UPPSALA UNIVERSITET

Elektromagnetism II, 1TE626 (2025)
Lecture Notes, Fredrik Jonsson
Document Revision 25 November 2025
https://github.com/hp35/elmagii/

Föreläsning 9

Maxwells ekvationer och vågutbredning

Fredrik Jonsson, Uppsala Universitet, 25 november 2025

Sammanfattning av föreläsningen

Faradays och Ampères lagar sys tillsammans med Gauss lag för det elektriska och magnetiska fältet slutligen ihop till Maxwells ekvationer. Nyckeln till dessa kommer ifrån Maxwells generalisering av Ampères lag, där Maxwell kom på att lösningen till problemet med att kontinuitetsekvationen för elektrisk laddning inte uppfylldes för tidsberoende fält var att lägga till en term i den fria strömtätheten $\mathbf{J}_\mathrm{f}$*, motsvarande förskjutningsströmmen* $\partial\mathbf{D}/\partial t$*. Med denna förskjutningsström närvarande i Ampères lag* $\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J}_\mathrm{f} + \partial\mathbf{D}/\partial t$ *satisfieras även kontinuitetsekvationen* $\nabla\cdot\mathbf{J} = -\partial\rho/\partial t$*. Vi sammanfattar Maxwells ekvationer en gång för alla, och visar hur dessa kan omformuleras till två vågekvationer för de elektriska och magnetiska fälten.*

Sammanfattning i tre punkter

1. *Maxwells ekvationer lyder*

$$\begin{aligned}
&\oiint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \iiint \rho\, dV &&\Leftrightarrow &&\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho\\
&\oiint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0 &&\Leftrightarrow &&\nabla\cdot\mathbf{B} = 0\\
&\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} &&\Leftrightarrow &&\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\\
&\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \iint \mathbf{J}_\mathrm{f}\cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t}\iint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} &&\Leftrightarrow &&\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J}_\mathrm{f} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}
\end{aligned}$$

2. *De elektromagnetiska vågekvationerna för de elektriska och magnetiska fälten lyder*

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{E} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\mathbf{J}_\mathrm{f} + \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + \nabla\times\mathbf{M}\right)}_{\textit{gemensam källterm}},$$

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{B} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = \mu_0\nabla\times\underbrace{\left(\mathbf{J}_\mathrm{f} + \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + \nabla\times\mathbf{M}\right)}_{\textit{gemensam källterm}}.$$

3. *Från de elektromagnetiska vågekvationerna kan samtliga fall som hittills behandlas i kursen härledas, beroende på vilka termer som kan sättas till noll och på så sätt reducera systemet till den statiska eller dynamiska situation man önskar analysera.*

Maxwells generalisering av Ampères lag

Så långt i kursen[1] har Maxwells ekvationer baserats på frirymds-formen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

samt med Ampères lag (så långt) på den *statiska* formen

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \qquad \text{(Statisk!)}$$

Utifrån en *elektrostatisk* betraktelse, så ser vi direkt att det elektriska fältet har sin källa i statiska elektriska laddningar, via Gauss lag för det elektriska fältet, medan det *statiska* magnetfältet i sin tur har sin källa i motsvarande *rörelse* av de elektriska laddningarna (det vill säga *ström*). Redan i Faradays lag ovan har vi dock en första koppling till en *elektrodynamisk* koppling i och med att tidsvariationen hos det magnetiska fältet kopplar till rotationen hos det elektriska fältet. Denna koppling sker dessutom via ett omvänt tecken, vilket i grund och botten fastställer *Lenz lag* (som säger att en inducerad elektromotorisk kraft alltid riktas så att den motverkar källan som inducerade den).

Som ett grundläggande krav för att dessa tre ekvationer skall vara fysikaliskt korrekta måste dessutom *lagen om att elektrisk laddning inte kan försvinna*[2] vara uppfylld,[3]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0.$$

---

[1] Den följande behandlingen i denna föreläsning, där vi till slut kommer fram till en mer generell form av Maxwell's ekvationer än vad man som oftast stöter på i standard-textböcker, följer i huvudsak Griffiths kapitel 7.3. Dock tycker jag att Griffiths saknar poängen att källtermerna för såväl det elektriska som magnetiska fältet i själva verket har en gemensam form, bestående av den fria strömtätheten, tidsderivatan av den elektriska polarisationsdensiteten, samt rotationen av magnetfältet. Min förhoppning är att analysen här, om än något mer omfattande, skall belysa denna *fundamenta* och väcka intresset för denna oerhört vackra del av elektromagnetisk teori.

[2] Notera att man talade om elektrisk laddning långt innan elektronen 1897 upptäcktes experimentellt av brittiske fysikern och nobelpristagaren Joseph John Thomson. Elektronens existens framfördes dock som hypotes 1838 av den brittiske naturfilosofen Richard Laming, d.v.s. mindre än 20 år innan Maxwell konsoliderade "sina" ekvationer.

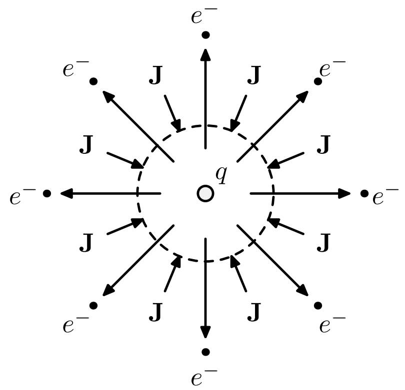
[3] Vi kan rekapitulera att denna härleddes i Föreläsning 4, utifrån Gauss lag applicerad på den totala ström som passerar ut genom en *sluten* yta S omslutande en volym V,

$$I = \Big[\text{strömmen ut genom ytan } S\Big] = \oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{J})\, dV.$$

Eftersom ingen laddning kan skapas eller förintas internt i volymen (vi erinrar oss att all laddningstransport in eller ut från volymen sker genom den slutna ytan S, så måste den laddning som flödar *ut genom ytan* göra att den i volymen V *inneslutna laddningen minskar* i motsvarande grad, det vill säga

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{J})\, dV = -\frac{d}{dt}\Big[\text{Innesluten laddning}\Big] = -\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\, dV = -\iiint_V \frac{d\rho}{dt}\, dV$$

Notera att tecknet för $-\partial\rho/\partial t$ i "lagen om att elektrisk laddning inte kan försvinna" hänger ihop med att strömmen $\mathbf{J}$ räknas som positiv *ut* från punkten för *positiv* laddningstransport. Med $\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) > 0$ måste vi därför ha en *ackumulering av negativ laddning* i punkten $\mathbf{x}$, och därmed att $\partial\rho(\mathbf{x})/\partial t < 0$.



$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Exempel med flöde av elektroner ut från en domän:

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) < 0$$

Låt oss därför en gång för alla kontrollera att den elektriska laddningen är bevarad utifrån ekvationerna ovan! Från den *statiska* formen av Ampères lag har vi dessvärre att

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \underbrace{(\nabla \times \mathbf{B})}_{=\mu_0 \mathbf{J}} \equiv \{ \text{ vektoridentitet } \} \equiv 0,$$

fast vi egentligen skulle behövt ett "$-\partial \rho / \partial t$" i högerledet istället för en nolla. Detta visar tydligt hur Ampères lag på formen ovan (i sin statiska form) *ej* kan tillämpas på generella tidsberoende problem.

Ett av James Clerk Maxwells viktigare bidrag till elektromagnetisk fältteori var när han 1856 insåg hur Ampères lag bör modifieras för att dessutom uppfylla kravet på bevaring av elektrisk laddning. Argumentet lyder i stort som följer: Om vi från kravet på bevaring av laddning har att "$-\partial \rho / \partial t$" saknas i högerledet ovan, *kan vi då inte helt enkelt lägga till en sådan term och se vad som händer?*

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \overset{?}{=} -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) = -\varepsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Vi använde i mellansteget ovan Gauss lag för elektrisk laddning. Uppenbarligen så skulle en modifiering av Ampères "statiska" lag med den (fria) strömtätheten ersatt med

$$\mathbf{J} \to \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

direkt lösa problemet med bevaring av laddning för tidsberoende problem, och detta är också själva kärnan i den modifiering som Maxwell introducerade.

I närvaron av fria strömmar (men utan att befinna sig i ett medium som kan polariseras elektriskt) är därför den generella (tidsberoende) formen av Ampères lag

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right),$$

där

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{"förskjutningsströmmen" (i vakuum, paradoxalt nog!)}$$

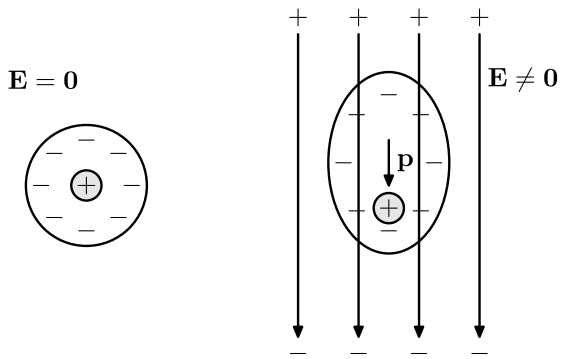
Att det är just $\varepsilon_0 \mathbf{E}$ som dyker upp i derivatan, och att denna term samtidigt finns naturligt i uttrycket för den elektriska polarisationsdensiteten hos ett material (se exempelvis föregående föreläsning), leder oss till att fundera på om det i det generella fallet (inuti ett elektriskt polariserbart medium, och inte bara i vakuum) i själva verket inte snarare är $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ som borde ingå. I själva verket är det exakt så som den korrekta generella formen är, som[4]

$$\mathbf{J}_{\text{tot}} = \mathbf{J}_{\text{f}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

[4] Vi inför här beteckningen $\mathbf{J}_{\text{f}}$ för den *fria* strömtätheten, identisk med all strömtäthet som diskuterats tidigare i kursen, bara för att vara noga med att särskilja denna från rörelsen hos *bundna* laddningar hos mediet. Notera att för statiska problem är $\mathbf{E}$ tidsoberoende och Ampères statiska lag opåverkad av denna modifikation.

där $\mathbf{J}_\mathrm{f}$ är strömmen av *fria laddningar*, medan $\partial\mathbf{D}/\partial t$ är "strömmen" av *bundna laddningar*. Maxwell själv kallade denna form för "*The Law of Total Currents*".

Så varför kallar vi $\partial\mathbf{D}/\partial t$ för just "förskjutningsström"? Till att börja med dyker denna term upp som en naturlig korrektion till strömmen $\mathbf{J}_\mathrm{f}$ av fria laddningar, och har självfallet samma fysikaliska dimension som strömtäthet (C/m^2). Utöver detta, så involverar $\mathbf{D}$ även den elektriska polarisationen av mediet, med en *förskjutning* av elektrisk laddning som en direkt följd av det pålagda elektriska fältet. Tidsderivatan av denna förskjutning av elektrisk laddning blir då en effektiv elektrisk *ström* (förflyttning av elektrisk laddning per tidsenhet), och därav att $\partial\mathbf{D}/\partial t$ är en effektiv "förskjutningsström". Viktigt här är att notera att en *ström* kan utgöras även av *bundna* laddningar, exempelvis i ett annars icke elektriskt ledande dielektrikum.



Exempelvis är en oscillerande molekylär elektrisk dipol ett exempel på denna förskjutningsström, vilket vi kan se som en elektriskt driven antenn på mikroskopisk nivå, där en medelvärdesbildning som omfattar antennen ger vid hand att ingen netto-ström genom volymen sker trots att "antennen" lokalt uppbär en periodiskt oscillerande effektiv (och högst lokal) ström.

Maxwells ekvationer

Maxwells fyra ekvationer[5] kan uttryckas antingen i en differentiell form eller i integralform. Ekvationerna involverar de tre elektriska fälten (**E**, **D** och polarisationsdensiteten **P**) och de tre magnetiska fälten (**B**, **H** och magnetiseringen **M**).

För vågpropagation i fri rymd (vakuum) kan vi anta att den relativa elektriska permittiviteten $\varepsilon_{\mathrm{r}} = 1$ och att den relativa magnetiska permeabiliteten $\mu_{\mathrm{r}} = 1$, för vilket fall vi frikopplar ekvationerna för **E** och **B** från konstitutiva relationer. Vi kommer här att istället för att utgå ifrån ett förenklat fall anta att vi har en mer generell situation i ett material. Maxwells ekvationer kan i sin generella form sammanfattas med

$$
\begin{aligned}
&\oiint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \iiint \rho\, dV && \Leftrightarrow && \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho && \text{(Gauss lag)}\\
&\oiint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0 && \Leftrightarrow && \nabla\cdot\mathbf{B} = 0 && \text{(Gauss lag)}\\
&\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} && \Leftrightarrow && \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && \text{(Faradays lag)}\\
&\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \iint \mathbf{J}_{\mathrm{f}}\cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t}\iint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} && \Leftrightarrow && \nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J}_{\mathrm{f}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} && \text{(Ampères lag)}
\end{aligned}
$$

I dessa ekvationer är ρ den *fria elektriska laddningstätheten*[6] C/m^3) och $\mathbf{J}_{\mathrm{f}}$ den *fria elektriska strömtätheten* (A/m^2). Utöver dessa ekvationer har vi (från exempelvis föregående föreläsning) de *konstitutiva relationerna*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}\mathbf{E},\\
\mathbf{B} &= \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0\mu_{\mathrm{r}}\mathbf{H}.
\end{aligned}
$$

Notera att vi har en lite “avig” relation för magnetiska fälten om vi betraktar paret (**E**,**B**) som våra primära fältvariabler. I många fall är det en fråga om tycke och smak om man väljer att definiera fältproblemet utifrån paret (**E**,**B**) eller (**E**,**H**), och speciellt i fallet med propagation i fri rymd är valet egalt, men alltsom oftast är det mest bekvämt att inom elektromagnetisk fältteori hålla sig till (**E**,**B**). Vi skall strax se varför.

De ingående fälten och deras respektive SI-enheter är, för att rekapitulera,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \text{Elektrisk fältstyrka (“elektriskt fält”) (V/m)}\\
\mathbf{D} &= \text{Elektrisk flödestäthet (C/m}^2\text{)}\\
\mathbf{P} &= \text{Elektrisk polarisationsdensitet (C/m}^2\text{)}\\
\mathbf{B} &= \text{Magnetisk flödestäthet (“B-fält”) (T)}\\
\mathbf{H} &= \text{Magnetisk fältstyrka (“H-fält”) (A/m)}\\
\mathbf{M} &= \text{Magnetisering (A/m)}
\end{aligned}
$$

[5] Det var faktiskt inte förrän 1884 som Oliver Heaviside (samme Heaviside som stegfunktionen $H(x)$), samtidigt med liknande liknande arbeten av Josiah Willard Gibbs och Heinrich Hertz, förenklade och grupperade ihop de ursprungligen 20 ekvationerna till endast fyra, under användande av modern vektornotation. Denna grupp av fyra vektor-ekvationer genom historien har kallats såväl Hertz–Heavisides ekvationer som Maxwell–Hertz ekvationer, men är idag kort och gott kända som *Maxwells ekvationer*.

[6] Till skillnad från den fria strömtätheten låter vi här bli att sätta ett explicit index “f” på laddningsdensiteten, eftersom det alltid är klart att ρ relaterar just till *fria* laddningar, till skillnad från $\mathbf{J}_{\mathrm{f}}$ som är separerad från förskjutningsströmmen $\partial\mathbf{D}/\partial t$.

Från Maxwells ekvationer till elektromagnetisk vågekvation

Övergången från Maxwells ekvationer till de två vektoriella elektromagnetiska vågekvationerna är onekligen en av de stiligaste härledningarna i klassisk elektrodynamik. Det kan starkt rekommenderas att en gång för alla gå igenom denna härledning med papper och penna, om så inte annat bara för att följa den aningen oväntade kopplingen mellan klassisk induktion till elektromagnetisk vågutbredning. (Dessutom är det en ganska kul och enkel exercis i vektoralgebra!)

Maxwells ekvationer i den form som de står i den klassiska beskrivningen kan tolkas ganska direkt som relationer för induktions- och källagar. De beskriver dock inte självklart vågekvationer, åtminstone inte vid en första anblick. Vi kommer här att härleda vågekvationerna för $\mathbf{E}$- och $\mathbf{B}$-fälten genom att eliminera den elektriska flödestätheten $\mathbf{D}$ och den magnetiska fältstyrkan $\mathbf{H}$, till förmån för en beskrivning direkt i termer av fri strömtäthet $\mathbf{J}$, elektrisk polarisationsdensitet $\mathbf{P}$ samt magnetiseringen $\mathbf{M}$.

Vi börjar med den elektriska fältstyrkan $\mathbf{E}$ genom att applicera $\nabla\times$ ("ta rotationen") på Faradays generella induktionslag,

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\nabla\times\mathbf{E} &= \nabla\times\left(-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)\\
&= \{\text{ Konstitutiv relation } \mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M}) \text{ }\}\\
&= -\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\Big(\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})\Big)\\
&= -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{H}-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{M}\\
&= \{\text{ Tillämpa Ampères lag }\}\\
&= -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{J}_{\mathrm{f}}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{M}\\
&= \{\text{ Konstitutiv relation } \mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P} \text{ }\}\\
&= -\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\big(\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}\big)-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\big(\mathbf{J}_{\mathrm{f}}+\nabla\times\mathbf{M}\big)\\
&= \{\text{ Kombinera polarisationsdensiteten in i källterm }\}\\
&= -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}-\underbrace{\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{J}_{\mathrm{f}}+\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}+\nabla\times\mathbf{M}\right)}_{\text{källterm}}
\end{aligned}
$$

Notera att denna ekvation för $\mathbf{E}$ gäller *oavsett* eventuella spatiala variationer hos relativa permittiviteten eller permeabiliteten, det vill säga oavsett om relationen mellan de exciterande fälten och den resulterande elektriska polarisationsdensiteten eller magnetiseringen ändras. På samma sätt har vi för magnetiska flödestätheten $\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})$ att

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\nabla\times\mathbf{B} &= \mu_0\nabla\times\nabla\times\mathbf{H}+\mu_0\nabla\times\nabla\times\mathbf{M}\\
&= \{\text{ Tillämpa Ampères lag }\}\\
&= \mu_0\nabla\times\left(\mathbf{J}_{\mathrm{f}}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)+\mu_0\nabla\times\nabla\times\mathbf{M}\\
&= \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{D}+\mu_0\nabla\times\Big(\mathbf{J}_{\mathrm{f}}+\nabla\times\mathbf{M}\Big)\\
&= \{\text{ Konstitutiv relation } \mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P} \text{ }\}\\
&= \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{E}+\mu_0\nabla\times\left(\mathbf{J}_{\mathrm{f}}+\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}+\nabla\times\mathbf{M}\right)\\
&= \{\text{ Tillämpa Faradays lag }\}\\
&= -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{B}^2}{\partial t^2}+\mu_0\nabla\times\left(\mathbf{J}_{\mathrm{f}}+\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}+\nabla\times\mathbf{M}\right)
\end{aligned}
$$

Även denna ekvation för $\mathbf{B}$ gäller *oavsett* eventuella spatiala variationer hos relativa permittiviteten eller permeabiliteten. För att sammanfatta resultaten för den elektriska fältstyrkan $\mathbf{E}$ och den magnetiska flödestätheten $\mathbf{B}$:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left(\mathbf{J}_{\mathrm{f}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right)}_{\text{gemensam källterm}},$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mu_0 \nabla \times \underbrace{\left(\mathbf{J}_{\mathrm{f}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right)}_{\text{gemensam källterm}}.$$

I dessa ekvationer svarar vänsterleden mot de tre-dimensionella vågekvationerna for elektriska och magnetiska fält, medan högerleden svarar mot källtermer inkluderande fria strömmar, förskjutningsströmmens bidrag från materialet i sig (via polarisationsdensiteten $\mathbf{P}$, som regel en funktion beroende av elektriska fältet), samt magnetiseringen $\mathbf{M}$ (som regel en funktion beroende av magnetfältet).

Värt att notera i ekvationerna för de elektromagnetiska fälten är den gemensamma formen av källtermerna, där den enda skillnaden (förutom omvänt tecken) är tidsderivatan respektive rotationen. Dessa ekvationer har i sig ingen inneboende bestämd frekvens eller liknande för fälten, utan detta bestäms av randvärden (exempelvis en drivande antenn eller laser) samt materialegenskaperna som modelleras via $\mathbf{J}_{\mathrm{f}}$, $\mathbf{P}$ och $\mathbf{M}$.

Apropå särskiljning av polarisationsdensitet och magnetisering

En intressant följd av den gemensamma formen på källtermerna i högerleden i ekvationerna för **E** och **B** är att effekterna av den fria strömmen, polarisationsdensiteten och magnetiseringen ej är entydigt bestämda relativt varandra, utan har en viss grad av godtycklighet mellan sig. Som ett exempel, om vi antar att polarisationsdensiteten har en godtycklig term i sig som beskrivs av en rotation, säg

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \nabla \times \mathbf{G},$$

så är det egalt om termen $\nabla \times \mathbf{G}$ formellt ingår i polarisationsdensiteten $\mathbf{P}$ eller magnetiseringen $\mathbf{M}$, eftersom

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\mathbf{P}' + \nabla \times \mathbf{G}\big) + \nabla \times \mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{P}'}{\partial t} + \nabla \times \big(\mathbf{M} + \mathbf{G}\big)$$

Eftersom ingen av ekvationerna för fälten **E** eller **B** ovan påverkas av om vi har antingen en modell för polarisationsdensiteten som $\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \nabla \times \mathbf{G}$ eller magnetiseringen som $\mathbf{M} = \mathbf{M}' + \mathbf{G}$, så blir frågan vad som egenttligen är polarisationsdensitet eller magnetisering till viss del en fråga om godtycklighet och konvention, åtminstone vad beträffar den elektromagnetiska fältteorin.

Ett exempel på en polarisationsdensitet som innehåller just $\nabla \times \mathbf{E}$ är fallet då ett medium är optiskt aktivt, under vilket det roterar polarisationstillståndet hos ljuset runt axeln längs vilken ljuset propagerar. I detta fall kan inte effekten av optisk aktivitet särskiljas från fallet med Faraday-effekt, där vi har ett tatiskt magnetfält pålagt längs med axeln för ljusets propagationsriktning. (För att särskilja dessa fall krävs att vi även studerar motsvarande effekter vid motpropagerande fält, men detta är långt utanför vad denna kurs täcker.)

Ett annat sätt att se på källtermerna i högerleden är som *effektiva strömtätheter* $\mathbf{J}_{\text{eff}}$ involverande tidsderivatan av $\mathbf{P}$ (förskjutningsströmmen) och rotationen av $\mathbf{M}$ som tilläggstermer till den fria strömtötheten $\mathbf{J}_{\text{f}}$, som

$$\mathbf{J}_{\text{eff}} = \mathbf{J}_{\text{f}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M},$$

och helt enkelt reducera fältekvationerna till

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}_{\text{eff}}}{\partial t},$$
$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{J}_{\text{eff}}.$$

Vågekvation, induktion, elektrostatik, elektrodynamik, vad gäller detta egentligen?

I härledandet av formen på vågekvationerna för fälten $\mathbf{E}$ och $\mathbf{B}$ ovan, så har vi varken lagt till eller tagit bort något. Allt utgår ifrån Faradays och Ampères lagar, inklusive Maxwells korrektion för att uppfylla villkoret för den elektriska laddningens bevarande, och ekvationerna beskriver i en form eller annan därmed *samtliga* områden som vi hittills behandlat i kursen.

Allt handlar om att reducera vågekvationerna till relevant situation, exempelvis om vi har att göra med ett statiskt problem, om vi har avsaknad av magnetisering eller om vi rent av har att göra med ett frirymdsproblem. Allt handlar med andra ord om vilka förutsättningar vi så att säga "matar in som antaganden" i vågekvationerna ovan. Om man så vill, så kan man säga att grunden för samtliga elektrodynamiska problem är två vågekvationer, för $\mathbf{E}$- och $\mathbf{B}$-fälten, och att statiska problem helt enkelt reducerar vågekvationerna till enbart spatial domän genom att tidsderivator försvinner.

Exempel I: Elektrostatik

Om vi till exempel behandlar fallet elektrostatik i närvaro av konstanta strömmar, så reducerar ekvationen ovan for det (statiska) elektriska fältet till

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = 0,$$

vilket under användande av vektoridentiteten $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ reducerar till

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = 0.$$

Det är här lätt att förledas att tro att $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ om vi inte har några fria laddningar. Dock, vi måste komma ihåg att detta argument bara håller för frirymdsformen av Gauss lag ($\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$). Om materialet är *inhomogent* men i övrigt fritt från fria laddningar ($\rho = 0$), så måste vi gå på den egentliga formen av Gauss lag som gäller den elektriska flödestätheten,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon_0 \nabla \cdot (\varepsilon_{\mathrm{r}} \mathbf{E}) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon_{\mathrm{r}} + \varepsilon_{\mathrm{r}} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}} \mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon_{\mathrm{r}}.$$

Alltså, elektrostatik i *inhomogena media* beskrivs av ekvationen

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla \left(\frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}} \mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon_{\mathrm{r}} \right).$$

Exempel II: Magnetostatik

På samma sätt har vi för det magnetiska fältet $\mathbf{B}$ i närvaro av en konstant strömtäthet $\mathbf{J}_{\mathrm{f}}$, men i frånvaro av magnetisering $\mathbf{M}$, att ekvationen ovan for det (statiska) magnetiska fältet enligt ovan reducerar till

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{J}_{\mathrm{f}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{\mathrm{f}},$$

det vill säga svarandes mot frirymdsformen av Ampéres lag, precis som förväntat utifrån premisserna för reduktionen från de generella vågekvationerna ovan.

Sammanfattning av Föreläsning 8 – Maxwells ekvationer och vågutbredning

- Maxwells genidrag för att få kontinuitetsekvationen för elektrisk laddning att gå ihop var att i uttrycket för den totala strömtätheten lägga till en *förskjutningsström* $\partial\mathbf{D}/\partial t$ till den fria strömtätheten $\mathbf{J}_\mathrm{f}$, som
$$\mathbf{J}_\mathrm{tot} = \mathbf{J}_\mathrm{f} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}.$$

- Maxwells ekvationer lyder

$$\begin{aligned}
&\oiint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \iiint \rho\, dV && \Leftrightarrow && \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho \\
&\oiint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0 && \Leftrightarrow && \nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \\
&\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} && \Leftrightarrow && \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \\
&\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \iint \mathbf{J}_\mathrm{f}\cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t}\iint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} && \Leftrightarrow && \nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J}_\mathrm{f} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}
\end{aligned}$$

- De elektromagnetiska vågekvationerna för de elektriska och magnetiska fälten lyder

$$\begin{aligned}
\nabla\times\nabla\times\mathbf{E} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} &= -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\mathbf{J}_\mathrm{f} + \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + \nabla\times\mathbf{M}\right)}_{\text{gemensam källterm}}, \\
\nabla\times\nabla\times\mathbf{B} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} &= \mu_0\nabla\times\underbrace{\left(\mathbf{J}_\mathrm{f} + \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + \nabla\times\mathbf{M}\right)}_{\text{gemensam källterm}}.
\end{aligned}$$

- Från de elektromagnetiska vågekvationerna kan samtliga fall som hittills behandlas i kursen härledas, beroende på vilka termer som kan sättas till noll och på så sätt reducera systemet till den statiska eller dynamiska situation man önskar analysera.