UPPSALA UNIVERSITET

Elektromagnetism II, 1TE626 (2025)
Lecture Notes, Fredrik Jonsson
Document Revision 1 December 2025
https://github.com/hp35/elmagii/

Föreläsning 11

Retarderade potentialer som lösningar till Maxwells ekvationer

Fredrik Jonsson, Uppsala Universitet, 1 december 2025

Sammanfattning av föreläsningen

Vi inleder med en rekapitulation av den generella formen på den elektromagnetiska vågekvationen för elektriska och magnetiska fält, följt av en analogi mellan potentialerna och mekaniska system. Utifrån definitionen av vektorpotentialen $\mathbf{A}$ *som* $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ *från identiteten* $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$*, så erhåller vi via Faradays lag att det elektriska fältet i elektrodynamiska problem måste innehålla även vektorpotentialen som* $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$*. Vågekvationen för de elektrodynamiska potentialerna formuleras, följt av en genomgång av en viss form av godtycke som existerar i valet av potentialerna, under den så kallade gauge-transformen. Vi finner under antagande om Lorenz-villkoret (Lorenz gauge) att ekvationerna för potentialermna frikopplas från varandra. Formen för de retarderade potentialerna, där ett objekts verkan på avstånd analyseras, formuleras på integralform för den skalära potentialen och vektorpotentialen, och exemplifieras slutligen för en tunn dipolantenn.*

Sammanfattning i tre punkter

1. *Den elektrodynamiska formen för den skalära potentialen* ϕ *och vektorpotentialen* $\mathbf{A}$ *lyder*
$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = -\nabla\phi(\mathbf{x},t) - \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{\partial t}, \qquad \mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x},t),$$
för vilka de så kallade gauge-transformationen av potentialerna,
$$\mathbf{A}'(\mathbf{x},t) = \mathbf{A}(\mathbf{x},t) + \nabla\psi(\mathbf{x},t), \qquad \phi'(\mathbf{x},t) = \phi(\mathbf{x},t) - \frac{\partial\psi(\mathbf{x},t)}{\partial t},$$
lämnar de elektromagnetiska fälten oförändrade. Vi kan med dessa till viss del välja vilken form av vågekvation vi önskar för potentialerna.
2. *Specifikt erhåller vi under Lorenz-villkoret, eller "Lorenz gauge", där*
$$\nabla \cdot \mathbf{A}'(\mathbf{x},t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi'(\mathbf{x},t)}{\partial t} = 0.$$
att vågekvationerna för potentialerna frikopplas från varandra, till att lyda
$$\Big(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big)\phi(\mathbf{x},t) = -\frac{\rho(\mathbf{x},t)}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}}, \quad \Big(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big)\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = -\mu_0\mathbf{J}_{\mathrm{f}}(\mathbf{x},t).$$
3. *Retarderade potentialer i den retarderade tiden* $t' = t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$ *ges som volymintegralerna*
$$\phi(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{x}',t')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,dV', \qquad \mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}',t')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,dV'.$$

Elektrodynamiska fält och retarderade potentialer

Vi har i tidigare föreläsningar kommit in på hur Maxwells ekvationer kan omformuleras till två vågekvationer för den elektriska fältstyrkan $\mathbf{E}$ och den magnetiska flödestätheten $\mathbf{B}$, med växelverkan mellan mediet och de elektromagnetiska fälten beskrivna av källtermer i högerledet enligt

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left(\mathbf{J}_\mathrm{f} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right)}_{\text{gemensam källterm}},$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} + \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mu_0 \nabla \times \underbrace{\left(\mathbf{J}_\mathrm{f} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right)}_{\text{gemensam källterm}},$$

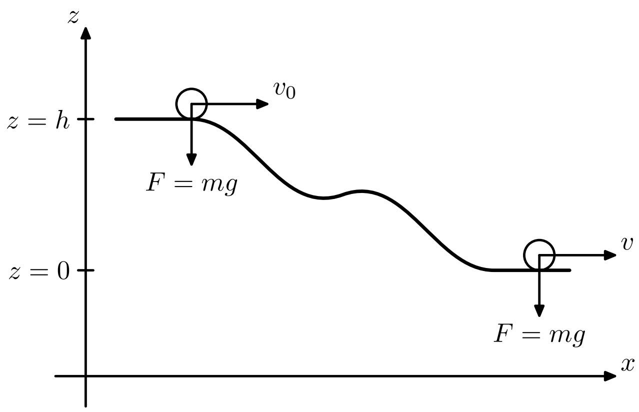
där $\mathbf{J}_\mathrm{f}$ är den fria strömtätheten, $\mathbf{P}$ den elektriska polarisationsdensiteten och $\mathbf{M}$ magnetiseringen hos mediet. Tidigare har vi använt den skalära potentialen $\phi(\mathbf{x})$ och vektorpotentialen $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ i en *elektrostatisk* respektive *magnetostatisk* analys. Specifikt har vi visat hur det statiska elektriska fältet $\mathbf{E}$ och statiska magnetiska flödestätheten $\mathbf{B}$ direkt kan fås fram ur dessa *statiska* potentialer som $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ och $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, och hur vi på ett strukturerat sätt kan få fram de *statiska* potentialerna genom relativt enkla integraler (över volymer, ytor eller linjer).

Frågan infinner sig då naturligtvis om det finns tidsberoende motsvarigheter till dessa potentialer som kan appliceras på *dynamiska* (tidsberoende) elektromagnetiska fält? Vidare, finns det då dessutom möjlighet att formulera en potentialteori där man tar hänsyn till den fördröjning som onekligen måste ske från det att en laddning eller ström manifesteras *lokalt vid en källpunkt* till dess att vi verkligen observerar dess effekt vid en observationspunkt? I så fall skulle vi kunna gå via dessa potentialer och ur dessa extrahera de tidsvarierande elektriska och magnetiska fälten på ett strikt sätt, inkluderande såväl dynamiken som tidsfördröjningen från olika delar av källan eller källorna.

Svaret är att det finns sådana potentialer, så kallade *retarderade potentialer*, vilkas existens kan härledas fram (nästan) analogt med det elektrostatiska fallet.

Recap på vad skalära potentialen och vektorpotentialen är bra för

I en analogi med klassisk mekanik kan vi betrakta en punktmassa i ett gravitationsfält $\mathbf{G}$ med gravitationskonstanten g (N/kg). Partikeln startar med en horisontell hastighet v_0 vid höjden $z = h$ och färdas nedför en backe beskriven av funktionen $z = f(x)$. En typisk uppgift skulle här kunna vara att räkna ut sluthastigheten v vid $z = 0$.



Vi kan naturligtvis rent principiellt ställa upp rörelseekvationerna för denna massa, göra vissa antaganden om huruvida hastigheten är låg nog för att vi ej skall få lyft från underlaget med mera, och därefter integrera rörelseekvationerna fram till ett resultat, men alla förstår nog att en betydligt enklare approach (om vi inte söker funktionen som beskriver hastigheten som funktion av tid) helt enkelt är att istället konstatera att partikeln tappar i *potential*. Denna förlust i potential kan via partikelns massa m enkelt översättas till en förlust i *potentiell energi*, vilken istället adderas till den *kinetiska energin*.

Ett annat synsätt är att se partikeln som att den befinner sig i en skalär mekanisk potential $\phi(z) = gz$, resulterande i ett *gravitationsfält*

$$\mathbf{G} = -\nabla\phi(z) = -\mathbf{e}_z g, \qquad \left(\quad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{E} = -\nabla\phi(z) \quad \right)$$

i analogi med ett statiskt elektriskt fält $\mathbf{E}$. Kraften (N) på punktmassan m (i analogi med kraften $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ på en punktladdning q i ett elektrostatikt fält) blir

$$\mathbf{F} = m\mathbf{G}. \qquad \left(\quad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad \right)$$

Om vi utgår ifrån planet $z = 0$ som referens, så blir den potentiella *energin* (J) för partikeln på höjden z därmed

$$W = -\int_{z=0}^{z} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = mgz \qquad \left(\quad \Leftrightarrow \qquad W = -\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = -q\int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} \quad \right)$$

Denna aningen naivistiska analogi illustrerar hur vi rent elektrostatiskt, för *statiska* elektriska laddningar, kan se på den skalära potentialen ϕ och hur vi kan använda den i elektrostatiska problem genom att vi kan extrahera det elektriska fältet genom $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Inom magnetism, som i grund och botten handlar om laddningars *dynamik* (rörelse), har vi istället vektorpotentialen $\mathbf{A}$, från vilken vi istället får den magnetiska flödestätheten som $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

Retarderade potentialer och kopplingen till elektromagnetiska fält

Gauss lag för magnetiska flödestätheten $\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$ gäller alltid generellt, och ger direkt vid hand att även en *tidsberoende* vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ har exakt samma länk till $\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$ som tidigare, eftersom vi vid godtycklig observationspunkt $\mathbf{x}$ och godtycklig tid t har att[1]

$$\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{x},t)=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{B}(\mathbf{x},t)=\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{x},t).$$

Om vi sätter in vektorpotentialen $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ i Faradays induktionslag,[2] så erhåller vi

$$\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=-\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{x},t)}_{=\mathbf{B}(\mathbf{x},t)} \qquad \Leftrightarrow \qquad \nabla\times\underbrace{\left(\mathbf{E}(\mathbf{x},t)+\frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{\partial t}\right)}_{=-\nabla\phi(\mathbf{x},t)}=0.$$

Eftersom rotationen av argumentet är noll,[3] så betyder detta att argumentet kan skrivas som gradienten av en skalär potential, säg som

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)+\frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{\partial t}=-\nabla\phi(\mathbf{x},t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{E}(\mathbf{x},t)=-\nabla\phi(\mathbf{x},t)-\frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{\partial t}.$$

Valet av negativt tecken för gradienten i potentialen kommer från vår konvention för krafter på laddningar i elektriska fält, och att positiva laddningar strävar mot minsta potential. För att förtydliga vad vi här gjort, så har vi *endast* använt Gauss lag för magnetiska fält samt Faradays induktionslag, för vilka paret $(\mathbf{E}(\mathbf{x},t),\mathbf{B}(\mathbf{x},t))$ är oberoende av materialegenskaperna. Med andra ord är existensen av den skalära potentialen $\phi(\mathbf{x},t)$ och vektorpotentialen $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ *oberoende av det medium i vilket de analyseras*, även i det elektrodynamiska (tidsberoende) fallet.

Vi kan här också notera att fälten evalueras på exakt samma punkt spatialt som vi uttrycker potentialerna i, med andra ord så har vi ännu inte infört något "retarderat" eller "fördröjt" i ekvationerna. Detta kommer dock att inkluderas härnäst.

[1] Vän av ordning kan här fråga sig hur vi verkligen kan säga att $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ även för *dynamiska* fält. Trots allt så härledde vi ju detta i Föreläsning 4 utifrån en *statisk* form av Biot–Savarts lag, och att bara säga att detta även gäller *dynamiskt* är ju lite fusk, eller hur? Det enklaste sättet att visa på att $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ även i ett dynamiskt fall är att konstatera att Faradays lag (som ju är dynamisk och generellt giltig) ger vid hand att

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{E})}_{\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{a})\equiv 0}=-\nabla\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{B}=0.$$

Om vi integrerar den sista likheten med avseende på tid, så betyder detta kort och gott att $\nabla\cdot\mathbf{B}=$ konstant i tiden. Oberoende av vilken tid vid vilken vi startar denna identitet, så måste därmed $\nabla\cdot\mathbf{B}$ evaluera till samma konstant, specifikt även då vi passerar eller startar från någon tid då vi råkar ha en *statisk* situation då uppenbarligen $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$. Med andra ord är enda möjligheten att integrationskonstanten i fråga är noll, och att det även *dynamiskt* gäller att $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$. (Utöver att det vore synnerligen märklig fysik om magnetiska monopoler, om de skulle existera, skulle börja uppträda enbart i dynamiska experiment.)

[2] Notera hur Faradays lag, som vi erinrar oss härleddes "rent" i Föreläsning 5 *enbart utifrån antagandet om Lorentz-kraften*, återigen kommer till assistans!

[3] Se Griffiths sammanfattade vektoridentiteter på insidan av pärmen, $\nabla\times(\nabla f)=0$.

Vågekvationen för retarderade potentialer

Plan för hur vi angriper problemet med tidsfördröjning hos potentialer

Så långt i kursen har vi analyserat fält och deras kopplingar till varandra och externa källor som laddningsfördelningar och strömtätheter som fenomen som sker *instantant utan någon fördröjning i tid.* I många situationer kan vi dock inte försumma den fördröjning som sker, exempelvis om vi råkar ha en tidsvarierande laddningsfördelning, säg på en antenn, där de olika delarna fördelningen har ett så pass varierande avstånd som inte kan räknas som litet i förhållande till observationspunkten. Vi har i Föreläsningarna 2 och sett hur de *statiska* potentialerna, som lyder Poissons ekvation

$$\nabla^2\phi(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x})/\varepsilon_0, \qquad \nabla^2\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J}_\mathrm{f},$$

direkt leder till explicita lösningar på integralform som

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,dV', \qquad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\limits_V \frac{\mathbf{J}_\mathrm{f}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,dV',$$

vilket vi erinrar oss är en direkt följd från formen på det elektriska fältet från den generaliserade formen av Gauss lag för statisk laddning, samt formen på magnetfältet enligt Ampères lag (vilken i sin tur är härledd från Biot–Savarts lag). Vi kan med tämligen stor sannolikhet konstatera att potentialerna, liksom den elektromagnetiska våg de beskriver, färdas med ljusets hastighet $c = c_0$ (eller $c = c_0/n$, skalat med brytningsindex n om vi betraktar icke-vakuum), och det är rimligt att anta att varje delbidrag i integralformerna ovan därmed kommer att detekteras en viss tid $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c$ efter den tid t då källan hade det tillstånd (laddning eller ström) som en observatör observerar en sträcka $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ bort.

Med andra ord så faller det sig helt naturligt att *gissa* att en generaliserad form av dessa integralformer, som tar hänsyn till den tid $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c$ som potentialerna vid källpunkterna $\mathbf{x}'$ tar på sig för att nå fram till en observatör vid punkten $\mathbf{x}$ skulle ges som

$$\phi(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{x}',t')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,dV', \qquad \mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}',t')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,dV',$$

där

$$t' = t - |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c$$

är den *retarderade tiden*, eller *fördröjda tiden*, som beror av avståndet $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ mellan källpunkt $\mathbf{x}'$ och observationspunkt $\mathbf{x}$.

Detta argument är dock än så länge av tämligen handviftande karaktär, och vi har i strikt mening inte ännu formulerat hur de *dynamiska* potentialerna propagerar. Vi kan förvisso ha en kvalificerad gissning att potentialerna, ur vilka de elektriska och magnetiska fälten direkt kan erhållas, måste följa exakt samma hastighet som det elektromagnetiska fältet i sig (det vill säga ljushastigheten i mediet), men det finns några viktiga poänger som är knutna till potentialerna i sig som vi i sin tur kan utnyttja.

Kort och gott, vi kommer nu att först analysera hur vågekvationen för potentialerna i sig ser ut, och därefter följa upp resultatet med att formulera integralformen för de retarderade potentialerna.[4]

[4] Spoiler: Den alldeles nyss presenterade gissningen för de retarderade potentialernas integralform är helt korrekt!

Den generella formen av vågekvationen för vektorpotentialen

Om vi substituerar för den skalära potentialen $\phi(\mathbf{x},t)$ och vektorpotentialen $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ i Gauss och Ampères lagar[5] så får vi, under antagandet om en linjär elektrisk flödestäthet i homogent medium,

$$\mathbf{D}(\mathbf{x},t) = \varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}\mathbf{E}(\mathbf{x},t),$$

från Gauss lag $\nabla\cdot\mathbf{D}(\mathbf{x},t) = \rho(\mathbf{x},t)$ för den elektriska flödestätheten att

$$\nabla\cdot\mathbf{D}(\mathbf{x},t) = -\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}\nabla\cdot\underbrace{\left(\nabla\phi(\mathbf{x},t) + \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{\partial t}\right)}_{\equiv -\mathbf{E}(\mathbf{x},t)} = \rho(\mathbf{x},t) \quad\Leftrightarrow\quad \nabla^2\phi(\mathbf{x},t) + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = -\frac{\rho(\mathbf{x},t)}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}}$$

vilket vi åtminstone från förekomsten av "∇^2" kan börja gissa oss till kommer att handla om en vågekvation. Det som saknas här är hur vi skall tolka tidsderivatan av $\nabla\cdot\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$.

Från Ampères lag i dess grundform (notera att detta är punkten då vi i princip för in kopplingen med magnetiska egenskaper i problemet via de konstitutiva relationerna för $\mathbf{H}$ och $\mathbf{D}$),

$$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J}_{\mathrm{f}} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t},$$

för enkelhets skull under antagandet om ett ickemagnetiskt medium med $\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mu_0\mathbf{H}(\mathbf{x},t)$, har vi samtidigt att

$$\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{x},t) &= \nabla\times\underbrace{\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{x},t)}_{=\mathbf{B}(\mathbf{x},t)}\\
&= \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}\\
&= \left\{\text{ Ampères lag, } \nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\nabla\times\mathbf{H}\ \right\}\\
&= \mu_0\mathbf{J}_{\mathrm{f}}(\mathbf{x},t) + \mu_0\frac{\partial\mathbf{D}(\mathbf{x},t)}{\partial t}\\
&= \mu_0\mathbf{J}_{\mathrm{f}}(\mathbf{x},t) + \underbrace{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}}_{\equiv 1/c^2}\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{x},t)}{\partial t}\\
&= \left\{\text{ Uttryck i vektorpotentialer, } \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\ \right\}\\
&= \mu_0\mathbf{J}_{\mathrm{f}}(\mathbf{x},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\phi(\mathbf{x},t) + \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{\partial t}\right).
\end{aligned}$$

Om vi stuvar om termerna lite, så har vi under utnyttjandet av $\nabla\times\nabla\times\mathbf{A} \equiv \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$ att[6]

$$\underbrace{\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A}(\mathbf{x},t) -}_{\text{Typisk vågekvation!}}\ \underbrace{\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}(\mathbf{x},t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi(\mathbf{x},t)}{\partial t}\right)}_{\text{Fråga: "Hur bli av med denna?"}} = -\mu_0\mathbf{J}_{\mathrm{f}}(\mathbf{x},t)$$

[5] Notera att Gauss och Ampères lagar som involverar mediets egenskaper (eftersom vi här betraktar $\mathbf{E}$ och $\mathbf{B}$ som våra elektrodynamiska "basfält") så långt ej ännu använts; detta är punkten då vi först introducerar mediets egenskaper.

[6] Recap från Föreläsning 10, där den homogena vågekvationen i tre dimensioner ("d'Alemberts vågekvation") skrevs på formen

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)f(\mathbf{x},t) = 0.$$

Den generella formen av vågekvationen för skalära potentialen

Embryot till en vågekvation för den skalära potentialen ϕ kan tas fram på ett liknande sätt, om än betydligt enklare än för vektorpotentialen, genom att utveckla divergensen för den *elektriska flödestätheten* $\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}\mathbf{E}$ under i övrigt samma förutsättningar som för vektorpotentialen, som

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}\nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}\nabla \cdot \Big(-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\Big) = \rho \qquad \Leftrightarrow \qquad \nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}}.$$

Det som för vektorpotentialen tog ett antal rader i anspråk för härledning kunde för den skalära potentialen göras med en *one-liner*, med "$\nabla^2\phi$" som åtminstone en bra början på en "halv vågekvation". Frågan här blir istället hur termen $(\partial/\partial t)\nabla \cdot \mathbf{A}$ skall tolkas. Som vi strax kommer att se, så kommer denna fråga att praktiskt taget trivialt få en lösning så snart som den mer trixiga termen för vektorpotentialen eliminerats.

Gauge-transformen

Om vi skall sammanfatta detta halvvägs, så har vi i och med detta reducerat Maxwells fyra ekvationer till två, en för den skalära potentialen ϕ och en för vektorpotentialen $\mathbf{A}$, vilka dock fortfarande är kopplade. Att de fortfarande är kopplade gör det svårt för oss att formulera hur dessa potentialer skall extraheras från kända variabler så som laddningsfördelningar och strömtätheter. Isärkopplingen av dessa två ekvationer för potentialerna kan dock utföras genom att utnyttja en viss grad av godtycklighet som fortfarande finns inneboende i ekvationerna, som vi nu skall visa.

Vi noterar att eftersom vektorpotentialen $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ definieras utifrån rotationen av vektorpotentialen som

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t),$$

och eftersom vi alltid har vektoridentiteten $\nabla \times \nabla f \equiv 0$, så är vektorpotentialen godtycklig i den bemärkelsen att det magnetiska fältet alltid lämnas invariant då vi adderar en gradient av någon skalär funktion, säg $\psi(\mathbf{x}, t)$, till den,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \nabla\psi(\mathbf{x}, t),$$

där $\psi(\mathbf{x}, t)$ är en *godtycklig två gånger kontinuerligt differentierbar funktion i rum och tid*,[7] beroende av rums-koordinater och tid. Med andra ord har vi full frihet att addera en gradient av en lämpligt vald skalär funktion ψ till vektorpotentialen och *fortfarande ha exakt samma magnetiska fält kopplat till denna.*

[7] En funktion är två gånger kontinuerligt differentierbar om den uppfyller att dess första- och andraderivator existerar, samt att både första- och andraderivatorna är kontinuerliga. Frågan är då naturligtvis: Varför ställer vi detta specifika krav på *gauge-funktionen* ψ? Det enkla svaret på denna fråga är att vi ställer kravet att det elektromagnetiska fältet är överallt kontinuerligt där potentiallösningarna tas fram, i omgivningar fria från diskontinuiteter, och att detta fält utgörs av förstaderivator av potentialerna. Om vi dessutom i fallet med vektorpotentialen $\mathbf{A}$ *adderar en gradient* $\nabla\psi$ dessutom kommer att ställa kravet på ψ att den är just en två gånger kontinuerligt differentierbar funktion. Detta enkla svar haltar dock en aning, speciellt då detta inte förklarar varför ψ dessutom måste vara två gånger kontinuerligt differentierbar även i tid. Vi kommer strax att se ett bättre skäl till varför vi kräver av ψ att den är två gånger kontinuerligt differentierbar såväl i rum som i tid.

För att det *elektriska fältet* skall vara oförändrat av denna transformation, det vill säga att

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = -\nabla\phi(\mathbf{x},t) - \frac{\partial}{\partial t}\big[\underbrace{\mathbf{A}'(\mathbf{x},t) - \nabla\psi(\mathbf{x},t)}_{=\mathbf{A}(\mathbf{x},t)}\big] = -\nabla\Bigg(\underbrace{\phi(\mathbf{x},t) - \frac{\partial\psi(\mathbf{x},t)}{\partial t}}_{=\phi'(\mathbf{x},t)}\Bigg) - \frac{\partial\mathbf{A}'(\mathbf{x},t)}{\partial t}$$

skall förbli oförändrad, så är kravet att den skalära potentialen *samtidigt* transformeras som

$$\phi(\mathbf{x},t) \quad \to \quad \phi'(\mathbf{x},t) = \phi(\mathbf{x},t) - \frac{\partial\psi(\mathbf{x},t)}{\partial t}.$$

Sammanfattningsvis, så har vi resultatet att den parvisa transformationen

$$\begin{aligned}\mathbf{A}'(\mathbf{x},t) &= \mathbf{A}(\mathbf{x},t) + \nabla\psi(\mathbf{x},t),\\ \phi'(\mathbf{x},t) &= \phi(\mathbf{x},t) - \frac{\partial\psi(\mathbf{x},t)}{\partial t},\end{aligned}$$

som kallas för *gauge-transformation* och används inte bara inom klassisk elektrodynamik, utan även ofta inom kvantmekanik, lämnar de elektriska och magnetiska fälten[8] oförändrade,[9]

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x},t) &\equiv -\nabla\phi'(\mathbf{x},t) - \frac{\partial\mathbf{A}'(\mathbf{x},t)}{\partial t}, && \Bigg(= -\nabla\phi(\mathbf{x},t) - \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{\partial t}\Bigg)\\ \mathbf{B}(\mathbf{x},t) &\equiv \nabla\times\mathbf{A}'(\mathbf{x},t). && \Bigg(= \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\Bigg)\end{aligned}$$

Vi kommer nu att utnyttja denna möjlighet till val av gaugefunktionen ψ för att göra oss av med det som så att säga “inte passar in” i vågekvationen för vektorpotentialen.

[8] Om man skall vara petig, den *elektriska fältstyrkan* respektive den *magnetiska flödestätheten.*

[9] Som en liten illustrativ verifiering av detta grundläggande resultat, så är alltså

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi' - \frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla\Big(\phi - \frac{\partial\psi}{\partial t}\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\mathbf{A} + \nabla\psi\Big) = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}.$$

Lorenz-villkoret ("Lorenz gauge")

Om vi nu återvänder till grundproblemet med ekvationen för vektorpotentialen ovan, så kan vi se att vi med de *gauge-transformerade* potentialerna $\phi'(\mathbf{x},t)$ och $\mathbf{A}'(\mathbf{x},t)$ har att[10]

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\nabla\cdot\mathbf{A}'(\mathbf{x},t)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi'(\mathbf{x},t)}{\partial t}}_{\text{“Det vi försöker bli av med”}} &= \nabla\cdot\big(\mathbf{A}(\mathbf{x},t)+\nabla\psi(\mathbf{x},t)\big)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi(\mathbf{x},t)-\frac{\partial\psi(\mathbf{x},t)}{\partial t}\right)\\
&= \{\text{ Stuva om termer }\}\\
&= \underbrace{\nabla\cdot\mathbf{A}(\mathbf{x},t)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi(\mathbf{x},t)}{\partial t}+\underbrace{\left(\nabla^2\psi(\mathbf{x},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(\mathbf{x},t)}{\partial t^2}\right)}_{\text{Frihet att välja }\psi}}_{\substack{\text{Vi har frihet att välja }\psi\text{ så}\\ \text{att högerledet blir noll!}}}.
\end{aligned}
$$

Eftersom funktionen $\psi(\mathbf{x},t)$ är *godtycklig* (och vi ser nu dessutom i formen ovan varför vi kräver att funktionen är just *två* gånger differentierbar både i rum och tid), så innebär detta specifikt att vi kan välja den så att

$$
\nabla\cdot\mathbf{A}(\mathbf{x},t)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi(\mathbf{x},t)}{\partial t}+\left(\nabla^2\psi(\mathbf{x},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(\mathbf{x},t)}{\partial t^2}\right)=0
$$

vilket i sin tur betyder att "det vi försöker bli av med" blir noll,

$$
\nabla\cdot\mathbf{A}'(\mathbf{x},t)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi'(\mathbf{x},t)}{\partial t}=0.
$$

Denna relation mellan vektorpotential och skalär potential kallas allmänt *Lorenz-villkoret*, och innebär utöver att eliminera "det vi försöker bli av med" från ekvationen för vektorpotentialen även att ekvationen för den skalära potentialen under Lorenz-villkoret frikopplas från vektorpotentialen, då

$$
\nabla\cdot\mathbf{A}'=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi'}{\partial t}\quad\Rightarrow\quad\nabla^2\phi'+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{A}'=\nabla^2\phi'-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi'}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}}.
$$

Den frihet som gauge-transformen av den skalära potentialen och vektorpotentialen bistår med innebär alltså att vi specifikt har *friheten att välja potentialer $\phi(\mathbf{x},t)$ och $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ så att ekvationerna för dem frikopplas*, resulterande i två inhomogena partiella differentialekvationer

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi(\mathbf{x},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi(\mathbf{x},t)}{\partial t^2}&=-\frac{\rho(\mathbf{x},t)}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}},\\
\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{x},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{\partial t^2}&=-\mu_0\mathbf{J}_{\mathrm{f}}(\mathbf{x},t),
\end{aligned}
$$

där vi tog oss friheten att "droppa primmen" på ϕ' och $\mathbf{A}'$. Det är fortsättningsvis underförstått att vågekvationerna för potentialerna ϕ och $\mathbf{A}$ i sig innebär att vi redan bestämt oss för en viss *gauge* och att detta är inkluderat i variablerna, vilket vi erinrar oss i alla händelser ej kommer att påverka lösningarna för det elektromagnetiska fältet.

[10] Notera hur den slutliga termen som innehåller enbart gauge-funktionen ψ även den har formen av ännu en vågfunktion! Man kan på sätt och vis se detta som en i två led inbäddad vågfunktion från det elektromagnetiska fältet till potentialerna till gauge-funktionen ψ.

Några observationer

Från dessa två *vågekvationer* ser vi direkt två saker:

1. Potentialerna propagerar med ljusets hastighet c (notera att $c = c_0/n$ här fortfarande inkluderar brytningsindex $n = \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}$), så teorin bakom gauge-transformationen är tillämplig även för elektromagnetisk vågpropagation i ett dielektrikum.
2. Lösningarna till vågekvationerna för potentialerna kan fås fram exakt på analogt sätt som för det elektrostatiska fallet, så länge som vi är noga med att ta i beaktande *tidsfördröjningen $\Delta t = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$ från källa till observationspunkt*, resulterande i så kallade *retarderade potentialer*.

[Överkurs] Gauge-transformen: Lorenz och Coulomb gauge

Lorenz gauge

Gauge-transformationen ovan, vilken sägs fixera potentialerna i den så kallade *Lorenz gauge*,[11] säger egentligen bara att så länge som vi utnyttjar valfriheten att välja den (två gånger differentierbara i rum och tid) funktionen $\psi(\mathbf{x}, t)$ så att den uppfyller

$$\nabla^2\psi(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = -\left(\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t}\right),$$

så kommer ekvationerna för $\phi(\mathbf{x}, t)$ och $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ att frikopplas till två (i allmänhet inhomogena) vågekvationer. Lorenz-villkoret är vanligast förekommande när man arbetar med retarderade potentialer, eftersom vi då får frikopplade ekvationer för den skalära potentialen och vektorpotentialen.[12]

Coulomb gauge

Den andra ofta förekommande varianten är *Coulomb-villkoret* för gauge-transformen, i vilket vi fixerar potentialerna i det så kallade *Coulomb gauge*. I detta fall väljer vi $\psi(\mathbf{x}, t)$ så att

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Observera att $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = 0$ självfallet *inte* på något sätt innebär att $\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ (som ju är detsamma som magnetiska flödestätheten $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$) nödvändigtvis är noll.

I detta fall blir vårt krav på $\psi(\mathbf{x}, t)$ att funktionen istället uppfyller

$$\nabla^2\psi(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t},$$

och vi ser att de partiella differentialekvationerna för potentialerna istället antar formen

$$\begin{aligned}
\nabla^2\phi(\mathbf{x}, t) &= -\frac{\rho(\mathbf{x}, t)}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}}, \\
\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= -\mu_0\mathbf{J}_{\mathrm{f}}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c^2}\nabla\frac{\partial\phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t},
\end{aligned}$$

det vill säga att den skalära potentialen $\phi(\mathbf{x}, t)$ nu (tämligen oväntat) uppfyller den vanliga *statiska* Poisson-ekvationen (notera att vi i denna ekvation saknar tidsderivata, och att höger-

---

[11] Om Lorenz gauge (Wikipedia): "It is unique among the constraint gauges in retaining manifest Lorentz invariance. Note, however, that this gauge was originally named after the Danish physicist Ludvig Lorenz and not after Hendrik Lorentz; it is often misspelled "Lorentz gauge". (Neither was the first to use it in calculations; it was introduced in 1888 by George F. FitzGerald.)"

[12] För en intressant utläggning kring historiken och utvecklingen av teorin bakom gauge-transformationen, inklusive den felaktiga termen *Lorentz gauge* (istället för det korrekta *Lorenz gauge*), se till exempel J. D. Jackson, *Historical roots of gauge invariance*, Rev. Mod. Phys. **73**, 663 (2001); `https://journals.aps.org/rmp/abstract/10.1103/RevModPhys.73.663`.

och vänsterled är direkt kopplade utan någon tidsfördröjning mellan källa och observationspunkt), med *omedelbar* verkan från en laddningsfördelning $\rho(\mathbf{x},t)$, med lösningen

$$\phi(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}} \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{x},t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\, dV'.$$

Ett annat sätt att se på detta är att vi i denna gauge har den skalära potentialen som en *direkt och omedelbar* Coulomb-potential från laddningstätheten $\rho(\mathbf{x},t)$, därav att detta betecknas som *Coulomb gauge*. I denna gauge löser vi principiellt först för den skalära potentialen (och ignorerar det faktum att potentialer likt de elektromagnetiska fälten i verkligheten självfallet propagerar med ljusets hastighet), varvid vi använder lösningen $\phi(\mathbf{x},t)$ som en källterm i den inhomogena vågekvationen för vektorpotentialen $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$.

Coulomb-villkoret (Coulomb gauge) används ofta för fältproblem då vi har avsaknad av fria laddningar eller strömmar. I detta fall är den skalära potentialen $\phi(\mathbf{x},t) = 0$, och vektorpotentialen uppfyller då den homogena vågekvationen

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = 0.$$

Det elektriska fältet $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ och magnetiska flödestätheten $\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$ fås då som

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{\partial t}, \qquad \mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x},t).$$

Eftersom vi uppenbarligen har en ofysikalisk situation i det att den skalära potentialen i Coulomb gauge *omedelbart* får en effekt på en observationspunkt på ett avstånd från källan (och därmed bryter mot den grundläggande fysikaliska pricipen att ingenting kan färdas fortare än ljusets hastighet), så infinner sig frågan om detta verkligen kan vara korrekt?

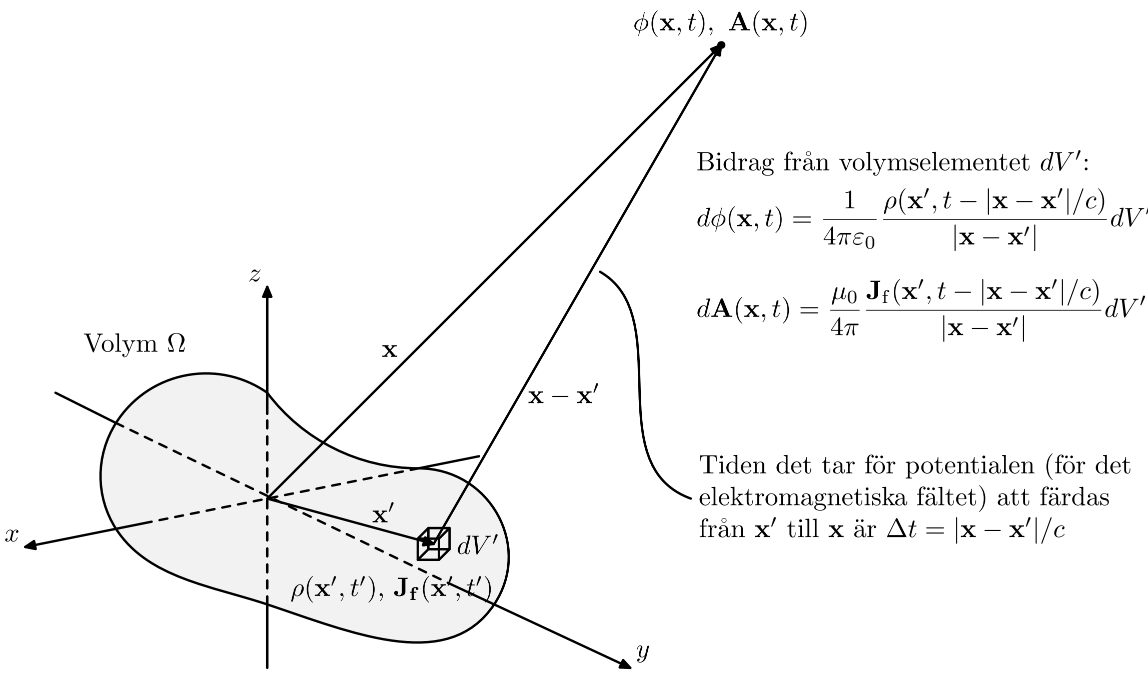
Här måste vi hålla isär begreppet potential och fält, och först av allt konstatera att vektorpotentialen $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$, som i Coulomb gauge bistår med både det elektriska och magnetiska fältet, följer en vågekvation som propagerar lösningen med ljushastigheten. I denna vågekvation ingår den omedelbara skalära potentialen som en slags *artificiell källterm*, från vilken vi aldrig direkt extraherar några fält. Med andra ord, så är Coulomb gauge användbar i frånvaro av fria laddningar och strömmar, men vi måste då vara noga med att inte tolka in några elektrodynamiska effekter direkt från den skalära potentialen.

Om inga speciella omständigheter råder, är en generell rekommendation att använda Lorenz gauge närhelst det är möjligt, då detta inte kan ge upphov till eventuella misstolkningar av de retarderade potentialerna som bistår med lösningarna.

Retarderade potentialer på integralform

Vi kommer nu att fortsätta under antagandet att vi fixerar potentialerna under Lorenz-villkoret. Som vi sett kan vi om vi fixerar den skalära potentialen och vektorpotentialen i *Lorenz gauge* frikoppla ekvationerna från varandra, till två inhomogena vågekvationer.

Ofta kan fältekvationerna för $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ och $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ lösas genom att precis som i det elektrostatiska fallet först beräkna integralerna för (den genom Lorenz-villkoret frikopplade) skalära potentialen och vektorpotentialen. Dessa potentialer är dock för det elektrodynamiska fallet tidsberoende, oavsett att de i *Lorenz gauge* är frikopplade, och deras värden $\phi(\mathbf{x}, t)$ respektive $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ vid tidpunkten t kommer att bero på summan av deras infinitesimala bidrag $d\phi(\mathbf{x}, t')$ och $d\mathbf{A}(\mathbf{x}, t')$ från en *tidigare* tidpunkt t'.



Den tid som det tar för den elektromagnetiska potentialen (eller för den delen, det elektromagnetiska fältet) att nå observationspunkten $\mathbf{x}$ från källpunkten $\mathbf{x}'$ är helt enkelt $\Delta t = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$, vilket innebär att när vi summerar alla infinitesimala bidrag i den vanliga volymsintegralen för potentialerna, så måste vi vara noga med att inte bara summera över rummet, utan även ta hänsyn till den tid som det tar för potentialen att nå observationspunkten. Härav att vi kallar den elektrodynamiska varianten av den skalära potentialen och vektorpotentialen för *retarderade potentialer* (eller "fördröjda" potentialer, om man så vill). Dessa potentialer formuleras som volymintegralerna

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \, dV', \qquad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \, dV',$$

där

$$t' = t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$$

är den *retarderade tiden* som beror av avståndet mellan källa $\mathbf{x}'$ och observationspunkt $\mathbf{x}$. Utifrån dessa två integraler fås därefter de elektromagnetiska fälten $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ och $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ direkt från relationerna

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t), \qquad \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\nabla\phi(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}.$$

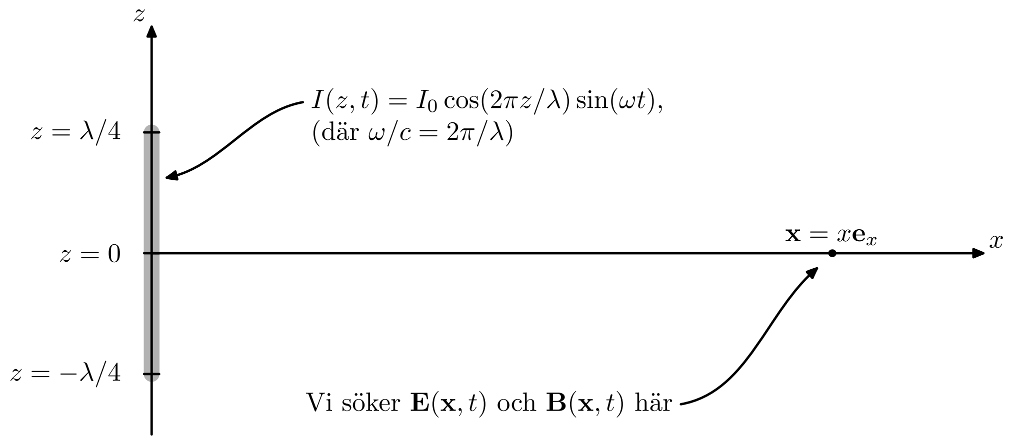
Notera att denna evaluering av potentialerna självfallet sker vid den *aktuella* tiden t (vid vilken vid evaluerar fälten); all tidigare historik hos alla delbidragande volymselement för de retarderade potentialerna har ju inkluderats genom själva integrationen.

Exempel: Halvvågsantenn och emitterade elektromagnetiska fält

Som ett handfast exempel på den praktiska tillämpningen av de retarderade potentialerna $\phi(\mathbf{x},t)$ och $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ skall vi nu genom dessa potentialer beräkna de emitterade elektriska och magnetiska fälten $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ och $\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$ från en halvvågsantenn (så kallad “dipolantenn”), riktad längs $\mathbf{e}_z$ och matad med strömmen

$$I(z,t) = I_0 \cos(2\pi z/\lambda)\sin(\omega t),$$

för $-\lambda/4 \le z \le \lambda/4$ och med $\omega/c = 2\pi/\lambda$. Evaluera fälten vid en punkt $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_x$ där $x \gg \lambda$.



Först av allt: Några kvalificerade gissningar

- Fälten bör i punkten $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_x$ rimligen breda ut sig med en vågvektor riktad längs x-axeln.
- I punkten $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_x$ bör det elektriska fältet av symmetriskäl hos källan vara riktat längs med z-axeln.
- Eftersom den magnetiska flödesttätheten är ortogonal mot både vågvektorn och det elektriska fältet, så bör det vara riktat längs y-axeln (inåt i figurens plan).
- Vi kan gissa oss till att en rimlig arbetsgång är att från strömmen söka potentialerna och ur dessa fälten,

$$I(z,t) \quad \rightarrow \quad \underbrace{\phi(\mathbf{x},t), \mathbf{A}(\mathbf{x},t)}_{\text{retarderade potentialer}} \quad \rightarrow \quad \underbrace{\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x},t) &= -\nabla\phi(\mathbf{x},t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{\partial t} \\ \mathbf{B}(\mathbf{x},t) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x},t) \end{aligned}}_{\text{fält}}$$

- Vektorpotentialen kan beräknas ur den givna strömmen; dock behöver vi för den skalära potentialen även den elektriska laddningen på antennen. Även om denna inte är given, så kan vi gissa oss till att denna i alla händelser kan tas fram ur det allmänt giltiga kontinuitetssambandet (konserveringslagen) för elektrisk laddning)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J_f} = 0.$$

Lösning

Vi vet redan på förhand att vektorpotentialen kan tas fram direkt ur den givna strömmen i antennen. För den skalära potentialen behöver vi dock även laddningsdensiteten längs antennen, något som ej är givet direkt i uppgiften. Från den generella lagen om konservering av laddning i tre dimensioner får vi dock fram laddningsdensiteten *per längdenhet* $\rho_\ell(z,t)$ på antennen från den kända strömmen, som:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J_f} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial\rho_\ell(z,t)}{\partial t} + \frac{\partial I(z,t)}{\partial z} = 0,$$

det vill säga, om vi nu integrerar detta i tiden (från, säg, $t = 0$) för att få fram laddningen per längdenhet längs antennen,

$$\begin{aligned}
\underbrace{\rho_\ell(z,t)}_{(\mathrm{C/m})} &= -\int_0^t \frac{\partial I(z,\tau)}{\partial z}\,d\tau \\
&= \{\ I(z,t) = I_0\cos(2\pi z/\lambda)\sin(\omega t)\ \} \\
&= -I_0 \underbrace{\frac{\partial\cos(2\pi z/\lambda)}{\partial z}}_{\left(-\frac{2\pi}{\lambda}\sin(2\pi z/\lambda)\right)} \underbrace{\int_0^t \sin(\omega\tau)\,d\tau}_{\left(-\frac{(\cos(\omega t)-1)}{\omega}\right)} \\
&= \frac{2\pi I_0}{\lambda\omega}\sin(2\pi z/\lambda)(1-\cos(\omega t)) \\
&= \{\ \lambda\omega = \lambda(2\pi c/\lambda) = 2\pi c\ \} \\
&= \underbrace{(I_0/c)}_{(\mathrm{C/m})}\sin(2\pi z/\lambda)(1-\cos(\omega t))
\end{aligned}$$

Ur detta får vi därefter direkt den retarderade skalära potentialen som

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{x}',t')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,dV' \\
&= \{\ \text{linjeladdning} \ \to\ \text{en-dimensionell integral}\ \} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \frac{\rho_\ell(\mathbf{x}',t')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,dz' \\
&= \frac{I_0}{4\pi\varepsilon_0 c}\int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \frac{\sin(2\pi z'/\lambda)(1-\cos(\omega t'))}{|x\mathbf{e}_x - z'\mathbf{e}_z|}\,dz' \\
&= \{\ \text{retarderad tid, } t' = t - |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c = t - \sqrt{x^2+z'^2}/c\ \} \\
&= \frac{I_0}{4\pi\varepsilon_0 c}\int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \frac{\sin(2\pi z'/\lambda)(1-\cos(\omega(t-\sqrt{x^2+z'^2}/c)))}{\sqrt{x^2+z'^2}}\,dz' \\
&= \{\ \text{Antagande i problemet: } x \gg \lambda \ \Leftrightarrow\ x \gg z \in [-\lambda/4, \lambda/4]\ \} \\
&= \frac{I_0}{4\pi\varepsilon_0 c x}(1-\cos(\omega(t-x/c))) \underbrace{\int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \sin(2\pi z'/\lambda)\,dz'}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Detta något snöpliga resultat är något vi faktiskt borde ha anat redan utifrån den symmetriska integralen längs z och den *anti-symmetriska* formen på integranden $\sin(2\pi z/\lambda)$. Att den skalära potentialen $\phi(\mathbf{x},t)$ är identiskt noll betyder dock *inte* att det elektriska fältet är noll, vilket vi lätt kan förledas att tro ifrån det *elektrostatiska* sambandet $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, vilket inte är applicerbart rätt av för *elektrodynamiska* (tidsberoende) problem som detta. Istället är det tidsderivatan av vektorpotentialen som kommer att bistå med detta.

Den retarderade vektorpotentialen fås (som vi tidigare nämnt) direkt från den givna strömfördelningen $I(z,t)$ som

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{x},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{J}(z',t')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,dV' \\
&= \{ \text{ linjeström; även noga att vi använder } \textit{retarderad} \text{ tid } t' \ \} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \frac{I(z',t')\mathbf{e}_z}{|x\mathbf{e}_x - z'\mathbf{e}_z|}\,dz' \\
&= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\mathbf{e}_z \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \frac{\cos(2\pi z'/\lambda)\sin(\omega t')}{\sqrt{x^2+z'^2}}\,dz' \\
&= \{ \text{ retarderad tid, } t' = t - |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c = t - \sqrt{x^2+z'^2}/c \ \} \\
&= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\mathbf{e}_z \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \frac{\cos(2\pi z'/\lambda)\sin(\omega(t-\sqrt{x^2+z'^2}/c))}{\sqrt{x^2+z'^2}}\,dz' \\
&= \{ \ x \gg \lambda \ \} \\
&\approx \frac{\mu_0 I_0 \sin(\omega(t-x/c))}{4\pi x}\mathbf{e}_z \underbrace{\int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \cos(2\pi z'/\lambda)\,dz'}_{=\lambda/\pi} \\
&= \frac{\mu_0 I_0 \lambda \sin(\omega(t-x/c))}{4\pi^2 x}\mathbf{e}_z
\end{aligned}$$

Från detta erhålls den magnetiska flödestätheten vid observationspunkten $\mathbf{x}$ som

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{x},t) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x},t) \\
&= \left(\mathbf{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \underbrace{\mathbf{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}}_{\to 0}\right) \times \frac{\mu_0 I_0 \lambda \sin(\omega(t-x/c))}{4\pi^2 x}\mathbf{e}_z \\
&= \underbrace{(\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z)}_{=-\mathbf{e}_y} \frac{\mu_0 I_0 \lambda}{4\pi^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin(\omega(t-x/c))}{x}\right) \\
&= -\mathbf{e}_y \frac{\mu_0 I_0 \lambda}{4\pi^2}\left(\frac{-(\omega/c)\cos(\omega(t-x/c))\cdot x - \sin(\omega(t-x/c))\cdot 1}{x^2}\right) \\
&= \mathbf{e}_y \frac{\mu_0 I_0 \lambda}{4\pi^2}\left(\frac{(\omega x/c)\cos(\omega(t-x/c)) + \sin(\omega(t-x/c))}{x^2}\right) \\
&= \mathbf{e}_y \frac{\mu_0 I_0 \lambda}{4\pi^2}\left(\frac{\omega}{c}\frac{\cos(\omega(t-x/c))}{x} + \frac{\sin(\omega(t-x/c))}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

På samma sätt erhålles den elektriska fältstyrkan vid observationspunkten $\mathbf{x}$ som

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{x},t) &= -\underbrace{\nabla\phi(\mathbf{x},t)}_{=0} - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{\partial t} \\
&= -\mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu_0 I_0 \lambda \sin(\omega(t-x/c))}{4\pi^2 x}\right) \\
&= -\mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I_0 \lambda\omega}{4\pi^2}\frac{\cos(\omega(t-x/c))}{x} \\
&= \{ \ \omega\lambda = 2\pi c \ \} \\
&= -\mathbf{e}_z \frac{\mu_0 c I_0 \lambda\omega}{2\pi}\frac{\cos(\omega(t-x/c))}{x}
\end{aligned}$$

Några intressanta saker att observera ur lösningen

- De elektriska och magnetiska fälten är riktade precis så som vi förväntade oss, med $\mathbf{E}$ längs $\mathbf{e}_z$ och med $\mathbf{B}$ längs $\mathbf{e}_y$.
- Vi kan enkelt verifiera lösningarna (utför gärna denna exercis!) för fälten $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ och $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ mot varandra genom att utvärdera höger- och vänsterledet i Faradays lag,

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}.$$

- Något mer förvånande är att det elektriska fältet avtar med avståndet från antennen som $\mathbf{E} \sim 1/x$, medan magnetfältet $\mathbf{B}$ består av två termer med den ena $\sim 1/x$ och den andra $\sim 1/x^2$. Vi måste här dock hålla i minnet att vi då vi närmar oss närfältet, så gäller inte antagandet om en direkt proportionalitet mellan det elektriska och magnetiska fältet. Faradays lag, som är grunden även för denna avvikelse mellan fältens avtagande med x i närfältet, gäller dock alltid.
- Eftersom $\mathbf{E}$ för $x \gg \lambda$ avtar som $\sim 1/x$, så avtar fältstyrkan effektivt på samma sätt som en motsvarande statisk elektrisk monopol. Att vi vi har avtagandet som $\mathbf{E} \sim 1/x$ är faktiskt förutsättningen för långdistanskommunikation med radiofrekvenser! (Man skulle möjligen, i en analogi med det elektrostatiska fallet, annars kunna förvänta sig att fältet spreds som från en elektrostatisk dipol, som $\mathbf{E} \sim 1/x^2$, men detta är alltså felaktigt.)
- Alltså: Det *elektrodynamiska* (tidsberoende) fälten skiljer sig radikalt från de *elektrostatiska* (tidsoberoende)!

Sammanfattning av Föreläsning 11 – Retarderade potentialer som lösningar till Maxwells ekvationer

- Den elektro*dynamiska* formen för den skalära potentialen ϕ och vektorpotentialen $\mathbf{A}$ lyder

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x},t) &= -\nabla\phi(\mathbf{x},t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{\partial t},\\ \mathbf{B}(\mathbf{x},t) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x},t).\end{aligned}$$

- Den så kallade *gauge-transformationen* av potentialerna,

$$\begin{aligned}\phi'(\mathbf{x},t) &= \phi(\mathbf{x},t) - \frac{\partial \psi(\mathbf{x},t)}{\partial t},\\ \mathbf{A}'(\mathbf{x},t) &= \mathbf{A}(\mathbf{x},t) + \nabla\psi(\mathbf{x},t),\end{aligned}$$

  där ψ är en funktion som är två gånger kontinuerligt differentierbar i rum och tid, lämnar de elektromagnetiska fälten oförändrade. Vi kan med denna transform till viss del välja vilken form av vågekvation vi önskar för potentialerna.
- Under *Lorenz-villkoret*, där vi väljer ψ så att

$$\nabla \cdot \mathbf{A}'(\mathbf{x},t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi'(\mathbf{x},t)}{\partial t} = 0,$$

  så frikopplar ekvationerna för potentialerna från varandra, resulterande i vågekvationerna

$$\begin{aligned}\Big(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big)\phi(\mathbf{x},t) &= -\frac{\rho(\mathbf{x},t)}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}},\\ \Big(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big)\mathbf{A}(\mathbf{x},t) &= -\mu_0\mathbf{J}_{\mathrm{f}}(\mathbf{x},t).\end{aligned}$$

- De *retarderade potentialerna* (fördröjda potentialerna) tar hänsyn till den tidsfördröjning som olika källor vid källpunkterna $\mathbf{x}'$ har fram till att deras respektive bidrag observeras vid en observationspunkt $\mathbf{x}$, och formuleras på integralform som

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{x}',t')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,dV',\\ \mathbf{A}(\mathbf{x},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}',t')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,dV',\end{aligned}$$

  där $t' = t - |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c$ är den *retarderade tiden* från $\mathbf{x}'$ till $\mathbf{x}$.