



FÖRELÄSNING 3

SPEGELLADDNINGAR, RANDVILLKOR OCH ENTYDIGHET FÖR LÖSNINGAR TILL POTENTIALPROBLEM

Fredrik Jonsson, Uppsala Universitet, 10 november 2025

Sammanfattning

Genom att visa på att Laplaces ekvation $\nabla^2\phi = 0$ saknar lokala extrempunkter, och har därmed samtliga extrempunkter i form av randvärdet till domänen där vi löser ekvationen, så kan vi dra slutsatsen att en lösning ϕ till Laplaces ekvation också är entydig, det vill säga att om vi finner en lösning ϕ så är det också den enda existerande lösningen. Med utgångspunkt i detta finner vi därefter att även Poissons ekvation $\nabla^2\phi = -\rho/\varepsilon_0$ i direkt närväro av en laddningstähet ρ även den ger entydighet för lösningar ϕ .

Vi kan med detta visa att en domän som är omgiven av ett skal som hålls vid konstant potential ϕ_0 direkt ger att det elektriska fältet innanför skalet är identiskt noll, vilket är principen för "Faradays bur".

Utifrån entydighetsteoremet för Laplaces och Poissons ekvationer kan vi visa hur så kallade "virtuella spegelladdningar" kan konstrueras för att lösa elektrostatiska problem i närväro av fria laddningar i elektriskt ledande volymer eller ytor, specifikt för plana ytor mellan ledare eller dielektrika samt ledande cylindrar och sfärer.

Slutligen så tar vi fram en metod för hur den resulterande laddningstäheten σ på en yta av ledande material kan tas fram med de virtuella spegelladdningarna.

Tre hållpunkter i föreläsningen

1. Lösningen till Laplaces ekvation $\nabla^2\phi = 0$ i en godtycklig volym V är unikt (entydigt) bestämd om potentialen ϕ är specificerad på randen S till volymen. Om vi finner en lösning till Laplace ekvation, så är detta den enda lösningen, oavsett hur vi funnit eller konstruerat lösningen så länge som lösningen uppfyller de föreskrivna randvillkoren.
2. Lösningen $\phi(\mathbf{x})$ till Poissons ekvation för en punktladdning q placerad ett avstånd $z = h$ ovanför ett perfekt ledande plan $z = 0$ ges som frirymlösningen med en virtuell spegelladdning $-q$ placerad på samma avstånd bakom planet, vid $z = -h$.
3. Lösningen till Poissons ekvation för en linjeladdning λ placerad på ett avstånd $R + h$ från centrum av en perfekt ledande cylinder med radie R ges som frirymlösningen med en virtuell linjeladdning $\lambda' = -\lambda$ placerad på avståndet

$$d = \frac{R^2}{R + h},$$

från cylinderns centrum i riktning mot den externa linjeladdningen.

Laplaces ekvation för den elektrostatiska (skalära) potentialen

Det kan tyckas aningen överdrivet att ge sig in på mer matematiskt betingade spörsmål kring huruvida lösningar till problem inom elektrostatiken är unika eller ej, det vill säga om det finns fler än en entydig lösning till ett givet problem. Trots allt, så är vi ju inte speciellt oroliga för att vi i det "verkliga livet" som ingenjörer skall kunna råka ut för två olika fält som uppfyller samma ekvation och randvillkor, right?

Frågan är dock befogad rent generellt, och så snart som vi inkluderar ickelinjära fenomen i våra statiska eller dynamiska modeller, exempelvis ett brytningsindex vars värde i sig beror på elektrisk fältstyrkan \mathbf{E} eller en magnetisering som beror ickelinjärt på den magnetiska flödestätheten \mathbf{B} , så finns det gott om bistabila lösningar med olika fältfordelningar som kan uppfylla samma ekvationer och randvillkor. Inom ramen för elektrostatiken i denna föreläsningsserie behandlar vi dock uteslutande linjära problem i det elektriska fältet, men som vi skall se finns det icke desto mindre mycket att hämta i praktiskt problemlösande med bas i entydighet för lösningar till den elektrostatiska potentialen.

Angreppssätt 1 för elektrostatiska problem – Coulombintegralen

Vi kan börja med att konstatera att vi i elektrostatiska problem alltsom oftast söker en lösning till det *elektriska fältet*, vilket vi från den första föreläsningen vet kan beräknas genom Coulombs generaliserade lag, eller *Coulombintegralen*¹

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho(\mathbf{x}') \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV'.$$

Oturligt nog för oss är denna explicita form inte särskilt väl lämpad vare sig för beräkning med papper och penna eller med numeriska metoder. En del av detta problem ligger i redundansen hos det elektriska fältet², där vi alltid har en implicit koppling mellan komponenterna hos det elektriska fältet, och vi kan därför redan i detta första stadio konstatera att det nog är lämpligare att istället "gå till pudelns kärna" och istället söka beräkna den skalära potentialen ϕ .

Angreppssätt 2 för elektrostatiska problem – Skalär potential på integralform

Under Föreläsning 2 fann vi att det elektriska fältet kunde tolkas som en (negativ) gradient³

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi(\mathbf{x}),$$

där vi definierade den *skalära potentialen* $\phi(\mathbf{x})$ explicit som integralen

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'.$$

Återigen, tyvärr, är denna explicita form inte så väldigt mycket bättre i analytiskt hänseende annat än för att beräkna potentialen i mycket enkla geometrier. Vidare, så är integralformerna ovan primärt lämpade för att beräkna resulterande fält och potentialer från fixa, givna laddningsfordelningar. I en verlig situation kommer laddningsfordelningen att geometriskt flytta sig i rummet så snart som vi har närväro av ledare med fria elektroner. Med andra ord så behöver vi gå ytterligare ett snäpp innan vi har något som handfast kan utnyttjas i fall då laddningarna har frihet att röra på sig.

¹ Vi följer här i huvudsak Griffiths sid. 113–124.

² Vi visade förra föreläsningen på kopplingen mellan komponenterna hos det elektriska fältet via $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$, resulterande i kopplingen $\partial E_x / \partial y = \partial E_y / \partial x$, etc.

³ Vi erinrar oss från Föreläsning 2 att tolkningen av det elektriska fältet som en negativ gradient av en skalär potential kommer sig från observationen att Coulomb-integralen ju kunde skrivas just som en gradient

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho(\mathbf{x}') \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' = -\nabla\phi(\mathbf{x}),$$

Angreppssätt 3 för elektrostatiska problem – Laplaces ekvation för skalär potential

Som en intressant slutkläm på förra föreläsningen konstaterade vi att Gauss lag på differentialform, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$, trivialt kunde omformuleras till Poissons ekvation för den skalära potentialen genom identiteten $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, som

$$\nabla^2\phi(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x})/\epsilon_0.$$

Evaluering med lämpliga randvillkor är denna partiella differentialekvation för ϕ ekvivalent med integralekvationen ovan. Dessutom är Poissons ekvation för ϕ synnerligen väl lämpad för beräkning i domäner där vi inte befinner oss mitt i någon laddningstäthet, eftersom vi då har att $\nabla^2\phi(\mathbf{x}) = 0$ med lösningar bestämda av randvillkor, dessutom – som vi strax skall visa – lösningar som är entydigt bestämda. Att laddningstätheten i området vi tittar på är fritt från laddningar betyder inte på något vis att inga laddningar finns med i problemet överhuvud taget, bara att de *inte råkar finnas närvarande precis i observationspunkten \mathbf{x}* . I dessa fall reduceras därmed problemet med fältbeskrivningen, eller om man så vill *potentialbeskrivningen*, till *Laplaces ekvation* för ϕ ,⁴

$$\nabla^2\phi(\mathbf{x}) = 0.$$

Griffiths går så långt att beskriva Laplaces ekvation som så fundamental att läran om elektrostatik praktiskt taget är studiet av just Laplaces ekvation, som utöver tillämpningen i elektrostatik är av samma form inom magnetism, gravitation och elastisk mekanik.⁵

Entydighet hos lösningar till Laplace ekvation

Vi har så långt reducerat det elektrostatiska problemet till Laplaces ekvation, möjligent med brasklappen att vi i domäner där laddning förekommer direkt i observationspunkten istället måste använda Poissons ekvation, men enbart denna kompakta ekvation kommer inte att bistå med lösningen till potentialen. Det som ytterligare behövs är lämpliga (fysikaliska) randvillkor till den domän där vi önskar lösa ekvationen.⁶

Laplaces ekvation tillåter bara extempunkter på randen till en domän

Vår plan framöver är att skapa en differens $U = \phi_2 - \phi_1$ mellan två förmodat oberoende separata lösningar ϕ_1 och ϕ_2 till Laplaces ekvation, *uppfyllande exakt samma randvärde*, och därefter söka motbevisa att ϕ_1 och ϕ_2 skulle vara olika genom att visa på att ekvationen $\nabla^2U = 0$ för differensen dessutom betyder att $U = 0$ överallt. Innan vi går över till detta bevis skall vi först visa på en annan egenskap hos lösningar till Laplaces ekvation, nämligen att lösningarna ej kan ha några andra extempunkter (minima eller maxima) annat än de som finns på randytan S till volymen V där vi betraktar ekvationen. Med andra ord:⁷

Teorem I. Lösningar till Laplaces ekvation saknar lokala extempunkter.

Vi kommer nu att bevisa detta påstående på ett lite annorlunda sätt än i Griffiths, där man istället fokuserar på medelvärde hos potentialen i en omgivning till en laddning ("källa") via Coulombs lag. Här kommer vi istället att anta en mer matematisk approach.

⁴ Lösningen till Laplaces ekvation $\nabla^2\phi = 0$ kallas ofta "harmonisk funktion" (*harmonic function*).

⁵ Se <https://www.robots.ox.ac.uk/~jmb/lectures/pdelecture5.pdf> för detta sidospår.

⁶ Vi följer här i huvudsak Griffiths sid. 119–124.

⁷ Vi hoppar här direkt in i fallet för tre dimensioner. Griffiths beskriver även en- och två-dimensionella fallen (sid. 114–116), vilka kan vara lämpliga att studera för att få en mer intuitiv känsla för det tredimensionella fallet. Specifikt är den tvådimensionella analogin med ett uppspänt gummimembran en mycket pedagogisk illustration av Laplace ekvation och frånvaron av lokala extempunkter. Teorem I betecknas i internationell litteratur ofta som *Maximum (or minimum) principle for harmonic functions*.

Matematiskt bevis. [Motbevis] Antag att den skalära potentialen ϕ uppfyller Laplaces ekvation $\nabla^2\phi = 0$ och att den har ett lokalt *maximum* i punkten \mathbf{x}' . I denna punkt har vi därmed att: (1) Alla förstaderivator försvinner, det vill säga att

$$\text{Extrempunkt} \quad \Rightarrow \quad \nabla\phi(\mathbf{x}') = \mathbf{0},$$

samt (2) att alla andraderivator är negativa i en omgivning till \mathbf{x}' ,

$$\text{Maximum} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x_k^2} < 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

detta eftersom vi har att göra med ett *maximum* och att funktionen ϕ därmed måste “halka nedåt” i alla riktningar runt \mathbf{x}' . Genom att summa upp alla andraderivator erhåller vi

$$\text{Laplace} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2\phi}{\partial x_k^2} = \nabla^2\phi < 0.$$

Laplace ekvation säger dock att $\nabla^2\phi = 0$, vilket endast kan vara uppfyllt om *samtliga* andraderivator är noll, vilket ger en motsägelse.⁸ Den enda möjligheten är därmed att ϕ inte kan ha ett lokalt maximum i en domän där $\nabla^2\phi = 0$. Det motsvarande motbeviset för lokala minima följer analogt ur detta.

Låt oss även gå igenom ett alternativt, aningen mer fysikaliskt fokuserat bevis.

“Fysikaliskt” bevis. Vi har att ϕ är en lösning till Laplaces ekvation för den elektrostatiska potentialen, en ekvation vilken vi rekapitulerar per definition beskriver en *laddningsfri region*, med $\rho(\mathbf{x}) = 0$ för alla punkter \mathbf{x} i volymen V . Detta betyder att för *godtyckligt vald punkt* \mathbf{x} i volymen V , så är potentialen given som ett *medelvärde* av potentialen i en omgivning av observationspunkten, såg i form av en “tillräckligt liten” sfär $S = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = r\}$ med radien r centrerad i punkten \mathbf{x} som

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_S \phi(\mathbf{x}') dS'.$$

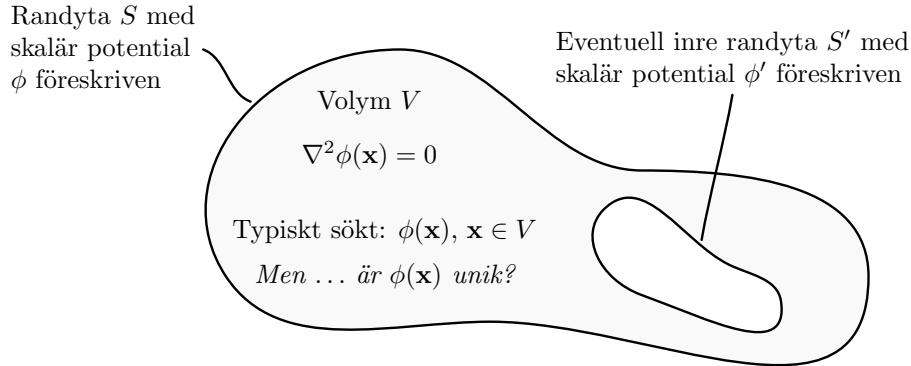
Med andra ord är värdet för potentialen vid \mathbf{x} ett medelvärde av potentialen i alla närliggande punkter på den omgivande sfären. Ett medelvärde kan dock aldrig vara större än det maximala värdet eller mindre än det minimala värdet för potentialen på denna sfär, med andra ord kan inga lokala extremer finnas för ϕ i domänen där den uppfyller Laplaces ekvation $\nabla^2\phi = 0$.

Intuitiv fysikalisk tolkning: Att $\nabla^2\phi = 0$ i volymen V betyder att det inte finns några källor (*sources*) eller sänkor (*sinks*) för potentialen i V , vilket vi kan översätta till att det inte finns någon möjlighet att “bygga upp toppar” eller “dränera dalar” inom domänen. Därför kan potentialen ϕ inte heller ha några toppar eller dalar inom domänen annat än på randen S .

⁸ Notera att om vi skulle råka ha situationen att vissa andraderivator är negativa och andra positiva, så kan vi ju fortfarande ha att $\nabla^2\phi(\mathbf{x}') = 0$ vid en punkt där $\nabla\phi(\mathbf{x}') = \mathbf{0}$. Detta är dock i så fall ej längre någon *extrempunkt*, utan snarare en *sadelpunkt*. Att $\nabla\phi(\mathbf{x}') = \mathbf{0}$ är ett *nödvändigt men ej tillräckligt villkor* för att vi skall ha att göra med en extrempunkt.

Första entydighetsteoremet för den elektrostatiska potentialen

Teorem II. [First uniqueness theorem enligt Griffiths] Lösningen till Laplaces ekvation $\nabla^2\phi = 0$ i en godtycklig volym V är entydigt (unikt) bestämd om potentialen ϕ är specificerad på randen S till volymen. [Griffiths, sid. 119]



Bevis.⁹ Antag att vi har *två* av varandra oberoende lösningar ϕ_1 och ϕ_2 till Laplaces ekvation i en volym V , uppfyllande $\nabla^2\phi_1 = 0$ och $\nabla^2\phi_2 = 0$, och med *bägge lösningarna antagande samma värdet på randen S till V*. Vi kan i detta även inkludera ett godtyckligt antal av eventuella interna randytör S' . Vi definierar differensen mellan de två hypotetiska oberoende lösningarna som

$$U \equiv \phi_2 - \phi_1,$$

som trivialt även den satisfierar Laplaces ekvation

$$\nabla^2 U = \underbrace{\nabla^2 \phi_2}_{=0} - \underbrace{\nabla^2 \phi_1}_{=0} = 0$$

⁹ Ett alternativt bevis görs igenom av exempelvis J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, med användandet av Greens första teorem, som för godtyckliga funktioner φ och ψ (där vi alltså skriver “ φ ” istället för “ ϕ ” för att undvika förväxling) lyder

$$\iiint_V (\varphi \nabla^2 \psi + (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \psi)) dV = \iint \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dA.$$

Vi definierar i samma notation som Griffiths differensen $U \equiv \phi_2 - \phi_1$ i en sluten volym V med randen S , med egenskaperna $\nabla^2 U = 0$ inuti V samt att $U = 0$ och $\partial U / \partial n = 0$ på randen S , där $\partial U / \partial n$ betecknar normalderivatan av U på densamma. Vi erhåller då med Greens första teorem, med $\varphi = \psi = U$, att

$$\iiint_V (U \nabla^2 U + (\nabla U) \cdot (\nabla U)) dV = \iint U \frac{\partial U}{\partial n} dA.$$

Med egenskaperna hos U reduceras detta till

$$\iiint_V |\nabla U|^2 dV = 0,$$

det vill säga att U överallt är konstant. För Dirichlet-randvillkor $U = 0$ på randen S till V (eftersom vi kräver samma värden för ϕ_1 och ϕ_2 på S), betyder detta att överallt i V är $\phi_1 = \phi_2$, vilket i sin tur visar att en lösning till Laplaces ekvation i V alltid är unik. Greens teorem och Greensfunktioner är dock utanför vad denna kurs omfattar.

överallt i volymen V . Specifikt har differensen värdet $U = 0$ på alla punkter som tillhör randen S (eller för den delen på interna randytör S') till V ,

$$U(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S.$$

Som vi just sett i Teorem I ovan tillåter dock Laplaces ekvation inga lokala extrempunkter inuti V (specifikt för differensen U som ju lyder Laplace ekvation) och med andra ord är

$$\min(U(\mathbf{x})) = \max(U(\mathbf{x})) = 0 \Leftrightarrow U(\mathbf{x}) \equiv 0 \Leftrightarrow \phi_1(\mathbf{x}) = \phi_2(\mathbf{x}),$$

vilket därmed leder till slutsatsen att enda möjligheten är att det endast finns en enda unik (entydig) lösning för den skalära potentialen ϕ .

Följdsats [Inkludering av laddning i volymen V] Lösningen till *Poissons ekvation*¹⁰ $\nabla^2\phi = -\rho/\varepsilon_0$ i en godtycklig volym V är unikt bestämd om (I) potentialen ϕ är specificerad på randen S till volymen samt (II) laddningstätheten ρ i domänen är specificerad. [Griffiths, sid. 121]

Bevis Vi har just visat att i en domän där inga laddningar finns, så är en lösning till *Laplaces ekvation* entydig. Vad händer då om vi lägger till en godtycklig laddningstäthet $\rho(\mathbf{x})$ i volymen, så att vi i själva verket har att göra med *Poissons ekvation*? I detta fall följer vi samma argument som tidigare, med en differens $U = \phi_2 - \phi_1$, men där de två potentialerna istället följer

$$\nabla^2\phi_1 = -\rho/\varepsilon_0, \quad \nabla^2\phi_2 = -\rho/\varepsilon_0,$$

så att differensen U i domänen V liksom tidigare blir

$$\nabla^2U = \nabla^2\phi_2 - \nabla^2\phi_1 = -\rho/\varepsilon_0 - (-\rho/\varepsilon_0) = 0.$$

Återigen satisfierar $U(\mathbf{x})$ *Laplaces ekvation* och har liksom tidigare värdet noll för alla punkter på randen,

$$U(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S.$$

Med exakt samma argument kring $\min(U) = \max(U) = 0$ som tidigare, så drar vi därmed slutsatsen att även när laddningar är närvarande i domänen, så gäller entydighetsteoremet. Notera att ”närvaro av laddningar” här måste tolkas som ”närvaron av laddningar som är stationära i rummet”, det vill säga att eventuella laddningar som är rörliga i metaller eller liknande måste ha uppnått jämvikt med det omgivande elektrostatiska fältet.

Elektriska ledare och andra entydighetsteoremet för den elektrostatiska potentialen

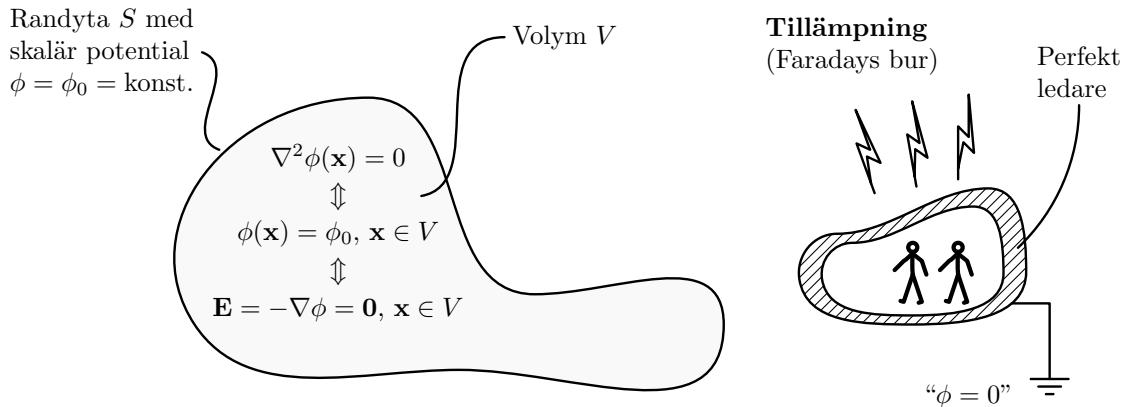
Teorem III. [*Second uniqueness theorem* enligt Griffiths] I en volym V omgiven av ledare och inneslutande en laddningstäthet ρ , är det elektriska fältet unikt bestämt om den totala laddningen på varje ledare är given. Hela domänen kan vara begränsad av en annan ledare, alternativt obegränsad. [Griffiths, sid. 121]

Bevis. [Att eventuellt inkluderas i dessa Lecture Notes. Se Griffiths sid. 121–123.]

¹⁰ ”Laplaces ekvation fast med en källa i högerledet.”

Faradays bur

Som en direkt följd av Teorem II – gällande att lösningen till Laplaces ekvation $\nabla^2\phi = 0$ i en godtycklig volym V är unikt bestämd om potentialen ϕ är specificerad på randen S till volymen – så följer det att om en perfekt ledare omsluter en domän V , med andra ord att den omslutande ytan överallt är knuten till samma konstanta potential $\phi = \phi_0$, så är den elektriska potentialen konstant överallt inuti volymen, givet att ingen laddning omsluts.



Av detta följer trivialt att det elektriska fältet i hela volymen är identiskt noll, eftersom vi för $\phi = \phi_0 = \text{konstant}$ på S har att

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi_0 = 0$$

Exempel I: Luckan till en mikrovågsugn fungerar som dörr till en Faraday-bur, där det elektriskt ledande nätet i luckan har hål som är väsentligt mindre än våglängden för det elektromagnetiska fältet som utgår mikrovågorna. (Mikrovågor som används i en mikrovågsugn¹¹ har typiskt en frekvens på cirka 2.4 GHz, vilket ger en våglängd på cirka $(3 \times 10^8 \text{ m/s})/(2.4 \times 10^9 \text{ 1/s}) \approx 12.5 \text{ cm}$). Genom att det elektromagnetiska fältet inte kan transitteras genom nätet (eller hålmatrisen) så är mikrovågsugnen fortfarande säker trots att man kan se igenom luckan.

Exempel II: En bilkaross sägs effektivt skydda mot blixtnedslag, men vad om de ganska stora öppna glasytorna? Riskerar inte ett blixtnedslag att leta sig in i kupén genom glasrutorna? Lösningen ligger även här i att betrakta vilken våglängd den elektromagnetiska pulsen har:

- Den dominerande våglängden hos det emitterade elektromagnetiska fältet i ett blixtnedslag ligger i VLF-spannet¹² 3–30 kHz, motsvarande våglängder på 10–100 km. Dessa våglängder är mycket större än öppningen i det ledande skalet hos bilen, vilka typiskt är i storleksordningen 1 m.¹³
- Blixtnedslaget har naturligtvis också synligt ljus med en våglängd av cirka 500 nm i sitt spektrum; det är ju trots allt så att vi tydligt ser blixtnedslaget, vilket är en följd av att denna del av spektrum har en våglängd som är markant mindre än fönsteröppningarna i bilens kaross.
- Utöver detta innehåller urladdningen även extremt kortvåig gammastrålning (*gamma-ray bursts*, GRB).

¹¹ Det är en modern myt att denna frekvens skulle ha valts för att den skulle matcha resonansfrekvensen hos vattenmolekylen; i själva verket handlar det snarare om att vatten är mycket bredbandigt i sitt absorptionsspektrum och att 2.4 GHz, vilket för övrigt även används av Bluetooth™, är en praktisk och enkel frekvens att generera med en kompakt *magnetron*. Till exempel, om vattnet hade haft en resonansfrekvens på just 2.4 GHz (den första resonansfrekvensen ligger i själva verket på 22.235 GHz), så skulle all effekt effektivt absorberas bara på ytan av det som värms, med värme på djupet endast genom en termisk diffusionsprocess. (En process som i steady-state återigen beskrivs av just – tadaa! – Laplaces ekvation!)

¹² VLF = Very Low Frequency, https://en.wikipedia.org/wiki/Very_low_frequency.

¹³ Världssarvet radiostationen Grimeton, Varberg, har regelbundet sändningar på 17.2 kHz (ja, kHz, inte MHz), eller en elektromagnetisk våglängd på cirka 17.4 km, och vi kan med detta dra slutsatsen att vi ej kan uppfångा Grimetons utsändningar inne i en bilkupé! <https://grimeton.org>

Det elektriska fältet är identiskt noll i en perfekt ledare, så hur kan vi då skapa strömmar?

För en perfekt ledare i elektrostatisk jämvikt är potentialen $\phi(\mathbf{x})$ rent definitionsmässigt överallt densamma för alla punkter \mathbf{x} inuti ledarens volym. Detta följer av samma argument som för Faradays bur, nämligen att om

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi_0 = \text{konst.}$$

överallt inuti ledaren, så har vi trivialt att det elektriska fältet i den perfekta ledaren är identiskt noll,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi_0 = \mathbf{0}.$$

Frågan som då direkt infinner sig är paradoxen kring hur elektroner överhuvudtaget kan fås att röra sig i just en perfekt ledare, eftersom kraftlagen ju då direkt ger vid hand att $\mathbf{F} = q\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Hur hänger detta ihop? Vi vet ju trots allt att just en *perfekt ledare* är ett idelaiskt medium för laddningstransport, eller?

Ett annat sätt att se på detta problem är att en perfekt ledare är ett medium där konduktiviteten $\sigma \rightarrow \infty$, men Ohms lag för strömtätheten säger oss samtidigt att $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$. Om $\sigma \rightarrow \infty$ så måste vi för en finit strömtäthet \mathbf{J} självfallet ha att $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{0}$.

Frågan är hur kan vi skapa en ström om $\mathbf{E} = \mathbf{0}$?

Lösningen till denna paradox är som följer. I en perfekt ledare kan inget elektriskt fält existera i jämviktstillstånd (*steady-state*), med hänsyn till ovan. Dock kan transinta (snabba tidsberoende) elektriska fält existera för den infinitesimala tidsrymd som det tar för laddningarna i ledaren att flytta sig till dess att jämviktstillståndet uppnås. Då man applicerar ett externt pålagt elektriskt fält, såg genom att lägga på en potentialskillnad över ändytorna på ledaren, kommer elektronerna i ledaren att omedelbart (åtminstone "omedelbart sett som en idelaiserad modell") sättas i rörelse, primärt på ytan av ledaren, med effekten att det elektriska fältet över ledaren kaneleras så snart som jämvikt uppnåts.

Denna rörelse av laddning under det korta förloppet innan jämvikt uppnås, som i sig är ett brott mot antagandet om just statisk jämvikt, är just att vi skapar en ström fram till dess att vi når $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ inuti ledaren. Efter att jämvikt uppnåtts har vi förvisso en laddningsfördelning som skapar just $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, men vi har under detta förlopp också en ström som i sig gör att vi *lämnat antagandet om elektrostatik*.

Sammanfattnings av vitsen med entydighetsteoremet

Griffiths sammanfattar på sid. 120 (sektion 3.1.5) vitsen med hela denna exercis kring entydighet mycket precist:¹⁴

"Entydighetsteoremet är en licens till din fantasi. Det spelar ingen roll *hur* du finner din lösning; om den (a) uppfyller Laplaces ekvation och (b) har korrekt värde på randen, så är den *korrekt*."

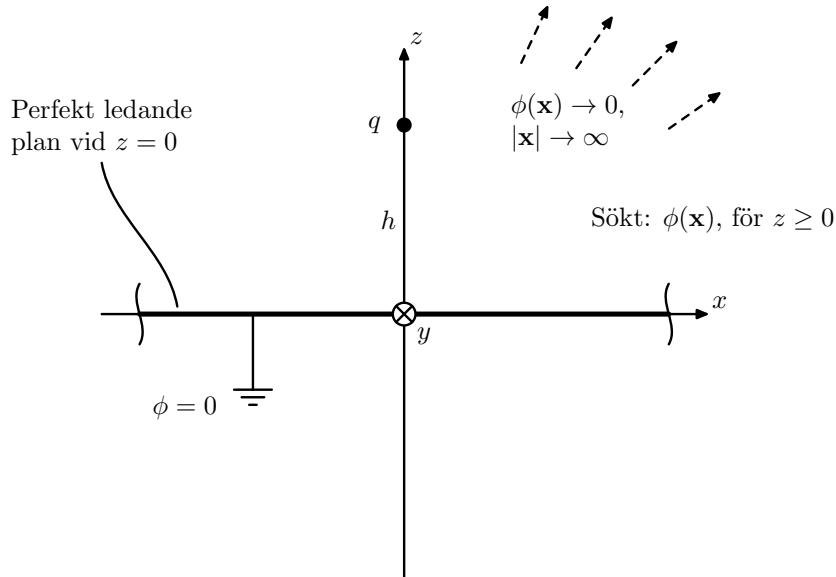
Vi kommer nu att utnyttja vår erhållna licens på lösandet av problem med hjälp av så kallade *spegelladdningar*.

¹⁴ "The uniqueness theorem is a license to your imagination. It doesn't matter *how* you come by your solution; if (a) it satisfies Laplace's equation and (b) it has the correct value on the boundaries, then it's *right*."

Spegelladdningar i perfekt ledande plan

Så långt har vi haft att göra med givna laddningar och laddningsfördelningar, fixt placerade i rummet. Vad händer om vi har ledare som tillåter laddningsfördelningar att relaxera till steady-state, men där vi inte på rak arm vet exakt *hur* dessa laddningar kommer att placera sig? Vi kommer nu att visa på ett sätt att angripa sådana problem, med metoden för *spegelladdningar*.

Antag att vi har en punktladdning q , av godtyckligt tecken på laddningen och placerad på ett avstånd h ovan ett oändligt och perfekt ledande plan $z = 0$.



Att planet $z = 0$ är perfekt ledande betyder att laddningar fritt kan transporteras i planet utan förlust, och om vi tänker oss att laddningen q är positiv, så innebär detta att negativa laddningar (via Coulombs kraftlag) i planet $z = 0$ kommer att attraheras mot origo $(x, y) = (0, 0)$. Det som hindrar den negativa laddningen att ackumuleras just vid punkten $(x, y) = (0, 0)$ i planet under laddningen q är att denna ansamling av negativ laddning också innebär att laddningarna i planet kommer att repellerar varandra till dess att jämvikt uppstår. I praktiken innebär självfallet "transport av negativa laddningar" (elektroner) att positiv laddning (vakanser av elektroner) skyfflas undan, eller repelleras från den netto-negativa laddningen; vi kan se detta som att vi har en tvådimensionell "gas" av fria elektroner i ytan.

Problemformulering för elektrostatik ovanför perfekt ledande plan

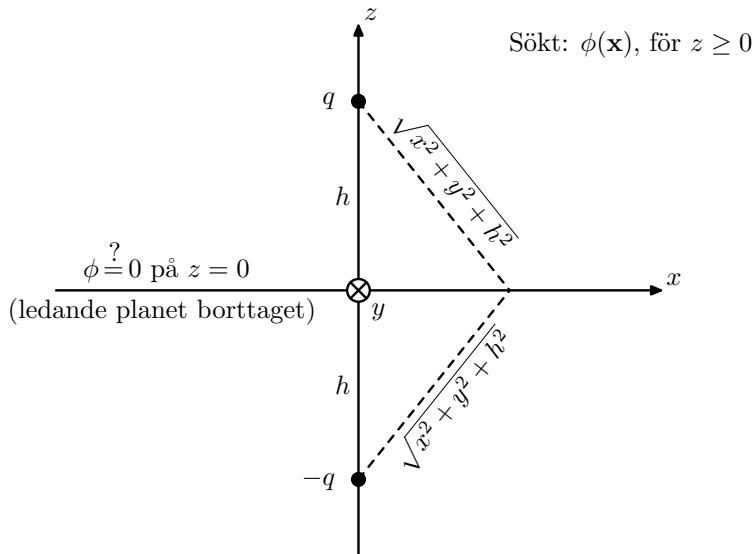
Rent matematiskt formuleras detta problem enligt följande:

1. Vi har laddningstätheten $\rho = q\delta(\mathbf{x} - h\mathbf{e}_z)$ i rummet $z > 0$. (Källpunkten är vid $\mathbf{x}' = h\mathbf{e}_z$.)
2. Den skalära potentialen *uppfyller Laplaces ekvation* $\nabla^2\phi = 0$ överallt i $z > 0$ utom just i $\mathbf{x}' = h\mathbf{e}_z$ för punktladdningen.
3. På randen $z = 0$ måste potentialen *uppfylla randvillkoret* $\phi = 0$.
4. På ett avstånd långt från laddningen förväntar vi oss $\phi(\mathbf{x}) \rightarrow 0$, för $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$.

Utifrån följdssatsen till entydighetsteoremet för Laplaces och Poissons ekvation kan vi lita på att *om vi finner en lösning till problemet ovan, så är det den korrekta lösningen, oavsett hur vi kommit fram till den*. Så, hur skall vi resonera här för att finna denna lösning?

Att lägga till virtuell laddning så att vi når randvillkoret $\phi = 0$ på $z = 0$

Om vi utför ett litet *gedankenexperiment* kring hur vi till att börja med skulle *skapa* en lösning som satisfierar $\phi = 0$ på ytan $z = 0$, så kan vi se laddningen i $h\mathbf{e}_z$ som en källa till potentialen, som så att säga "lyfts" till en viss fördelning i rummet $z > 0$. Detta "lyft" kan vi föreställa oss som tillämpbart på en positiv laddning q , men tanke-experimentet är självfallet lika giltigt för negativa laddningar. Frågan är hur vi trycker ner denna potential så att randvillkoret $\phi = 0$ erhålls på $z = 0$?



Låt oss tänka "utanför lådan" och föreställa oss att vi hade friheten att lägga en laddning med motsatt tecken någonstans i regionen $z < 0$, under det att vi samtidigt tar bort det elektriskt ledande planetet¹⁵ vid $z \leq 0$.

Genom ren symmetri bör i så fall en laddning av samma belopp men motsatt tecken rimligen placeras på exakt samma avstånd från ytan, men istället i negativ z -led, vid punkten $-h\mathbf{e}_z$. Vi inser att detta skulle innebära att $\phi = 0$ vid $z = 0$ på grund av antisymmetrin i det nya problemet, men vi bör undvika att förlita oss på intuition så låt oss för säkerhets skull kontrollera den resulterande potentialen. Om nu vi genom detta uppfyller potentialen på $z = 0$, så kan vi helt sonika ta bort det ledande planetet och istället betrakta $z = 0$ enbart som en yta som genom "magisk konstruktion" uppfyller just randvillkoret $\phi = 0$.

¹⁵ Vi erinrar oss att det ju är de fria elektronerna i den perfekta ledaren som här primärt ställer till det för oss, och som vi kan rekapitulera var skälet till att vi i början av denna föreläsning i praktiken spolade användningen av potentialformen av Coulombs lag,

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV',$$

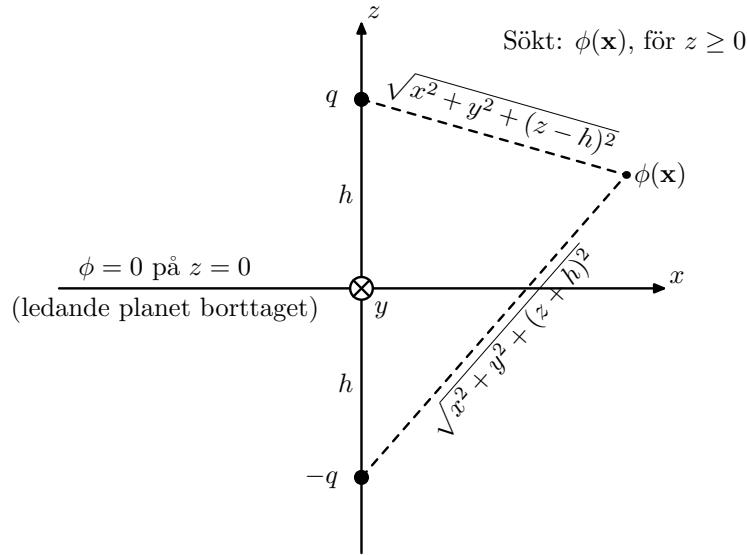
just på grund av att vi *a priori* inte har full information kring laddningsfördelningen $\rho(\mathbf{x})$.

På planet $z = 0$, om nu nu tänker oss att vi tagit bort den perfekt ledande ytan i denna beskrivning med virtuella spegelladdningar, så är potentialen given från de två laddningarna q och $-q$ som¹⁶

$$\phi(x, y, z = 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} + \frac{(-q)}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} \right) = 0,$$

med andra ord har vi nu *visat att randvillkoret vid $z = 0$ är uppfyllt.*

Skalär potential med det ledande planet ersatt med virtuell spegelladdning



Vårt antagande att vi kan *konstruera* en lösning genom att lägga en *spegelladdning* på motsatt sida om den perfekta ledaren¹⁷ har därmed markant förstärkts, och vi kan redan nu gissa att lösningen skall formuleras som den potential i rummet som motsvaras av de två laddningarna, som

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}} + \frac{(-q)}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}} \right), \quad z \geq 0.$$

Med denna konstruktion *uppfylls även randvillkoret då $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ trivialt*, så slutsatsen blir att potentialen enligt ovan faktiskt är den korrekta lösningen.

Sammanfattnings av virtuell spegelladdning i perfekt ledande plan

Låt oss sammanfatta denna första övning i spegelladdningar med att:

Lösningen $\phi(\mathbf{x})$ till Poissons ekvation för en punktladdning q placerad ett avstånd $z = h$ ovanför ett perfekt ledande plan $z = 0$ ges som frirymlösningen med en virtuell spegelladdning $-q$ placerad på samma avstånd bakom planet, vid $z = -h$.

Det är värt att notera hur fundamentalt entydighetsteoremet (för Laplaces ekvation med $\rho = 0$) och dess följdssats (för Poissons ekvation med $\rho \neq 0$) är för konstruktionen med spegelladdningar.

¹⁶ Recap: Med en punktladdning placerad i källpunkten \mathbf{x}' blir den resulterande skalära potentialen

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad \text{för } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}'.$$

¹⁷ Rekapitulera att en spegel faktiskt är just ett mer eller mindre perfekt ledande plan!

Det resulterande elektriska fältet med den speglade laddningen

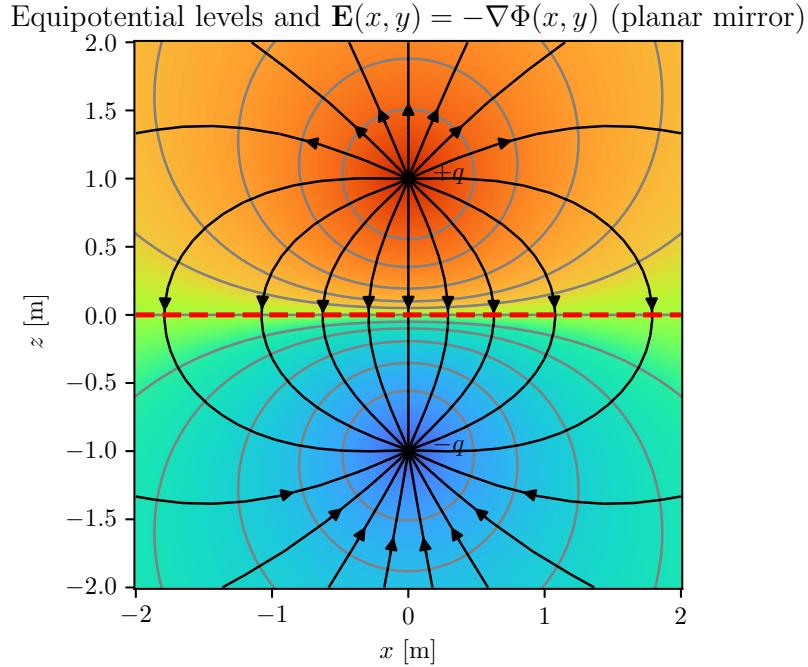
Vi ser direkt att för det ekvivalenta problemet med en spegelladdning $-q$ placerad i $-h\mathbf{e}_z$ så är den resulterande potentialen ϕ och elektriska fältet \mathbf{E} givet som det från en *elektrisk dipol* med dipolmoment

$$\mathbf{p} = 2qh\mathbf{e}_z$$

placerad i origo. Det elektriska fältet fås direkt från den skalära potentialen som

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}) &= -\nabla\phi(\mathbf{x}) \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\left(\frac{q}{|\mathbf{x}-h\mathbf{e}_z|} + \frac{(-q)}{|\mathbf{x}-(-h\mathbf{e}_z)|}\right) = \dots \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\mathbf{x}-h\mathbf{e}_z}{|\mathbf{x}-h\mathbf{e}_z|^3} - \frac{\mathbf{x}+h\mathbf{e}_z}{|\mathbf{x}+h\mathbf{e}_z|^3}\right),\end{aligned}$$

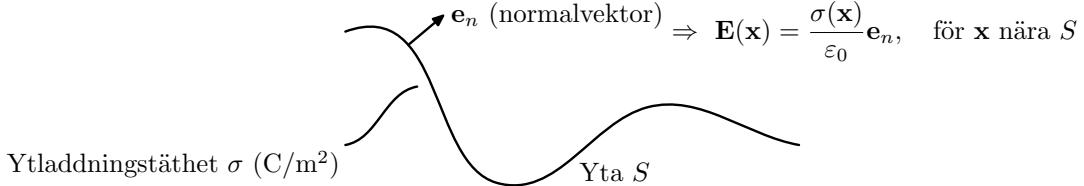
vilket vi från Föreläsning 1 kan erinra oss beskriver det elektriska fältet i fri rymd från de två laddningarna. Som av en händelse har vi därmed även tagit fram den vektoriella beskrivningen av det elektriska fältet från en elektrisk dipol \mathbf{p} , något som vi senare i denna kurs kommer att återvända till och vidareutveckla i Föreläsning 8.



Skalär potential $\phi(x, y)$ för en punktladdning $+q$ placerad i $(x, y) = (0, h)$ och en virtuell, speglad punktladdning $-q$ placerad i $(x, y) = (0, -h)$, med resulterande elektriska fältlinjer erhållna från potentialen som $\mathbf{E}(x, y) = -\nabla\phi(x, y)$. Det perfekt ledande, speglande planet vid $z = 0$ är i fältet inritad som en streckad röd linje. Samtliga fältlinjer skär det perfekt ledande planet ortogonalt mot denna.

Laddningsfördelningen i det perfekt ledande planet $z = 0$

Vi kommer nu att visa på hur vi utifrån den skalära elektrostatiska potentialen kan beräkna laddningstätheten σ på ytan.



Potentialen ϕ är kontinuerlig över en godtycklig gränsyta, specifikt har vi alltid att potentialskillnaden mellan två punkter \mathbf{x}_a och \mathbf{x}_b kan tas fram genom linjeintegralen

$$\phi(\mathbf{x}_b) - \phi(\mathbf{x}_a) = - \int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_b} \mathbf{E}(\mathbf{x}) dl,$$

och om vi låter punkterna gå mot varandra från motsatta sidor av gränsytan $z = 0$ så får vi att

$$\phi(z = 0^+) = \phi(z = 0^-).$$

Dock är *gradienten* av potentialen diskontinuerlig, vilket vi intuitivt kan se direkt från att fältlinjerna så att säga ”strålar ut” åt motsatta håll från en yta som uppår laddningar, helt i analogi med Gauss lag för punktladdningar. Eftersom $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, så har vi från Föreläsning 2 att¹⁸

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\sigma(\mathbf{x})}{\epsilon_0} \mathbf{e}_z,$$

där \mathbf{x} är i en omgivning nära ytan $z = 0$. Att det elektriska fältet är ortogonalt mot ytan följer av att ytan antas vara perfekt ledande. Vi kan vända på detta resonemang och istället betrakta detta som ett samband som ger laddningstätheten i planet som funktion av det elektriska fältet, som

$$\sigma(\mathbf{x}) = \epsilon_0 E_z(\mathbf{x}) = -\epsilon_0 [\nabla\phi]_z = -\epsilon_0 \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial z}.$$

Vi har dock redan räknat fram det elektriska fältet ovan, och vi kan sammanfatta detta med att ytladdningstätheten $\sigma(\mathbf{x})$ i planet $z = 0$ erhålls som

$$\begin{aligned} \sigma(z = 0) &= \epsilon_0 E_z(x, y, z = 0^+) \\ &= \epsilon_0 \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{e}_z \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - h\mathbf{e}_z}{|\mathbf{x} - h\mathbf{e}_z|^3} - \frac{\mathbf{x} + h\mathbf{e}_z}{|\mathbf{x} + h\mathbf{e}_z|^3} \right) \Big|_{z=0^+} \\ &= \frac{q}{4\pi} \left(\frac{(-h)}{(x^2 + y^2 + (-h)^2)^{3/2}} - \frac{(+h)}{(x^2 + y^2 + (+h)^2)^{3/2}} \right) \\ &= -\frac{qh}{2\pi(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Vi kan kontrollera att den fysikaliska dimensionen på detta uttryck som förväntat är C/m², samt att $\sigma \rightarrow 0$ då $|(x, y)| \rightarrow \infty$. Vi kan även notera att laddningen hos den totala ytladdningstätheten

¹⁸ Recap: Det elektriska fältet från en plan och perfekt ledande oändlig yta, uppårande laddningen σ (C/m²), ges som

$$E_z(z) = -[\nabla\phi]_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \operatorname{sgn}(z).$$

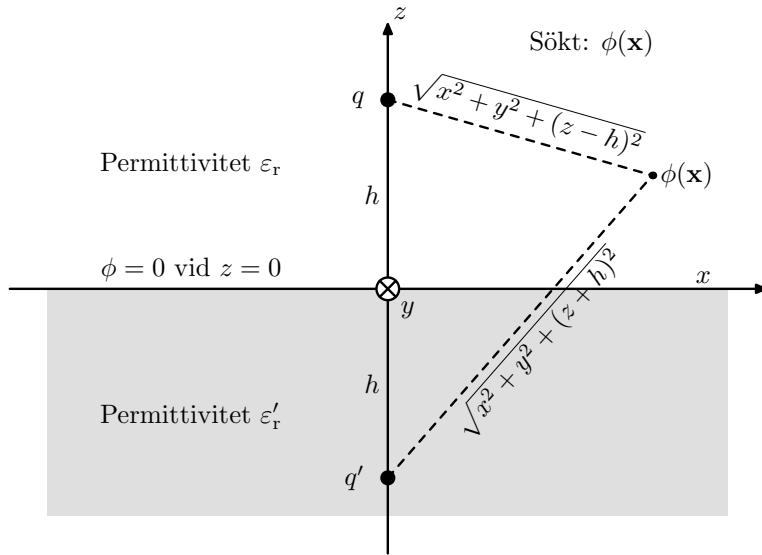
$\sigma(x, y)$ i ytan $z = 0$ ges som

$$\begin{aligned} Q &= \iint_S \sigma(x, y) dS \\ &= -\frac{qh}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} dx dy \\ &= \{ \dots \} \\ &= -q, \end{aligned}$$

ett värde som vi nog egentligen faktiskt kunde ha gissat oss till på grund av symmetrin i konstruktionen av spegelladdningen för att uppfylla potentialen $\phi = 0$ på ytan $z = 0$.

Spegelladdningar i plana gränsytor mellan dielektrika

Spegeling av laddning i gränsytor mellan två dielektrika¹⁹ följer på liknande sätt som för spegling i perfekt ledande plan.



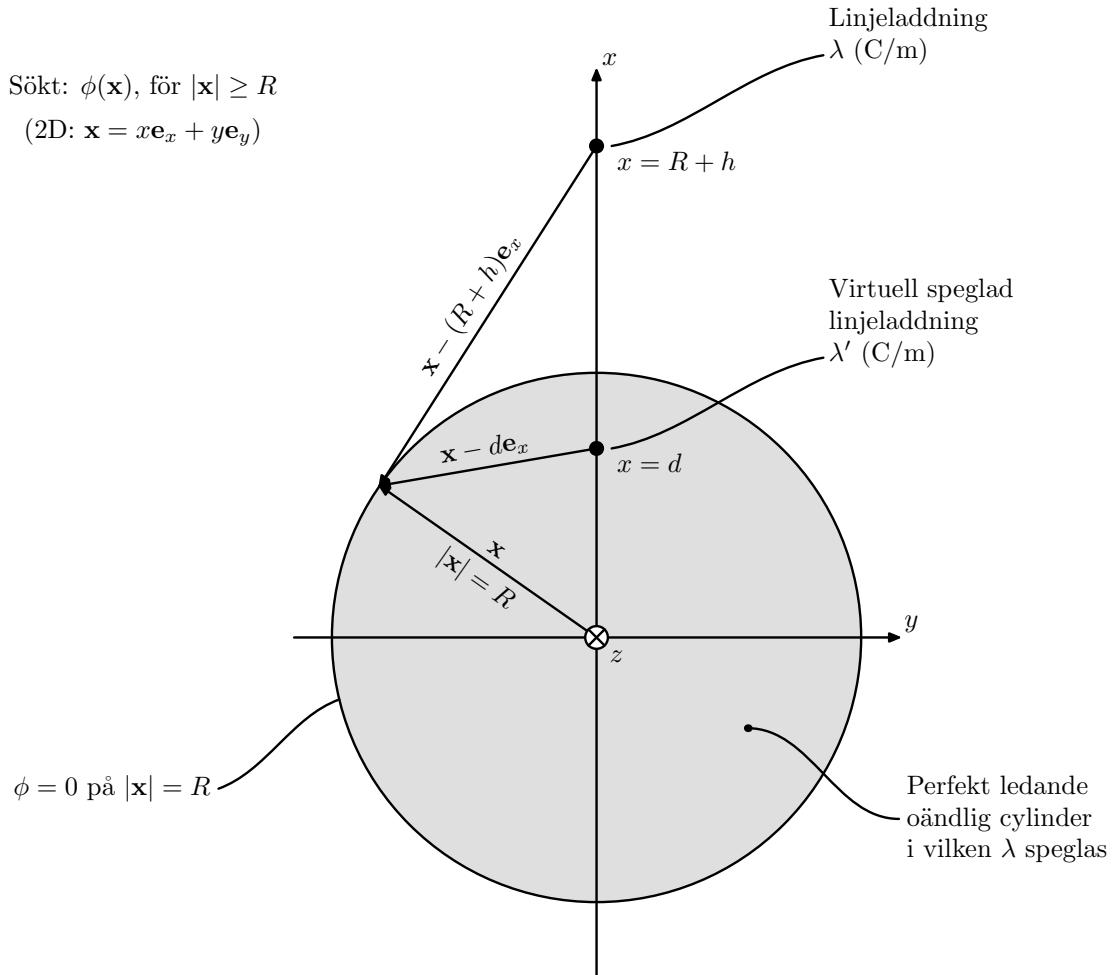
Om laddningen q placeras i ett dielektrikum med den relativ elektriska permittiviteten ϵ_r och med ett avstånd $z = h$ från ytan $z = 0$ som avgränsar från den relativ permittiviteten ϵ'_r , så kommer *bundna* laddningar (till skillnad från de fria laddningarna i fallet med ett perfekt ledande plan) att fortfarande motsvara en spegelladdning q' symmetriskt placerad vid $z = -h$ men istället ha värdet

$$q' = \left(\frac{\epsilon_r - \epsilon'_r}{\epsilon_r + \epsilon'_r} \right) q.$$

¹⁹ Vi går här händelserna i förväg en aning; dielektrika behandlas egentligen först längre fram i kursen i Föreläsning 6.

Spegelladdningar i cylindriska perfekt ledande gränsytor

Låt oss nu betrakta fallet²⁰ med en rak och oändlig linjeladdning λ (C/m) som löper utanför en likaledes oändlig och perfekt ledande cylinder med radien R och med utsträckning längs z -axeln samt jordad till potentialen $\phi_0 = 0$. Linjeladdningen är placerad ett avstånd h utanför cylinderytan, vid en position $(R + h)\mathbf{e}_x$ längs x -axeln enligt figur.



Vi söker även i detta problem potentialen $\phi(\mathbf{x})$ i rummet utanför ledaren, och utifrån det tidigare resonemanget kring virtuell spegelladdning mot ett oändligt och perfekt ledande plan kan vi redan nu gissa oss till att uppgiften kommer att gå ut på att formulera var en virtuell speglad linjeladdning bör placeras så att vi i detta problem uppfyller randvillkoret $\phi = \phi_0 = 0$ på cylinderytan vid radien $r = R$.

Vi kan för övrigt konstatera att vi effektivt har att göra med ett tvådimensionellt problem, så utan att tulla på generalitet kan vi sätta att $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$, med cylinderytan definierad av $|\mathbf{x}| = R$ för alla värden på den longitudinella koordinaten z .

²⁰ Oturligt nog tar inte Griffiths upp fallet med just spegling av en linjeladdning i en ledande cylinder, vilket är lite synd då detta tvådimensionella problem illustrerar ett antal intressanta aspekter av arbetsgången med att konstruera lösningar till Laplaces ekvation för potentialen ϕ . Måhända är detta exempel exkluderat då en del algebra onekligen måste gås igenom i och med argumenterandet för hur vi skapar en lösning som uppfyller randvillkoret runt om på cylinderns mantelyta. Det bör noteras att även J D. Jacksons standardverk *Classical Electrodynamics* saknar denna spegling av linjeladdningar i cylinderytor.

Potential från en linjeladdning

I detta fall är uppgiften att bestämma den skalära potentialen $\phi(\mathbf{x})$ i rummet givet en linjeladdning λ och (åtminstone gissar vi så) en virtuell linjeladdning λ' . Därmed infinner sig frågan, hur får vi fram denna potential? Vi har ju så långt trots allt bara diskuterat potentialen från system rent generellt.

Som tur är gick vi i Föreläsning 2 igenom hur vi i fall med symmetrier kan använda "Gaussiska ytor" omslutande laddning, och att vi på detta sätt fick ut det elektriska fältet. Specifikt fick vi fram att det radiella elektriska fältet från en linjeladdning λ , utan att ens behöva lösa någon integral, var

$$E_r(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Detta fält kommer ju i sin tur från en skalär potential genom $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, eller på skalär och radiell form

$$E_r(r) = -\frac{\partial\phi(r)}{\partial r} \Leftrightarrow \phi(r) = -\int_{r_0}^r E_r(r) dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^r \frac{1}{r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

för någon lämpligt vald referens r_0 som vi utgår ifrån när vi integrerar upp potentialen till godtycklig radie r ortogonalt ut från linjeladdningen λ . Notera att denna referensradie lämpligen ej kan väljas som varken $r_0 = 0$ eller $r_0 = \infty$, eftersom vi då lämnar potentialen vid avståndet r från linjeladdningen odefinierad. Vi kan bara konstatera att referensradien r_0 är *något* finit avstånd, som i det slutliga resultatet inte bör ha någon inverkan på det slutliga svaret.

Att lägga till virtuell laddning så att vi når randvillkoret $\phi = 0$ på cylinderytan

Helt i analogi med vad vi gjorde för speglingen i ett perfekt ledande plan med en punktladdning, kommer vi nu att söka belopp och position för en *virtuell* linjeladdning lagd någonstans i (x, y) -planet så att vi (om möjligt) når randvillkoret att $\phi = 0$ på cylinderns yta $|\mathbf{x}| = R$.

Det första vi kan notera är att vi har en symmetri speglad i x -axeln, eftersom vi lagt denna så att linjeladdningen λ ligger längs denna.²¹ Linjeladdningen måste av symmetriskäl trivialt självfallet också cylinderns ytsträckning, och därmed även den ligga längs z -axeln, liksom den "reella" linjeladdningen λ . Vi antar att vi har en virtuell linjeladdning om λ' (C/m, och vi antar att denna är lokaliserad vid någon position $d\mathbf{e}_x$ längs x -axeln.

Givet denna initiala *gissning*, som vi erinrar oss alltid är tillåten i och med att entydighetsteoremet ger oss en "licens" att jaga efter lösningar till Poissons och Laplaces ekvation (av vilka vi för tillfället analyserar en domän för den senare) utan att behöva bekymra oss om exakt *hur* vi kommer fram till en lösning, så länge som den uppfyller randvillkoren, så är vi redo att sätta igång med att sätta samman ett lösningsförslag med spegelladdningar. I en ekvivalent frirymdsmodell av potentialen, där vi givetvis behåller den reella linjeladdningen λ vid positionen $(R+h)\mathbf{e}_x$ man nu tar bort den ledande cylindern och ersätter den med en *virtuell* linjeladdning λ' vid $d\mathbf{e}_x$, så får vi i rummet den sammanlagda potentialen²²

$$\phi(\mathbf{x}) = \underbrace{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{|\mathbf{x} - (R+h)\mathbf{e}_x|}\right)}_{\text{potential från } \lambda} + \underbrace{\frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{|\mathbf{x} - d\mathbf{e}_x|}\right)}_{\text{potential från } \lambda'}$$

där vi återigen erinrar oss att r_0 är en godtyckligt vald referensradie som i det slutliga svaret inte får påverka lösningen.²³ Genom att använda logaritmlagen $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$ kan vi

²¹ Notera hur vi genom att lägga ut ett lämpligt valt koordinatsystem markant kan underlätta för oss själva redan innan vi ens börjar skissa på algebran i problemet!

²² Notera återigen hur kraftfullt superpositionsprincipen kommer till vår assistans!

²³ Den observante ser här att vi egentligen har full frihet att välja r_0 *individuellt* för linjeladdningarna λ och λ' . Naturligtvis kan vi göra detta, men i den följande elimineringen har detta ingen annan betydelse än att stöka till det för oss rent algebraiskt. Vi väljer här samma referens-radie r_0 för både den reella och virtuella linjeladdningen.

vidareutveckla potentialen till en gemensam term involverande referens-radien r_0 som

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{(\lambda + \lambda')}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_0) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(|\mathbf{x} - (R+h)\mathbf{e}_x|) - \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0} \ln(|\mathbf{x} - d\mathbf{e}_x|).$$

För att uppfylla kravet om att r_0 inte skall påverka slutresultatet, så ser vi direkt att en möjlighet är att den speglade, virtuella linjeladdningen, helt i analogi med fallet med punktladdning q , skall läsas till den reella linjeladdningen med omvänt tecken som

$$\lambda' = -\lambda.$$

Med detta konstaterande reduceras därmed potentialen ϕ i cylindriska koordinater $\mathbf{x} = (x, y, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$ till att på cylinderytan²⁴ $r = R$ lyda

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) \Big|_{|\mathbf{x}|=R} &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(|\mathbf{x} - (R+h)\mathbf{e}_x|) - \frac{(-\lambda)}{2\pi\epsilon_0} \ln(|\mathbf{x} - d\mathbf{e}_x|) \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{|R \cos \varphi \mathbf{e}_x + R \sin \varphi \mathbf{e}_y - d \mathbf{e}_x|}{|R \cos \varphi \mathbf{e}_x + R \sin \varphi \mathbf{e}_y - (R+h) \mathbf{e}_x|} \right) \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{(R \cos \varphi - d)^2 + R^2 \sin^2 \varphi}{(R \cos \varphi - (R+h))^2 + R^2 \sin^2 \varphi} \right) \\ &= \{ \text{ Utveckla } \} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{R^2 \cos^2 \varphi - 2Rd \cos \varphi + d^2 + R^2 \sin^2 \varphi}{R^2 \cos^2 \varphi - 2R(R+h) \cos \varphi + (R+h)^2 + R^2 \sin^2 \varphi} \right) \\ &= \{ \text{ Använd } \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{R^2 - 2Rd \cos \varphi + d^2}{R^2 - 2R(R+h) \cos \varphi + (R+h)^2} \right). \end{aligned}$$

Det är här mycket frestande att direkt konstatera att för att detta uttryck skall vara noll på ytan $|(x, y)| = R$ så kräver vi att argumentet till logaritmen måste vara ett, eftersom $\ln(1) = 0$. Vi skall dock vänta lite med detta och först konstatera att om detta uttryck skall vara *oberoende av vinkelns* φ , så kräver vi åtminstone att argumentet är konstant, säg

$$\frac{R^2 - 2Rd \cos \varphi + d^2}{R^2 - 2R(R+h) \cos \varphi + (R+h)^2} = C = \text{konst.}$$

I och med detta för vi in ytterligare en frihetsgrad i vårt problem, i och med att C därmed förr eller senare kommer att behöva bestämmas. Samtidigt har vi en viss paradox närvarande, i och med att vi har att göra med ett *underbestämt* "system" med en ekvation och två obestämda parametrar d och nu även C . Minns dock att vi även har kravet $\phi = 0$, vilket tillför den andra ekvation som behövs för att ha fullständig information för lösande av uppgiften.

Så vad kan vi då kräva av d och C för att göra uttrycket ovan konstant och oberoende av vinkelns φ ? Genom att samla ihop termerna för $\cos \varphi$ i uttrycket ovan, så erhåller vi att

$$2R(C(R+h) - d) \cos \varphi = C(R^2 + (R+h)^2) - (R^2 + d^2),$$

vilket vi direkt kan konstatera kan göras oberoende av vinkelns φ genom att i vänsterledet se till att välja²⁵ C så att koefficienten för $\cos \varphi$ blir noll, som

$$2R(C(R+h) - d) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{d}{R+h}.$$

²⁴ Vi söker ju konstruera en potential $\phi(\mathbf{x})$ så att $\phi = 0$ på denna yta!

²⁵ Ja, *välja!* Kom ihåg att entydighetsteoremet ger oss "licens att skjuta från höften", så länge som vi i slutet har en lösning som uppfyller Laplaces ekvation samt randvillkoret $\phi(\mathbf{x}) = 0$ på ytan $|(x, y)| = R$.

Låt oss se vad detta kan ge för lösning för placeringen d för den speglade virtuella linjeladdningen! Med C enligt detta konstaterande har vi enligt ovan att vänsterledet blir noll (dessutom oberoende av $\cos \varphi$, som förväntat), och att högerledet samtidigt tar formen

$$0 = \frac{d}{(R+h)}(R^2 + (R+h)^2) - (R^2 + d^2) \quad \Leftrightarrow \quad (R^2 + d^2)(R+h) = d(R^2 + (R+h)^2).$$

Detta definierar en andragradsekvation för den sökta variabeln d , vilken enkelt kan lösas till att ge två separata lösningar

$$d = \begin{cases} R^2/(R+h) & (\text{Lösning 1}) \\ R+h & (\text{Lösning 2}) \end{cases}$$

Stopp och belägg nu! Betyder detta inte att vi just visat på *två olika lösningar* för potentialen $\phi(\mathbf{x})$ som satisfierar exakt samma problem? Vi har ju just visat att det finns *två* olika positioner för spegelladdningen som ju båda ger en lösning till problemet. Sade inte entydighetsteoremet oss alldeles nyss att *endast en unik lösning existerar till Laplaces ekvation?*

Denna observation, att vi har två lösningar för positionen d som ploppar fram ur andragradsekvationen för denna, är helt korrekt; låt oss därför studera dessa två lösningar i detalj.

Vi börjar med Lösning 2, som ju talar om för oss att en lösning till problemet med att uppnå en fix potential ($\phi = 0$) som randvillkor på cylinderytan är att helt enkelt lägga den virtuella, speglade linjeladdningen $\lambda' = -\lambda$ direkt ovanpå den reella linjeladdningen λ , vid punkten $(R+h)\mathbf{e}_x$. Detta ger direkt att den resulterande linjeladdningen (återigen, via superpositionsprincipen!) är noll, och all potential runt om i problemet blir trivialt noll. Specifikt så uppfyller denna triviala noll-lösning självfallet randvillkoret $\phi = 0$ på cylinderytan, men den för oss inte framåt i problemets lösning och är uppenbart inte den lösning vi söker. Med andra ord förkastar vi på stående för Lösning 2.

Om vi istället betraktar Lösning 1, så ger den å andra sidan vid hand att den virtuella, speglade linjeladdningen skall placeras vid en punkt $d = R^2/(R+h)$ som ligger någonstans mellan $x = 0$ och $x = R/2$, vilket låter rimligt.²⁶ Trots allt så är ett implicit villkor i allt vi gör i denna metod med speglade laddningar att ingen virtuell laddning får placeras i domänen där vi analyserar potentialen, då detta vore ett brott mot själva grundtagandet om att vi har Laplace ekvation överallt med undantag för själva källaddningen som vi speglar, oavsett om det är en punktladdning eller linjeladdning eller någon annan konfiguration som är själva källan i problemet.

²⁶ Att den virtuella, speglade linjeladdningens position d ligger någonstans mellan $x = 0$ och $x = R/2$ för Lösning 1 följer av att $h > R$, vilket i sin tur betyder att

$$d = \frac{R^2}{R+h} = \underbrace{\left(\frac{R}{R+h} \right)}_{\in [0,1/2[} R \in [0,R/2[.$$

Sammanfattnings av virtuell speglad linjeladdning i cylindrisk yta

Vi kan sammanfatta denna exercis i konstruktion av en lösning till problemet med spegling av en linjeladdning i en cylindrisk yta till ett perfekt ledande medium att:

Lösningen till Poissons ekvation för en linjeladdning λ placerad på ett avstånd $R + h$ från centrum av en perfekt ledande cylinder med radie R ges som frirymlösningen med en virtuell linjeladdning $\lambda' = -\lambda$ placerad på avståndet²⁷

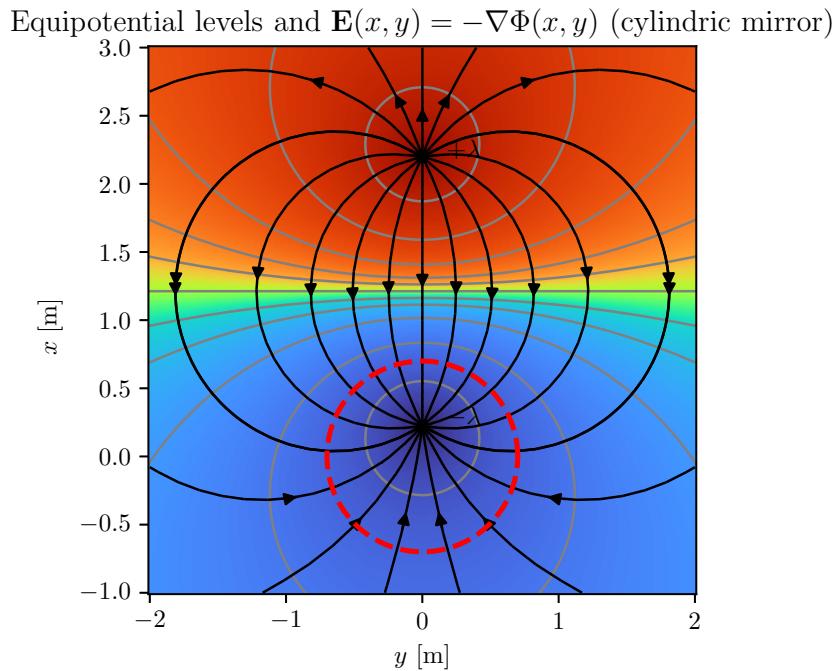
$$d = \frac{R^2}{R + h},$$

från cylinderns centrum i riktning mot den externa linjeladdningen.

Vi bör för sakens skull även passa på att sammanfatta detta som en explicit form involverande den sökta potentialen, som med ovanstående form på d lyder

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{|\mathbf{x} - d\mathbf{e}_x|}{|\mathbf{x} - (R + h)\mathbf{e}_x|} \right),$$

med principellt utseende enligt nedan.



Skalär potential $\phi(x, y)$ för en linjeladdning λ placerad vid $x = R + h$ (med $R = 0.7$, $h = 1.5$) utanför en perfekt ledande cylinder med radien R , med resulterande elektriska fältlinjer från potentialen som $\mathbf{E}(x, y) = -\nabla\phi(x, y)$. Cylindern är i fältet inritad som en streckad röd cirke. Samtliga fältlinjer skär den perfekt ledande cylindern ortogonalt mot denna.

²⁷ Vi kallar emellanåt punkten för den speglade linjeladdningen för *inverspunkten till källpunkten med avseende till en cirkel med radien R*. Se <https://sv.wikipedia.org/wiki/Inversion>

Spegelladdningar i sfäriska perfekt ledande gränsytor

För spegling av punktladdningar i sfäriska ytor följer resonemangen likt det för punktladdningar ovan, med observationen att ekvipotentialytorna för en elektrisk dipol ges av sfärer som är förskjutna mellan laddningarna.²⁸ Vi sammanfattar här helt enkelt bara lösningen²⁹ med följande.

Lösningen till Poissons ekvation för en punktladdning q placerad på ett avstånd $R + h$ från centrum av en perfekt ledande sfär med radie R ges som frirymdslösningen med en virtuell punktladdning

$$q' = -\frac{R}{R+h}q,$$

placerad på avståndet

$$d = \frac{R^2}{R+h},$$

från sfärens centrum i riktning mot den externa punktladdningen.

Notera att placeringen för den virtuella punktladdningen stämmer överens till punkt och pricka med avståndet som vi nyss räknade ut för en cylinder av samma radie R ; för spegling av punktladdningen q i en sfär skalas dock den virtuella, speglade laddningen med faktorn $R/(R+h)$.

Kan jord ersättas med godtycklig konstant potential?

I samtliga uppgifter ovan har vi antagit att de perfekta ledarna kopplats till en konstant potential, och vi har för enkelhets skull antagit koppling till jord, vilket vi här kort och gott sätter som $\phi_0 = 0$. Frågan är dock om detta antagande om $\phi_0 = 0$ verkligen är nödvändigt? Vad händer om vi i resonemangen ovan bara antar att $\phi_0 = \text{konstant}$?

²⁸ Se till exempel grafen för fältfördelningen för den elektriska dipolen som diskuterats tidigare i denna föreläsning.

²⁹ Vilken för övrigt är en lysande övningsuppgift! Se Griffiths sid. 128 för detaljer.

Sammanfattning av Föreläsning 3 – Spegelladdningar, randvillkor och entydighet

- Lösningar till Laplaces ekvation $\nabla^2\phi = 0$ saknar lokala extrempunkter. Extrempunkter till ϕ finns *endast* på randen S till den volym V i vilket Laplace ekvation gäller. [Teorem I]
- Genom att använda denna information kan vi visa att *lösningen till Laplaces ekvation $\nabla^2\phi = 0$ i en godtycklig volym V är unikt (entydigt) bestämd om potentialen ϕ är specificerad på randen S till volymen.* [Teorem II, *First uniqueness theorem* enligt Griffiths]
- Detta betyder i sin tur att om vi finner en lösning till Laplace ekvation, *så är detta den enda lösningen, oavsett hur vi funnit eller konstruerat lösningen så länge som lösningen uppfyller de föreskrivna randvillkoren.* Detta argument är själva kärnan i hur vi motiverar användandet av spegelladdningar i lösningen av potentialproblem, med närväro av ledare med fria laddningar.
- ”Entydighetsteoremet är en licens till din fantasi. Det spelar ingen roll *hur* du finner din lösning; om den (a) uppfyller Laplaces (eller Poissons!) ekvation och (b) har korrekt värde på randen, så är den *korrekt*.”
- [Spegling av punktladdning i perfekt ledande plan] Lösningen $\phi(\mathbf{x})$ till Poissons ekvation för en punktladdning q placerad ett avstånd $z = h$ ovanför ett perfekt ledande plan $z = 0$ ges som frirymlösningen med en virtuell spegelladdning $-q$ placerad på samma avstånd bakom planet, vid $z = -h$.
- [Spegling av punktladdning i plan mellan dielektrika] Spegelladdningen placeras på samma sätt som i fallet med perfekt ledande plan, men istället med värdet

$$q' = \frac{\epsilon_r - \epsilon'_r}{\epsilon_r + \epsilon'_r} q,$$

där ϵ_r och ϵ'_r är de relativas elektriska permittiviteterna för respektive $z > 0$ och $z < 0$.

- [Spegling av linjeladdning i perfekt ledande cylinder] Lösningen till Poissons ekvation för en linjeladdning λ placerad på ett avstånd $R + h$ från centrum av en perfekt ledande cylinder med radie R ges som frirymlösningen med en virtuell linjeladdning $\lambda' = -\lambda$ placerad på avståndet

$$d = \frac{R^2}{R + h},$$

från cylinderns centrum i riktning mot den externa linjeladdningen.

- [Spegling av punktladdning i perfekt ledande sfär] Lösningen till Poissons ekvation för en punktladdning q placerad på ett avstånd $R + h$ från centrum av en perfekt ledande sfär med radie R ges som frirymlösningen med en virtuell punktladdning

$$q' = -\frac{R}{R + h} q,$$

placerad på avståndet

$$d = \frac{R^2}{R + h},$$

från sfärens centrum i riktning mot den externa punktladdningen.