UPPSALA
UNIVERSITET

*Elektromagnetism II, 1TE626 (2025)*
*Lecture Notes, Fredrik Jonsson*

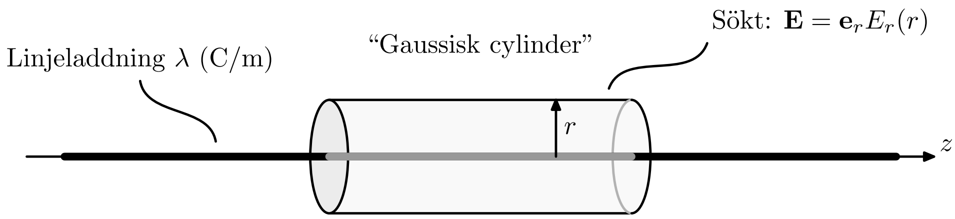
# Föreläsning 2

## Elektrisk potential och tillämpningar av Gauss lag

Fredrik Jonsson, Uppsala Universitet, 4 november 2025

**Tillämpning av Gauss lag - Rak linjeladdning**

Antag att vi vill beräkna den elektriska fältstyrkan ("det elektriska fältet") på avståndet $r$ vinkelrätt från från en laddning fördelad på en oändlig och rak linje, med linjeladdningstätheten $\lambda$ (C/m). Ett sätt att attackera detta problem vore att betrakta varje liten del $dl$ av linjeladdningen som en punktladdning $dq = \lambda dl$ och integrera alla delbidrag genom Coulombs lag, förhoppningsvis med konvergens trots att vi integrerar från minus till plus oändligheten.[1] Att utföra denna integral är förvisso möjligt, men genom att använda Gauss lag applicerad på symmetrin i detta specifika problem kan vi komma fram till lösningen väsentligt mycket enklare.




Vi placerar en "gaussisk cylinder" av radie $r$ och längd $l$ centrerad runt linjeladdningen och antar vidare att linjeladdningen inte kommer att ge något nettobidrag av fältlinjer genom ändytorna av cylindern. Gauss lag ger då direkt, utan att behöva lösa någon integral, att

$$\oint\!\!\!\oint_A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\underbrace{\iiint_V \rho(\mathbf{x})\,dV}_{\text{Innesluten laddning}} \qquad \Leftrightarrow \qquad E_r(r)2\pi r l = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda l \qquad \Leftrightarrow \qquad E_r(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

*Alternativ analys för rak linjeladdning*

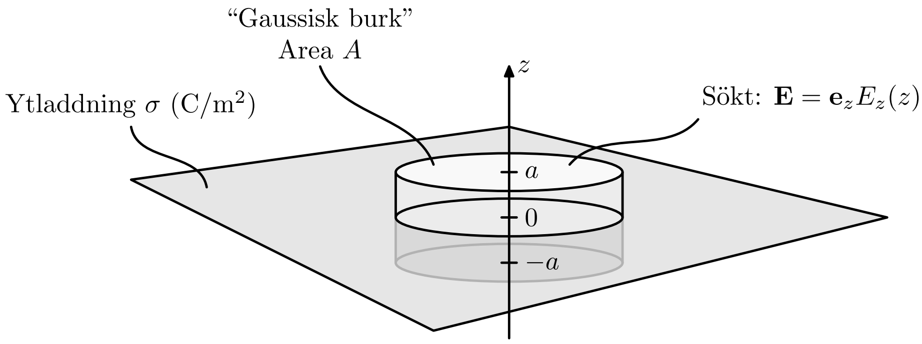
Det finns självfallet alltid ett alternativ till användandet av Gauss lag, som i fall där symmetrier saknas kan vara en omständligare väg. Låt oss därför illustrera en alternativ lösningsmetod för samma problem. Om vi istället väljer att lösa detta specifika problem genom att summera upp samtliga delbidrag till det elektriska fältet i observationspunkten $\mathbf{x} = \mathbf{e}_r r$ (om vi väljer $z = 0$) från linjeladdningen via Coulomb-integralen, så har vi med källpunkter $\mathbf{x}' = \mathbf{e}_z z$ att

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}dq' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\mathbf{e}_r r - \mathbf{e}_z z')}{|\mathbf{e}_r r - \mathbf{e}_z z'|^3}\lambda dz' = \{\text{ Antisymmetri längs } z \text{ }\}\\ &= \mathbf{e}_r\frac{\lambda r}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz'}{(r^2+z'^2)^{3/2}} = \mathbf{e}_r\frac{\lambda r}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\left[\frac{z}{r^2(r^2+z'^2)^{1/2}}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=2/r^2} = \mathbf{e}_r\underbrace{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}_{=E_r(r)}.\end{aligned}$$

[1] På förhand vet vi att detta kommer att vara giltigt, då vi vet att det elektriska fältet avklingar med kvadraten på avståndet.

**Tillämpning av Gauss lag - Plan ytladdning**

Nästa exempel på tillämpning av Gauss lag gäller att bestämma det elektriska fältet på avståndet $a$ från en plan yta, uppbärande laddningstätheten $\sigma$ (C/m$^2$), med målet att bestämma det elektriska fältet ut från denna yta. Vi utnyttjar planariteten genom att lägga en plan-parallell "gaussisk burk" inneslutande en del av ytan. Om vi konstruerar burken så att de planparallella ytorna omsluter ytan med samma avstånd till ytan, så kan vi dessutom utnyttja ömsesidig symmetri mellan dessa. I figuren är denna "gaussiska burk" utritad som en cylinder, men formen av burken är betydelselös så längs som locket och botten är planparallella mot ytan.[2]




På samma sätt som för linjeladdningen i föregående exempel, ger Gauss lag direkt, utan att behöva lösa någon integral, att

$$\oint\!\!\!\oint_A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\underbrace{\iiint_V \rho(\mathbf{x})\,dV}_{\substack{\text{Innesluten}\\ \text{laddning}}} \quad\Leftrightarrow\quad \underbrace{(\mathbf{e}_z E_z(a))\cdot(A\mathbf{e}_z) + (\mathbf{e}_z \underbrace{E_z(-a)}_{=-E_z(a)})\cdot(-A\mathbf{e}_z)}_{=2E_z(a)A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma A,$$

det vill säga

$$E_z(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\mathrm{sgn}(z).$$

Vi noterar att det elektriska fältet ut från den (i detta exempel) oändliga ytladdningen är *oberoende av avståndet från ytan*, något som rent fysikaliskt är lätt att inse då fältlinjerna rent geometriskt alla måste vara parallella med varandra, med följd att det elektriska flödet genom en godtycklig testyta ett avstånd från ytladdningen måste vara konstant, med lika många skärande fältlinjer oavsett avstånd.

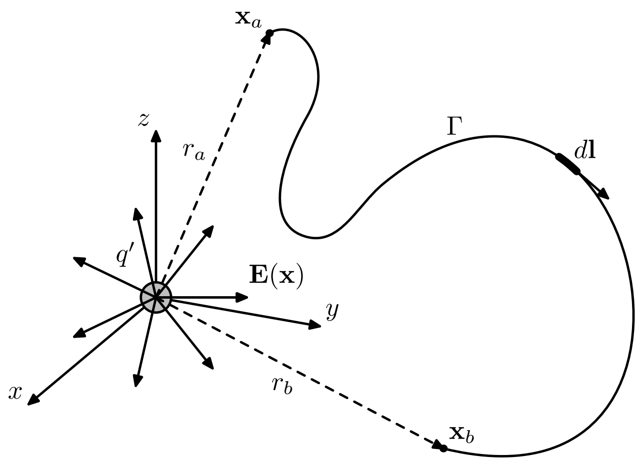
Självfallet är det i praktiken ofysikaliskt med ett konstant elektriskt fält som sträcker sig ut mot oändligheten, då detta i så fall skulle svara mot en oändlig upplagrad energi i fältet. Vi skall hålla i minnet att en "oändlig yta" här betyder att vi har en yta för vilken vi för den aktuella höjden $z$ kan bortse från randeffekter.

[2] Griffiths använder i Exempel 2.5, sid. 74, en rektangulär "Gaussian pillbox" för samma uppgift.

**Rotationen för det statiska elektriska fältet**

Som vi har sett kan det statiska elektriska fältet räknas fram genom att exempelvis summera upp (eller integrera) bidrag från punktladdningar, lineladdningar eller volymsladdningar via Coulomb-integralen, varefter vi genom att applicera superpositionsprincipen kan ta fram det totala fältet. Vi har även konstaterat att divergensen för det elektriska fältet ges av Gauss lag på differentialform, som $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$. Av ren nyfikenhet, låt oss därför se vad *rotationen* hos det statiska elektriska fältet kan uttryckas som.[3]

Betrakta en punktladdning, som vi för enkelhets skull nu placerar i origo $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$ för observationssystemet. Vi kommer i denna analys att utnytta Stokes teorem applicerat på en linjeintegral för en godtycklig trajektoria runt om i det statiska elektriska fält som omger punktladdningen. Redan nu kan vi passa på att mentalt associera denna situation med en analogi med massa och gravitation.




Med punktladdningen $q'$ placerad i origo har vi det statiska elektriska fältet uttryckt i sfäriska koordinater som

$$\mathbf{E}(r) = \underbrace{\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}_{=E_r(r)} \mathbf{e}_r.$$

Om vi analyserar linjeintegralen för en godtycklig trajektoria $\Gamma$ mellan två godtyckliga punkter $\mathbf{x}_a$ och $\mathbf{x}_b$ i rummet, så har vi uttryckt i sfäriska koordinater att

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \int_\Gamma (\mathbf{e}_r E_r + \mathbf{e}_\varphi \underbrace{E_\varphi}_{0} + \mathbf{e}_\vartheta \underbrace{E_\vartheta}_{0}) \cdot \underbrace{(\mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\varphi r \sin(\vartheta) d\varphi + \mathbf{e}_\vartheta r d\vartheta)}_{d\mathbf{l} \text{ i sfäriska koordinater}} \\ &= \int_{r_a}^{r_b} \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr \\ &= \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)\end{aligned}$$

där $r_a = |\mathbf{x}_a|$ och $r_b = |\mathbf{x}_b|$ är avstånden från origo till punkterna $\mathbf{x}_a$ respektive $\mathbf{x}_b$. Vi kan redan från detta uttryck ana oss till att vi strax kommer att tolka detta som en potentialskillnad mellan punkterna, men vi kan först konstatera att om vi analyserar $\Gamma$ i form av en *sluten* trajektoria, så kommer start- och slutpunkten att självfallet ha samma avstånd $r_a = r_b$ till origo, med följd att

$$\oint_\Gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

[3] Se Griffiths sid. 77–78.

Då vi applicerar *Stokes teorem* på detta resultat,[4]

$$\iint\limits_A \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint\limits_\Gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

där $A$ är den uta som innesluts av den slutna trajectorian $\Gamma$, så ser vi att eftersom $\Gamma$ kan väljas som en *godtycklig* sluten trajektoria att rotationen av det *statiska* elektriska fältet måste vara identiskt noll,

$$\iint\limits_A \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

Detta resultat härleddes här för en enskild punktladdning; dock är detta resultat direkt möjligt att generalisera för en godtycklig distribution av elektrisk laddning, eftersom superpositionsprincipen direkt ger att ett totalt fält som är sammansatt av ett antal delbidrag $\mathbf{E}_k$ uppfyller att

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \sum_k \mathbf{E}_k = \sum_k \underbrace{\nabla \times \mathbf{E}_k}_{=0} = \mathbf{0}.$$

Vi kan här notera hur kraftfullt superpositionsprincipen återigen kommer till assistans genom att låta oss lösa ett förhållandevis enkelt problem för punktladdningar och därefter enkelt låta oss generalisera speciallösningen till en godtycklig distribution av elektriska laddningar.

### Elektrostatisk skalär potential

Utifrån resonemanget kring linjeintegralen som vi kunde använda för att via Stokes teorem påvisa att rotationen av det statiska elektriska fältet måste vara identiskt noll, så är inte steget långt till att associera den elektriska laddningen $q'$ med analogin av massa och gravitation.[5]

För att rekapitulera så har vi funnit att $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ överallt, och vi kan erinra oss att vi har en vektoridentitet som lyder[6]

$$\nabla \times (\nabla f) = 0,$$

för godtycklig "well behaved" skalär funktion $f(\mathbf{x})$. Redan här kan vi dra slutsatsen att det elektriska fältet måste gå att uttrycka som en gradient av någon skalär funktion, och det är i stort sett detta som är det grundläggande argumentet för existensen av den skalära elektrostatiska potentialen. Vi kan även rekapitulera att vi tog fram $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ som en direkt följd av formen av Coulombs generaliserade lag,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint\limits_V \rho(\mathbf{x}') \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \, dV',$$

så frågan är hur vi kan omformulera denna som en gradient av någon skalär funktion.

"Tricket" i hur denna tolkning skall ske ligger i observationen att faktorn $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3$ i integranden, som är det enda i integralen som beror på observationspositionen $\mathbf{x}$, kan omformuleras som gradienten

$$\begin{aligned}
\nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \frac{1}{\big((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\big)^{1/2}} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\big(2(x - x'), 2(y - y'), 2(z - z')\big)}{\big((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\big)^{3/2}} \\
&= -\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}.
\end{aligned}$$

---

[4] Se exempelvis innerpärmen på Griffiths, "Curl Theorem".

[5] I framtagandet av potentialen gör vi här ett avsteg från Griffiths, som istället valt att visa på existensen av en skalär potential via linjeintegraler i det rotationsfria statiska elektriska fältet. Vi kommer här istället att visa hur potentialen direkt följer av hur den generaliserade formen av Coulombs lag kan tolkas som en gradient. Den variant av härledning som här presenteras följer exempelvis J. D. Jackson, *CLassical Electrodynamics*.

[6] Se exempelvis innerpärmen på Griffiths, "Second Derivatives", Ekv. (10).

Eftersom $\nabla$ opererar på koordinater $\mathbf{x}$ i observationssystemet där vi ju observerar det elektriska fältet, eller *labsystemet* om vi så vill, och eftersom integralen utförs i det primmade systemet $\mathbf{x}'$ där vi summerar upp alla bidrag från den elektriska laddningen, så kan vi bryta ut gradienten utanför integralen, med resultatet

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint\limits_V \rho(\mathbf{x}') \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\, dV' \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint\limits_V \rho(\mathbf{x}') \underbrace{\nabla \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}_{\nabla \text{ opererar på } \mathbf{x}} dV' \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \iiint\limits_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\, dV' \\
&= -\nabla\phi(\mathbf{x}),
\end{aligned}$$

där vi *definierade* den skalära elektrostatiska potentialen $\phi(\mathbf{x})$ som[7]

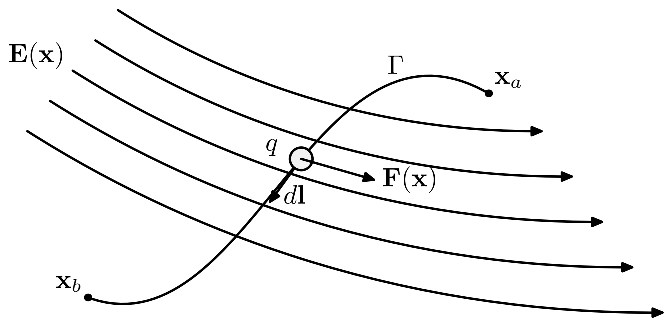
$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint\limits_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\, dV'.$$

Notera att formen av det elektriska fältet som en gradient av en skalär funktion gör att vi trivialt erhåller

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla \times (\nabla\phi(\mathbf{x})) = \mathbf{0}.$$

### Arbete och upplagrad energi vid förflyttning av elektriska laddningar

Med definitionen av den elektrostatiska skalära potentialen i bagaget betraktar vi nu en testladdning $q$ som förflyttas[8] i ett elektrostatiskt fält $\mathbf{E}(\mathbf{x})$, från en punkt $\mathbf{x}_a$ till en punkt $\mathbf{x}_b$ längs en trajektoria $\Gamma$.




Kraften som verkar på laddningen vid en given punkt $\mathbf{x}$ längs trajektorian är

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = q\mathbf{E}(\mathbf{x}),$$

[7] Vi kommer i denna serie av föreläsningar att genomgående använda $\phi$ för att beteckna skalär potential. Denna notation avviker från Griffiths, som olyckligtvis använder $V$ som notation för variabeln för potential, som därmed lätt kan råka förväxlas med *enheten* Volt.

[8] Notera självmotsägelsen i detta, i och med att vi så fort vi förflyttar en laddning inte längre har att göra med någon "elektrostatik" hos stillastående laddningar; vi antar här dock att förflyttningen sker så pass långsamt (adiabatiskt) att Lorentz-kraften på laddningen kan försummas, och att vi därmed även försummar eventuella genererade magnetfält genom förflyttningen, som de facto definierar en *ström* i rummet.

och det arbete $W$ som utförs då vi förflyttar testladdningen ges därmed som[9]

$$\begin{aligned} W &= -\int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_b} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l} \\ &= -q \int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_b} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l} = \left\{ \text{ Använd definitionen } \mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi(\mathbf{x}) \right\} \\ &= q \int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_b} \nabla\phi(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l} = \left\{ \text{ Gradientteoremet: } \textstyle\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \nabla f \cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) \right\} \\ &= q\big(\phi(\mathbf{x}_b) - \phi(\mathbf{x}_a)\big) = W_b - W_a, \end{aligned}$$

där skillnaden $W_b - W_a$ är skillnaden i potentiell energi för testladdningen under det att den förflyttats från $\mathbf{x}_a$ till $\mathbf{x}_b$.

Vi bör här passa på att erinra oss att själva ordet "potential" medför en stor risk att man per automatik leds in till tankebanan att $\phi$ i sig skulle vara en "potentiell energi", vilket ej är fallet. Vår potential har dock den fysikaliska dimensionen av Volt, och en potentialskillnad låter sig självfallet uttryckas i denna enhet.

En annan märklig egenskap hos den skalära elektrostatiska potentialen är att denna variabel via gradienten i definitionen av det elektrostatiska fältet $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ ger upphov till *tre* komponenter $(E_x, E_y, E_z)$. Hur är detta magiska möjligt? Hur kan *en* variabel plötsligt ge upphov till *tre* oberoende variabler?

Svaret till denna paradox[10] är att de tre komponenterna hos det elektrostatiska fältet inte är oberoende, utan är sammanlänkade via $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ som

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z}, \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}.$$

### Poissons ekvation för den skalära potentialen

Som en avslutning på denna föreläsning vi passar vi på att konstatera att Gauss lag på differentialform, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$, sammantaget med själva definitionen för den skalära potentialen, $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, ger att den partiella differentialekvation som beskriver den elektriska potentialen ges som *Poissons ekvation*,

$$\nabla^2\phi(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x})/\varepsilon_0.$$

Denna skalära ekvation är fundamental vid beräkningar av elektrostatiska fältproblem och är synnerligen väl lämpad för numerisk analys. Griffiths anser den så fundamental att den till och med är en av de två ekvationer som listas på omslaget till hans *Introduction to Electrodynamics*!

[9] För gradientteoremet, se exempelvis innerpärmen på Griffiths.

[10] *Paradox* (av latin para'doxus "paradoxal", av likabetydande grekiska paradoxos, av para- och do'xa "mening", "åsikt"), påstående, ofta i komprimerad form, som innebär en motsägelse mot vanlig uppfattning men kan innehålla en djupare sanning.

**Sammanfattning**

- Om möjligt, se till att utnyttja eventuella symmetrier för att förenkla lösande av problem genom att applicera Gauss lag,
$$\oint\!\!\!\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \underbrace{\iiint_V \rho(\mathbf{x})\, dV}_{\substack{\text{Innesluten} \\ \text{laddning}}}$$
Gauss lag är alltid giltig, men det är inte alltid som den har något att bidra i att lösa problem; dock är närvaron av symmetrier ofta en vägledning för vägen framåt.
- Som exempel på tillämpning av Gauss lag, så får vi specifikt för linjeladdningar med laddningstätheten $\lambda$ (C/m) att
$$E_r(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r},$$
samt för ytladdningar på ett plan med laddningstätheten $\sigma$ (C/m$^2$) att
$$E_z(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\, \mathrm{sgn}(z),$$
under antagandet att randeffekter från laddningsfördelningarna kan försummas.
- Rotationen för ett *statiskt* elektriskt fält är alltid noll,
$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0},$$
vilket är en *direkt följd av formen på Coulombs generaliserade lag*,
$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \rho(\mathbf{x}') \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}\, dV'.$$
- Existensen av en skalär elektrostatisk potential $\phi$ följer direkt av att Coulombs generaliserade lag kan tolkas som en gradient av en skalär funktion,
$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \rho(\mathbf{x}') \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}\, dV' = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\, dV' = -\nabla\phi(\mathbf{x}),$$
där den skalära potentialen kort och gott *definieras* som
$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\, dV'.$$
- För specialfallet med en punktladdning placerad i källpunkten $\mathbf{x}'$ motsvaras laddningstätheten av en delta-puls $\rho(\mathbf{x}) = q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, med resulterande potential
$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\, dV' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad \text{för} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}'.$$
- Arbetet $W$ som tillförs en punktladdning $q$ då den förflyttas från positionen $\mathbf{x}_a$ till $\mathbf{x}_b$ i ett elektrostatiskt fält ges via den elektrostatiska potentialen $\phi(\mathbf{x})$ som
$$W = q\big(\phi(\mathbf{x}_b) - \phi(\mathbf{x}_a)\big) = W_b - W_a,$$
där skillnaden $W_b - W_a$ är skillnaden i potentiell energi för testladdningen mellan punkterna.
- Den skalära potentialen $\phi$ lyder *Poissons ekvation*,
$$\nabla^2\phi(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x})/\varepsilon_0.$$