UPPSALA
UNIVERSITET

Elektromagnetism II, 1TE626 (2025)
Lecture Notes, Fredrik Jonsson
Document Revision 2 December 2025
https://github.com/hp35/elmagii/

Föreläsning 5

Elektrodynamik – Elektromagnetisk induktion

Fredrik Jonsson, Uppsala Universitet, 17 november 2025

Sammanfattning av föreläsningen

Ämnet för föreläsningen beskrivs kort och koncist med Michael Faradays egna ord (1831), fritt tolkade som "Ett varierande magnetfält inducerar ett elektriskt fält". Vi går igenom definitionerna av magnetiskt flöde Φ_{M} och det historiskt betingade begreppet elektromotorisk "kraft" $\mathcal{E}$. Vi härleder Faradays induktionslag $\mathcal{E} = -d\Phi_{\mathrm{M}}/dt$ i två separata och inbördes sammanhållna fall. Det första fallet introduceras för sin enkelhet och intuitivt greppbara geometri, där vi studerar en rektangulär strömslinga som förs genom ett inhomogent magnetiskt fält och kommer på så sätt fram till formen på Faradays induktionslag via ett specialfall. Det andra fallet är en formell härledning av Faradays induktionslag för en godtycklig rörlig geometri i form av en slinga med godtycklig hastighet utefter sin trajektoria, samt med ett godtyckligt varierande inneslutet magnetfält. Vi noterar att Faradays induktionslag härleds enbart utifrån Lorentz kraftlag och ej involverande vare sig Coulombs eller Biot–Savarts lag, eller något av deras derivat i det elektromagnetiska "släktträdet"; i och med detta har vi i Faradays induktionslag avsaknad av såväl den elektriska permittiviteten ε_0 som den magnetiska permeabiliteten μ_0. Utifrån Faradays induktionslag formulerar vi Lenz lag som slutsatsen att en inducerad ström alltid har en riktning som motverkar orsaken till att den uppkom. Vi går utifrån denna princip igenom en uppsättning av tankeexperiment med bäring på tolkning av elektromagnetisk induktion. Med utgångspunkt i Faradays induktionslag härleder vi Faradays lag $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$, ofta betecknad "Maxwell–Faradays lag", på differential- och integralform. Vi avslutar med att gå igenom hur två strömbärande slingor påverkar varandra genom ömsesidig induktion, och vi härleder Neumanns formel för den ömsesidiga induktansen. Specifikt går vi igenom tolkningen av Neumanns formel i form av elektromagnetisk reciprocitet mellan två slingor, där vi har det smått förbluffande resultatet att det magnetiska flöde som uppfångas av en slinga från en ström i den andra slingan exakt motsvaras av det magnetiska flöde som den andra slingan skulle uppfånga om istället den första slingan drevs med exakt samma ström.

Sammanfattning i tre punkter

1. *Faradays induktionslag,* $\mathcal{E} = -d\Phi_{\mathrm{M}}/dt$.
2. *Faradays lag,*
$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\Gamma} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{S} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{S}.$$
3. *Ömsesidig induktans enligt Neumanns formel,* $M_{\Gamma\Gamma'} = M_{\Gamma'\Gamma}$.

Introduktion - Faradays induktionslag

Vi kan i en enda mening sammanfatta ämnet för dagens föreläsning[1] med Faradays egen slutsats, som fritt tolkad lyder:

> *Ett varierande magnetfält inducerar ett elektriskt fält.*
> — Michael Faraday (1831)

För *elektrostatiska* system gäller det, som tidigare visats i Föreläsning 2, att som en följd av att rotationen av det elektriska fältet alltid är noll i elektrostatiska system, så är via Stokes teorem integralen av det elektriska fältet över en godtycklig sluten slinga Γ alltid är noll, det vill säga att[2]

$$\oint_\Gamma \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0. \qquad \text{(Statiskt!)}$$

Michael Faraday observerade 1831 att i tidsberoende (icke-statiska = dynamiska) fält så gäller inte detta, utan fältet driver en ström som lyder

$$\oint_\Gamma \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_{\mathrm{M}}}{dt}, \qquad \text{(Dynamiskt!)}$$

där Φ_{M} är det *magnetiska flödet*, som vi strax kommer att definiera. Vi brukar i vardagligt tal kalla denna ekvation *Faradays induktionslag*[3], eller kort och gott bara *induktionslagen.*

Vi skall här notera att Faradays induktionslag, från vilken vi kommer att härleda Faradays lag (eller "Maxwell–Faradays lag", som engelsk-språkig litteratur ofta betecknar den) *inte* är möjlig att härleda enbart från elektrostatiska eller magnetostatiska teorem som Coulombs eller Biot–Savarts lag. Induktion är ett strikt *dynamiskt* fenomen där vi väljer att antingen

A. Härleda den från Lorentz-kraften plus information om hur magnetfältet $\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$ beror i tiden, eller
B. Helt enkelt godta den empiriskt verifierade "magnetiska flödesregeln" som ett axiom från vilket vi kan härleda Faradays lag.

Vi kommer här självfallet att formellt härleda fram Faradays lag från Lorentz-kraften, då det vore nästintill moraliskt förkastligt i en kurs som denna att inte ta tillfället i akt och en gång för alla visa på ursprunget för denna fundamentala lag inom elektrodynamiken.[4]

---

[1] Vi kommer i denna föreläsning att i huvudsak följa Griffiths Kapitel 7, med härledningen av Faradays induktionslag på Sid. 307–309.

[2] Recap från Föreläsning 3: För *statiska* elektriska fält gäller alltid att $\nabla\times\mathbf{E}=\mathbf{0}$, så med Stokes teorem (*Curl Theorem*) har vi i elektrostatiken trivialt att

$$\oint_\Gamma \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \iint_S \underbrace{\nabla\times\mathbf{E}}_{=\mathbf{0}}\cdot d\mathbf{S} = 0.$$

[3] Denna beteckning är i sig lite olycklig, då vi lätt kan associera denna med Faradays lag på differentialform som vi inom kort kommer att stifta bekantskap med,

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}.$$

Dock kommer vi inom kort att visa hur denna kan härmedas ur just Faradays induktionslag på formen som involverar magnetiska flödet Φ_{M}. Vissa textböcker inom elektromagnetism tar Faradays lag på denna differentialform som ett *axiom* (postulat) utan att visa på hur formen uppkommer, och går helt enkelt till att visa hur induktionslagen erhålls från denna form; detta är dock fusk och ett cirkelresonemang som vi skall hålla oss borta från i möjligaste mån.

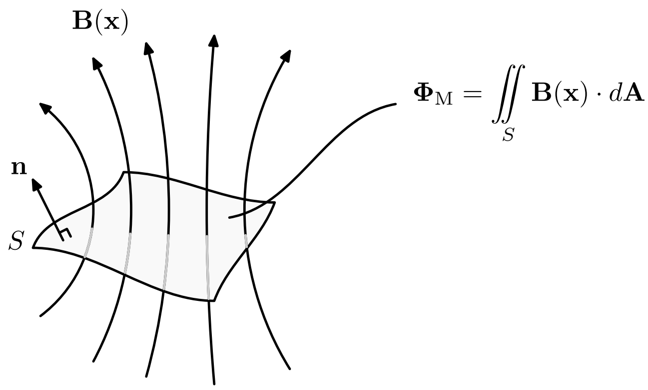
[4] Det är mycket vanligt att se "härledningar" av Faradays induktionslag ("magnetiska flödes-

Grundläggande begrepp inför Faradays induktionslag

Definition: Magnetiskt flöde

I likhet med det elektriska flödet $\Phi_{\rm E}$ som vi introducerade i Föreläsning 1, definierar vi det *magnetiska flödet* $\Phi_{\rm M}$ som integralen av normalkomponenten av det magnetiska fältet $\mathbf{B}$ över den yta S som innesluts av en sluten trajektoria Γ, som

$$\Phi_{\rm M} = \iint\limits_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$



Låt oss nu först se hur detta magnetiska flöde kan tänkas ha ett tidsberoende. Ur definitionen av flödet $\Phi_{\rm M}$ ser vi direkt att om antingen

1. Det magnetiska fältet som sådant är tidsberoende, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$,
2. Ytan hos den slutna slingan Γ ändras, eller
3. Den slutna slingan Γ på något sätt ändras i rummet, exempelvis genom att roteras eller translateras,

så kommer det magnetiska flödet $\Phi_{\rm M} = \Phi_{\rm M}(t)$ att få ett tidsberoende.

Magnetisk flödestäthet och lite terminologi

Den korrekta svenska beteckningen för det som vi lite löst kallat "magnetfält" ($\mathbf{B}$-fältet) är *magnetisk flödestäthet.* Anledningen till denna terminologi står ganska klar i och med vad vi diskuterat ovan, då det *magnetiska flödet* definieras av integralen

$$\Phi_{\rm M} = \iint\limits_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S},$$

vilket direkt gör att vi bör associera "magnetfältet" $\mathbf{B}$ med en slags *densitet av flöde per ytenhet*, eller kort och gott som just en *magnetisk flödestäthet.* Vi kan på sätt och vis säga att den magnetiska flödestätheten $\mathbf{B}$ är ett mått på hur många magnetiska fältlinjer som skär en yta per ytenhet. En annan beteckning för $\mathbf{B}$-fältet är *magnetstyrka*, vilken dock är betydligt mer intetsägande, även om det ger en parallell association till dess elektriska motsvarighet $\mathbf{E}$-fältet i form av *elektrisk fältstyrka.*

lagen") $\mathcal{E} = -d\Phi_{\rm M}/dt$ utgående ifrån Faradays lag $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ som om den senare vore en axiomatisk sanning som inte behöver bevisas. (Faradays lag kommer istället i denna föreläsning att härledas från induktionslagen.) Denna approach med Faradays lag som ett axiom ger endast ett cirkelresonemang, där den ena vyn av induktion ömsesidigt bevisar den andra. Om man frågar exempelvis ChatGPT, Grok eller någon annan LLM (*large language model*) så finner man sorgligt nog direkt att svaret man får så gott som uteslutande bygger på just Faradays lag som ett axiom.

Definition: Elektromotorisk "kraft" - EMK

Vi rekapitulerar att Lorentzkraften på en punktladdning q i rörelse med hastigheten $\mathbf{v}$ i ett kombinerat elektriskt och magnetiskt fält är given som

$$\mathbf{F} = q\big[\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\big].$$

Om vi tänker oss att vi för en laddad partikel längs en sluten slinga Γ, och att vi under denna rörelse integrerar den kraft som verkar på punktladdningen och dividerar denna med laddningen i sig, så får vi den resulterande potentialskillnad som agerar för att skicka laddningen som en ström genom slingan. Den potentialskillnad som ackumulerats runt slingan är då

$$\mathcal{E} = \oint_\Gamma \left(\frac{\mathbf{F}}{q}\right) \cdot d\mathbf{l} = \oint_\Gamma \big[\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\big] \cdot d\mathbf{l},$$

vilken brukar betecknas med den olyckligtvis tämligen missvisande termen "elektromotorisk kraft", eller kort och gott EMK. Att detta inte är en "kraft" i egentlig bemärkelse är tydligt från den fysikaliska dimensionen hos $\mathcal{E}$, som är V (volt), men termen har satt sig från dess historiska sammanhang, och är idag den allmänt vedertagna.[5] Likaledes är symbolen $\mathcal{E}$ för den elektromotoriska "kraften" olycklig, då den ju ger intryck av att vi har att göra med ett elektriskt fält, vilket ju heller ej är fallet, men återigen så är "$\mathcal{E}$" allmänt använt inom litteraturen, så vi håller kvar vid denna.

En annan lite udda aspekt är hur vi skall se på denna elektromotoriska "kraft" för en *sluten slinga* Γ, som ju rimligen har startpunkten för integralen exakt sammanfallande med slutpunkten. Med andra ord:

Hur kan vi ha en potentialskillnad i en och samma punkt i rummet?

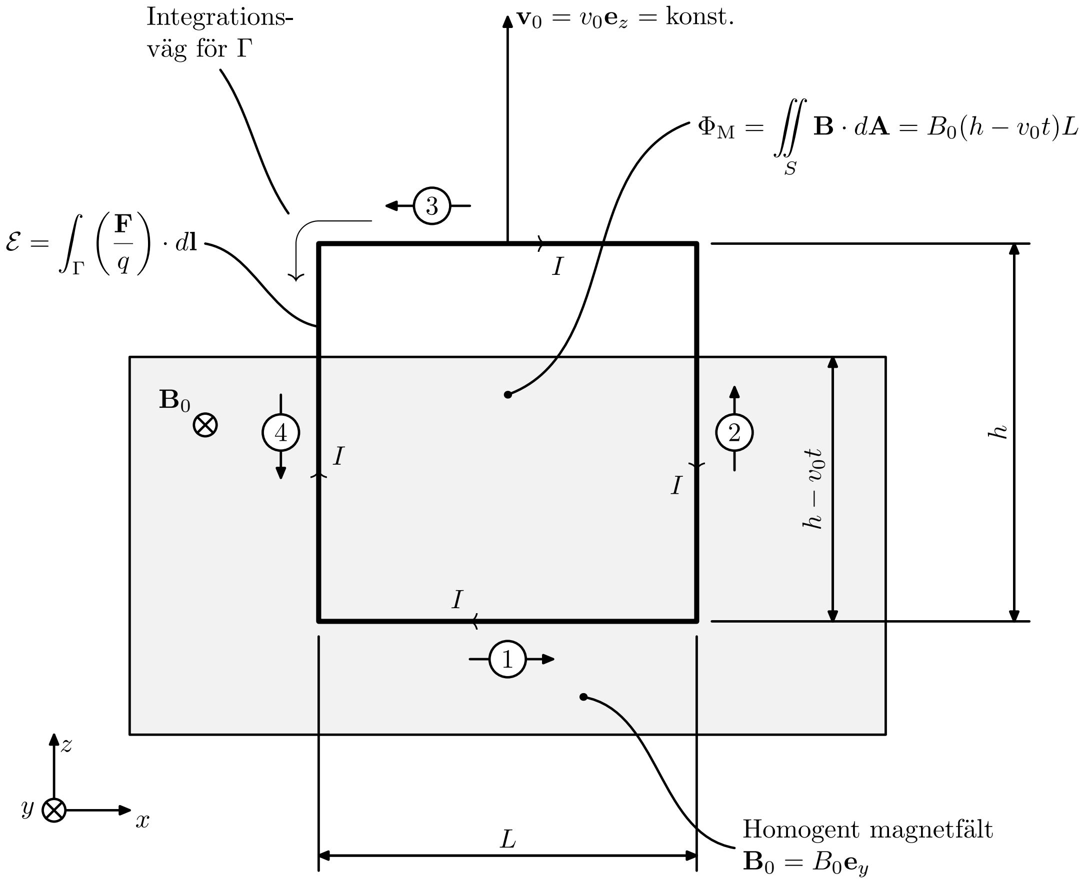
Svaret på denna paradox är att den elektromotoriska "kraften" är ett rent konceptuellt begrepp som införts som ett *skalärt mått på hur en noll-skild rotation av ett fält yttrar sig då vi traverserar en sluten trajektoria genom det.* Vi kan se det som den spänning som skulle alstras i en ledare längs med trakektorian Γ, där vi kan tänka oss att vi klippt av slingan och kopplat in en voltmeter över de lösa ändarna som hålls mycket nära varandra.[6]

[5] Som ett uttryck för vår allmänna irritation över detta språkbruk, som går tvärs emot den fysikaliska dimensionen, så kommer vi framöver genomgående att använda citattecken närhelst denna "kraft" nämns!

[6] Vi kan här påminna oss om att vi i Föreläsning 2 tog fram att vi för *elektrostatiska* fält hade att $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$; detta noll-resultat är något som vi nu lämnar bakom oss i och med att vi nu kommer att introducera tidsberoende, *elektrodynamiska* fält.

Faradays induktionslag härledd för en rektangulär slinga med konstant hastighet

Innan vi tar itu en *generell* härledning av Faradays induktionslag, som tyvärr riskerar att få oss att fastna i vektoralgebra och tappa fokus på själva kärnan i den, låt oss först betrakta ett förenklat specialfall med en rektangulär slinga Γ som med konstant hastighet $\mathbf{v}_0$ dras ut ur ett rektangulärt område med ett i övrigt homogent magnetfält $\mathbf{B}_0$, ortogonalt mot slingans plan och ortogonalt mot den konstanta hastigheten $\mathbf{v}_0$.



Låt oss se vad detta högst förenklade system kan ge i form av elektromotorisk "kraft". Till att börja med, så har vi för samtliga fyra segment av Γ att Lorentz-kraften, om vi antar att inga statiska elektriska fält är med i problemet, beskrivs av

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= q(\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0)\\ &= q(\mathbf{e}_z v_0)\times(\mathbf{e}_y B_0))\\ &= -qv_0B_0\mathbf{e}_x.\end{aligned}$$

När vi integrerar denna kraft, normaliserad med laddningen q, längs med Γ, så ser vi att segmenten ② och ④ som är ortogonala mot denna kraft ger noll i bidrag, eftersom skalärprodukten $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ där är identiskt noll. Med andra ord är det bara segmenten ① och ③ som kan ge bidrag, och eftersom segment ③ ligger utanför magnetfältet och därmed även det ger noll i bidrag till linjeintegralen, så är det endast segment ① som ger ett nettobidrag till vår elektromotoriska "kraft",

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \oint_\Gamma \left(\frac{\mathbf{F}}{q}\right) \cdot d\mathbf{l} = \oint_\Gamma (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot d\mathbf{l} \\
&= \oint_{①} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot d\mathbf{l} + \oint_{②} \underbrace{(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot d\mathbf{l}}_{=0,\ \mathbf{v}\|d\mathbf{l}} + \oint_{③} \underbrace{(\mathbf{v} \times \mathbf{0}) \cdot d\mathbf{l}}_{=0} + \oint_{④} \underbrace{(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot d\mathbf{l}}_{=0,\ \mathbf{v}\|d\mathbf{l}} \\
&= \int_{①} (-v_0 B_0 \mathbf{e}_x) \cdot (\mathbf{e}_x dx) = -v_0 B_0 \int_{①} dx \\
&= -v_0 B_0 L.
\end{aligned}
$$

Samtidigt har vi att det magnetiska flödet Φ_M ges av ytintegralen[7] över den yta S som innesluts av slingan Γ och har ett nollskilt bidrag från det magnetiska fältet. Det magnetiska flödet har en förändring i tiden som ges av

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Phi_\mathrm{M}}{dt} &= \frac{d}{dt} \iint\limits_{S \wedge \mathbf{B} \neq \mathbf{0}} \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \iint\limits_{S \wedge \mathbf{B} \neq \mathbf{0}} (B_0 \mathbf{e}_y) \cdot (\underbrace{-\mathbf{e}_y dA}_{=d\mathbf{S}}) = -B_0 \frac{d}{dt}\big((h - v_0 t)L\big) \\
&= \underbrace{v_0 B_0 L}_{=-\mathcal{E}}
\end{aligned}
$$

Ur detta högst förenklade resonemang kan vi dra slutsatsen att den i slingan Γ genererade elektromotoriska "kraften" ges som förändringen i tid av det av slingan inneslutna magnetiska flödet, med omvänt tecken, som

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_\mathrm{M}}{dt}.$$

Detta samband sammanfattar *Faradays induktionslag*[8], vilken vi erinrar oss här har härletts fram för en specifik geometri och med ett konstant magnetfält $\mathbf{B}_0$, i vilken det magnetiska flödet endast påverkas genom att den slutna slingan traverserar magnetfältet så att flödet successivt minskar.

Om vi hade haft det homogena magnetfältet täckande hela den rörliga slingans yta, så hade segmentet ③ gett ett till beloppet lika stort men motriktat bidrag som segmentet ① , och den elektromotoriska "netto-kraften" hade blivit noll.

[7] Vi skall här komma ihåg att integrationsriktningen som vi valt för den slutna linjeintegralen över slingan Γ dessutom bestämmer vilken riktning våra ytelement $d\mathbf{S}$ har, med den sedvanliga "högerhandsregeln". I detta fall har vi valt en integration som går *moturs* i slingans plan, så som vi ser den i figuren, och ytelementen har så en *normalriktning som pekar ut ur planet*, i negativ $\mathbf{e}_y$-riktning.

[8] Ibland kallas denna kort och gott för "Faradays lag" eller "magnetiska flödeslagen"; vi väljer här dock att behålla den formella beteckningen för att inte blanda ihop denna induktionslag med den lag på differentialform som vi inom kort kommer att härleda från denna.

Observation I kring Faradays induktionslag - Avsaknad av permittivitet och permebilitet

Notera att Faradays induktionslag enligt ovan "härleddes"[9] enbart under antagandet om Lorentz-kraften på laddade partiklar i rörelse. Vi har i härledningen inte använt vare sig Coulombs lag eller någon av de från den lagen härledda följdsatserna, och därmed kan vi konstatera att den elektriska permittiviteten ε_0 lyser med sin frånvaro. Vi har ej heller använt Biot–Savarts lag eller något av de från denna härledda teoremen längre ner i det "elektromagnetiska släktträdet", så även den magnetiska permeabiliteten μ_0 lyser med sin frånvaro. Det enda som vi i härledningen av Faradays lag har tagit som ett axiom är just Lorentz kraftlag, vilket ger oss vid hand att vi är något nytt på spåret.

Observation II kring Faradays induktionslag - Fysisk vs virtuell slinga

Utifrån diskussionen ovan kring alstrande av en elektromotorisk "kraft" och integralen av en normaliserad kraft $\mathbf{F}$ verkande på en laddning q, så har vi tyvärr letts in i tankarna att detta med Faradays induktionslag i grund och botten bara skulle handla om fysiska strömslingor och hur vi kan generera ström induktivt i klassiska generatorer och liknande. Här skall vi dock komma ihåg att den elektromotoriska "kraften" ju är definierad i termer av en sluten linjeintegral som arbetar med *fälten i sig* som integrand. I grund och botten är ju den elektromotoriska kraften ingenting annat än ett *rent matematiskt mått på rotationen av det elektriska fält som är inneslutet*, som vi strax skall se. Med andra ord finns det ingenting som hindrar oss att evaluera detta mått som en integral över en sluten *virtuell slinga* Γ som innesluter något tidsvarierande magnetiskt (eller för den delen elektriskt) fält.

Samtidigt är det magnetiska flödet Φ_{M} även det bara en matematisk konstruktion i form av en integral över en yta S innesluten av slingan Γ, virtuell eller fysisk, och även detta mått kan självfallet integreras över en yta som inte nödvändigtvis måste ringas in av just en *fysisk* strömslinga.

Med andra ord visar detta på att Faradays induktionslag handlar om något djupare än bara generatorer, med bäring på en tidsberoende *koppling mellan elektriska och magnetiska fält i sig.* På sätt och vis kan vi säga att det är *precis vid denna punkt i kursen som vi börjar formulera en sammanhållen teori för elektrodynamik och i förlängningen en modell för elektromagnetisk vågutbredning.*[10]

Observation III kring Faradays induktionslag - Negativt tecken och Lenz lag

I uttrycket för Faradays induktionslag ser vi även att tidsderivatan av det magnetiska flödet Φ_{M} förekommer med ett negativt tecken i högerledet. Detta negativa tecken är i grunden en signatur av att den genererade elektromotoriska "kraften", eller om vi så vill den i en fysisk slinga genererade strömmen, alltid kommer att genereras *så att den har en riktning som motverkar källan till induktionen.* Denna princip, som brukar betecknas med *Lenz lag*, bistår med ett synnerligen kraftfullt verktyg när det kommer till punkten att vi skall tolka ett resultat eller göra en *sanity check* på att ett resultat verkar rimligt.

Specifikt i och med härledningen av Faradays induktionslag enligt ovan, så har vi just råkat ta fram formen på Lenz lag för elektromotorisk "kraft" genererad i det klassiska problemet för en ledande stav som rör sig ortogonalt mot sin egen axel och ortogonalt mot ett omgivande konstant magnetfält, som[11]

$$\mathcal{E} = -v_0 B_0 L.$$

[9] I den mån vi överhuvud taget kan tala om en "härledning" med användande av ett specialfall!
[10] Vilket råkar vara just den första tentamensuppgiften, som under Föreläsning 1 lämnades ut på `https://github.com/hp35/elmagii/blob/main/lect-01/extras/examprob.pdf`
[11] Griffiths problem 7.7, sid. 310.

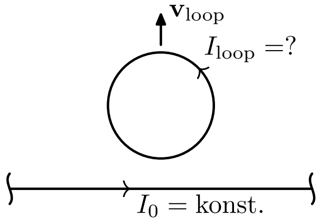
Lenz lag som rimlighetsbedömning av lösningar till induktionsproblem

Lenz lag säger att en inducerad ström har en riktning som motverkar orsaken till att den uppkom. Detta innebär att om magnetfältet genom en ledande slinga (det magnetiska flödet Φ_{M}) ökar, så kommer den i slingan inducerade strömmen att ha en riktning som skapar ett magnetfält som motverkar ökningen. Motsatt gäller att om det magnetiska flödet minskar, så kommer den inducerade strömmen att skapa ett magnetfält som motverkar minskningen.

Denna princip är oerhört kraftfull när det gäller att få en känsla för induktionsproblem i allmänhet, och kan med fördel användas som en rimlighetsbedömning av lösningar som tagits fram i induktionsproblem. Med detta sagt, låt oss applicera Lenz lag på ett antal tankeexperiment enligt följande.

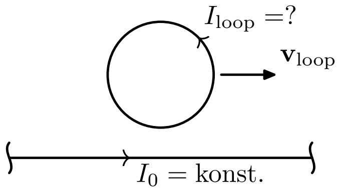
Tankeexperiment 1

Fråga: Vad är riktningen för inducerade strömmen I_{loop}?



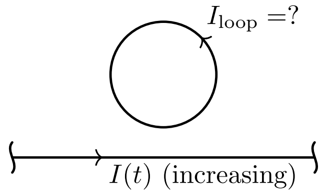
Tankeexperiment 2

Fråga: Vad är riktningen för inducerade strömmen I_{loop}?



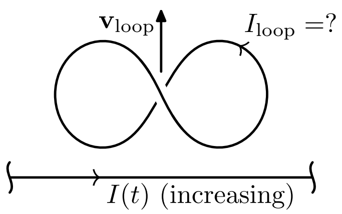
Tankeexperiment 3

Fråga: Vad är riktningen för inducerade strömmen I_{loop}?



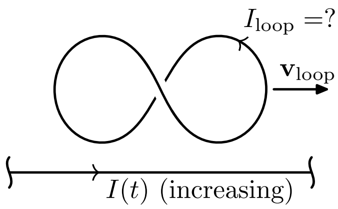
Tankeexperiment 4

Fråga: Vad är riktningen för inducerade strömmen I_{loop}?



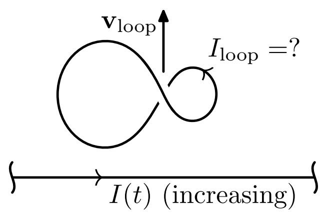
Tankeexperiment 5

Fråga: Vad är riktningen för inducerade strömmen I_{loop}?



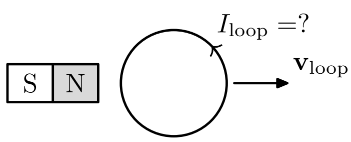
Tankeexperiment 6

Fråga: Vad är riktningen för inducerade strömmen I_{loop}?



Tankeexperiment 7

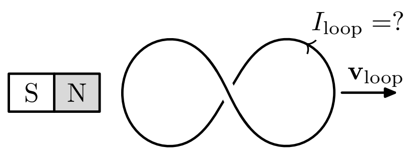
Fråga: Vad är riktningen för inducerade strömmen I_{loop}?



Vad händer om den stationära magneten befinner sig i samma plan som slingan?

Tankeexperiment 8

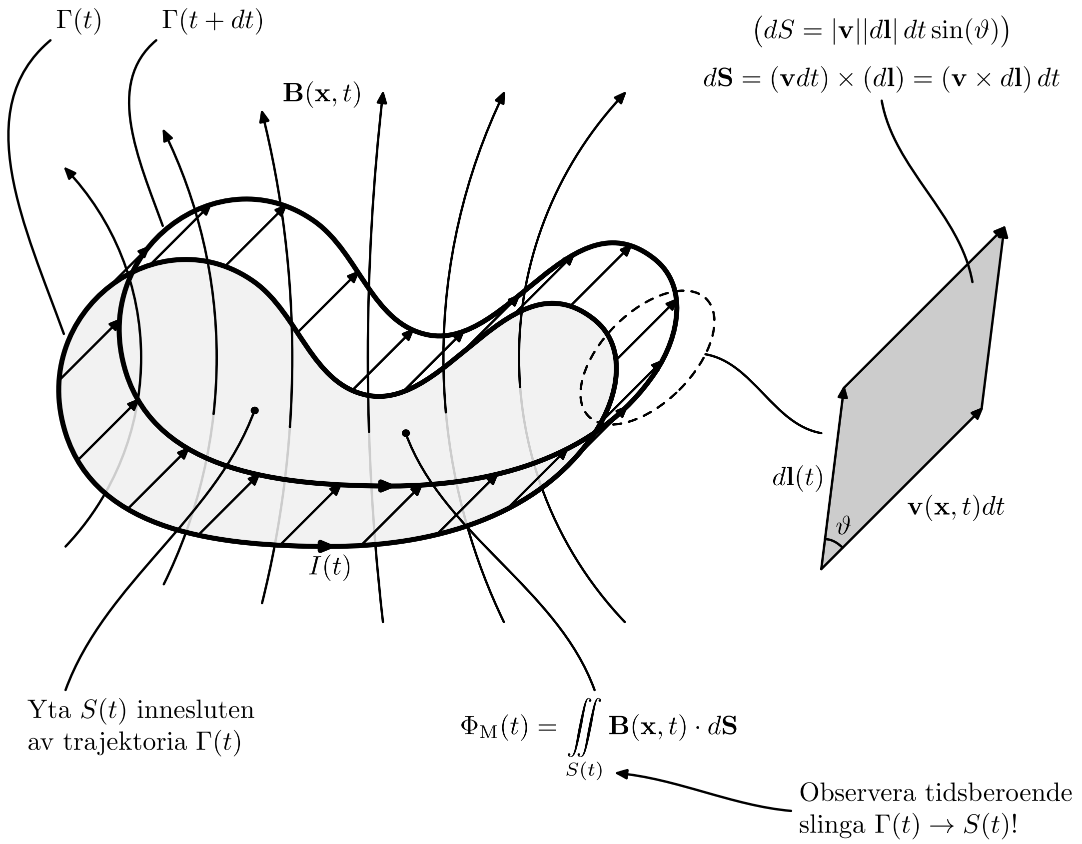
Fråga: Vad är riktningen för inducerade strömmen I_{loop}?



Vad händer om den stationära magneten befinner sig i samma plan som slingan?

Generell härledning av Faradays induktionslag

Utifrån en illustrativ men mycket förenklad geometri har vi så långt visat på en *sannolik* form av Faradays induktionslag, men det vore nästintill skamligt av oss att bara acceptera denna som ett faktum utan att gå in på hur vi generellt och formellt kan härleda den, om än att det nu blir en aning stökigt. Vi kommer nu att introducera en generell trajektoria $\Gamma(t)$, längs med vilken varje linjeelement tillåts ha en godtycklig hastighet $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ som har ett godtyckligt beroende i tid och rum. Denna generalitet gör att även den omslutna arean och riktningen av ytnormalen tillåts att variera fritt. Vi tillåter vidare att det av trajektorian inneslutna magnetfältet $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ tillåts att variera fritt i tid och rum.[12]



Låt oss nu se vad förändringen $d\Phi_{\mathrm{M}}$ i magnetiskt flöde från tiden t till $t + dt$ kan tänkas vara för en så generell konstruktion. Då trajektorian $\Gamma(t)$ rör sig, från tiden t till tiden $t + dt$ "strax därefter", kommer förändringen i magnetiskt flöde att ges som alla delbidrag i den "remsa" som i rummet beskrivs av zonen mellan $\Gamma(t)$ och $\Gamma(t + dt)$,

$$d\Phi_{\mathrm{M}} = \Phi_{\mathrm{M}}(t + dt) - \Phi_{\mathrm{M}}(t) = \iint_{\text{remsa}} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{S},$$

där areaelementen $d\mathbf{S}$ längs med remsan ges som vektorprodukten mellan den sträcka som elementet vid punkten $\mathbf{x}$ på trajektorian tillryggalägger under tiden dt samt linjeelementet $d\mathbf{l}$ längs med trajektorian vid tiden t,

$$d\mathbf{S} = (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)dt) \times (d\mathbf{l}) = (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \times d\mathbf{l})\,dt$$

[12] Leibniz integralregel nämns tyvärr inte i Griffiths, oturligt nog eftersom det är ett statement som i mångt och mycket skulle göra att vi bara skulle kunna referera till resultatet här. `https://en.wikipedia.org/wiki/Leibniz_integral_rule`

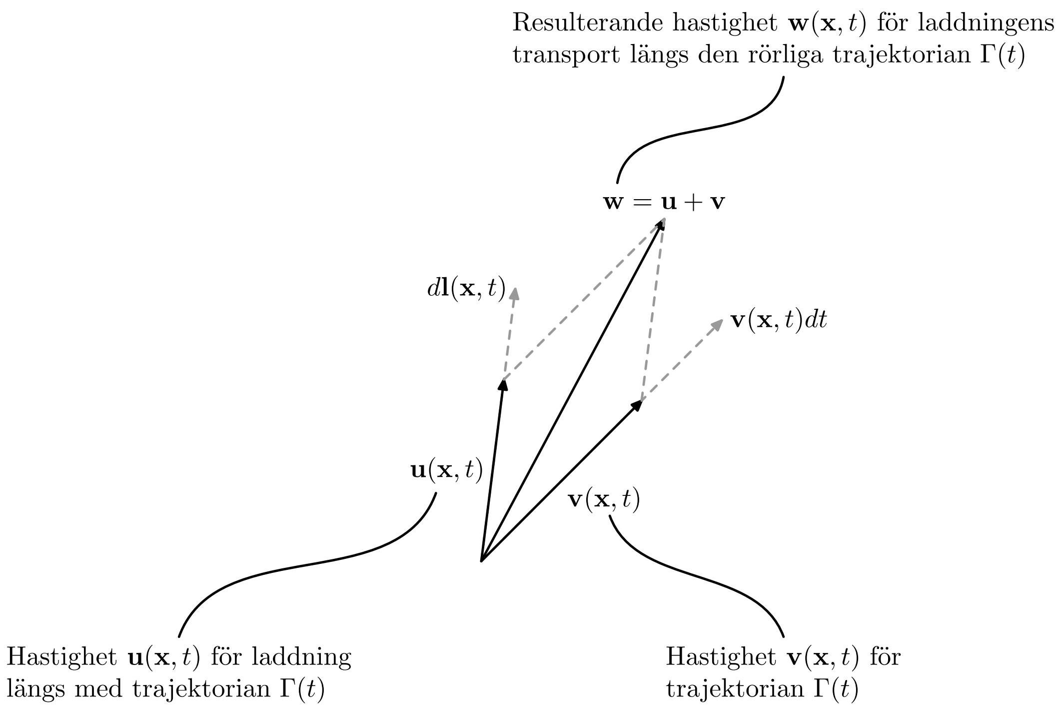
Utifrån detta, med areaelementen uttryckta som en produkt mellan linjeelement $d\mathbf{l}$ och infinitesimala tidssteg dt, ser vi direkt att vi kan ersätta areaintegralen över vår remsa med en linjeintegral, som

$$\begin{aligned} d\Phi_{\mathrm{M}} &= \iint\limits_{\text{remsa}} \mathbf{B}(\mathbf{x},t)\cdot d\mathbf{S} \\ &= \oint_{\Gamma(t)} \mathbf{B}(\mathbf{x},t)\cdot \underbrace{(\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\times d\mathbf{l})\,dt}_{d\mathbf{S}\text{ längs }\Gamma(t)} \\ &= dt \oint_{\Gamma(t)} \mathbf{B}(\mathbf{x},t)\cdot(\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\times d\mathbf{l}). \end{aligned}$$

Med andra ord kan vi formulera förändringen av det magnetiska flödet genom trajektorian $\Gamma(t)$ som den så gott som förväntade tidsderivatan

$$\frac{d\Phi_{\mathrm{M}}}{dt} = \oint_{\Gamma(t)} \mathbf{B}(\mathbf{x},t)\cdot(\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\times d\mathbf{l}).$$

Låt oss med denna deriviata formulerad gå vidare med att analysera i mer detalj hur en laddning som färdas längs den i sig *rörliga trajektorian* $\Gamma(t)$ kommer att förflyttas.



Om vi tänker oss att en laddning har hastigheten $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ längs med trajektorian $\Gamma(t)$, så är självfallet denna hastighet parallell med linjeelementet $d\mathbf{l}$ i samma punkt. Trajektorian $\Gamma(t)$ har vid samma tidpunkt en och punkt i rummet hastigheten $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$, så den tänkta laddningens resulterande hastighet $\mathbf{w}(\mathbf{x},t)$ ges som summan av dessa två komposanter som

$$\mathbf{w}(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}(\mathbf{x},t) + \mathbf{v}(\mathbf{x},t). \qquad \text{(Laddningens hastighet)}$$

Notera att eftersom $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ är parallell med linjeelementet $d\mathbf{l}$, så kommer samma linjeelements kryssprodukt med $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ att ge en produkt som är ortogonal mot just $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$; med andra ord så kan vi precis lika gärna ersätta hastigheten i kryssprodukten med den totala resulterande hastigheten $\mathbf{w}(\mathbf{x},t)$ för en hypotetisk laddnings rörelse, då

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi_{\mathrm{M}}}{dt} &= \oint_{\Gamma(t)} \mathbf{B}(\mathbf{x},t)\cdot\underbrace{\big((\underbrace{\mathbf{u}(\mathbf{x},t)}_{\parallel d\mathbf{l}\to 0}+\mathbf{v}(\mathbf{x},t))\times d\mathbf{l}\big)}_{\mathbf{w}\times d\mathbf{l}=\mathbf{v}\times d\mathbf{l}}\\
&= \oint_{\Gamma(t)} \mathbf{B}(\mathbf{x},t)\cdot\big(\mathbf{w}(\mathbf{x},t)\times d\mathbf{l}\big)\\
&= \big\{\ \text{Griffiths } \textit{Triple Product (1)}\ \big\}\\
&= \big\{\ \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=-(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{c}\ \big\}\\
&= -\oint_{\Gamma(t)} \underbrace{\big(\mathbf{w}(\mathbf{x},t)\times\mathbf{B}(\mathbf{x},t)\big)}_{\equiv\mathbf{F}_{\mathrm{M}}/q}\cdot d\mathbf{l}.
\end{aligned}$$

Vi ser nu poängen med att ersätta den hypotetiska laddningens hastighet $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ längs trajektorian med den totala hastigheten $\mathbf{w}(\mathbf{x},t)$ i och med att kryssprodukten med det magnetiska fältet exakt är det magnetiska bidraget till Lorentz-kraften,

$$\mathbf{F}_{\mathrm{M}} = q\big(\mathbf{w}(\mathbf{x},t)\times\mathbf{B}(\mathbf{x},t)\big),$$

vilket i sin tur gör att vi direkt kan tolka den sista integralen som den elektromotoriska "kraft" som alstras runt trajektorian $\Gamma(t)$,

$$\frac{d\Phi_{\mathrm{M}}}{dt} = -\oint_{\Gamma(t)}\left(\frac{\mathbf{F}_{\mathrm{M}}}{q}\right)\cdot d\mathbf{l} = -\mathcal{E}$$

Låt oss sammanfatta detta generella resultat med att vi till slut på ett strikt sätt härlett Faradays induktionslag för en godtycklig geometri som

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_{\mathrm{M}}}{dt}.$$

Vi erinrar oss återigen att denna härletts *endast utifrån Lorentz-kraften agerande på en hypotetisk laddning*, och att denna lag därmed dels är i avsaknad av den elektriska permittiviteten ε_0, såväl som den magnetiska permeabiliteten μ_0.

Vi tar också tillfället i akt att erinra oss att även om vi här för enkelhets skull diskuterat Lorentzkraften så som den skulle agerat på en fysisk laddning q i rörelse, så är resultatet i form av Faradays lag en *relation mellan fält*, specifikt visande att i närvaro av tidsberoende magnetiska fält så är rotationen för det elektriska fältet inte längre noll. Detta *dynamiska resultat* står i kontrast till det statiska fallet vilket vi analyserade i Föreläsning 2, där vi konstaterade att $\nabla\times\mathbf{E}=\mathbf{0}$ alltid gäller för *statiska* fält.

Faradays induktionslag för stationära slingor

I fall då en strömslinga Γ är *stationär i rummet och har en form som inte beror av tiden*, så kan vi direkt uttrycka den genererade elektromotoriska "kraften" utifrån definitionen av det magnetiska flödet som[13]

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{B}(\mathbf{x},t)\cdot d\mathbf{S} = -\iint_S \frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{x},t)}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}$$

[13] Vi betecknar här generellt en *yttre* verkande tidsderivata som d/dt, för på så sätt inkludera möjligheten att även själva *integrationsdomänen är tidsberoende*. När det är uppenbart att det endast är magnetfältet i sig som tidsderiveras kan vi istället med fördel använda partialderivatan $\partial/\partial t$.

Som exempel på applikationer av Faradays induktionslag för stationära slingor kan nämnas *statorn*, som är den stationära, icke rörliga komponenten i en generator, som typiskt innehåller spolar av koppartråd (lindningar) som omvandlar det varierande magnetfältet från magneter på en *rotor* till elektrisk spänning via den inducerade elektromotoriska "kraften". Ett annat exempel är pickupen på en elgitarr eller elbas, där stationära magneter omgivna av en spole via den vibrerande metalliska strängen skapar ett varierande magnetiskt fält, och på liknande sätt inducerar en signal i form av en spänning.

Spolar och utväxling på det magnetiska flödet

För en spole med N varv, som vart och ett kan anses som identiskt i sitt täckning av det magnetiska fältet och därmed vart och ett upplever ett identiskt magnetiskt flöde Φ_{M} så blir den resulterande inducerade elektromotoriska kraften utväxlad i samma grad, som

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_{\mathrm{M}}}{dt}.$$

För ett tillräckligt högt antal varv N kan mycket små fluktuationer i det magnetiska fältet detekteras, speciellt om vi förstärker B-fältet genom att introducera en ferrit (järnkärna) inuti spolen. Detta är exempelvis principen som typiskt används för att passivt generera signalen från en elgitarrs eller elbas pickup. Som exempel kan nämnas att en klassisk PAF-style humbucker på en Gibson Les Paul typiskt har cirka $N = 5\,000$ varv per spole.

Faradays lag på differentialform

Utifrån den generella definitionen av den elektromotoriska "kraften" kan vi applicera Stokes teorem[14] på den ingående linjeintegralen, som

$$\mathcal{E} \equiv \oint_{\Gamma} \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{l} = \underline{\underline{\iint_S (\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t))\cdot d\mathbf{S}}} = -\frac{d\Phi_{\mathrm{M}}(\mathbf{x},t)}{dt} = \underline{\underline{-\iint_S \frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{x},t)}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}}}.$$

Eftersom ytintegralen sker över en yta innesluten av en godtycklig trajektoria Γ, så innebär det att vi för integranderna erhåller det vektoriella sambandet[15]

$$\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{x},t)}{\partial t},$$

vilket vi betecknar som *Faradays lag på differentialform.* Notera att liksom för Faradays induktionslag, så är denna ekvation helt oberoende av den elektriska permittiviteten ε_0 eller magnetiska permeabiliteten μ_0, vilket vi rekapitulerar är en effekt av att denna lag härletts oberoende av Coulombs eller Biot–Savarts lagar eller någon av deras derivat längre ner i det elektromagnetiska släktträdet.

[14] Se exempelvis innerpärmen på Griffiths, *Curl Theorem*,

$$\iint_S \nabla\times\mathbf{A}\,d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}.$$

[15] Även här använder vi partialderivatan $\partial/\partial t$ för att explicit visa att vi håller oss till en beskrivning av en motsvarande stationär slinga Γ i rummet.

Faradays lag på integralform

Vi har i princip redan fastställt Faradays lag på integralform i och med att vi tog fram att integranderna i ytintegralerna måste vara identiska för en generell trajektoria Γ, men låt oss ändå för sakens skull ta fram integralformen av Faradays lag från differentialformen. Om vi integrerar differentialformen av Faradays lag över en yta S innesluten av en sluten trajektoria Γ och direkt tillämpar Stokes teorem, så har vi att

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t)) \cdot d\mathbf{S} = \underline{\underline{\oint_\Gamma \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \cdot d\mathbf{l}}} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x},t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \underline{\underline{-\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B}(\mathbf{x},t) \cdot d\mathbf{S}}},$$

vilket vi kan sammanfatta med *Faradays lag på integralform* som

$$\underbrace{\oint_\Gamma \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \cdot d\mathbf{l}}_{=\mathcal{E}} = \underbrace{-\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B}(\mathbf{x},t) \cdot d\mathbf{S}}_{=-\frac{d\Phi_{\mathrm{M}}}{dt}}.$$

Vi kan i integralformen av Faradays lag direkt identifiera vänsterledet som den elektromotoriska "kraft" $\mathcal{E}$ som alstras i en stationär slinga, och högerledet som den negativa tidsderivatan av det magnetiska flödet, $-d\Phi_{\mathrm{M}}/dt$; med andra ord är denna form i grunden bara *en manifestering av Faradays induktionslag.*

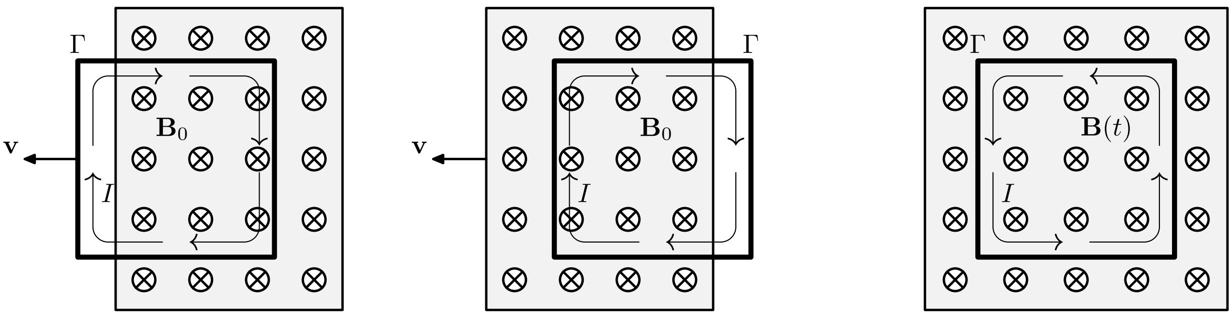
Tre principiella specialfall för induktion

I Faradays ursprungliga experiment 1831, som vi kan se som tidpunkten där elektromagnetism och induktion för första gången demonstrerades, så presenterades i huvudsak tre fundamentala fall.[16,17]

Fall 1: Rörlig slinga Γ rör sig i ett stationärt inhomogent magnetfält $\mathbf{B}_0$

Fall 2: Stationär slinga Γ i ett rörligt inhomogent magnetfält $\mathbf{B}_0$

Fall 3: Stationär slinga Γ i ett tidsvarierande magnetfält $\mathbf{B}(t)$



Vi kan principiellt särskilja tre grundläggande fall för elektromagnetisk induktion med Faradays lag:

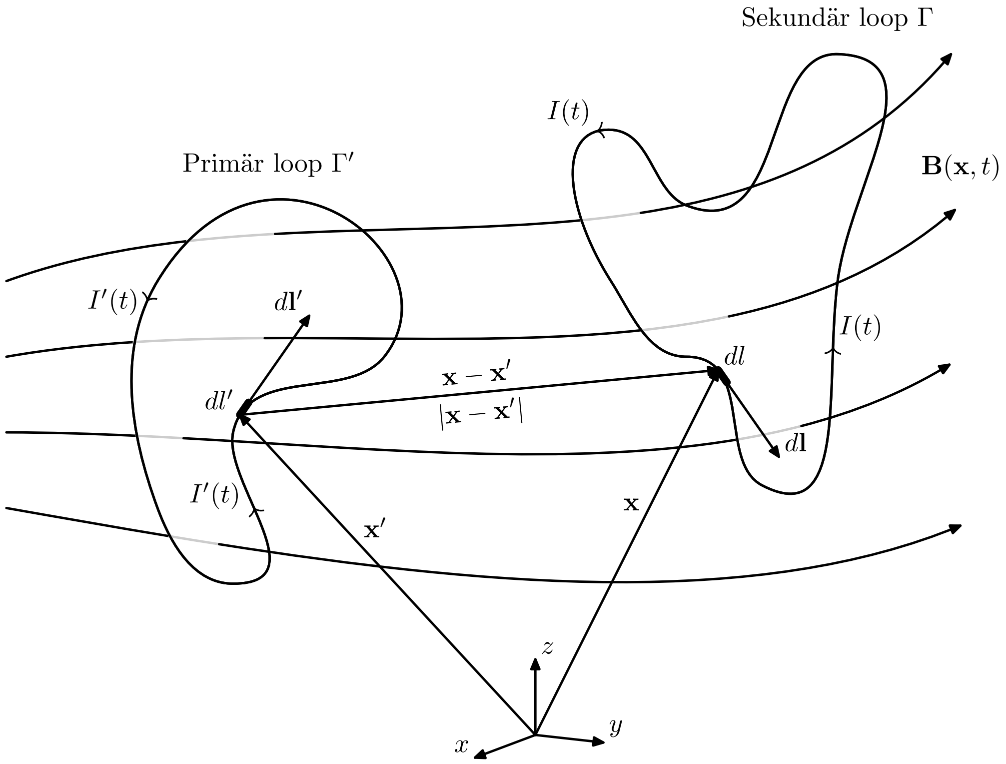
1. En rörlig slinga Γ som traverserar ett inhomogent men i övrigt konstant magnetfält $\mathbf{B}_0$, där det magnetiska flödet Φ_{M} genom slingan förändras genom slingans rörelse.
2. En slinga Γ som är fix i rummet, där ett inhomogent men i övrigt konstant magnetfält $\mathbf{B}_0$ rör sig över slingan, där det magnetiska flödet Φ_{M} förändras genom att magnetfältet varierar genom magnetfältets rörelse.
3. En slinga Γ som är fix i rummet med ett tidsvarierande (dynamiskt) magnetfält $\mathbf{B}(t)$, där det magnetiska flödet Φ_{M} förändras genom magnetfältets variation i tiden.

[16] Faradays tre experiment, se Griffiths sektion 7.2, sid. 312.

[17] Fråga till läsaren: Om man tillämpar Lenz lag på dessa tre fall, så som de här är illustrerade, stämmer riktningarna på de utritade strömmarna?

Ömsesidig induktans

Vi har under Föreläsning 4 visat hur Biot–Savarts lag beskriver hur magnetfält kan alstras genom ström som traverserar en slinga, säg Γ', och vi har nu även visat hur Faradays lag kopplar ett tidsvarierande magnetiskt fält som genom induktion kan generera ström i en annan slinga, säg Γ. Uppenbarligen kan vi med andra ord genom att skicka ström genom en primär slinga Γ' inducera en ström i en sekundär slinga Γ utan att dessa slingor har fysisk kontakt med varandra, och beroende på riktning och avstånd för magnetfältet som alstras från den primära slingan Γ' kommer vi att ha en mer eller mindre effektiv överföring av effekt över till den sekundära slingan Γ.



Frågan blir då:[18]

> *Kan vi på något sätt sy ihop dessa teorier för att extrahera hur stark den induktiva ömsesidiga kopplingen, eller den så kallade ömsesidiga induktansen, mellan slingorna är?*

Låt oss först konstatera att det magnetiska fältet som genereras från den primära slingan[19] Γ' beskrivs av Biot–Savarts lag, som för detta fall och för alla observationspunkter $\mathbf{x}$ formuleras som linjeintegralen[20] över den primära loopen Γ',

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\Gamma'} \frac{\mathbf{I}'(\mathbf{x}',t)\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\,dl' = \frac{\mu_0 I'(t)}{4\pi}\int_{\Gamma'} \frac{d\mathbf{l}'\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}.$$

Eftersom detta direkt bistår oss med det magnetiska fältet $\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$ som i så fall täcks av den sekundära loopen, som vi i detta fall räknar som uppbyggd av *observationspunkter*, och eftersom vi vet att ett varierande fält genom sekundärloopen kommer att ge upphov till en elektromotorisk “kraft” över denna, låt oss därför formulera det magnetiska flödet Φ_{M} genom just

[18] Vi följer här i huvudsak Griffiths sid. 321–323.

[19] Eftersom vi i detta problem kan betrakta den primära slingan som en *källa*, så kommer vi genomgående att primma relevanta storheter från denna, följande den konvention vi håller oss till i denna kurs.

[20] Se Föreläsning 4 eller Griffiths Ekv. (5.34), sid. 224.

sekundärloopen som ytintegralen av det magnetiska fältet (den magnetiska flödestätheten!) över den av sekundärloopen inneslutna ytan,

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\mathrm{M}} &= \iint_S \mathbf{B}(\mathbf{x},t)\cdot d\mathbf{S} \qquad \text{(Genom sekundärloopen } \Gamma\text{)}\\
&= \iint_S \underbrace{\left(\frac{\mu_0 I'(t)}{4\pi}\int_{\Gamma'}\frac{d\mathbf{l}'\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\right)}_{=\mathbf{B}(\mathbf{x},t)}\cdot d\mathbf{S}\\
&= I'(t)\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\iint_S\left(\int_{\Gamma'}\frac{d\mathbf{l}'\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\right)\cdot d\mathbf{S}\right]\\
&= M_{\Gamma\Gamma'}I'(t),
\end{aligned}
$$

där vi definierade den *ömsesidiga induktansen* (*mutual inductance*) mellan slingorna Γ och Γ' som

$$
M_{\Gamma\Gamma'} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_S\left(\int_{\Gamma'}\frac{d\mathbf{l}'\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\right)\cdot d\mathbf{S}.
$$

Vi kan här i princip nöja oss med detta resultat, då vi fått fram ett paketerat uttryck som relaterar strömmen $I'(t)$ i primärslingan Γ' till det magnetiska flödet Φ_{M} i sekundärslingan Γ, från vilket vi direkt kan erhålla den resulterande elektromotoriska "kraften". Det finns dock ett par moment vi kan gå igenom för att föra över den ömsesidiga induktansen på en form som vi enklare kan extrahera fysikaliska samband från.

Neumanns formel för den ömsesidiga induktansen

Till att börja med backar vi bandet ett steg, och konstaterar att om vi formulerar den magnetiska flödet Φ_{M} genom sekundärslingan i termer av *vektorpotentialen* som

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\mathrm{M}} &= \iint_S \mathbf{B}(\mathbf{x},t)\cdot d\mathbf{S} \qquad \text{(Genom sekundärloopen } \Gamma\text{)}\\
&= \{\ \text{Vektorpotential } \mathbf{B}\equiv\nabla\times\mathbf{A}\ \}\\
&= \iint_S (\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{x},t))\cdot d\mathbf{S}\\
&= \{\ \text{Stokes teorem (Griffiths } \textit{Curl Theorem}\text{)}\ \}\\
&= \oint_\Gamma \mathbf{A}(\mathbf{x},t)\cdot d\mathbf{l}.
\end{aligned}
$$

Notera nu att vektorpotentialen $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ som ingår i integranden härrör från primärslingan Γ', även om linjeintegralen i sig sker över sekundärslingan Γ. Vi kan nu utnyttja att den explicita lösningen[21] för vektorpotentialen från primärslingan lyder

$$
\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\Gamma'}\frac{\mathbf{I}(\mathbf{x}',t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,dl',
$$

[21] Vi erinrar oss att vektorpotentialen $\mathbf{A}$ lyder Poissons ekvation (se omslaget på Griffiths!) och i och med detta har en lösning som är på exakt samma form som lösningen för den skalära potentialen ϕ från Coulombs generella ekvation; se Föreläsning 4, alternativt Griffiths Ekv. (5.66), sid. 245.

så det magnetiska flödet genom sekundärslingan beskrivs av

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathrm{M}} &= \oint_{\Gamma} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{\mathbf{I}(\mathbf{x}',t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\, dl' \right) \cdot d\mathbf{l}. \\
&= \Big\{ \text{ I linjeintegralen för primärslingan är } \mathbf{I}'(\mathbf{x})\, dl' = I'(t)\, d\mathbf{l}' \Big\} \\
&= \oint_{\Gamma} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} I'(t) \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right) \cdot d\mathbf{l}. \\
&= \Big\{ \text{ Strömmen } I'(t) \text{ samma över hela primärslingan } \Gamma' \Big\} \\
&= I'(t) \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma'} \frac{d\mathbf{l}' \cdot d\mathbf{l}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \\
&= M_{\Gamma\Gamma'} I'(t),
\end{aligned}$$

där vi nu har formulerat den ömsesifiga induktansen i form av *Neumanns formel*[22]

$$M_{\Gamma\Gamma'} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma'} \frac{d\mathbf{l}' \cdot d\mathbf{l}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}.$$

Ett par observationer kring Neumanns formel

Utifrån den just härledda formen på Neumanns formel kan vi observera följande:

1. Neumanns formel för den ömsesidiga induktansen mellan två slingor Γ' och Γ är en *rent geometrisk konstruktion*, skalad med den magnetiska permeabiliteten $\mu_0/4\pi$.
2. I den ömsesidiga induktansen kan vi fritt byta beteckning mellan primär- och sekundärslinga, med följd att $M_{\Gamma\Gamma'} \equiv M_{\Gamma'\Gamma}$ då det enda som påverkas i Neumanns formel är integrationsordningen,
$$M_{\Gamma\Gamma'} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma'} \frac{d\mathbf{l}' \cdot d\mathbf{l}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \oint_{\Gamma} \frac{d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}'}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|} \equiv M_{\Gamma'\Gamma}.$$
Detta säger oss att det magnetiska flöde Φ_{M} som vi erhåller i sekundärslingan Γ då vi driver primärslingan med en ström $I'(t)$ är *exakt lika stort* som det magnetiska flöde Φ'_{M} som vi skulle detektera i primärslingan Γ' om vi istället drev sekundärslingan Γ med samma ström $I'(t)$. Detta gäller oavsett form eller inbördes riktning hos slingorna Γ' och Γ.
3. På ett djupare plan visar denna ömsesidighet mellan slingorna Γ' och Γ på *elektromagnetisk reciprocitet*'.[23]

[22] Efter Franz Ernst Neumann (1798–1895), tysk fysiker som inom elektromagnetism främst är känd för att ha formulerat vektorpotentialen $\mathbf{A}$; icke att förväxla med Alfred E. Neuman, som stavar sitt namn med bara ett "n". `https://en.wikipedia.org/wiki/Alfred_E._Neuman`

[23] Tyvärr går inte Griffiths igenom denna synnerligen intressanta aspekt av elektromagnetism; för en djupare behandling av detta ämne, se exempelvis J. D. Jacksons standardverk *Classical Electrodynamics*.

Kontinuitetsekvationen - Teaser inför Maxwell's ekvationer

Vi har nu formellt härlett Faradays lag, och vi kan nu fråga oss vad som egentligen kvarstår innan vi har en komplett elektrodynamisk beskrivning av de elektriska och magnetiska fälten. Sanningen är att det fortfarande finns en hel del att göra vad gäller växelverkan mellan fält och materia (de så kallade *konstitutiva relationerna*) som vi ännu inte ens nosat på då vi helt arbetat i vakuumdomänen.[24] Vi har i Föreläsning 4 tagit fram Ampères lag inom magnetostatiken,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \qquad \text{(Statiskt!)}$$

Vi har samtidigt i Föreläsning 4 härlett "lagen om att laddning inte kan försvinna", som uttrycker sambandet mellan divergensen för strömtäthet $\mathbf{J}$ och tidsderivatan av laddningstätheten ρ som[25]

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Om vi substituerar för strömtätheten i denna lag från Ampères statiska lag, så har vi med andra ord att

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \big\{ \text{ Griffiths vektoridentitet } \big\} \equiv 0,$$

detta trots att vi för att uppfylla den fundamentala lagen om laddningens bevarande borde ha haft ett "$-\partial\rho/\partial t$" i högerledet istället för en nolla.

Tricket som James Clerk Maxwell kom på i lösandet av detta problem var helt enkelt att lägga till en term $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t$ till den fria strömtätheten, en så kallad *förskjutningsström*, så att vi helt enkelt ersätter den statiska fria strömmen $\mathbf{J}$ i Ampères lag med

$$\mathbf{J} \quad \rightarrow \quad \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

det vill säga med Ampères lag på formen

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \qquad \text{(Dynamiskt!)}$$

med följd att

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{J} &= \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B})}_{\equiv 0} - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{E}}_{=\rho/\varepsilon_0} \\ &= -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \end{aligned}$$

det vill säga att vi med den extra termen för förskjutningsströmmen närvarande direkt löser problemet med kontinuitetsekvationen för dynamiska fält. Det finns en liten korrektion som fortfarande behöver göras i tolkningen av förskjutningsströmmen, som vi kommer att återkomma till i Föreläsning 9 då vi till slut kommer att sätta samman alla pusselbitar och till slut formulera den slutliga formen av Maxwells ekvationer och utifrån dem hur elektromagnetiska vågor beskrivs på differentialform.[26]

---

[24] Förvisso kan vi fråga oss om vakuum i närvaro av strömmar av elektroner eller andra laddade partiklar verkligen är att betrakta som just *vakuum* i ordets egentliga bemärkelse; här ser vi dock dessa tätheter av laddade partiklar som så pass låg att vi fortfarande helt kan försumma dem i jämförelse med när vi inom kort kommer att gå in på hur ett medium polariseras i av elektriska och magnetiska fält.

[25] *Continuity Equation*; se Griffiths Ekv. (5.29), sid. 222 samt Griffiths Ekv. (8.4), sid. 356.

[26] Vilket för övrigt råkar vara just den *Tentamensuppgift 1* som delades ut under Föreläsning 1!

Sammanfattning av Föreläsning 5 – Elektromagnetisk induktion

- Faradays lag kan inte härledas från Coulombs eller Biot–Savarts lag, och innehåller som en följd av detta ej heller de karakteristiska spåren från dem i form av den elektriska permittiviteten ε_0 eller den magnetiska permeabiliteten μ_0.
- Magnetiskt flöde definieras som
$$\Phi_{\mathrm{M}} = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$
- Den elektromotoriska "kraften" (en mycket missvisande term) runt en sluten slinga Γ definieras som
$$\mathcal{E} = \oint_\Gamma \left(\frac{\mathbf{F}}{q}\right) \cdot d\mathbf{l} = \oint_\Gamma [\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \cdot d\mathbf{l},$$
- Faradays induktionslag ("*the flux law*") relaterar den genererade elektromotoriska "kraften" i en slinga Γ till en förändring av det magnetiska flödet med omvänt tecken som
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_{\mathrm{M}}}{dt}.$$
Faradays induktionslag härleds endast utifrån Lorentz-kraften (agerande på en hypotetisk laddning), och är därmed i avsaknad av såväl den elektriska permittiviteten ε_0 som den magnetiska permeabiliteten μ_0 då varken Coulombs eller Biot–Savarts lag använts.
- Lenz lag säger att *en inducerad ström har en riktning som motverkar orsaken till att den uppkom.* Detta innebär att om magnetfältet genom en ledande slinga *ökar*, så kommer den i slingan inducerade strömmen att ha en riktning som skapar ett magnetfält som *motverkar* ökningen.
- För en spole med N varv (N slingor) blir den resulterande elektromotoriska "kraften" utväxlad i motsvarande grad som
$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_{\mathrm{M}}}{dt}.$$
- Faradays lag på differentialform och integralform lyder
$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \qquad \Leftrightarrow \qquad \oint_\Gamma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{S}.$$
- Ömsesidig induktans beskrivs av det magnetiska flöde Φ_{M} som genereras i en sekundärslinga Γ från en ström $I'(t)$ som drivs genom en primärslinga Γ', som
$$\Phi_{\mathrm{M}} = M_{\Gamma\Gamma'} I'(t),$$
där den *ömsesidiga induktansen* enligt Neumanns formel ges som
$$M_{\Gamma\Gamma'} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_\Gamma \oint_{\Gamma'} \frac{d\mathbf{l}' \cdot d\mathbf{l}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|},$$
vilket är en rent geometrisk konstruktion, skalad med den magnetiska permeabiliteten $\mu_0/4\pi$.
- I den ömsesidiga induktansen kan vi godtyckligt välja vad vi väljer att beteckna som primär- eller sekundärslinga, då
$$M_{\Gamma\Gamma'} = M_{\Gamma'\Gamma},$$
vilket i sin tur säger oss att det magnetiska flöde Φ_{M} som vi erhåller i sekundärslingan Γ då vi driver primärslingan med en ström $I'(t)$ är exakt lika stort som det maknetiska flöde Φ'_{M} som vi skulle detektera i primärslingan Γ' om vi istället drev sekundärslingan Γ med samma ström $I'(t)$.