UPPSALA UNIVERSITET

Elektromagnetism II, 1TE626 (2025)
Fredrik Jonsson
Document Revision 3 November 2025
https://github.com/hp35/elmagii/

Tentamensuppgift 1

Givet Maxwells ekvationer

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho,$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\mathrm{f}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

samt de konstitutiva relationerna

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{r}} \mathbf{E},$$
$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 \mu_{\mathrm{r}} \mathbf{H},$$

visa att den elektromagnetiska vgekvationen i ett generellt medium lyder

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left(\mathbf{J}_{\mathrm{f}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right)}_{\text{gemensam källterm}},$$
$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mu_0 \nabla \times \underbrace{\left(\mathbf{J}_{\mathrm{f}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right)}_{\text{gemensam källterm}}.$$

Lösningsförslag

De ingående fälten och deras respektive SI-enheter är, för att rekapitulera,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \text{Elektrisk fältstyrka (“elektriskt fält”) (V/m)} \\
\mathbf{D} &= \text{Elektrisk flödestäthet (C/m}^2\text{)} \\
\mathbf{P} &= \text{Elektrisk polarisationsdensitet (C/m}^2\text{)} \\
\mathbf{B} &= \text{Magnetisk flödestäthet (“B-fält”) (T)} \\
\mathbf{H} &= \text{Magnetisk fältstyrka (“H-fält”) (A/m)} \\
\mathbf{M} &= \text{Magnetisering (A/m)}
\end{aligned}
$$

Vi börjar med den elektriska fältstyrkan $\mathbf{E}$ genom att applicera $\nabla\times$ (“ta rotationen”) på Faradays generella induktionslag,

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\nabla\times\mathbf{E} &= \nabla\times\Big(-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\Big) \\
&= \{\ \text{Konstitutiv relation } \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})\ \} \\
&= -\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\Big(\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})\Big) \\
&= -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{H} - \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{M} \\
&= \{\ \text{Tillämpa Ampères lag}\ \} \\
&= -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\Big(\mathbf{J}_\mathrm{f} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\Big) - \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{M} \\
&= \{\ \text{Konstitutiv relation } \mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}\ \} \\
&= -\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\big(\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}\big) - \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\big(\mathbf{J}_\mathrm{f}+\nabla\times\mathbf{M}\big) \\
&= \{\ \text{Kombinera polarisationsdensiteten in i källterm}\ \} \\
&= -\underbrace{\mu_0\varepsilon_0}_{=1/c_0^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} \underbrace{- \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\Big(\mathbf{J}_\mathrm{f} + \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + \nabla\times\mathbf{M}\Big)}_{\text{källterm}}.
\end{aligned}
$$

Notera att denna ekvation för $\mathbf{E}$ gäller *oavsett* eventuella spatiala variationer hos relativa permittiviteten eller permeabiliteten, det vill säga oavsett om relationen mellan de exciterande fälten och den resulterande elektriska polarisationsdensiteten eller magnetiseringen ändras.

På samma sätt har vi för magnetiska flödestätheten $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})$ att

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\nabla\times\mathbf{B} &= \mu_0\nabla\times\nabla\times\mathbf{H} + \mu_0\nabla\times\nabla\times\mathbf{M} \\
&= \{\ \text{Tillämpa Ampères lag}\ \} \\
&= \mu_0\nabla\times\Big(\mathbf{J}_\mathrm{f} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\Big) + \mu_0\nabla\times\nabla\times\mathbf{M} \\
&= \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{D} + \mu_0\nabla\times\Big(\mathbf{J}_\mathrm{f} + \nabla\times\mathbf{M}\Big) \\
&= \{\ \text{Konstitutiv relation } \mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}\ \} \\
&= \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{E} + \mu_0\nabla\times\Big(\mathbf{J}_\mathrm{f} + \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + \nabla\times\mathbf{M}\Big) \\
&= \{\ \text{Tillämpa Faradays lag}\ \} \\
&= -\underbrace{\mu_0\varepsilon_0}_{=1/c_0^2}\frac{\partial\mathbf{B}^2}{\partial t^2} + \underbrace{\mu_0\nabla\times\Big(\mathbf{J}_\mathrm{f} + \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + \nabla\times\mathbf{M}\Big)}_{\text{källterm}}.
\end{aligned}
$$