



FÖRELÄSNING 8

MULTIPOLUTVECKLINGEN

Fredrik Jonsson, Uppsala Universitet, 24 november 2025

Sammanfattning av föreläsningen

Vi lämnar för denna föreläsning dipolmodellen för ett tag, och visar på att andra konstruktioner av laddningsfördelningar, exempelvis kvadrupoler och oktopoler, ger bidrag till fält som avklingar med en annan takt än det klassiska $1/r^2$ -uppträdandet. Vi utgår från de klassiska integralerna för den skalära potentialen ϕ och vektorpotentialen \mathbf{A} och ägnar oss åt en statisk modell för multipolutvecklingen. Vi går igenom begreppen dipol, kvadrupol, oktopol och högre ordningar; specifikt visar vi på att även det enklast tänkbara fallet av en elektrisk dipol har högre ordningars multipolmoment närvarande, men att dessa oftast försummas vid betraktelse på stora avstånd. Föreläsningen avslutas med att demonstrera multipolutvecklingen för generella laddningsfördelningar i termer av skalär potential, samt fastställande av dipolapproximationen för elektrostatiske och magnetostatiska fält.

Sammanfattning i tre punkter

1. Multipolutvecklingen är i grund och botten en serieutveckling av potentialen (skalär eller vektor) i inversa potenser av distansen mellan källa och observationspunkt.
2. Multipolutvecklingen klassificeras term för term utifrån hur beroendet av avståndet $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ mellan källpunkt \mathbf{x}' och fältpunkt \mathbf{x} ser ut:
 1. Monopol (1-pol): $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r$
 2. Dipol (2-pol): $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^2$
 3. Kvadrupol (4-pol): $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^3$
 4. Oktopol (8-pol): $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^4$
 5. Hexadecapol (16-pol): $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^5$
 6. Dotriacontapol (32-pol): $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^6$
3. Dipolapproximationen för elektrostatiske ($\mathbf{E} = -\nabla\phi$) och magnetostatiska ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$) fält på långt avstånd $|\mathbf{x}|$ från laddningsfördelningen (källan) ρ lyder

$$\phi(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right), \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3},$$

där q är nettoladdningen och \mathbf{p} dipolmomentet hos en magnetisk dipol samt \mathbf{m} det magnetiska dipolmomentet.

Multipolutveckling av fält

- Formalism för att projicera ut olika bidrag (“moment”) till elektromagnetiska fält.
- Ofta förekommande för karakterisering av antenner.
- Molekyler som interagerar med elektromagnetiska fält agerar som “antennar” vilka kan beskrivas utifrån deras multipolutvecklingar,
- Basen för beskrivning av ϵ_r i konstitutiva relationen $\mathbf{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$ (hur material polariseras av elektriska fält) eller $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$ (hur material magnetiseras av magnetiska fält).
- Oftast fokus på elektrisk dipol-approximation, men vissa fenomen, som optisk aktivitet, kan bara beskrivas om högre ordningars termer tas med.

Vi kommer här att i huvudsak använda de generella uttrycken för elektrisk skalär potential och vektorpotentialen, som¹

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV', \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV',$$

där $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m är den *elektriska permittiviteten för vakuum* (electric permittivity of vacuum), samt $\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6}$ N/A² den *magnetiska permeabiliteten för vakuum* (vacuum magnetic permeability). I dessa uttryck är ρ den elektriska laddningstätheten² (C/m³) och \mathbf{J} den elektriska strömtätheten (A/m²). Vi använder här de generella, tredimensionella uttrycken för potentialerna för att öva på deras tillämpningen, samt för att bygga upp en generell verktygslåda för att problemlösning inom elektromagnetisk fältteori.

För att rekapitulera själva vitsen med att använda den skalära potentialen och vektorpotentialen, så kan vi ur dessa extrahera de *statiska* (ej tidsberoende) elektriska och magnetiska fälten som³

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \underbrace{\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}}_{=0}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Vi kan också konstatera att SI-enheterna för den skalära potentialen och vektorpotentialen är

$$[\phi] = \frac{[\rho][dV']}{[\epsilon_0][\mathbf{x}]} = \frac{(\text{C/m}^3)\text{m}^3}{(\text{F/m})\text{m}} = \{ F = \text{C/V} \} = \text{V},$$

$$[\mathbf{A}] = \frac{[\mu_0][\mathbf{J}][dV']}{[\mathbf{x}]} = \frac{(\text{N/A}^2)(\text{A/m}^2)\text{m}^3}{\text{m}} = \text{N/A}.$$

¹ För formulering av skalära potentialen $\phi(\mathbf{x})$ samt vektorpotentialen $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ från en generell laddningsdistribution, se Griffiths Ekv. (10.26), s. 445. Notera här hur vektorpotentialen $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ har en form som *exakt matchar det uttryck som vi under förra föreläsningen tog fram för samma vektorpotential för ett magnetiserat objekt* med magnetiseringen $\mathbf{M}(\mathbf{x})$, i termer av en *bunden volymström* $\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M}$ (A/m²) och en *bunden ytström* $\mathbf{K}_b = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_n$ (A/m). Detta uttrycker på ett mer generellt plan att vi med förra föreläsningens slutresultat *kan applicera den multipolutveckling som vi nu kommer att gå igenom på ett godtyckligt magnetiserat objekt!*

² Eller om vi så vill, *laddningsdensiteten*, för att anknyta till massdensitet.

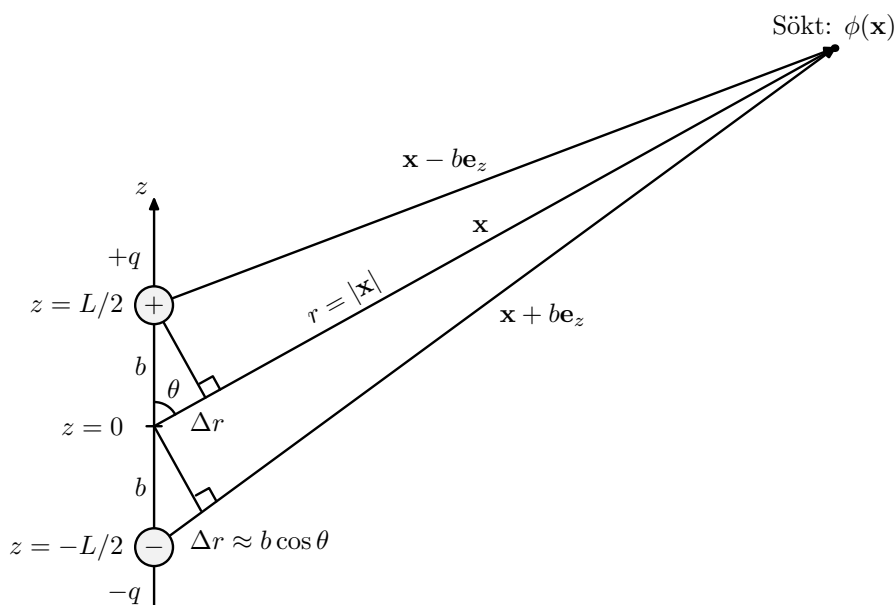
³ Recap på ursprunget för vektorpotentialen: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \exists \mathbf{A} : \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

Multipolutveckling för skalär potential för en elektrisk dipol

Ett av de enklaste testobjekten inom elektromagnetism är den elektriska dipolen,⁴ bestående av en positiv och negativ laddning separerade ett avstånd L . Även för en elektrisk *dipol* finns det (paradoxalt) termer av *multipolmoment* då vi lämnar approximationen att den skalära elektriska potentialen enbart ges av skalärprodukten mellan dipolmomentet och Ortsvektorn till observationspunkten.

Vi betraktar en klassisk elektrisk dipol med två laddningar $+q$ or $-q$ separerade avståndet $L = 2b$. Dipolen kan beskrivas med en laddningsfördelning enligt *distributionen*

$$\rho(\mathbf{x}) = (+q)\delta(\mathbf{x} - b\mathbf{e}_z) + (-q)\delta(\mathbf{x} + b\mathbf{e}_z)$$

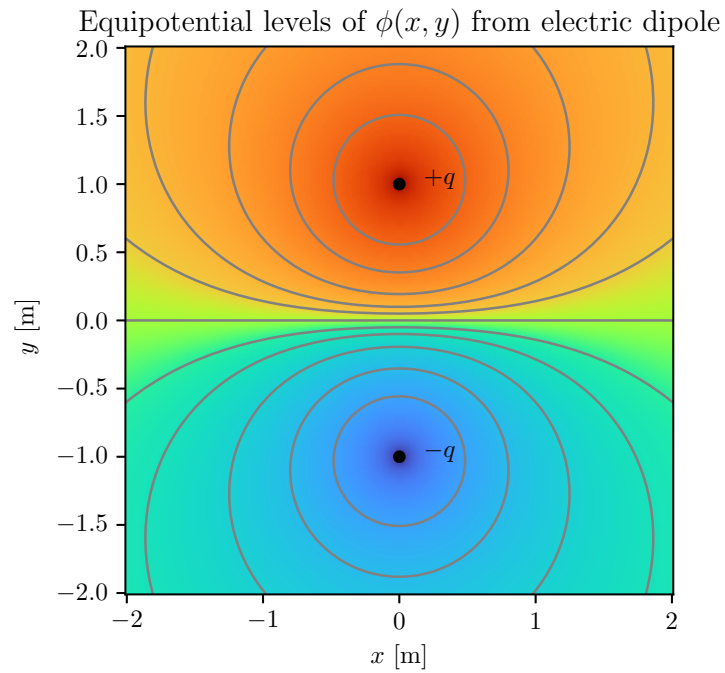


⁴ The English prefixes *bi-*, derived from Latin, and its Greek variant *di-* both mean “two”. The Latin prefix is far more prevalent in common words, such as *bilingual*, *biceps*, and *biped*; the more technical Greek *di-* appears in such words as *diphthong* and *dilemma*.

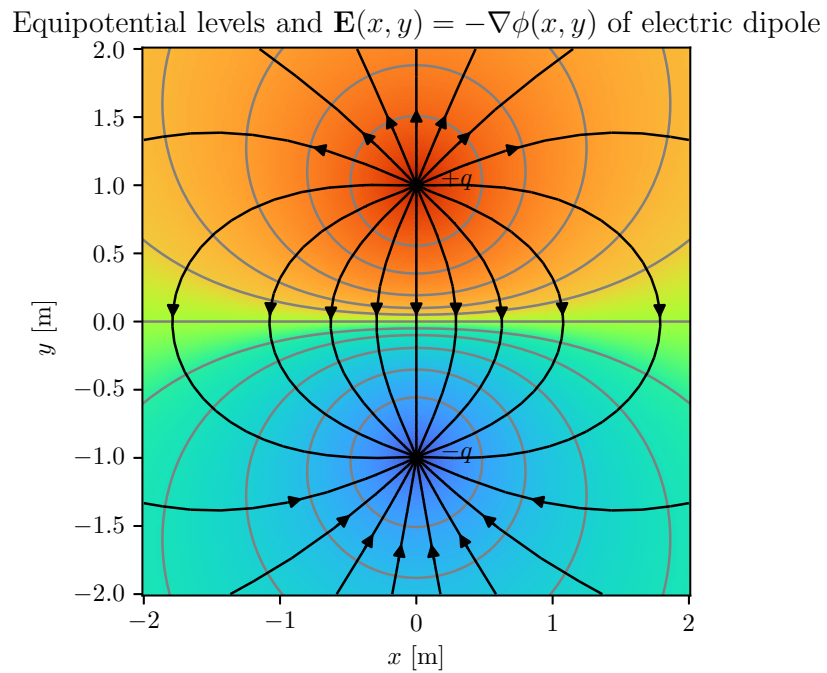
Den *elektriska skalära potentialen* från denna specifika distribution av två punktkällor⁵ blir därmed

$$\begin{aligned}
 \phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(+q)}{|\mathbf{x} - b\mathbf{e}_z|} + \frac{(-q)}{|\mathbf{x} + b\mathbf{e}_z|} \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r - b\cos\theta} - \frac{1}{r + b\cos\theta} \right) \\
 &= \{ \text{Definiera } \varepsilon \equiv (b/r)\cos\theta \} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{1}{1 - \varepsilon} - \frac{1}{1 + \varepsilon} \right) \\
 &= \{ \text{Taylor-utveckling för litet } \varepsilon \} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} ((1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \dots) - (1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \dots)) \\
 &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} (\varepsilon + \varepsilon^3 + \varepsilon^5 + \dots) \\
 &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(\underbrace{\frac{b\cos\theta}{r^2}}_{\text{dipol}} + \underbrace{\frac{(b\cos\theta)^3}{r^4}}_{\text{oktopol}} + \underbrace{\frac{(b\cos\theta)^5}{r^6}}_{\text{dotriacontapol}} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

⁵ Vi utgår här ifrån den generella tre-dimensionella volymintegralen av en laddningsdensitet $\rho(\mathbf{x})$, bara för att illustrera hur vi kan tillämpa denna även för lokaliserade punktladdningar.



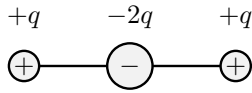
Skalär potential $\phi(x, y)$ för en elektrisk dipol.



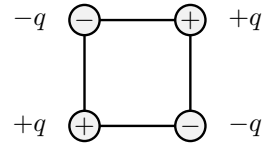
Skalär potential $\phi(x, y)$ för en elektrisk dipol med fältlinjer för $\mathbf{E}(x, y) = -\nabla\phi(x, y)$.

Exempel på multipoler

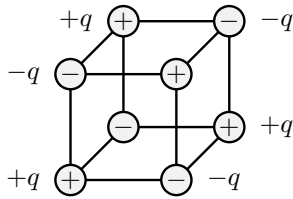
Som en relativt enkel illustration av multipoler kan vi konstruera olika multipolmoment utifrån diskreta laddningar.



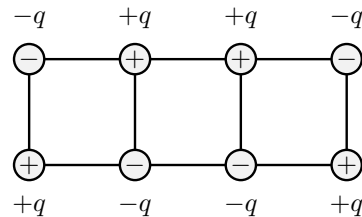
Linjär elektrisk kvadrupol



Kvadratisk elektrisk kvadrupol



3D kubisk elektrisk oktopol



Planär dubbel-kvadratisk elektrisk oktopol

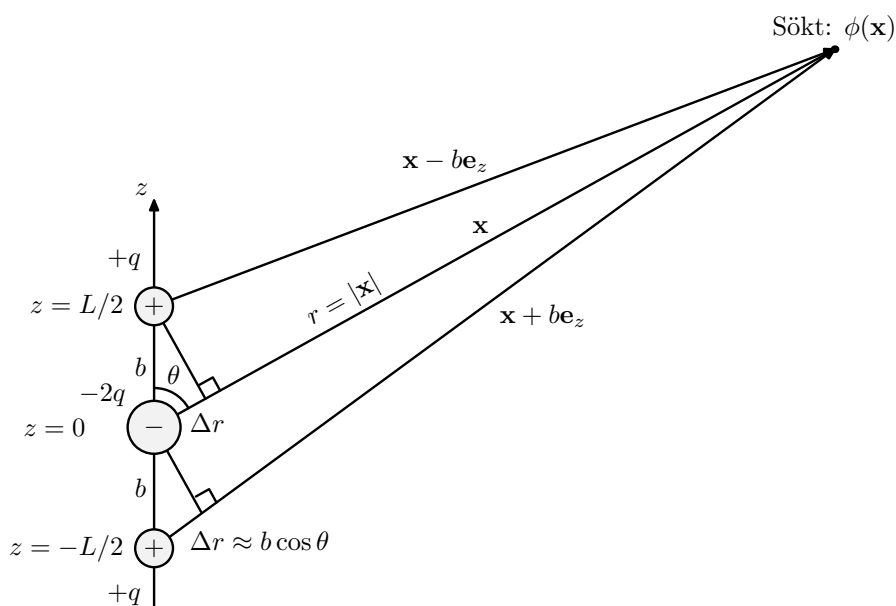
En intressant övning är att gå igenom dessa specifika multipoler och upprepa den geometriska analysen för dipolen, för att på så sätt extrahera styrkan på de olika multipolmomenten.

Multipolutveckling för skalär potential för en linjär elektrisk kvadrupol

Låt oss göra en liten ändring på den elektriska dipolen i föregående exempel, och istället lägga en punktladdning $-2q$ i centrum med två punktladdningar $+q$ på diametralt motsatt sida om denna. Denna konfiguration kan beskrivas med *distributionen*

$$\rho(\mathbf{x}) = (+q)\delta(\mathbf{x} - b\mathbf{e}_z) + (-2q)\delta(\mathbf{x}) + (+q)\delta(\mathbf{x} + b\mathbf{e}_z),$$

precis analogt med det föregående fallet för den elektriska dipolen.



På exakt samma sätt som tidigare, med den enda skillnaden att vi nu har *tre* laddningar (källtermer) för den skalära potentialen $\phi(\mathbf{x})$, så har vi att

$$\begin{aligned}
 \phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(+q)}{|\mathbf{x} - b\mathbf{e}_z|} + \frac{(-2q)}{|\mathbf{x}|} + \frac{(+q)}{|\mathbf{x} + b\mathbf{e}_z|} \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r - b\cos\theta} - \frac{2}{r} + \frac{1}{r + b\cos\theta} \right) \\
 &= \{ \text{Definiera } \varepsilon \equiv (b/r)\cos\theta \} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{1}{1 - \varepsilon} - 2 + \frac{1}{1 + \varepsilon} \right) \\
 &= \{ \text{Taylor-utveckling för litet } \varepsilon \} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} ((1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \dots) - 2 + (1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \dots)) \\
 &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} (\varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^6 + \dots) \\
 &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(\underbrace{\frac{(b\cos\theta)^2}{r^3}}_{\text{kvadrupol}} + \underbrace{\frac{(b\cos\theta)^4}{r^5}}_{\text{hexadecapol}} + \underbrace{\frac{(b\cos\theta)^6}{r^7}}_{\text{hexacontatetrapol}} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

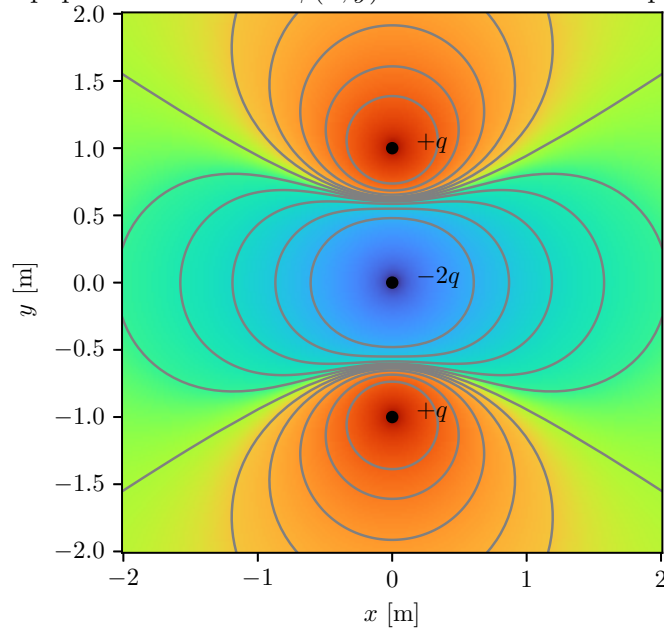
I denna serieutveckling återfinns nu endast *udda* potenser av avståndet r , varav den dominerande termen på stora avstånd kommer att vara den som går som $O(1/r^3)$, svarande mot en elektrisk *kvadrupol*. Värt att notera är att i denna serieutveckling återfinns *ingen dipolterm*.

Klassificering av multipolmoment

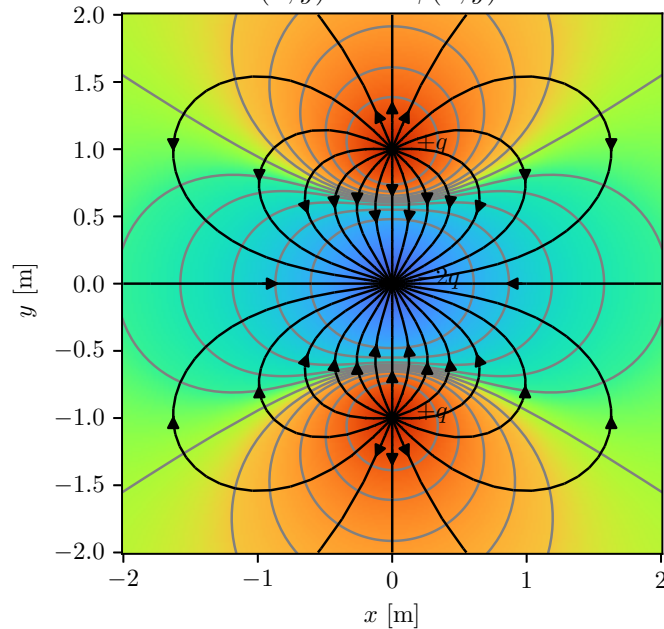
Multipolutvecklingen klassificeras term för term av hur beroendet av avståndet $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ mellan källpunkt \mathbf{x}' och fältpunkt \mathbf{x} ser ut:

- | | | |
|----|-----------------------------|-------------------------------|
| 1. | Monopol (1-pol): | $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r$ |
| 2. | Dipol (2-pol): | $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^2$ |
| 3. | Kvadrupol (4-pol): | $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^3$ |
| 4. | Oktopol (8-pol): | $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^4$ |
| 5. | Hexadecapol (16-pol): | $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^5$ |
| 6. | Dotriacontapol (32-pol): | $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^6$ |
| 7. | Hexacontatetrapol (64-pol): | $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^7$ |
| 8. | ... | ... |

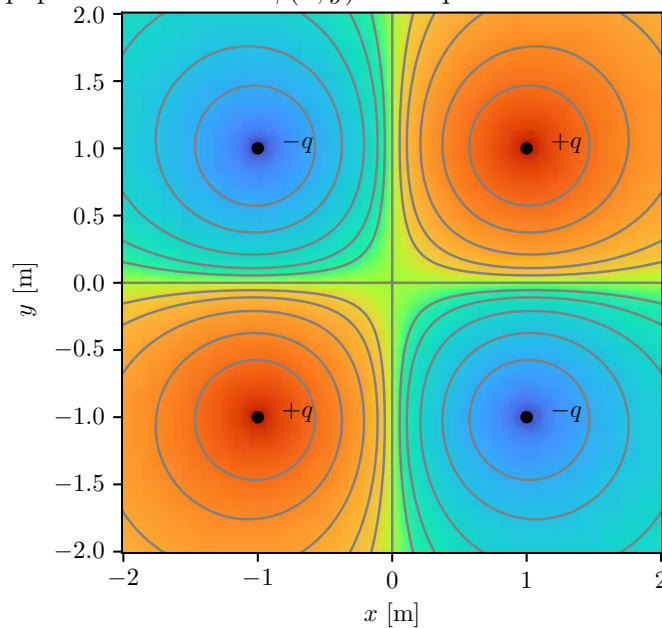
Sammanfattningsvis så har en klassisk elektrisk dipol samtliga multipolmoment som är *jämna*, det vill säga *dipol* ($\phi \sim 1/r^2$), *oktopol* ($\phi \sim 1/r^4$), *dotriacontapole* ($\phi \sim 1/r^6$), etc.

Skalär potential och elektriskt fält för en linjär elektrisk kvadrupolEquipotential levels of $\phi(x, y)$ from linear electric quadrupole

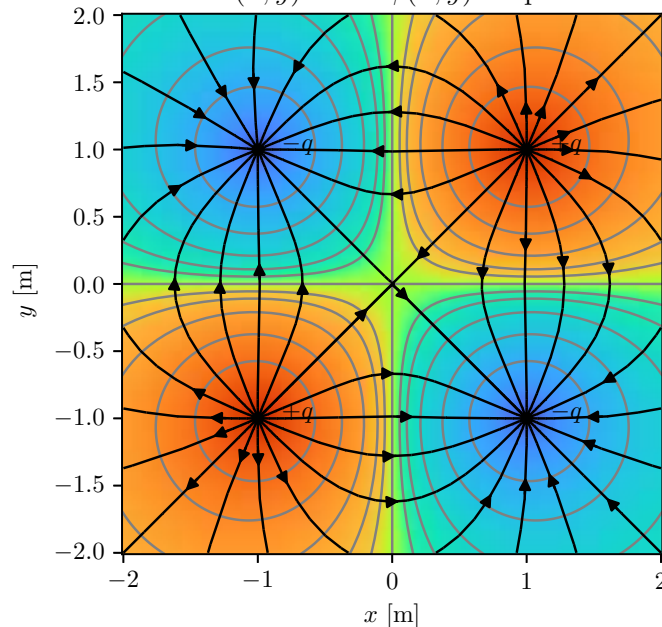
Skalär potential $\phi(x, y)$ för en linjär elektrisk kvadrupol.

Equipotential levels and $\mathbf{E}(x, y) = -\nabla\phi(x, y)$ of linear electric quadrupole

Skalär potential $\phi(x, y)$ för en elektrisk linjär kvadrupol med fältlinjer för $\mathbf{E}(x, y) = -\nabla\phi(x, y)$.

Skalär potential och elektriskt fält för en kvadratisk elektrisk kvadrupolEquipotential levels of $\phi(x, y)$ from quadratic electric quadrupole

Skalär potential $\phi(x, y)$ för en kvadratisk elektrisk kvadrupol.

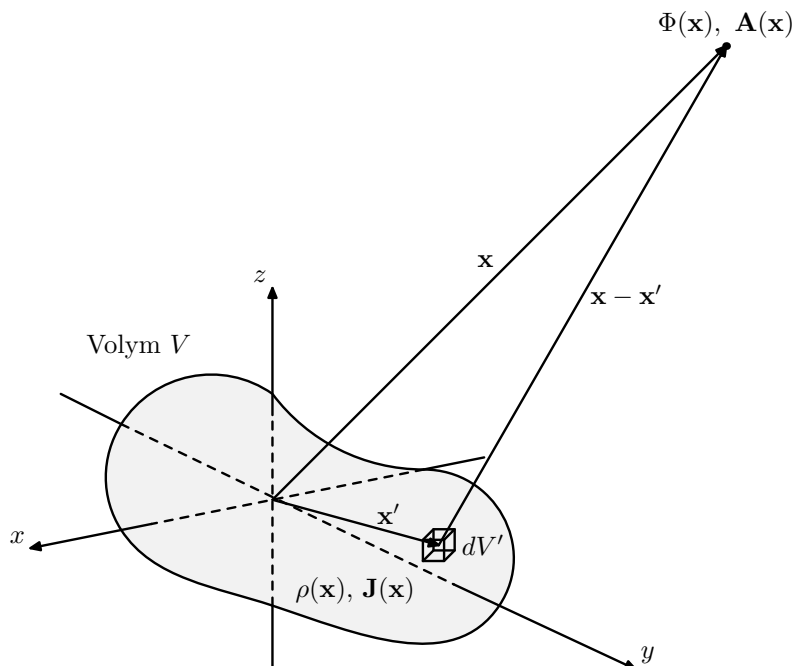
Equipotential levels and $\mathbf{E}(x, y) = -\nabla\phi(x, y)$ of quadratic electric quadrupole

Skalär potential $\phi(x, y)$ för en kvadratisk elektrisk kvadrupol med fältlinjer $\mathbf{E}(x, y) = -\nabla\phi(x, y)$.

Multipolutveckling för generella laddningsfördelningar (i termer av skalär potential)

Betrakta en generell laddningsfördelning enligt figur. Laddningsfördelningen kan vara en generell distribution i 3D, men även i kombinationer av 2D (yt-laddningar, skärmar, jordplan), 1D (linjeladdningar, antenner) eller 0D (punktladdningar). Vi kommer i det följande att använda en geometri i vilken laddningstätheten $\rho(\mathbf{x})$ är lokaliserad i närheten av origo (vilket gör det enklare

att rätt av tillämpa en serieutveckling för laddningsdensiteten i en Taylor-serie), enligt figur.



Den skalära (elektriska) potentialen $\phi(\mathbf{x})$ från en punktkälla q placerad i \mathbf{x}' ges som

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|},$$

eller om vi så vill, det infinitesimala bidraget $d\phi$ till den skalära potentialen vid \mathbf{x} från källan $dq' = \rho(\mathbf{x}')dV'$ vid källpunkten \mathbf{x}' . Den skalära potentialen från distributionen $\rho(\mathbf{x})$ ges därmed analogt genom att helt enkelt summera upp alla bidrag från samtliga $\rho(\mathbf{x}')dV'$ i volymen V , som

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

I denna integral så kan vi se det som att vi summerar upp alla element dV 's infinitesimala laddningar $dq = \rho(\mathbf{x}')dV'$ (eller strömtätheter $\mathbf{J}(\mathbf{x}')dV$ i fallet med vektorpotentialen \mathbf{A}), viktade med en skalär faktor

$$f(\mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

som kort och gott är det inversa geometriska avståndet mellan källpunkten \mathbf{x}' och fältpunkten (observationspunkten) \mathbf{x} . Vi kan, om vi så vill, se detta som en summation av potentialbidragen från alla infinitesimala elektriska *monopoler* som ryms i volymen V .

Liksom i det enkla fallet med dipolen, siktar vi här mot en serieutveckling av denna viktfunction för att enklare kunna tolka de termer som blir resultatet. För att rekapitulera, så var serieutvecklingen i fallet med dipolen i grund och botten en serieutveckling av position för källtermerna, med "litet separations-avstånd L i förhållande till avståndet till observationspunkten \mathbf{x} ". Vi önskar därmed att uttrycka serieutvecklingen i koordinaten \mathbf{x}' för *källan* $\rho(\mathbf{x}')$. Generellt har vi att en Taylor-utveckling i tre dimensioner ges av

$$f(\mathbf{x}') = f(\mathbf{0}) + \sum_{k=1}^3 x'_k \frac{\partial f(\mathbf{x}')}{\partial x'_k} \Big|_{\mathbf{x}'=\mathbf{0}} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 x'_j x'_k \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}')}{\partial x'_j \partial x'_k} \Big|_{\mathbf{x}'=\mathbf{0}} + \dots$$

För "viktfunktionen" $f(\mathbf{x}')$ har vi att

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}') &= \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}, \\
 \frac{\partial f(\mathbf{x}')}{\partial x'_k} &= \frac{\partial}{\partial x'_k} \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{-2(x_k - x'_k)}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = \dots = \frac{x_k - x'_k}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}, \\
 \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}')}{\partial x'_j \partial x'_k} &= \frac{\partial^2}{\partial x'_j \partial x'_k} \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x'_j} \frac{x_k - x'_k}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{\frac{\partial(x_k - x'_k)}{\partial x'_j} ((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2} - (x_k - x'_k) \frac{\partial((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}}{\partial x'_j}}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^3} \\
 &= \dots \\
 &= \frac{3(x_j - x'_j)(x_k - x'_k) - \delta_{jk}((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{5/2}} \\
 &= \frac{3(x_j - x'_j)(x_k - x'_k) - \delta_{jk}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^5}
 \end{aligned}$$

För koefficienterna i Taylor-utvecklingen innebär detta specifikt att

$$f(\mathbf{0}) = \frac{1}{|\mathbf{x}|}, \quad \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}')}{\partial x'_k} \right|_{\mathbf{x}'=\mathbf{0}} = \frac{x_k}{|\mathbf{x}|^3}, \quad \left. \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}')}{\partial x'_j \partial x'_k} \right|_{\mathbf{x}'=\mathbf{0}} = \frac{3x_j x_k - \delta_{jk}|\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}|^5},$$

och vår Taylor-utveckling av viktsfunktionen bistår direkt med respektive multipol-termer i uttrycket för skalära elektriska potentialen som

$$\begin{aligned}
 \phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \left(\frac{1}{|\mathbf{x}|} + \sum_{k=1}^3 \frac{x_k}{|\mathbf{x}|^3} x'_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{3x_j x_k - \delta_{jk}|\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}|^5} x'_j x'_k + \dots \right) \rho(\mathbf{x}') dV' \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\underbrace{\frac{1}{|\mathbf{x}|} \iiint_V \rho(\mathbf{x}') dV'}_{\text{monopol, } q} + \sum_{k=1}^3 \frac{x_k}{|\mathbf{x}|^3} \underbrace{\iiint_V x'_k \rho(\mathbf{x}') dV'}_{\text{dipolmoment, } p_k} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{3x_j x_k - \delta_{jk}|\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}|^5} \underbrace{\iiint_V x'_j x'_k \rho(\mathbf{x}') dV'}_{\text{kvadrupolmoment, } Q_{jk}} + \dots \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\mathbf{x}|} + \sum_{k=1}^3 \frac{x_k p_k}{|\mathbf{x}|^3} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{(3x_j x_k - \delta_{jk}|\mathbf{x}|^2) Q_{jk}}{|\mathbf{x}|^5} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

Notera att för dipoltermen utgörs skalära potentialen av en *skalärprodukt* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}$, medan kvadrupoltermen svarar mot en *matrisprodukt* från vilken spåret ("trace") subtraheras, $3\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} - |\mathbf{x}|^2 \text{Tr}[\mathbf{Q}]$.

Analysen för vektorpotentialen $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ följer på samma sätt, med en helt och hållet analog serieutveckling av "viktfunktionen" $f(\mathbf{x}')$ för den elektriska strömdensiteten $\mathbf{J}(\mathbf{x})$.

Dipolapproximationen för stationära laddningsfördelningar och strömmar

För att sammanfatta ges den stationära skalära potentialen $\phi(\mathbf{x})$ och vektorpotentialen $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ från en laddnings- och strömtäthet i närheten av origo, i dipolapproximation och på långt avstånd från källan, som

$$\phi(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right), \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3},$$

där

$$q = \underbrace{\iiint_V \rho(\mathbf{x}') dV'}_{\text{nettoladdning [C]}}, \quad \mathbf{p} = \underbrace{\iiint_V x'_k \rho(\mathbf{x}') dV'}_{\text{elektriskt dipolmoment [Cm]}}, \quad \mathbf{m} = \underbrace{\frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV'}_{\text{magnetiskt dipolmoment [Am}^2]}. \quad .$$

Från dessa ges de *statiska* elektriska och magnetiska fälten som⁶

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}).$$

Man kan här fråga sig varför multipolutvecklingen för vektorpotentialen \mathbf{A} börjar med dipolmomentet, som går som $\sim 1/|\mathbf{x}|^3$, och inte som den skalära potentialen innehåller någon term som går som $\sim 1/|\mathbf{x}|$? Svaret på denna fråga är självfallet att vektorpotentialen, som är direkt länkad till magnetfältet genom $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, till skillnad från det elektrostatiska fallet *aldrig kan involvera magnetiska monopoler*, varför monopoltermer också saknas för just vektorpotentialen.

⁶ Notera att Ekv. (8.1.5) i Olov Ågrens *Elektromagnetism* (Studentlitteratur, 2014) definierar magnetiska fältet utifrån en konstruerad *magnetisk skalär potential* istället för vektorpotentialen. Vektorpotentialen är här dock mest naturlig att använda, utifrån den grundläggande egenskapen $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ hos magnetiska fältet, med \mathbf{A} som vektorpotentialen.

Sammanfattning av Föreläsning 8 – Multipolutvecklingen

- Multipolutvecklingen är i grund och botten bara en serieutveckling av potentialen (skalär eller vektor) i inversa potenser av distansen mellan källa och observationspunkt.
- Vi tar som vanligt fram uttrycken för potentialerna som

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV', \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'.$$

- Multipolutvecklingen klassificeras term för term utifrån hur beroendet av avståndet $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ mellan källpunkt \mathbf{x}' och fältpunkt \mathbf{x} ser ut:
 1. Monopol (1-pol): $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r$
 2. Dipol (2-pol): $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^2$
 3. Kvadrupol (4-pol): $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^3$
 4. Oktopol (8-pol): $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^4$
 5. Hexadecapol (16-pol): $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^5$
 6. Dotriacontapol (32-pol): $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^6$
- Multipolutvecklingen för den skalära potentialen för en linjär elektrisk *dipol* ges som

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(\underbrace{\frac{b \cos \theta}{r^2}}_{\text{dipol}} + \underbrace{\frac{(b \cos \theta)^3}{r^4}}_{\text{oktopol}} + \underbrace{\frac{(b \cos \theta)^5}{r^6}}_{\text{dotriacontapol}} + \dots \right).$$

Notera att även den elektriska dipolen innehåller närfälts-termer svarande mot högre ordningars moment!

- Multipolutvecklingen för den skalära potentialen för en linjär elektrisk *kvadrupol* ges som

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(\underbrace{\frac{(b \cos \theta)^2}{r^3}}_{\text{kvadrupol}} + \underbrace{\frac{(b \cos \theta)^4}{r^5}}_{\text{hexadecapol}} + \underbrace{\frac{(b \cos \theta)^6}{r^7}}_{\text{hexacontatetrapol}} + \dots \right).$$

Notera att den elektriska kvadrupolen saknar dipolmoment!

- Dipolapproximationen för elektrostatiska ($\mathbf{E} = -\nabla\phi$) och magnetostatiska ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$) fält på långt avstånd $|\mathbf{x}|$ från laddningsfördelningen (källan) ρ lyder

$$\phi(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right), \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3},$$

där

$$q = \underbrace{\iiint_V \rho(\mathbf{x}') dV'}_{\text{nettoladdning [C]}}, \quad \mathbf{p} = \underbrace{\iiint_V x'_k \rho(\mathbf{x}') dV'}_{\text{elektriskt dipolmoment [Cm]}}, \quad \mathbf{m} = \underbrace{\frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV'}_{\text{magnetiskt dipolmoment [Am}^2\text{]}}.$$