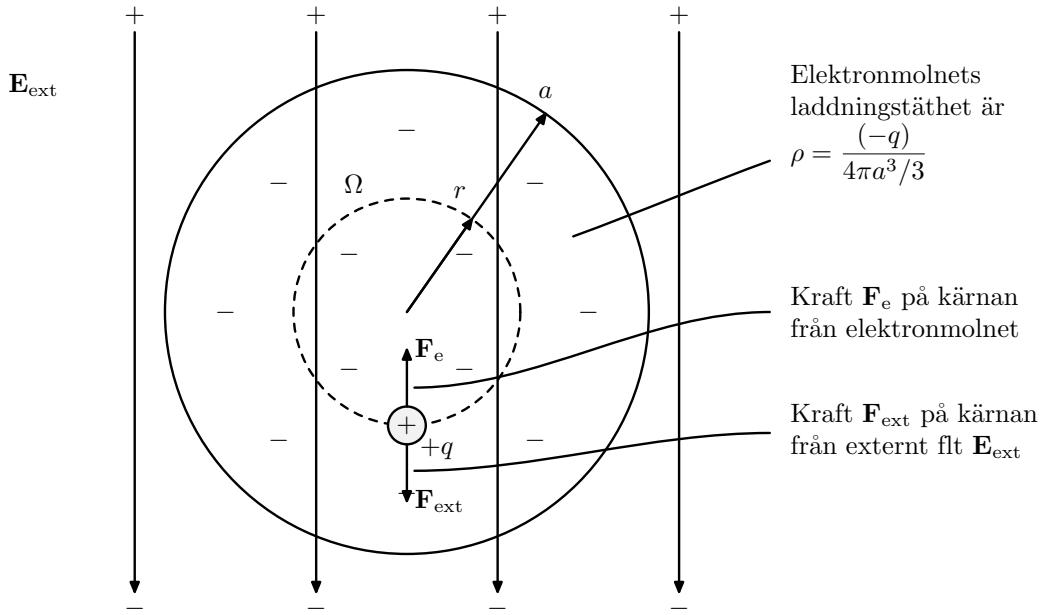
Klassisk modell för dipoler

Den enklast möjliga modell vi kan föreställa oss för hur ett medium kan polariseras är genom att betrakta var och en av de (neutrala) atomerna som utgör materialet som bestående av en positiv punktladdning (atomkärnan) och ett sfärisk-symmetriskt moln av homogen laddning (elektronmolnet) omgärdande kärnan. Då mediet utsätts för ett externt pålagt elektriskt fält kommer atomernas negativt laddade elektronmoln att dras mot "+", medan den positivt laddade kärnan istället dras mot "-". Detta ger upphov till en elektrisk polarisering av atomen, vilket resulterar i att vi har en kollektiv polarisering av mediet på makroskopisk nivå.

Observera att den följande modellen är extremt förenklad och bara kan betraktas som en illustrativ modell över växelverkan mellan fält och materia. I verkligheten sker växelverkan på kvantnivå där vi projicrar atomens eller molekylens vågfunktion på en dipoloperator. Dessutom försummar denna modell helt och hållet eventuella multipolmoment hos systemet (mer om detta i kommande föreläsningar).



Eftersom kärnan är mycket tyngre än elektronmolnet så kan vi dessutom göra det enkelt för oss och helt enkelt se kärnan som fix i rummet och med elektronmolnet rörligt kring kärnan. Då vi applicerar ett elektriskt fält över detta system, vilket vi så långt antar vara statiskt i den mån att fältets tidsvariation är långsam jämfört med naturliga resonansfrekvenser i det atomära systemet, så kommer elektronmolnet att förskjutas relativt atomkärnan. Den negativa laddningen kommer att förskjutas mot positiv elektrisk potential (källan "+" för det elektriska fältet), och vi kommer att få en resulterande elektrisk dipol.



För att ta fram relationen mellan det resulterande dipolmomentet \mathbf{p} och det externa elektriska fältet \mathbf{E}_{ext} , så kan vi exempelvis betrakta de mekaniska krafterna som verkar på kärnan \oplus . Först av allt ges kraften på kärnan från det externa fältet som

$$\mathbf{F}_{ext} = (+q)\mathbf{E}_{ext}.$$

Den elektrostatiska kraften \mathbf{F}_e på kärnan från det omgivande elektronmolnet, som strävar mot att centrera kärnan och elektronmolnen mot varandra, är

$$\mathbf{F}_e = (+q)\mathbf{E}_e,$$

där \mathbf{E}_e är det elektriska fältet som kärnan upplever från den negativa elektriska laddningen hos elektronmolnet.

Det elektriska fältet från elektronmolnet kan tas fram genom att utnyttja Gauss lag under sfärisk symmetri över den sfär Ω som är centrerad i elektronmolnet och med kärnan på ytan,

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E}_e dV = \iint_{\Omega} \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

där Q är den av Ω inneslutna laddningen. Med laddningsdensiteten ρ för elektronmolnet, och med detta moln förskjutet sträckan r , är med andra ord den inneslutna laddningen

$$Q = \frac{4\pi r^3}{3} \rho = \left\{ \rho = \frac{(-q)}{(4\pi a^3/3)} \right\} = -\frac{r^3}{a^3} q.$$

Samtidigt har vi från sfärisk symmetri hos elektronmolnet att den radiella komponenten av elektriska fältet på sfären med radie r är konstant, och ytintegralen ges därmed som

$$\iint_{\Omega} \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{A} = E_e 4\pi r^2.$$

Om vi sätter samman dessa uttryck har vi alltså att

$$E_e 4\pi r^2 = -\frac{r^3}{a^3} \frac{q}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad E_e = -\frac{q}{4\pi \epsilon_0 a^3} \frac{r}{a^3}.$$

Den återställande kraften som verkar på kärnan från elektronmolnet är med andra ord

$$F_e = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^3}.$$

Kraftjämvikt innebär därmed att

$$F_{\text{ext}} + F_e = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad qE_{\text{ext}} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{4\pi\epsilon_0 a^3}{q} E_{\text{ext}}.$$

Det resulterande dipolmomentet är därmed

$$p = qr = \underbrace{4\pi\epsilon_0 a^3}_{=\alpha} E_{\text{ext}} = \alpha E_{\text{ext}},$$

där α är den så kallade *atomära polarisabiliteten*.¹ Utifrån denna extremt förenklade modell kan vi observera ett par intressanta saker:

- Dipolmomentet är en linjär funktion av det pålagda elektriska fältet. Detta brukar vi beteckna med att *systemet är linjärt*.
- Dipolmomentet är även riktat *längs med* det pålagda (godtyckligt riktade) elektriska fältet. Detta är ett beteende vi associerar vi med ett *isotrop* medium.
- Dipolmomentet beror endast på eventuell frekvens hos det pålagda elektriska fältet. Detta är ett beteende vi associerar vi med ett medium fritt från *dispersion* (frekvensoberoende).
- Polarisabiliteten beror på ”atomens” storlek² a i sig.
- Polarisabiliteten beror dock inte på den totala laddningen som kärnan uppbär (d.v.s. atomnummer).

Varför inte en modell med punktladdningar istället?

Retorisk fråga: *Varför konstla till det med ett elektronmoln om vi ändå effektivt har verkan av molnet riktat in mot (det sfäriska) molnets centrum? Skulle vi inte lika kunna få till en enklare men lika kvalitativ modell genom att istället ansätta två punktladdningar med olika tecken?*

Svaret på detta är att denna modell direkt kommer att resultera i en direkt ofysikalisk situation redan utan ett pålagt elektriskt fält, då den ömsesidiga attraktionskraften mellan punktladdningarna i så fall skulle gå mot oändligheten, då Coulombkraften

$$F_c = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow 0.$$

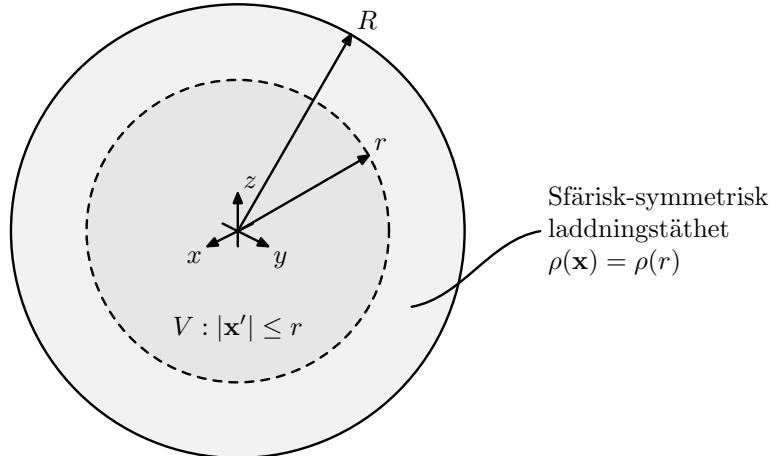
I modellen med elektronmolnet kommer kraften att nära sig noll då $r \rightarrow 0$, eftersom vi med Gauss lag så att säga ”skalar av” den inneslutna laddningen lager för lager då radien r , det vill säga avståndet mellan punktladdningen $+q$ för kärnan och centrum för elektronmolnet, successivt minskas.

¹ Exempel på värden för denna återfinns i Griffiths, Tabell 4.1 på sidan 168.

² ”Atomens” med citat-tecken, då vi ju alla vet att atomer inte är isolerade sfärer som låter sig beskrivas med klassisk mekanik.

En intressant följd av Gauss lag för sfärisk-symmetriska laddningsfördelningar

I föregående analys av den återställande kraften för elektronmolnet, så använde vi Gauss lag för att genom den extrahera kraften \mathbf{F}_e . Vi kan notera att vi *generellt har att en sfärisk laddningsfördelning agerar så som om vi hade att göra med en punktladdning placerad i den sfäriska fördelningens centrum, med det elektriska fältet motsvarande den laddning som innesluts med den radie från centrum som når observatören.*



För ett sfäriskt-symmetriskt "moln" av laddning, centrerat i origo, har vi helt klart att vi vid varje position runtomkring inuti såväl som utanför molnet har att det elektriska fältet endast har en radiell komponent, med tecken beroende på om den totala inneslutna laddningen är positiv eller negativ. Formulerat med Gauss lag har vi därmed att

$$\iint_{\Omega:|\mathbf{x}|=r} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{V:|\mathbf{x}'| \leq r} \rho(r') dV' = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho(r') \underbrace{4\pi r'^2 dr'}_{=A'} \underbrace{dr'}_{=dV'}$$

vilket vi direkt kan lösa för det radiella elektriska fältet som

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \underbrace{\int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr'}_{\equiv q_{\text{enc}}} = \frac{q_{\text{enc}}}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

där q_{enc} är den laddning som innesluts av sfären med samma radie r som avståndet till en observatör. Notera att denna form är identisk med den som skulle erhållas för situationen då all inneslutna laddning q_{enc} istället skulle placeras som en punktladdning i origo.

Detta resultat för det elektriska fältet är helt och hållet i analogi med exempelvis den gravitation (gravitationskraft dividerat med massa) som vi skulle uppleva om vi tänker oss ett experiment där vi gräver ett mycket djupt hål i jordskorpan och klättrar nedför detta hål mot centrum av jordklotet.³ Vi skulle i detta tanke-experiment uppleva en successivt mindre och mindre tyngdkraft, motsvarande attraktionskraften från den massa m_{enc} som omsluts av den radie r vid vilken vi råkar befinna oss på.⁴

³ Vi ignorerer det faktum att det skulle bli mycket varmt efter ett par kilometer ner, och att vi ganska snart skulle brinna upp! Endast 5 km ner i jordskorpan har vi typiskt en temperaturökning på cirka 125–150° C relativt yttemperaturen.

⁴ Ironiskt nog med exakt samma notation i den ingående integralen för m_{enc} (kg), men med $\rho(r)$ istället betecknande *densiteten* (kg/m³) för jorden.

Terminologi

För att beskriva grundläggande egenskaper hos ett material, och då inte bara ur elektromagnetisk synvinkel, så finns några grundläggande begrepp som kan vara bra att ha i bakhuvudet:

- *Isotrop*: Invariant under godtycklig rotation.
 ”*Mediet beter sig lokalt likadant oavsett i vilket riktning man tittar.*”
 $\rightarrow P_i = \epsilon_0 \chi_e E_i$ (med χ_{ij} diagonal).
- *Anisotrop*: Egenskaperna hos mediet i ett fixt koordinatsystem (“labbsystem”) ändras under rotation.
 $\rightarrow P_i = \epsilon_0 \sum_j \chi_{ij} E_j$.
- *Homogen*: Egenskaperna hos mediet är samma oavsett vilken punkt man observerar.
Notera att ett homogen medium fortfarande kan vara anisotrop!
 $\rightarrow \chi_{ij} = \text{konstant, oberoende av } \mathbf{r}$.
- *Inhomogen*: Egenskaperna hos mediet varierar beroende på var i rummet man observerar dem.
Notera att ett inhomogen men i övrigt lokalt isotrop medium ger effekter som kan vara beroende på riktning! Ett vardagligt exempel är polarisation hos solljuset som når oss vid solnedgång.
 $\rightarrow \chi_{ij} = \chi_{ij}(\mathbf{r})$.
- *Dispersion*: Egenskaperna hos mediet varierar beroende på vilken frekvens ett drivande fält har.
Vardagligt exempel: Färger från vitt ljus som bryts i en kristall (eller billig lins).
 $\rightarrow \chi_{ij} = \chi_{ij}(\omega)$.

Anisotropi

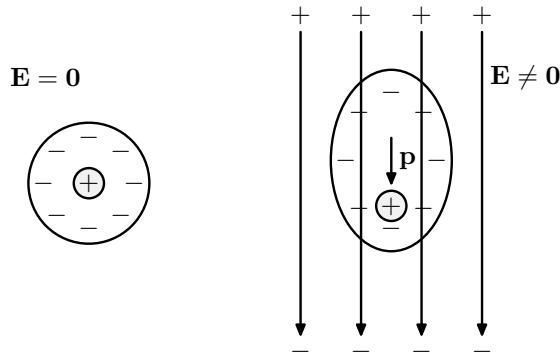
För molekyler som är låsta i gitter (kristallina strukturer) är polarisabiliteten generellt en *tensor* som komponentvis ger hur polarisabiliteten i en viss riktning påverkas av en given komposit hos det externt pålagda elektriska fältet E_k , som

$$p_j = \alpha_{jk} E_k \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}.$$

Denna form svarar för effekter som exempelvis dubbelbrytning och optisk aktivitet, samt även Faraday-rotation (i vilken ett statiskt pålagt magnetfält skapar en anisotropi).

Elektrisk polarisationsdensitet

I ett dielektrikum är laddningarna bundna till molekylerna i ett effektivt "moln" av elektroner kring en kärna. Om detta moln av elektroner ligger centrerat kring kärnan finns inga permanenta elektriska dipoler i mediet, och därmed heller ingen netto-polarisering. Om ett elektriskt fält läggs på över detta dielektrikum kommer dock molnet av elektroner att dras mot den "positiva" källan för de elektriska fältlinjerna, och kommer därmed också att orsaka en elektrisk polarisering av materialet. I den här modellen blir polariseringen av mediet riktad *längs med* fältlinjerna för \mathbf{E} -fältet.



Vi mäter denna inducerade ("påtvingade") polarisering som en *elektrisk polarisationsdensitet* \mathbf{P} , beskrivande det elektriska dipolmomentet per volymenhet (därför "densitet"). Som en förenklad modell kan vi se detta inducerade dipolmoment som linjärt beroende av det pålagda elektriska fältet,⁵

$$\mathbf{P} \equiv \left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dV} \right\rangle = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E},$$

där χ_e är den *elektriska susceptibiliteten* för materialet (χ_e är dimensionslös) och där $\langle \dots \rangle$ betecknar medelvärdesbildning.

Inom elektromagnetisk teori använder vi ofta ett fält som beskriver summan av den effektiva polariseringen som ges av det externt pålagda \mathbf{E} -fältet tillsammans med den elektriska polariseringen av materialet i sig, det så kallade *elektriska flödestätheten* (electric displacement field),

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &\equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ &= \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} \equiv \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Vi kommer framöver alltsom oftast istället för den elektriska susceptibiliteten χ_e att använda den *relativa elektriska permittiviteten* $\epsilon_r \equiv 1 + \chi_e$ (liksom χ_e även den dimensionslös). För material med försumbar magnetisering och i avsaknad av fria laddningar motsvarar $n = \sqrt{\epsilon_r}$ brytningsindex hos materialet (mer om detta i kommande föreläsning om den elektromagnetiska vågekvationen). I kommande analys av Maxwells ekvationer och de från dessa följande elektromagnetiska vågekvationerna kommer vi genomgående att använda ϵ_r för att beskriva materialegenskaperna.

⁵ Uttryckt i den nyligen nämnda *atomära polarisabiliteten* som vi tog fram för en rent elektrostatisk/mekanisk modell motsvarar detta för en densitet med N "atomer" per volym V att

$$\mathbf{P} = (N/V)\alpha \mathbf{E} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E},$$

det vill säga att susceptibiliteten ges i termer av detta oerhört förenklade mått på polarisabiliteten α som

$$\chi_e = (N/V)\alpha/\epsilon_0.$$

Gauss teorem för elektriska flödestätheten \mathbf{D}

Att den elektriska flödestätheten \mathbf{D} är konstruerad som den är faller sig naturligt om vi betraktar, till exempel, hur en mer generell form av Gauss lag kan formuleras i termer av fria såväl som bundna laddningsdensiteter. Genom att använda att sambandet mellan divergensen av polarisationsdensiteten \mathbf{P} och den *bundna* laddningstätheten ρ_b ,⁶

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_b, \quad \left(\Leftrightarrow \iiint_V \rho_b dV = - \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{P} dV = - \iint_{\Omega} \mathbf{P} dA \right)$$

så har vi alltså för divergensen för det elektriska fältet att

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_{\text{tot}} = \rho_b + \rho_f = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho_f.$$

Genom att kombinera divergenserna kan detta skrivas som

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f,$$

där nu alltså källtermen i högerledet endast utgörs av den *fria* laddningstätheten ρ_f , och om vi definierar den elektriska flödestätheten som

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

så lyder alltså denna under Gauss lag

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f.$$

Eftersom denna nu innehåller även den elektriska polarisationsdensiteten hos materialet, med andra ord växelverkan mellan det elektriska fältet och mediet, så är detta en mycket användbar generalisering när vi nu skall analysera gränsytor mellan olika medier.

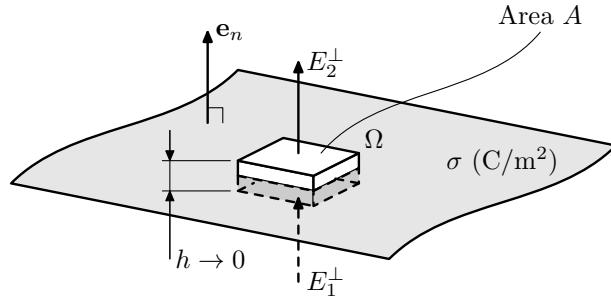
⁶ Griffiths Ekv. (4.12), sidan 174; för härledning av denna, se Griffiths, kapitel 4.2.1, sid. 173–174.

Randvillkor och övergångar mellan olika media

Vid övergångar mellan olika media blir ändringarna på **E**- och **D**-fältens komposanter olika beroende på om de är normala (vinkelräta) eller tangentiala (parallella) mot gränsytan mellan media.⁷

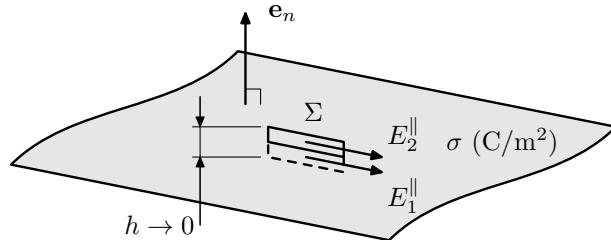
Recap på hoppvillkor för elektriska fält i vakuuum

Först av allt en liten recap på randvillkor ("hoppvillkor") över gränsytor som uppbär en ytladdning σ !



Om vi betraktar en yta med en ytladdningstäthet σ (C/m^2), och inneslårer denna yta med en sluten yta⁸ Ω av höjd $h \rightarrow 0$, som har platta ytor ovanför och under, så har vi från Gauss teorem i elektrostatik att normal-komposanterna (\perp) fältet \mathbf{E}_1 under ytan och fältet \mathbf{E}_2 ovan ytan är relaterade genom:⁹

$$\text{Gauss: } \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \iint_{\Omega} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) A = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad E_2^\perp - E_1^\perp = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



På liknande sätt kan vi analysera tangentiella komposanter (\parallel), parallella med ytan, genom att istället använda Stokes teorem i en sluten rektangulär slinga Σ av höjd $h \rightarrow 0$ och som innehåller gränsytan:

$$\text{Stokes: } \iint_{\Sigma} \underbrace{(\nabla \times \mathbf{E})}_{=-\partial \mathbf{B} / \partial t = 0} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad E_2^\parallel = E_1^\parallel$$

⁷ Se Griffiths s. 185.

⁸ Jackson's *Classical Electrodynamics* kallar denna för "pillbox" medan Griffiths använder det fyndiga och träffande "Gaussian pillbox".

⁹ Självfallet med ytladdningsdensiteten som $\sigma = Q/A$ (C/m^2).

Hoppvillkor för elektriska fält mellan olika media

Vi kan nu använda en analogi till ovanstående för att analysera vad som händer då materialen under och ovanför gränsytan har olika relativ elektrisk permittivitet. För den elektriska flödestätheten har Gauss lag (utifrån $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$) samma form som för det elektriska fältet, med skillnaden att vi nu har den *fria* elektriska laddningstätheten ρ_f som en källterm i högerledet. Med exakt samma geometri som tidigare följer därmed att vi får¹⁰

$$\text{Gauss: } \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = \oint_{\Omega} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q_f \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) A = Q_f \quad \Leftrightarrow \quad D_2^\perp - D_1^\perp = \sigma_f,$$

där σ_f är den *fria* elektriska ytladdningstätheten. Med andra ord, så tar den normalkomposanten av den elektriska flödestätheten \mathbf{D} ett hopp motsvarande den fria ytladdningstätheten σ_f då vi passerar gränsytan.

Utifrån detta resultat är det mycket lätt att förledas att tro att ett “universalrecept” för att behandla elektrostatik i ett medium:

“Vi behöver ju bara byta ut \mathbf{E} mot \mathbf{D} och istället använda de *fria* laddningarna, så har vi ju precis samma resultat. Busenkelt!”

Detta antagande är dock falskt, vilket vi kan se genom att exempelvis betrakta rotationen av den elektriska flödestätheten,

$$\nabla \times \mathbf{D} = \epsilon_0 \underbrace{\nabla \times \mathbf{E}}_{=0} + \nabla \times \mathbf{P} = \nabla \times \mathbf{P},$$

vilken generellt *inte* alltid är identiskt noll.¹¹ Om vi använder Stokes teorem på $\nabla \times \mathbf{P}$ så erhåller vi istället

$$\text{Stokes: } \iint_{\Sigma} \underbrace{(\nabla \times \mathbf{D})}_{\neq 0} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s} \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}_n \times (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \mathbf{e}_n \times (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \\ \Leftrightarrow D_2^\parallel - D_1^\parallel = P_2^\parallel - P_1^\parallel$$

Om vi har två medier av olika relativ permittivitet $\epsilon_r^{(1)} = 1 + \chi_e^{(1)}$ och $\epsilon_r^{(2)} = 1 + \chi_e^{(2)}$, så kan vi sammanfatta detta med att

$$\underbrace{\epsilon_0(1 + \chi_e^{(2)})E_2^\parallel - \epsilon_0(1 + \chi_e^{(2)})E_2^\parallel}_{=D_2^\parallel - D_1^\parallel} = \underbrace{\epsilon_0\chi_e^{(2)}E_2^\parallel - \epsilon_0\chi_e^{(2)}E_2^\parallel}_{=P_2^\parallel - P_1^\parallel} \quad \Leftrightarrow \quad E_2^\parallel = E_1^\parallel,$$

alternativt uttryckt i \mathbf{D} -fältet och de relativa permittiviteterna som

$$\frac{D_2^\parallel}{\epsilon_r^{(2)}} = \frac{D_1^\parallel}{\epsilon_r^{(1)}}$$

¹⁰ Återigen, självfallet med den *fria* ytladdningsdensiteten som $\sigma_f = Q_f/A$ (C/m²).

¹¹ Griffiths har en bra genombelysning av detta i kapitel 4.3.2, sidan 184.

Upplagrad elektrisk energi

Då vi applicerar ett elektriskt fält över ett dielektrikun, så kommer vi att lagra upp energi i det system av mikroskopiska (atomära/molekylära) dipoler som därmed kommer att linjeras upp i det externt pålagda fältet. Som en analogi kan vi se detta som motsvarigheten till en upplagring av mekanisk energi i ett distribuerat system av mycket små men många fjädrar. Det som här tillkommer är att vi dessutom har fria laddningar som kommer att justera position allteftersom jämvikt i systemet uppnås.

Uttrycket för den upplagrade energin (i Joule) hos ett dielektrikun under ett externt pålagt elektriskt fält \mathbf{E} ges av

$$W = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV$$

Härledningen av denna form ges av Griffiths på sidorna 197–198, och är en nyttig övningsuppgift att följa.

Dielektrisk sfär i elektriskt fält

Vi har just sett hur en extremt förenklad modell av en atom kan användas för att kvalitativt beskriva uppkomsten av dipolmoment då systemet utsätts för ett externt pålagt elektriskt fält. Om vi lyfter blicken en aning, så är ett annat intressant objekt en sfär bestående av ett homogent och isotrop medium, för enkelhets skull placerad i ett medium med $\epsilon_e = 1$ (här antar vi att "luft \approx vakuum"). Förutom att vara en mycket användbar modell för spridning av elektromagnetiska fält, så utgör detta enkla system även en intressant exercis i partiella differentialekvationer och elektrostatik.

Om en dielektrisk sfär av radie R och relativ permittivitet (dielektricitetskonstant) ϵ_r placeras i ett elektriskt fält \mathbf{E} , så kommer dipolmomenten i sfären att addera upp till att ge sfären i sig ett netto-dipolmoment \mathbf{p} . Man kan visa att detta dipolmoment ges som¹²

$$\mathbf{p} = \underbrace{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right) R^3}_{= \alpha''} \mathbf{E}_\infty$$

där \mathbf{E}_∞ är det elektriska fältet långt ifrån själva sfären. Faktorn $(\epsilon_r - 1)/(\epsilon_r + 2)$ kallas *Clausius–Mossotti-relationen*¹³. Ur denna relation har vi att den effektiva polarisabiliteten hos sfären i sig ges som

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right) R^3$$

¹² För en härledning av det elektriska fältet inuti en dielektrisk sfär, se Griffiths Exempel 4.7 på sidan 193 (vilket för övrigt är ett mycket bra exempel); alternativt Jackson, s. 151. Se även Griffiths, Problem 4.41, sidan 208 för ett exempel på relationen mellan atomär polarisabilitet α och relativ permittivitet ϵ_r . Clausius–Mossotti-relationen gäller generellt för icke-polära media, medan uttryck enligt Langevin gäller för polära media.

¹³ Efter Ottaviano-Fabrizio Mossotti (1791–1863) och Rudolf Clausius (1822–1888).

Sammanfattning av Föreläsning 6 – Elektriska fält i material

- Den elektriska polarisationsdensiteten \mathbf{P} beskriver det elektriska dipolmomentet per volymenhett. I en förenklad modell av växelverkan mellan fält och materia kan vi se dipolmomentet som linjärt beroende av det pålagda elektriska fältet, med resultatet

$$\mathbf{P} \equiv \left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dV} \right\rangle = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E},$$

där χ_e är den *elektriska susceptibiliteten* för materialet och där $\langle \dots \rangle$ betecknar medelvärdesbildning.

- Den elektriska flödestätheten (*electric displacement field*) definieras som

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} \equiv \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E},$$

där $\epsilon_r \equiv 1 + \chi_e$ är den *relativa elektriska permittiviteten*.

- Gauss lag för den elektriska flödestätheten lyder

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f,$$

där ρ_f är den *fria laddningstätheten*.

- Recap på hoppwillkor för elektriska fält i vakuuum. Normalkomponenter av det elektriska fältet lyder

$$E_2^\perp - E_1^\perp = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

över en yta med ytladdningstätheten som σ , medan tangentialkomponenter lyder

$$E_2^\parallel = E_1^\parallel.$$

- Hoppwillkor för elektriska fält mellan olika dielektrika. Normalkomponenter av det elektriska fältet lyder

$$D_2^\perp - D_1^\perp = \sigma_f,$$

där σ_f är den *fria* elektriska ytladdningstätheten, medan tangentialkomponenter lyder

$$D_2^\parallel - D_1^\parallel = P_2^\parallel - P_1^\parallel.$$

Om vi har två medier av olika relativ permittivitet $\epsilon_r^{(1)}$ och $\epsilon_r^{(2)}$, så har vi

$$E_2^\parallel = E_1^\parallel \quad \Leftrightarrow \quad D_2^\parallel / \epsilon_r^{(2)} = D_1^\parallel / \epsilon_r^{(1)}.$$

- Den upplagrade energin (Joule) hos ett dielektrikum i ett externt pålagt elektriskt fält \mathbf{E} ges av

$$W = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV.$$