UPPSALA
UNIVERSITET

Elektromagnetism II, 1TE626 (2025)
Lecture Notes, Fredrik Jonsson
Document Revision 31 October 2025
https://github.com/hp35/elmagii/

FÖRELÄSNING 4

MAGNETOSTATIK

Fredrik Jonsson, Uppsala Universitet, 11 november 2025

Introduktion

Vi kommer i denna föreläsning att behandla konstanta strömmar, i vilka laddningar (läs: elektroner) rör sig längs givna fält eller trajektorior som i sig är konstanta i rum och tid.[1] Vi kan som en rekapitulation från Föreläsning 1 sammanfatta begreppen elektrostatik och magnetostatik enligt följande:

- Stationära laddningar $\Rightarrow$ Konstanta elektriska fält (elektrostatik)
- Konstanta strömmar $\Rightarrow$ Konstanta magnetiska fält (magnetostatik)

Magnetostatik är studiet av magnetfält i system där närvarande elektriska strömmar är konstanta i tid och rum. Detta är den magnetiska analogin med elektrostatik, där istället de elektriska laddningarna är stationära och fixa i tid och rum. Att vi här har at göra med statiska magnetfält betyder inte att teorin inte går att applicera på tidsberoende problem, bara så länge som förloppen är långsamma nog att för att den elektromagnetiska våglängden i problemet rejält överstiger storleken på domänen som analyseras. TIll exempel kan vanliga elektriska generatorer och motorer, exempelvis startmotorn i en bil eller generatorn i ett vidkraftverk, behandlas som magnetostatiska problem.

Historik

Magnetostatiken kan sägas ha upptäckts 1269 av fransmannen Petrus Peregrinus de Maricourt, som undersökte det magnetiska fältet på ytan av en sfärisk magnet med nålar av järn. Han noterade att de resulterande fältlinjerna som nålarna beskrev korsades på två på sfären motsatta punkter, som han betecknade som "poler" i analogi med jordens poler.[2]

Maricourt formulerade också den synnerligen intressanta observationen att *oavsett hur fint vi skivar en magnet, så har den alltid en nord- och sydpol.* Som vi skall se hänger detta intimt samman med att magnetism alltid manifesterar sig som dipoler (eller högre ordningars multipoler), och *aldrig som magnetisk laddning (monopoler)*, detta som en markant skillnad gentemot elektrisk laddning.

Den som räknas som upptäckaren av att elektriska strömmar genererat magnetiska fält är Hans Christian Œrsted, som 1820 publicerade sin upptäckt att en orienteringen hos en kompassnål påverkas av en elektrisk ström i närheten av nålen. För sin upptäckt belönades Œrsted av *The*

[1] Vi kommer i denna föreläsning att i huvudsak följa Griffiths kapitel 5, sid. 210–.

[2] Intressant nog, som en litet sidospår till Maricourts observationer, så formulerade grekiska filosofer som Empedocles och Anaxagoras redan kring 500 BC hypotesen att jorden sannolikt var rund, utifrån den runda skugga som jorden gav på månen vid en månförmörkelse. Kring 350 BC bistod Aristoteles med observationen att då skepp som seglar iväg försvinner skrovet först ur sikte, före masten, och att detta pekar på att jorden har en rund form. Först 1522 AD fick vi dock "hårt bevis" på att jorden är rund genom Magellan–Elcanos expedition som genomförde den första världsomseglingen och därmed en gång för alla bevisade att vi kan resa hela vägen runt jordklotet.

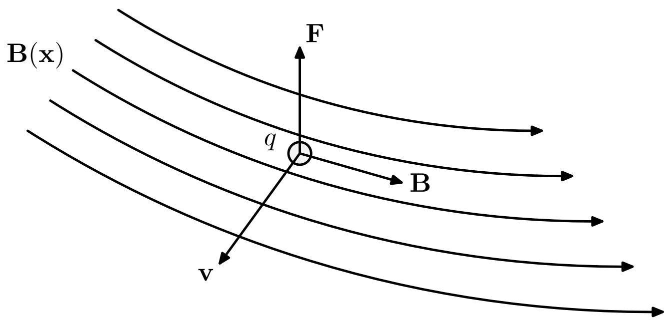
Royal Society i England med Copley-medaljen, samt att den Franska Akademien belönade honom med 3 000 franc. Œrsteds upptäckt kan sägas vara startskottet för arbetet med att formulera den moderna elektromagnetismen, speciellt inspirerade detta den franske fysikern André-Marie Ampère till att formulera en matematisk formel för att beskriva den magnetiska kraften mellan strömslingor.

Vad är ett magnetfält?

> **Definition.** Vi definierar ett magnetfält[3] som ett *fysiskt fält som beskriver magnetisk påverkan på rörliga elektriska laddningar, elektriska strömmar och magnetiska material.*

I någon mån kan vi säga att dessa tre möjligheter egentligen kokar ner till en enda sak, nämligen påverkan av rörliga elektriska laddningar, eftersom elektrisk ström utgörs av rörliga laddningar samt att magnetiska material handlar om hur materialet på en mikroskopisk nivå, eller snarare kvantmekanisk nivå, beter sig i linjering av spinn och magnetiska moment som kan ses som mikroskopiska strömslingor. Den kvantmekaniska behandlingen av spinn och magnetiska moment ligger dock utanför omfattningen av denna kurs.

Lorentz-kraften - Kraften på rörliga laddningar i statiska kombinerade elektriska och magnetiska fält



Problemet med magnetiska fält är att det från ett klassiskt angreppssätt är omöjligt att strikt härleda dem *a priori* från klassiska elektromagnetiska modeller. Vi kommer här att rent axiomatiskt konstatera att ett magnetfält $\mathbf{B}$ är det fält som ger kraften på en rörlig och elektriskt laddad partikel med laddningen q och hastigheten $\mathbf{v}$ som

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Om vi lägger till kraften på laddningen från ett statiskt elektriskt fält, så erhåller vi *Lorentz-kraften*[4]

$$\mathbf{F} = q\big(\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\big).$$

Återigen, vi hävdar här inte att vi i denna kurs på något vis kommer att härleda denna relation; vi kommer här istället att helt luta oss mot att denna form är experimentellt verifierad efter alla konstens regler och därmed nöja oss med det.

[3] I denna kurs betecknar vi magnetfältet också som B-fält, men i andra sammanhang betecknas fältet även som H-fält, beroende vilken ingång och historisk konvention man råkar ha.

[4] Som, liksom Griffiths korrekt påpekar, ursprungligen formulerades av Oliver Heaviside, som senare kom att ha en instrumentell del i formulerandet av den moderna formen av *Maxwell's ekvationer* så som vi idag känner dem.

Magnetisk kraft utför inget arbete

Utifrån formen på Lorentz-kraften kan vi dra en viktig slutsats:

> *Magnetiska krafter utför inget arbete.*

Detta kan spontant tyckas vara motsägelsefullt; trots allt vet vi ju att generatorer och elektriska motorer bygger på magnetfält (och som vi konstaterat så kan vi i dessa fall dessutom behandla de magnetiska fältproblemen som just *magnetostatiska*), så hur skulle dessa inte utföra något arbete?

Argumentet här käller dock att magnetiska krafter faktiskt inte utför arbete på elektrisk laddning, eftersom on laddningen q förflyttas en sträcka

$$d\mathbf{l} = \mathbf{v}dt \qquad \Rightarrow \qquad \text{Utfört arbete:} \quad dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q\underbrace{(\mathbf{v} \times \mathbf{B})}_{\perp \mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}dt = 0,$$

det vill säga att hur vi än förflyttar laddningen i ett magnetiskt fält, så kommer den resulterande Lorentz-kraften att vara ortogonal mot förflyttningen och det resulterande arbetet kommer att vara noll.

Så hur kan generatorer och elektriska motorer fungera om den magnetiska kraften inte utför något arbete? Lösningen till denna paradox är att ovanstående argument håller för en *fri* laddning som inte är låst till en viss trajektoria. För en fri laddning kommer den ortogonala kraften att kontinuerligt ändra riktningen på laddningen, typiskt resulterande i cirkulära eller helixformade banor[5] Om vi exempelvis har ett flöde av elektroner i en strömslinga, så är dessa låsta i sin rörelse, och genom att de inte kan lämna ledaren bidrar de kollektivt till att utöva en kraft på ledaren. Denna kraft på rörelse av laddningar som genom ledare är *begränsade* i sin rörelse utför självfallet arbete.

Ampères kraftlag - Kraften på strömslingor i magnetfält

Vi skall nu gå in på hur krafter verkar på laddningar som transporteras i förutbestämda banor, det vill säga elektrisk ström i strömslingor.

> **Definition** Vi definierar ström som den laddning, vanligtvis elektroner, som transporteras genom en givet tvärsnitt per tidsenhet.

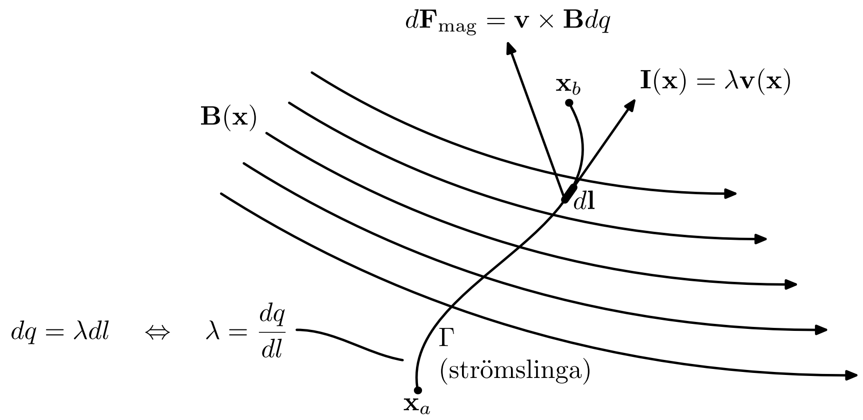
Kort och gott kommer vi i praktiken att definiera ström som det antal Coulomb som passerar en ledares tvärsnitt per sekund, som

$$1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}.$$

Antag att vi har en linjeladdning λ (C/m), det vill säga en viss laddning q utsmetad längs en viss sträcka, och att denna linjeladdning rör sig längs en fix trajektoria (ledare) Γ i rummet med farten v. Under ett ögonblick Δt rör sig med andra ord denna linjeladdning en sträcka $v\Delta t$ längs trajektorian. I ett tvärsnitt av ledaren har vi därmed strömmen

$$I = \frac{(\text{Laddning})}{(\text{tid})} = \frac{\lambda v \Delta t}{\Delta t} = \lambda v.$$

[5] Vilket exempelvis är vad som händer med de laddade partiklar som när de infaller i jordens magnetfält resulterar i högfrekventa helix-formade trajektorior som genererar synligt ljus, så kallat *norrsken*.



Den magnetiska kraften på en strömslinga längs en trajektoria från $\mathbf{x}_a$ till $\mathbf{x}_b$ bärandes denna ström, erhålls därmed genom att summera upp alla delbidrag från de infinitesimala laddningarna i rörelse enligt[6]

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{\mathrm{mag}} &= \lim_{\Delta l \to 0} \sum_k \underbrace{(\mathbf{v}_k \times \mathbf{B}_k)\, \underbrace{\lambda \Delta l}_{=\Delta q}}_{=\Delta \mathbf{F}_{\mathrm{mag}}} \\
&= \int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_b} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \lambda \, dl \\
&= \big\{ \text{ Strömmen är en vektor, } \mathbf{I} = \lambda \mathbf{v} \ \big\} \\
&= \int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_b} (\mathbf{I} \times \mathbf{B}) \, dl.
\end{aligned}$$

Vi brukar beteckna detta som *Ampères kraftlag* för strömslingor, vilket inte skall förväxlas med *Ampères lag* som vi strax skall härleda, och som beskriver hur magnetiska fältet i sig kopplar till en strömtäthet.

Volymströmmar och lagen om att laddning inte kan försvinna

Vi har nu börjat analysera vad som Enligt definitionen som vi hör använder för strömmen I, så är denna dock definierad som den laddning som per tidsenhet passerar *genom ett tvärsnitt*. Vi kan formulera detta som att vi genom en yta S, omsluten av en (sluten) trajektoria Γ, har strömmen given i termer av en *strömtäthet* $\mathbf{J}$, mätt i den laddning som transporteras genom en yta per tidsenhet, eller C/(m^{2}s),

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}.$$

Vi kan självfallet utveckla detta till att gälla den totala ström som passerar genom en *sluten* yta

[6] Griffiths går i Ekv. (5.16), sid. 217, vidare med denna form och konstaterar att strömmen I överallt längs strömslingan är riktad längs linjelementen $d\mathbf{l}$, och att vi därmed för en konstant ström I längs strömslingan kan skriva om detta som

$$\mathbf{F}_{\mathrm{mag}} = I \int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_b} (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}).$$

Denna form är för våra ändamål dock lite förvirrande i notationen, då det *linjeelement* $d\mathbf{l}$ som ingår i kryssprodukten är förvillande likt ett *strömelement* $d\mathbf{I}$. Vi försöker här därför att i möjligaste mån undvika denna form.

S som omsluter en volym V, genom att använda Gauss lag[7]

$$I = \begin{bmatrix}\text{strömmen ut}\\ \text{genom ytan } S\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{strömmen ut}\\ \text{genom ytan } S\end{bmatrix} = \oint\!\!\!\oint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{A} = \iiint_V (\nabla\cdot\mathbf{J})\,dV.$$

Eftersom ingen laddning kan skapas eller förintas internt i volymen (vi erinrar oss att all laddningstransport in eller ut från volymen sker genom den slutna ytan S, så måste den laddning som flödar ut genom ytan göra att den i volymen V inneslutna laddningen minskar i motsvarande grad, det vill säga

$$\iiint_V (\nabla\cdot\mathbf{J})\,dV = -\frac{d}{dt}\Big[\text{Innesluten laddning}\Big] = -\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\,dV = -\iiint_V \frac{d\rho}{dt}\,dV$$

Flödet i den slutna ytintegralen definieras som flödet *ut genom ytan*, och vi kan som en liten *sanity check* konstatera att minustecknet i högerledet därmed betyder att positiv laddning som flödar ut genom ytan motsvaras av en motsvarande minskning av positiv laddning i volymen V, helt enligt förväntan.

Eftersom detta argument kring flöde av laddning ut genom en sluten yta är giltigt för en godtycklig volym V, så betyder detta att

$$\nabla\cdot\mathbf{J} = -\frac{d\rho}{dt},$$

vilket vi betecknar[8] som *lagen om att laddning inte kan försvinna.*

Apropå detta med magnetostatik vs elektrostatik

Låt oss göra en liten utvikning kring detta med elektrostatik och magnetostatik, och konstatera att vi i dessa *statiska problem* formellt har att laddningstätheten ρ och strömtätheten $\mathbf{J}$ är tidsoberoende överallt i problemet, eller

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \qquad \underline{\text{och}} \qquad \frac{d\mathbf{J}}{dt} = 0.$$

Återigen, så kan vi dock med god precision betrakta alla problem som har en så pass låg inneboende frekvens att en elektromagnetis våglängd $\lambda = c/f$ vida överstiger problemets spatiala utsträckning[9] som just statiska problem. Exempel på saker som vi inte kan behandla som statiska är radioantenner (som per definition har en utsträckning i storleksordningen av en halv våglängd av den elektromagnetiska strålning som skall fångas upp eller skickas ut) eller elektronisk apparatur i GHz-området ($\lambda \sim 0.3$ m) och uppåt.

---

[7] Se exempelvis innerpärmen på Griffiths, *Divergence theorem*:

$$\int (\nabla\cdot\mathbf{A})\,dV = \oint\!\!\!\oint \mathbf{A}\,d\mathbf{S}.$$

Återigen, notera att Griffiths olyckligtvis använder den udda och vilseledande notationen $d\tau$ för volymelement. Normalt använder vi τ som integrationsvariabel i *tid*. För att inte förvirra oss ytterligare väljer vi dessutom att använda notationen $d\mathbf{S}$ för ytelement ("S" för *surface*) inkluderande normalriktning.

[8] Det måste medges att detta är en av de trixigare termerna att uttrycka på svenska, då man gärna vill uttrycka detta som "konservering av laddning", vilket leder tanken till inläggningar av sill och frukt, eller "bevarande av laddning", vilket istället har en air av bevarande av någon kulturhistorisk artefakt. Vi håller oss här till det tydliga om än lite klumpigare "lagen om att laddning inte kan försvinna".

[9] Fina ord: "spatial" = "i rummet", "temporal" = "i tiden", "spatiotemporal" = "i rumtid".

Ett annat sätt att se på statiska problem är till exempel att vi inte tillåter strömmen I att variera längs en strömslinga, eftersom det skulle betyda att vi längs slingan ackumulerar laddning någonstans. Eftersom vi i magnetostatiken (enligt observationen ovan) dessutom kräver att laddningstätheten ρ är konstant i tiden, så är divergensen av strömtätheten noll i statiska problem,

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0.$$

En tolkning av divergensen $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ är att vi i statiska problem (inom gränsen av giltighet som vi nyss konstaterat är tämligen vid) i strikt mening inte tillåter laddning att ackumuleras någonstans i problemet.

Vi närmar oss nu pudelns kärna i problemet med att få fram hur magnetiska fält genereras av strömmar. Vi kunde i elektrostatiken se att Coulombs lag för växelverkan mellan statiska punktladdningar[10] via superpositionsprincipen kunde generaliseras ttill kontinuerliga fördelningar, och att vi utifrån dessa kunde visa på existensen av en skalär, elektrostatisk potential. Säkerligen kan vi nu dra fram hur *rörelsen* hos en punktladdning genererar någon sorts "svallvågor", som vi i analogi med elektrostatiken kan generalisera och analysera för strömslingor med ett kontinuum av laddning. Eller?

Biot–Savarts lag - Magnetfält från strömslingor

Historiken för Biot–Savarts lag

Efter att Hans Christian Œrsted år 1820 hade gjort sin banbrytande upptäckt att en magnetnål påverkas av elektriska strömmar, tog de franska fysikerna Jean-Baptiste Biot och Félix Savart (båda i Paris) samma år upp försök med att fysikaliskt upp hur stort det genererade magnetfältet var och vilka lagar som kunde styra det. I sina experiment spände de en lång tråd genom vilken de kunde leda en elektrisk ström vertikalt och upphängde vid sidan av trådens mitt en liten horisontell magnetnål, som skyddades mot luftströmmar av ett glasomhölje. För att så mycket som möjligt undgå jordmagnetismens inverkan använde de en växlande ström genom tråden, och kunde på så sätt använda amplituden på nålens rörelse som mått på styrkan hos magnetfältet från strömbärande tråden.

Svårigheten med att formellt härleda Biot–Savarts lag

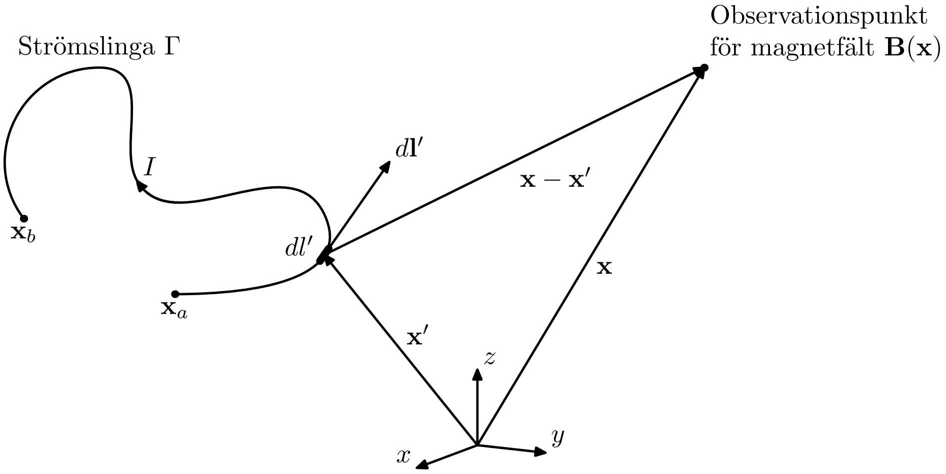
Griffiths pekar i sin *Introduction to Electrodynamics* på ett mycket målande sätt hur han själv som författare är mycket frustrerad övar att ingen sådan enkel modell kan göras för magnetfältet från en punktladdning i rörelse utan att ta till ett maskineri som ligger långt utanför omfattningen av denna kurs. Specifikt så pekar han på det faktum att *rörelsen hos en enskild punktladdning inte rimligen kan tolkas som en ström*, då den ena tidpunkten finns på plats, medan den ögonblicket efteråt inte finns där. En sådan rörelse är snarast att likna vid en diskret händelse inom den klassiska elektrodynamiken, och antagandet om stationär ström, $d\mathbf{J}/dt = \mathbf{0}$ är garanterat inte uppfyllt.

Vi är med andra ord redan från början tvingade att hantera ett kontinuum av laddning i rörelse för att beskriva hur en ström genererar ett magnetfält, och argumenten för varför Biot–Savarts lag ser ut som den gör blir därmed mycket stökigare än vad vi från en början kan förvänta oss. Med detta i bagaget kommer vi nu att gå in på hur stationära strömmar och strömtätheter ger upphov till statiska magnetiska fält.[11]

[10] En lag för växelverkan som, nota bene, vi helt sonika har stadsfäst som varandes en fundamentalt giltig beskrivning mellan statiska laddningar utan att vi för den skull ens skissat på ett bevis för den!

[11] Griffiths väljer redan i ett tidigt stadium att direkt fastställa Biot–Savarts kompletta lag på integralform. Vi väljer här att först ta ett litet steg i och med betraktandet av ett litet *linjeelement* längs med strömslingan.

Biot–Savarts lag för strömslingor



Om vi betraktar ett litet linjeelement $d\mathbf{l}'$ vid källpunkten $\mathbf{x}'$ med beloppet $|d\mathbf{l}'| = dl'$ längs en strömslinga uppbärande strömmen $\mathbf{I}(\mathbf{x}')$ med beloppet $|\mathbf{I}(\mathbf{x}')| = I$, liksom tidigare med konventionen att vi sätter ett prim på vad vi betraktar som källa i problemet, så ger detta (linjära) linjeelement bidraget[12]

$$d\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{I}(\mathbf{x}')\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\,dl'$$

till det magnetiska fältet vid observationspunkten $\mathbf{x}$. Notera förekomsten av[13]

$$\begin{aligned}
\mu_0 &= 4\pi\times 10^-7\ \text{H/m} \quad \text{(exakt per definition)}\\
\mathbf{F}_{\text{mag}} &= \lim_{\Delta l\to 0}\sum_k \underbrace{(\mathbf{v}_k\times\mathbf{B}_k)\underbrace{\lambda\Delta l}_{=\Delta q}}_{=\Delta\mathbf{F}_{\text{mag}}}\\
&= \int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_b}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\lambda\,dl\\
&= \{\ \text{Strömmen är en vektor, } \mathbf{I}=\lambda\mathbf{v}\ \}\\
&= \int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_b}(\mathbf{I}\times\mathbf{B})\,dl.
\end{aligned}$$

för den *magnetiska permeabiliteten i vakuum*; detta är första gången som μ_0 dyker upp i denna kurs, på exakt samma sätt som ε_0 dök upp för första gången i elektrostatiken i och med att vi introducerades till Coulombs lag. I själva verket kan vi hädanefter generellt identifiera "släktträdet" för våra ekvationer som

- Förekomst av *enbart* elektrisk permittivitet $\varepsilon_0 \Rightarrow$ Elektrostatik.
- Förekomst av *enbart* magnetisk permeabilitet $\mu_0 \Rightarrow$ Magnetostatik.
- Förekomst av *produkten* $\varepsilon_0\mu_0 \Rightarrow$ Elektromagnetism (elektrodynamik).

Om vi summerar upp alla bidrag $d\mathbf{B}$ till magnetfältet, från alla källor längs med strömslingan från $\mathbf{x}_a$ till $\mathbf{x}_b$, det vill säga för alla *källpunkter* $\mathbf{x}'$, så erhåller vi direkt Biot–Savarts lag på integralform som linjeintegralen[14]

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_b}\frac{\mathbf{I}(\mathbf{x}')\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\,dl'.$$

[12] Notera återigen att vi här lätt riskerar att förväxla *linjeelementet* $d\mathbf{l}'$ (som har den fysikaliska dimensionen *längd*) med ett delbidrag till den riktade strömmen.
[13] Termen "permeabilitet" myntades 1885 av Oliver Heaviside.
[14] Griffiths Ekv. (5.34), sid. 224.

Vi kan redan här se att Biot–Savarts lag kan räknas som motsvarigheten till Coulombs lag i elektrostatiken, dock här istället relaterande till *rörelse (dynamik) av laddning*. Som alternativ form av Biot–Savarts lag så kan vi bryta ut den konstanta strömmen I som en skalär, och istället uttrycka som linjeintegralen med linjeelementen $d\mathbf{l}'$ (längdelement längs med strömslingan) som

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_b} \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}.$$

Biot–Savarts lag för strömtätheten i volymer

En viss generalisering av Biot–Savarts lag kan göras om vi rekapitulerar att strömmen I ju faktiskt egentligen är ett specialfall av en strömtäthet $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$ (med $\mathbf{x}'$ liksom tidigare varande *källpunkter*) som råkar vara så funtad att den bara flödar i en enda kurva. I detta fall innehåller ju I redan en ytintegral över strömtätheten $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$ och man inser direkt att motsvarande Biot–Savarts lag för *strömtätheten* uttrycks som volymintegralen[15]

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint\limits_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}\, dV'.$$

Divergens för magnetfältet

Notera att integralen för Biot–Savarts lag sker över *primmade* koordinater $\mathbf{x}'$, i vilket vi betraktar observationspunkten $\mathbf{x}$ som fix. Vi kommer nu att söka uttryck för divergensen och rotationen för det magnetiska fältet[16], $\mathbf{B}$ vilket vi rekapitulerar är *operationer som sker i det icke-primmade* observations-koordinatsystemet $\mathbf{x}$.

Om vi först analyserar divergensen för den magnetiska fältet utifrån den generella beskrivningen av det i termer av strömtätheten $\mathbf{J}$, så har vi att[17]

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \iiint\limits_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}\, dV' \\
&= \big\{ \nabla \text{ opererar på } \mathbf{x}, \textit{ inte} \text{ på } \mathbf{x}' \big\} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint\limits_V \nabla \cdot \left(\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right) dV' \\
&= \big\{ \text{Griffiths } \textit{Product Rule \#6} \big\} \\
&= \big\{ \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \big\} \\
&= \big\{ \text{Notera att } \mathbf{J}(\mathbf{x}') \text{ oberoende av } \mathbf{x} \big\} \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint\limits_V \mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot \underbrace{\left(\nabla \times \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right)}_{= 0, \text{exercis}(1.63)} dV' \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vad säger oss resultatet att divergensen $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$? Mer än man kan tro, faktiskt. Vi kan direkt jämföra detta resultat med det *elektrostatiska* fallet (så som vi gick igenom det i Föreläsning 1)

---

[15] Griffiths Ekv. (5.47), sid. 231.

[16] Redan nu kan vi göra klart för oss själva att denna exercis inte är en exercis för exercisens egen skull, utan för att detta senare, i Föreläsning 9 solitt kommer att assistera oss i bygget av Maxwells ekvationer, något som i sin tur beskriver all elektromagnetisk vågutbredning! Med andra ord, även om man kan tycka att detta stycke kring magnetostatiken kan vara lite torrt och intetsägande, låt oss betrakta detta som en pusselbit för vad som komma skall.

[17] Griffiths Ekv. (5.50), sid. 232.

för det elektriska fältet, där vi såg att Gauss lag $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ ger relationen mellan det elektriska fältet och den lokala elektriska laddningen ρ (eller *laddningstätheten*, om man skall vara korrekt). I det magnetostatiska fall som vi här gått igenom har vi med andra ord följande slutsats:

Att $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ betyder att det inte existerar någon magnetisk laddning!

Med konstaterandet att "magnetisk laddning inte existerar" menar vi här att *magnetiska monopoler* inte existerar, och att *magnetiska fält endast manifesterar sig så som om de härrör från magnetiska dipoler*, det vill säga "en positiv och negativ laddning på ett avstånd från varandra". Denna terminologi anknyter till elektrisk laddning, som på samma sätt handlar om *elektriska monopoler* (som ju faktiskt existerar) som kan sättas samman till elektriska dipoler.

Rotationen för magnetfältet

Med den intressanta observationen att magnetiska monopoler inte existerar i bagaget, låt oss nu gå vidare med rotationen av magnetfältet. Vi använder även här den generella formen av Biot–Savarts lag[18], vilken då vi applicerar rotationen (återigen med observationen att ∇ opererar på oprimmade koordinater $\mathbf{x}$) ger oss att

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint\limits_V \nabla \times \left(\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right) dV'$$

Liksom i fallet med divergensen kommer vi nu att använda en produktregel från innerpärmen på Griffiths, i detta fall *Product Rule #8*, som med sina fyra termer är aningen stökigare, dock liksom tidigare med $\mathbf{A} = \mathbf{J}(\mathbf{x}')$ (vilken är oberoende av $\mathbf{x}'$ och därmed ger noll vid differentiering) och $\mathbf{B} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3$,

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \underbrace{\mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B})}_{\text{“Term 1”}} - \underbrace{(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}}_{\text{“Term 2”}} + \underbrace{(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}}_{=0,\ \mathbf{J}(\underline{\underline{\mathbf{x}'}})}, - \underbrace{\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})}_{=0,\ \mathbf{J}(\underline{\underline{\mathbf{x}'}})},$$

vilket översatt till integranden ovan resulterar i att[19]

$$\nabla \times \left(\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right) = \underbrace{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \left(\nabla \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right)}_{\text{“Term 1”}} - \underbrace{\left(\mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot \nabla \right) \left(\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right)}_{\text{“Term 2”}}$$

[18] Notera hur vi även nu tar avstamp i Biot–Savarts lag som den bas från vilket allt inom elektrostatiken tar sin början, samt hur permeabiliteten μ_0 hakar på i allt som härleds från denna.

[19] Just i denna härledning är Griffiths lite spretig och bygger mycket på härledningar som gjorts tidigare i hans *Introduction to Electrodynamics*. Vi kommer här att försöka hålla samman den stundvis aningen komplexa härledningen i ett stycke, med hopp om att det blir lättare att följa resonemanget.

Term 1 i rotationen

Här involverar "Term 1" en divergens som vi kan översätta till en delta-puls placerad i $\mathbf{x}'$, eftersom Gauss teorem (divergensteoremet) $\int (\nabla \cdot \mathbf{A})\, dV = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ ger att[20]

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_V \nabla \cdot \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\, dV' &= \oiint\limits_S \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} \cdot d\mathbf{S}' \\
&= \left\{ \text{ Integrera över sfär } S \text{ med radie } |\mathbf{x}-\mathbf{x}'| = R \right\} \\
&= \left\{ \text{ Yttryck i sfäriska kordinater med } \mathbf{x}' \text{ som origo } \right\} \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{R\mathbf{e}_r}{R^3} \cdot \underbrace{\mathbf{e}_r\, R^2 \sin(\vartheta)\, d\varphi\, d\vartheta}_{=d\mathbf{S} \text{ på } S} \\
&= \underbrace{\int_0^\pi \sin(\vartheta)\, d\vartheta}_{=2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=4\pi} \\
&= 4\pi,
\end{aligned}
$$

för godtyckligt vald radie $R > 0$. Samtidigt har vi ju faktiskt att divergensen i sig ges som

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{(x-x', y-y', z-z')}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{3/2}} \right) \\
&= \frac{(1+1+1)}{\left[(x-x')^2 + \dots\right]^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{(2(x-x'), 2(y-y'), 2(z-z')) \cdot (x-x', y-y', z-z')}{\left[(x-x')^2 + \dots\right]^{5/2}} \\
&= \frac{3}{\left[(x-x')^2 + \dots\right]^{3/2}} - 3 \frac{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{5/2}} \\
&= \frac{3}{\left[(x-x')^2 + \dots\right]^{3/2}} - \frac{3}{\left[(x-x')^2 + \dots\right]^{3/2}} \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

för alla observationspunkter $\mathbf{x}$ i rummet, under förutsättningen att $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ (det vill säga att nämnaren $[(x-x')^2 + \dots]^{3/2} \neq 0$). Notera att detta resultat gäller *oberoende* av värdet på radien $R = |\mathbf{x}-\mathbf{x}'| > 0$, som vi kan välja godtyckligt liten runt källpunkten $\mathbf{x}'$. Utifrån detta argument kan vi dra slutsatsen att divergensen här kan tolkas som en delta-puls placerad i $\mathbf{x}'$, det vill säga att den är noll överallt i rummet utom just i källpunkten $\mathbf{x}'$, som

$$
\nabla \cdot \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} = 4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}').
$$

Med andra ord kan vi översätta "Term 1" ovan som[21]

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_V \underbrace{\mathbf{J}(\mathbf{x}')\left(\nabla \cdot \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\right)}_{\text{"Term 1"}} dV' &= 4\pi \iiint\limits_V \mathbf{J}(\mathbf{x}')\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, dV' \\
&= 4\pi\mathbf{J}(\mathbf{x})
\end{aligned}
$$

[20] Griffiths har redan gjort förarbetet i kapitlet *Vector Analysis*, Ekv. (1.100), sid. 50; se även Sektion 1.5.1, sid. 45. Vi kommer här för sakens skull dock att gå igenom denna exercis så att vi håller resonemanget kring $\nabla \times \mathbf{B}$ sammanhållet och koncist.

[21] Vid en anblick på detta är det paradoxalt att divergensen av en funktion som bevisligen överallt är riktad utåt från källpunkten $\mathbf{x}'$ har värdet noll överallt förutom just vid källpunkten i sig.

Term 2 i rotationen

Den andra termen som uppträder i integranden som uppträder i uttrycket för $\nabla \times \mathbf{B}$ kan även den utvecklas vidare,[22] som

$$\iiint\limits_V \underbrace{(\mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot \nabla)\left(\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\right)}_{\text{“Term 2”}} dV' = \{ \text{ Notera att } \nabla \ \}$$

$$=$$

Slutligt resultat för rotationen av magnetfältet

Låt oss nu sätta samman dessa delresultat för “Term 1” och “Term 2” till ett uttyck för rotationen för magnetfältet,

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint\limits_V \nabla \times \left(\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\right) dV' \\
&= \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint\limits_V \underbrace{\mathbf{J}(\mathbf{x}')\left(\nabla \cdot \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\right)}_{\text{“Term 1”}} dV'}_{= 4\pi\mathbf{J}(\mathbf{x}),\ \text{enligt ovan}} - \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint\limits_V \underbrace{(\mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot \nabla)\left(\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\right)}_{\text{“Term 2”}} dV'}_{= 0,\ \text{enligt ovan}} \\
&= \mu_0 \mathbf{J}.
\end{aligned}$$

Ampères lag

Vårt slutliga resultat för rotationen för det magnetiska fältet på differentiell form,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

kallas för *Ampères lag*, och kommer framöver i kursen att ha en stor betydelse inte bara för hur vi kan beräkna kopplingen mellan strömmar och magnetfält, utan även (som det kommer att visa sig i Föreläsning 9) för hur vi kan formulera elektromagnetisk vågutbredning med Maxwell's ekvationer (med assistans av en tilläggsterm till Ampères magnetostatiska lag, som vi då kommer att gå igenom). Notera hur vi fortfarande kan spåra förekomsten av μ_0 till Biot–Savarts lag.

Ampères lag kan enkelt omformuleras på integralform genom användandet av Stokes teorem för en sluten slinga Γ inneslutande en yta S i magnetfältet och strömtätheten, som[23]

$$\iint\limits_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_\Gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint\limits_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S},$$

där nu $\int_S \mathbf{J}\, d\mathbf{S} = I_{\text{enc}}$ är den av Γ inneslutna strömmen (med andra ord den totala ström som passerar genom integrationsytan S). Med andra ord har vi integralformen av Ampères lag som

$$\oint_\Gamma \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}.$$

Denna form är ofta att föredra i situationer då vi kan utnyttja rent geometriskt–symmetriskt gynnsamma situationer. Exempel: Beräkning av magnetfält genererade runt strömslingor, i samma geometri som i Biot–Savarts ursprungliga experiment.[24]

---

[22] Griffiths Ekv. (5.54), sid. 232.

[23] Se exempelvis innerpärmen på Griffiths, *Curl theorem.*

[24] Oneliner för magnetfält runt oändlig rak ledare bärande strömmen I:

$$\oint_\Gamma \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} B_\varphi(r)\, r d\varphi = 2\pi r B_\varphi(r) = \mu_0 I_{\text{enc}} = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B_\varphi(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Vektorpotentialen

Vi erinrar oss att ekvationen $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ i elektrostatiken ledde oss till att dra slutsatsen att det existerar en skalär potential definierad genom $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. På samma sätt inbjuder $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (det vill säga att inga magnetiska monopoler existerar) oss till att via *vektoridentieteten*[25]

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

tolka magnetfältet $\mathbf{B}$ som sprunget ur en *vektorpotential* $\mathbf{A}$ enligt

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Om vi substituerar denna potential för magnetfältet $\mathbf{B}$ i Ampères lag på differentialform, så erhåller vi för vänsterledet[26]

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{A})}_{=0} - \nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A}$$

Detta gör att vi kan formulera Ampères lag i termer av vektorpotentialen som[27]

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}.$$

[25] Se exempelvis innerpärmen på Griffiths, *Second derivatives (9)*.
[26] Se exempelvis innerpärmen på Griffiths, *Second derivatives (11)*.
[27] Griffiths Ekv. (5.64), sid. 244. Notera att liksom i fallet med Poissons ekvation $\nabla^2\phi = -\rho/\varepsilon_0$ för den elektrostatiska skalära potentialen från Föreläsning 3, så betraktar Griffiths denna form som så fundamental att den är den andra som visas på omslaget till *Introduction to Electrodynamics*.

Sammanfattning av Föreläsning 4 – Magnetostatik

- Lorentz-kraften på fri laddning q med hastighet $\mathbf{v}$ är
$$\mathbf{F} = q\big(\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\big).$$
- Magnetiska krafter (på fria laddningar) utför inget arbete!
- Ampères kraftlag på strömslinga bärande strömmen I,
$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_b} (\mathbf{I} \times \mathbf{B})\, dl.$$
- Strömmen I genom en yta S ges av strömtätheten $\mathbf{J}$ som
$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}.$$
- Lagen om att elektrisk laddning inte kan försvinna beskrivs av sambandet mellan strömtäthet $\mathbf{J}$ och laddningstäthet ρ som
$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{d\rho}{dt}.$$
- Statiska problem definieras av att
$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \underline{\text{och}} \quad \frac{d\mathbf{J}}{dt} = 0.$$
- Divergensen av strömtätheten är noll i *statiska problem*, vilket är en direkt följd av att laddningstätheten är tidsoberoende,
$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0.$$
- Biot–Savarts generella lag för samband mellan magnetfältet $\mathbf{B}$ och strömtätheten $\mathbf{J}$ ges som
$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}\, dV',$$
där $\mu_0 = 4\pi \times 10^-7$ H/m (exakt, per definition) är den magnetiska permeabiliteten i vakuum. Biot–Savarts motsvarande lag för strömslingor med ström I ges som
$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_b} \frac{\mathbf{I}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}\, dl'.$$
- Det gäller *alltid* att
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$
Nollan i högerledet har som direkt följd, via tolkning genom Gauss lag, att "magnetisk laddning" inte existerar! ("Magnetisk laddning" är här ekvivalent med "magnetiska monopoler".)
- Ampères lag på integral- respektive differentialform,
$$\oint_\Gamma \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}.$$
- Ur "lagen om att inga magnetiska monopoler existerar" kan vi direkt formulera vektorpotentialen $\mathbf{A}$ som
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$
- Ampères lag för vektorpotentialen $\mathbf{A}$ (andra ekvationen på omslaget på Griffiths!),
$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}.$$