UPPSALA
UNIVERSITET

*Elektromagnetism II, 1TE626 (2025)*
*Lecture Notes, Fredrik Jonsson*
*Document Revision 3 November 2025*
*https://github.com/hp35/elmagii/*

# Föreläsning 3

## Entydighet för lösningar till potentialproblem, randvillkor och spegelladdningar

Fredrik Jonsson, Uppsala Universitet, 10 november 2025

### Laplaces ekvation för den elektrostatiska potentialen

Det kan tyckas aningen överdrivet att ge sig in på mer matematiskt betingade spörsmål kring huruvida lösningar till problem inom elektrostatiken är unika eller ej. Trots allt, så är vi ju inte speciellt oroliga för att vi i det "verkliga livet" som ingenjörer skall kunna råka ut för två olika fält som uppfyller samma ekvation och randvillkor, right?

Frågan är dock befogad rent generellt, och närhelst ickelinjära fenomen inkluderas, så finns det gott om bistabila lösningar med olika fältfördelningar som kan uppfylla samma ekvationer och randvillkor. Inom ramen för elektrostatiken i denna föreläsningsserie behandlar vi dock uteslutande linjära problem i det elektriska fältet, men som vi skall se finns det icke desto mindre mycket att hämta i praktiskt problemlösande med bas i entydighet för lösningar till den elektrostatiska potentialen.

Vi kan börja med att konstatera att vi i elektrostatiska problem alltsom oftast söker en lösning till det elektriska fältet, vilket vi från den första föreläsningen vet kan beräknas genom Coulombs generaliserade lag,[1]

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint\limits_V \rho(\mathbf{x}') \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\, dV'.$$

Oturligt nog för oss är denna explicita form inte särskilt väl lämpad vare sig för beräkning med papper och penna eller med numeriska metoder. En del av detta problem ligger i redundansen hos det elektriska fältet[2], och vi kan därför redan i detta första stadie konstatera att det nog är lämpligare att istället "gå till pudelns kärna" och istället söka beräkna den skalära potentialen.

Under förra föreläsningen fann vi att det elektriska fältet kunde tolkas som en (negativ) gradient $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, där $\phi$ lägligt nog är explicit definierad som integralen

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint\limits_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\, dV'.$$

Återigen, tyvärr, är denna explicita form inte så väldigt mycket bättre i analytiskt hänseende annat än för att beräkna potentialen i mycket enkla geometrier. Vidare, så är integralformerna ovan primärt lämpade för att beräkna resulterande fält och potentialer från fixa, givna laddningsfördelningar. I en verklig situation kommer laddningsfördelningen att geometriskt flytta sig i rummet så snart som vi har närvaro av ledare med fria elektroner. Med andra ord så behöver vi gå ytterligare ett snäpp innan vi har något som handfast kan utnyttjas i fall då laddningarna har frihet att röra på sig.

[1] Vi följer här Griffiths sid. 113–124.

[2] Vi visade förra föreläsningen på kopplingen mellan komponenterna hos det elektriska fältet via $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$, resulterande i att $\partial E_x/\partial y = \partial E_y/\partial x$, etc.

Som en intressant slutkläm på förra föreläsningen konstaterade vi att Gauss lag på differentialform, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$, trivialt kunde omformuleras till Poissons ekvation för den skalära potentialen genom identiteten $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, som

$$\nabla^2\phi(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x})/\varepsilon_0.$$

Evaluerad med randvillkor är partiella differentialekvation för $\phi$ ekvivalent med integralekvationen ovan. Dessutom är Poissons ekvation för $\phi$ synnerligen väl lämpad för beräkning i domäner där vi inte befinner oss i någon laddningstäthet, eftersom vi då har att $\nabla^2\phi(\mathbf{x}) = 0$ med lösningar bestämda av randvillkor, dessutom – som vi strax skall visa – lösningar som är*entydigt* bestämda. Att laddningstätheten i området vi tittar på är fritt från laddningar betyder inte på något vis att inga laddningar finns med i problemet, bara att de inte finns närvarande precis i observationspunkten $\mathbf{x}$. I dessa fall reduceras därmed problemet med fältbeskrivningen, eller om man så vill *potentialbeskrivningen*, till *Laplaces ekvation* för $\phi$,[3]

$$\nabla^2\phi(\mathbf{x}) = 0.$$

Griffiths går så långt att beskriva Laplaces ekvation som så fundamental att läran om elektrostatik praktiskt taget *är* studiet av just Laplaces ekvation, som utöver tillämpningen i elektrostatik är av samma form inom magnetism och gravitation.

**Entydighet hos lösningar till Laplace ekvation**

Vi har reducerat problemet till Laplaces ekvation, men enbart denna kompakta ekvation kommer inte att bistå med lösningen till potentialen. Det som ytterligare behövs är lämpliga (fysikaliska) randvillkor till den domän där vi önskar lösa ekvationen.[4]

*Laplaces ekvation tillåter bara extrempunkter på randen till en domän*

Vår plan är att skapa en differens mellan två antaget oberoende separata lösningar $\phi_1$ och $\phi_2$ till Laplaces ekvation, och söka bevis för att $\nabla^2 U = 0$ dessutom betyder att $U = 0$ överallt. Innan vi går över till detta bevis skall vi först visa på en annan egenskap hos lösningar till Laplaces ekvation, nämligen att lösningarna ej kan ha några andra extrempunkter (minima eller maxima) annat än de som finns på randytan $S$ till volymen $V$ där vi betraktar ekvationen. Med andra ord:[5]

> **Teorem I.** Lösningar till Laplaces ekvation saknar lokala extrempunkter.

Vi kommer nu att bevisa detta påstående på ett lite annorlunda sätt än i Griffiths, där man istället fokuserar på medelvärde hos potentialen i en omgivning till en laddning ("källa") via Coulombs lag. Här kommer vi istället att anta en mer matematisk approach.

> **Matematiskt bevis.** [Motbevis] Antag att $\phi$ uppfyller Laplaces ekvation $\nabla\phi^2 = 0$ och har ett lokalt *maximum* i punkten $\mathbf{x}'$. I denna punkt har vi därmed att: (1) Alla förstaderivator försvinner, det vill säga att
>
> $$\nabla\phi(\mathbf{x}') = \mathbf{0},$$
>
> samt (2) att alla andraderivator är negativa i en omgivning till $\mathbf{x}'$,
>
> $$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_k^2} < 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

[3] Lösningen till Laplaces ekvation $\nabla^2\phi = 0$ kallas ofta "harmonisk funktion" (*harmonic function*).

[4] Vi följer här i huvudsak Griffiths sid. 119–124.

[5] Vi hoppar här direkt in i fallet för tre dimensioner. Griffiths beskriver även en- och tvådimensionella fallen (sid. 114–116), vilka kan vara lämpliga att studera för att få en mer intuitiv känsla för det tredimensionella fallet. Specifikt är den tvådimensionella analogin med ett uppspänt gummimembran en mycket pedagogisk illustration av Laplace ekvation och frånvaron av lokala extrempunkter. Teorem I betecknas i internationell litteratur ofta som *Maximum (or minimum) principle for harmonic functions.*

eftersom vi har att göra med ett *maximum* och att funktionen $\phi$ därmed måste "halka nedåt" i alla riktningar runt $\mathbf{x}'$. Genom att summera upp alla andraderivator erhåller vi

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k^2} = \nabla^2 \phi < 0.$$

Laplace ekvation säger dock att $\nabla^2 \phi = 0$, vilket endast kan vara uppfyllt om *samtliga* andraderivator är noll, vilket ger en motsägelse. Enda möjligheten är därmed att $\phi$ inte kan ha ett lokalt maximum i en domän där $\nabla^2 \phi = 0$. Motsvarande bevis för minima följer analogt ur detta.

Låt oss även gå igenom ett alternativt, aningen mer fysikaliskt fokuserat bevis.

**"Fysikaliskt" bevis.** Vi har att $\phi$ är en lösning till Laplaces ekvation för den elektrostatiska potentialen i vilket vi rekapitulerar är en laddningsfri region, med $\rho(\mathbf{v}) = 0$ för alla punkter $\mathbf{x}$ i volymen $V$. Detta betyder att för *godtyckligt vald punkt* $\mathbf{x}$ i volymen $V$, så är potentialen given som ett medelvärde av potentialen i en omgivning av observationspunkten, säg i form av en sfär med radien $r$ centrerad i punkten $\mathbf{x}$ som

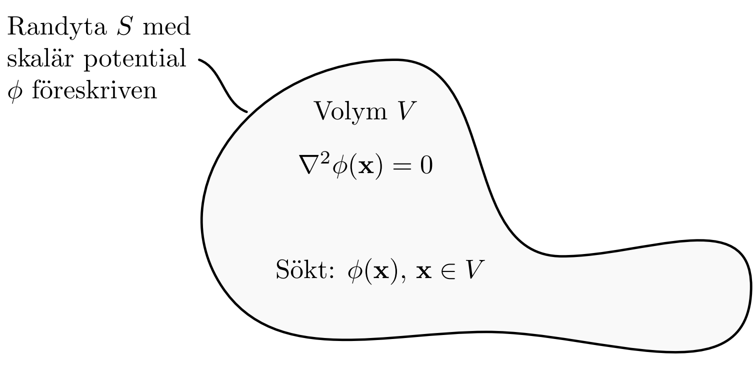
$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r^2} \oiint_S \phi(\mathbf{x}')\, dS'.$$

Med andra ord är värdet för potentialen vid $\mathbf{x}$ ett medelvärde av potentialen i alla närliggande punkter på den omgivande sfären. Ett medelvärde kan dock aldrig vara större än det maximala värdet eller mindre än det minimala värdet för potentialen på denna sfär, med andra ord kan inga lokala extremvärden finnas för $\phi$ i domänen där den uppfyller Laplaces ekvation $\nabla^2 \phi = 0$.

Intuitiv fysikalisk tolkning: Att $\nabla^2 \phi = 0$ i volymen $V$ betyder att det inte finns några källor (*sources*) eller sänkor (*sinks*) för potentialen i $V$, vilket vi kan översätta till att det inte finns någon möjlighet att "bygga upp toppar" eller "dränera dalar" inom domänen. Därför kan potentialen $\phi$ inte heller ha några toppar eller dalar inom domänen annat än på randen $S$.

*Första entydighetsteoremet för den elektrostatiska potentialen*

**Teorem II.** [*First uniqueness theorem* enligt Griffiths] Lösningen till Laplaces ekvation $\nabla^2 \phi = 0$ i en godtycklig volym $V$ är unikt bestämd om potentialen $\phi$ är specificerad på randen $S$ till volymen. [Griffiths, sid. 119]



**Bevis.**[6] Antag att vi har två oberoende lösningar $\phi_1$ och $\phi_2$ till Laplaces ekvation i en volym $V$, $\nabla^2\phi_1 = 0$ och $\nabla^2\phi_2 = 0$, med bägge lösningarna antagande samma värden på randen $S$ till $V$. Vi definierar differensen mellan lösningarna som

$$U \equiv \phi_2 - \phi_1,$$

som trivialt även den satisfierar Laplaces ekvation

$$\nabla^2 U = \underbrace{\nabla^2\phi_2}_{=0} - \underbrace{\nabla^2\phi_1}_{=0} = 0$$

överallt i volymen $V$. Specifikt har differensen värdet $U = 0$ på alla punkter som tillhör randen $S$ till $V$,

$$U(\mathbf{x}) = 0, \qquad \mathbf{x} \in S.$$

Som vi just sett i Teorem I ovan tillåter dock Laplaces ekvation inga lokala extrempunkter inuti $V$ (specifikt för differensen $U$ som ju lyder Laplace ekvation) och med andra ord är

$$\min(U(\mathbf{x})) = \max(U(\mathbf{x})) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad U(\mathbf{x}) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi_1(\mathbf{x}) = \phi_2(\mathbf{x}),$$

vilket därmed leder till slutsatsen att enda möjligheten är att det endast finns en enda unik (entydig) lösning för den skalära potentialen $\phi$.

[6] Ett alternativt bevis gås igenom av exempelvis J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, med användandet av Greens första teorem, som för godtyckliga funktioner $\varphi$ och $\psi$ (där vi alltså skriver "$\varphi$" istället för "$\phi$" för att undvika förväxling) lyder

$$\iiint\limits_V \big(\varphi\nabla^2\psi + (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\psi)\big)\, dV = \oiint \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n}\, dA.$$

Vi definierar i samma notation som Griffiths differensen $U \equiv \phi_2 - \phi_1$ i en sluten volym $V$ med randen $S$, med egenskaperna $\nabla^2 U = 0$ inuti $V$ samt att $U = 0$ och $\partial U/\partial n = 0$ på randen $S$, där $\partial U/\partial n$ betecknar normalderivatan av $U$ på densamma. Vi erhåller då med Greens första teorem, med $\varphi = \psi = U$, att

$$\iiint\limits_V \big(U\nabla^2 U + (\nabla U)\cdot(\nabla U)\big)\, dV = \oiint U \frac{\partial U}{\partial n}\, dA.$$

Med egenskaperna hos $U$ reduceras detta till

$$\iiint\limits_V |\nabla U|^2\, dV = 0,$$

det vill säga att $U$ överallt är konstant. För Dirichlet-randvillkor $U = 0$ på randen $S$ till $V$ (eftersom vi kräver samma värden för $\phi_1$ och $\phi_2$ på $S$), betyder detta att överallt i $V$ är $\phi_1 = \phi_2$, vilket i sin tur visar att en lösning till Laplaces ekvation i $V$ alltid är unik. Greens teorem och Greensfunktioner är dock utanför vad denna kurs omfattar.

**Följdsats** [Inkludering av laddning i volymen $V$] Lösningen till Poissons ekvation[7] $\nabla^2\phi = -\rho/\varepsilon_0$ i en godtycklig volym $V$ är unikt bestämd om (I) potentialen $\phi$ är specificerad på randen $S$ till volymen samt (II) laddningstätheten $\rho$ i domänen är specificerad. [Griffiths, sid. 121]

**Bevis** Vi har just visat att i en domän där inga laddningar finns, så är en lösning till *Laplaces* ekvation entydig. Vad händer då om vi lägger till en godtycklig laddningstäthet $\rho(\mathbf{x})$ i volymen, så att vi i själva verket har att göra med *Poissons* ekvation? I detta fall följer vi samma argument som tidigare, med en differens $U = \phi_2 - \phi_1$, men där de två potentialerna istället följer

$$\nabla^2\phi_1 = -\rho/\varepsilon_0, \qquad \nabla^2\phi_2 = -\rho/\varepsilon_0,$$

så att differensen $U$ i domänen $V$ liksom tidigare blir

$$\nabla^2 U = \nabla^2\phi_2 - \nabla^2\phi_1 = -\rho/\varepsilon_0 - (-\rho/\varepsilon_0) = 0.$$

Återigen satisfierar $U(\mathbf{x})$ Laplaces ekvation och har liksom tidigare värdet noll för alla punkter på randen,

$$U(\mathbf{x}) = 0, \qquad \mathbf{x} \in S.$$

Med exakt samma argument kring $\min(U) = \max(U) = 0$ som tidigare, så drar vi därmed slutsatsen att även när laddningar är närvarande i domänen, så gäller entydighetsteoremet. Notera att “närvaro av laddningar” här måste tolkas som “närvaron av laddningar som är stationära i rummet”.

*Elektriska ledare och andra entydighetsteoremet för den elektrostatiska potentialen*

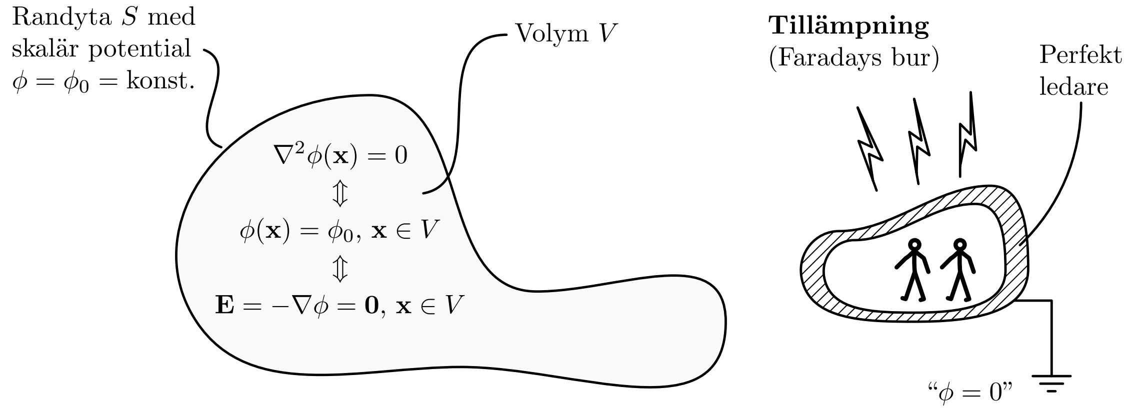
**Teorem III.** [*Second uniqueness theorem* enligt Griffiths] I en volym $V$ omgiven av ledare och inneslutande en laddningstäthet $\rho$, är det elektriska fältet unikt bestämt om den totala laddningen på varje ledare är given. Hela domänen kan vara begränsad av en annan ledare, alternativt obegränsad. [Griffiths, sid. 121]

**Bevis.** [*Att eventuellt inkluderas i dessa Lecture Notes. Se Griffiths sid. 121–123.*]

[7] “Laplaces ekvation fast med en källa i högerledet.”

**Faradays bur**

Som en direkt följd av Teorem II – gällande att lösningen till Laplaces ekvation $\nabla^2\phi = 0$ i en godtycklig volym $V$ är unikt bestämd om potentialen $\phi$ är specificerad på randen $S$ till volymen – så följer det att om en perfekt ledare omsluter en domän $V$, med andra ord att den omslutande ytan överallt är knuten till samma konstanta potential $\phi = \phi_0$, *så är den elektriska potentialen konstant överallt inuti volymen*, givet att ingen laddning omsluts.




Av detta följer trivialt att det elektriska fältet i hela volymen är identiskt noll, eftersom vi då har att

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi_0 = 0$$

för $\phi =$ konstant på $S$.

Exempel I: Luckan till en mikrovågsugn fungerar som dörr till en Faraday-bur, där det elektriskt ledande nätet i luckan har hål som är väsentligt mindre än våglängden för det elektromagnetiska fält som utgår mikrovågorna (cirka 2.4GHz, vilket ger en våglängd på cirka $(3 \times 10^8$ m/s$)/(2.4 \times 10^9 1/\text{s})) \approx 12.5$ cm). Genom att det elektromagnetiska fältet inte kan transmitteras genom nätet (eller hålmatrisen) så är mikrovågsugnen fortfarande säker trots att man kan se igenom luckan.

Exempel II: En bilkaross sägs effektivt skydda mot blixtnedslag, men vad om de ganska stora öppna glasytorna? Riskerar inte ett blixtnedslag att leta sig in i kupén genom glasrutorna? Lösningen ligger även här i att betrakta vilken våglängd den elektromagnetiska pulsen har:

- Den dominerande våglängden hos det emitterade elektromagnetiska fältet i ett blixtnedslag ligger i VLF-spannet[8] 3–30 kHz, motsvarande våglängder på 10–100 km. Dessa våglängder är mycket större än öppningen i det ledande skalet hos bilen, vilka typiskt är i storleksordningen 1 m.[9]
- Blixtnedslaget har naturligtvis också synligt ljus med en våglängd av cirka 500 nm i sitt spektrum; det är ju trots allt så att vi tydligt ser blixtnedslaget, vilket är en följd av att denna del av spektrum har en våglängd som är markant mindre än fönsteröppningarna i bilens kaross.
- Utöver detta innehåller urladdningen även extremt kortvågig gammastrålning (*gamma-ray bursts*, GRB).

[8] VLF = Very Low Frequency, `https://en.wikipedia.org/wiki/Very_low_frequency`.

[9] Världsarvet radiostationen Grimeton, Varberg, har regelbundet sändningar på 17.2 kHz (ja, *kHz*, inte MHz), eller en elektromagnetisk våglängd på cirka 17.4 km, och vi kan med detta dra slutsatsen att vi ej kan uppfånga Grimetons utsändningar inne i en bilkupé! `https://grimeton.org`

**Sammanfattning av vitsen med entydighetsteoremet**

Griffiths sammanfattar på sid. 120 (sektion 3.1.5) vitsen med hela denna exercis kring entydighet mycket precist:[10]

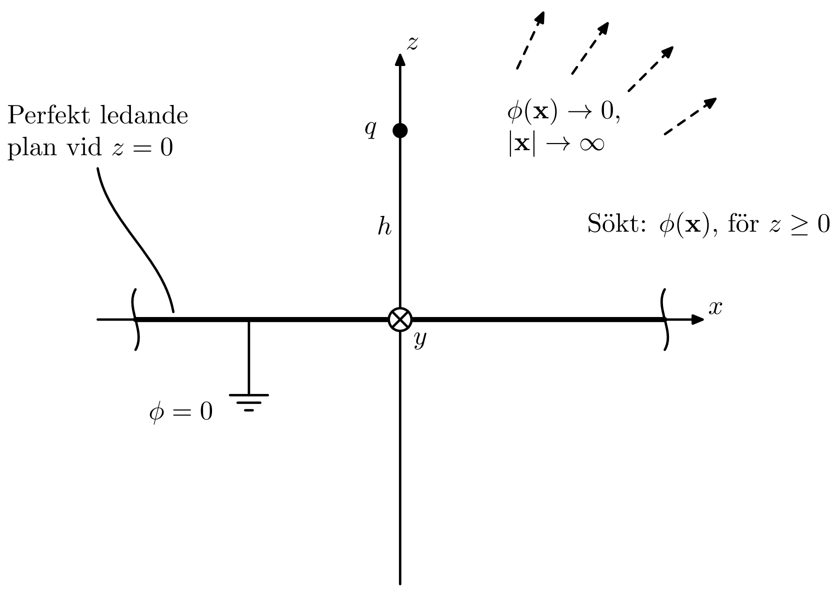
> "Entydighetsteoremet är en licens till din fantasi. Det spelar ingen roll *hur* du finner din lösning; om den (a) uppfyller Laplaces ekvation och (b) har korrekt värde på randen, så är den *korrekt*."

Vi kommer nu att utnyttja vår erhållna licens på lösandet av problem med hjälp av så kallade *spegelladdningar*.

**Spegelladdningar i perfekt ledande plan**

Så långt har vi haft att göra med givna laddningar och laddningsfördelningar, fixt placerade i rummet. Vad händer om vi har ledare som tillåter laddningsfördelningar att relaxera till steady-state, men där vi inte på rak arm vet exakt *hur* dessa laddningar kommer att placera sig? Vi kommer nu att visa på ett sätt att angripa sådana problem, med metoden för *spegelladdningar*.

Antag att vi har en punktladdning $q$ placerad på ett avstånd $h$ ovan ett oändligt och perfekt ledande plan $z = 0$.




Att planet $z = 0$ är perfekt ledande betyder att laddningar fritt kan transporteras i planet utan förlust, och om vi tänker oss att laddningen $q$ är positiv, så innebär detta att positiva laddningar i planet kommer att attraheras mot origo $(x, y) = (0, 0)$. I praktiken innebär självfallet "transport av positiva laddningar" att negativt laddade elektroner skyfflas undan, eller repelleras från den positiva laddningen; vi se detta som att vi har en tvådimensionell "gas" av fria elektroner i ytan.

Rent matematiskt formulera detta problem enligt följande:

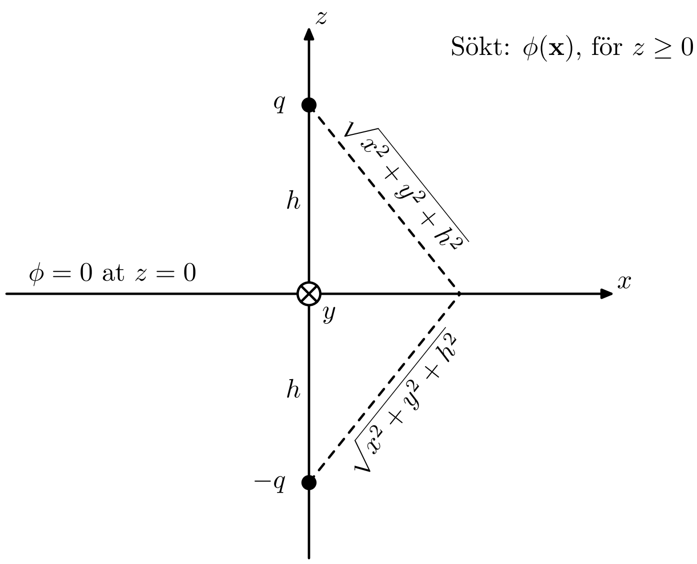
1. Vi har laddningstätheten $\rho = q\delta(\mathbf{x} - h\mathbf{e}_z)$.
2. Den skalära potentialen uppfyller $\nabla^2\phi = 0$ överallt utom just i punkten $\mathbf{x} = h\mathbf{e}_z$ för punktladdningen.
3. På randen $z = 0$ måste potentialen uppfylla $\phi = 0$.
4. På ett avstånd långt från laddningen förväntar vi oss $\phi(\mathbf{x}) \to 0$, för $|\mathbf{x}| \to \infty$.

Utifrån följdsatsen till entydighetsteoremet för Poissons ekvation kan vi lita på att *om vi finner en lösning till problemet ovan, så är det den korrekta lösningen, oavsett hur vi kommit fram till den.* Så, hur skall vi resonera här för att finna denna lösning?

[10] "The uniqueness theorem is a license to your imagination. It doesn't matter *how* you come by your solution; if (a) it satisfies Laplace's equation and (b) it has the correct value on the boundaries, then it's *right*."

Om vi utför ett litet it gedankenexperiment kring hur vi till att börja med skulle skapa en lösning som satisfierar $\phi = 0$ på ytan $z = 0$, så kan vi se laddningen i $h\mathbf{e}_z$ som en källa till potentialen, som så att säga "lyfts" till en viss fördelning i rummet $z > 0$. Detta "lyft" kan vi föreställa oss som tillämpbart på en positiv laddning $q$, men tanke-experimentet är självfallet lika giltigt för negativa laddingar. Frågan är hur vi då trycker ner denna potential så att vi når randvillkoret $\phi = 0$ på $z = 0$?

Låt oss tänka "utanför lådan" och föreställa oss att vi hade friheten att lägga en laddning med motsatt tecken någonstans i regionen $z < 0$. Genom ren symmetri bör i så fall en laddning av samma belopp men motsatt tecken rimligen placeras på exakt samma avstånd från ytan, men istället i negativ $z$-led, vid punkten $-\mathbf{e}_z$. Vi inser att detta skulle innebära att $\phi = 0$ vid $z = 0$ på grund av antisymmetrin i det nya problemet, men vi bör undvika att förlita oss på intuition så låt oss för säkerhets skull kontrollera den resulterande potentialen. Om nu vi genom detta uppfyller potentialen på $z = 0$, så kan vi helt sonika ta bort det ledande planet och istället betrakta $z = 0$ enbart som en yta som genom "magisk konstruktion" uppfyller just randvillkoret $\phi = 0$.



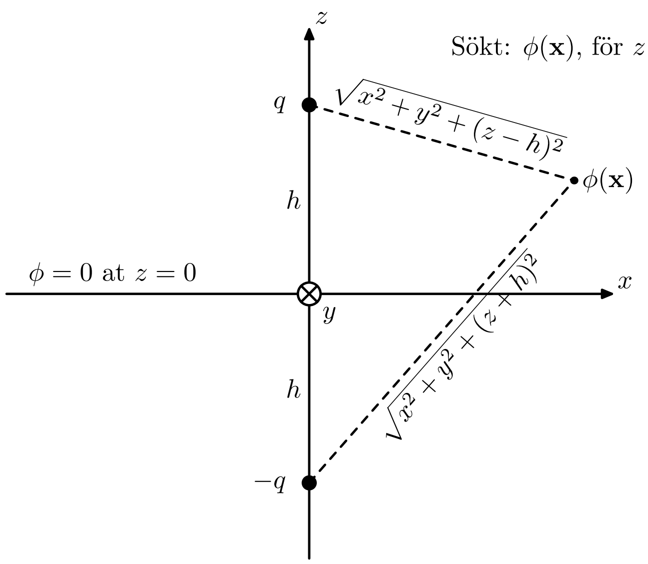

På planet $z = 0$, om nu nu tänker oss att vi tagit bort den perfekt ledande ytan, så är potentialen given från de två laddningarna $q$ och $-q$ som[11]

$$\phi(x, y, z = 0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} + \frac{(-q)}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}}\right) = 0,$$

med andra ord har vi nu visat att randvillkoret vid $z = 0$ är uppfyllt.

[11] Recap: Med en punktladdning placerad i källpunkten $\mathbf{x}'$ blir den resulterande skalära potentialen

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad \text{för} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}'.$$




Vårt antagande att vi kan *konstruera* en lösning genom att lägga en *spegelladdning* på motsatt sida om den perfekta ledaren[12] har därmed markant förstärkts, och vi kan redan nu gissa att lösningen skall formuleras som den potential i rummet som motsvaras av de två laddningarna, som

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}} + \frac{(-q)}{\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}}\right), \qquad z \geq 0.$$

Med denna konstruktion uppfylls även randvillkoret då $\mathbf{x} \to \infty$ trivialt, så slutsatsen blir att potentialen enligt ovan faktiskt är den korrekta lösningen.

Låt oss sammanfatta denna första övning i spegelladdningar med att:

> *Lösningen $\phi(\mathbf{x})$ till Poissons ekvation för en punktladdning $q$ placerad ett avstånd $z = h$ ovanför ett perfekt ledande plan $z = 0$ ges som frirymdlösningen med en virtuell spegelladdning $-q$ placerad på samma avstånd bakom planet, vid $z = -h$.*

Det är värt att notera hur fundamentalt entydighetsteoremet (för Laplaces ekvation med $\rho = 0$) och dess följdsats (för Poissons ekvation med $\rho \neq 0$) är för konstruktionen med spegelladdningar.

*Det resulterande elektriska fältet med den speglade laddningen*

Vi ser direkt att för det ekvivalenta problemet med en spegelladdning $-q$ placerad i $-h\mathbf{e}_z$ så är den resulterande potentialen $\phi$ och elektriska fältet $\mathbf{E}$ givet som det från en elektrisk dipol med dipolmoment

$$\mathbf{p} = 2h\mathbf{e}_z$$

placerad i origo. Det elektriska fältet fås direkt från den skalära potentialen som

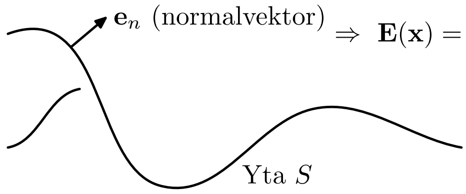
$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{x}) &= -\nabla\phi(\mathbf{x}) \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\frac{q}{|\mathbf{x}-h\mathbf{e}_z|} + \frac{(-q)}{|\mathbf{x}-(-h\mathbf{e}_z)|}\right) = \dots \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\mathbf{x}-h\mathbf{e}_z}{|\mathbf{x}-h\mathbf{e}_z|^3} - \frac{\mathbf{x}+h\mathbf{e}_z}{|\mathbf{x}+h\mathbf{e}_z|^3}\right),
\end{aligned}$$

vilket vi från Föreläsning 1 kan erinra oss beskriver det elektriska fältet i fri rymd från de två laddningarna. Som av en händelse har vi därmed även tagit fram den vektoriella beskrivningen av det elektriska fältet från en elektrisk dipol, något som vi kommer att återvända till och vidareutveckla i Föreläsning 8 senare i denna kurs.

[12] Rekapitulera att en spegel faktiskt är just ett mer eller mindre perfekt ledande plan!

*Laddningsfördelningen i det perfekt ledande planet $z = 0$*

Vi kommer nu att visa på hur vi utifrån den skalära elektrostatiska potentialen kan beräkna laddningstätheten $\sigma$ på ytan.




$$\Rightarrow \; \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\sigma(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}\mathbf{e}_n, \quad \text{för } \mathbf{x} \text{ nära } S$$

Potentialen $\phi$ är kontinuerlig över en godtycklig gränsyta, specifikt har vi alltid att potentialskillnaden mellan två punkter $\mathbf{x}_a$ och $\mathbf{x}_b$ kan tas fram genom linjeintegralen

$$\phi(\mathbf{x}_b) - \phi(\mathbf{x}_a) = -\int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_b} \mathbf{E}(\mathbf{x})\, dl,$$

och om vi låter punkterna gå mot varandra från motsatta sidor av gränsytan $z = 0$ så får vi att

$$\phi(z = 0^+) = \phi(z = 0^-).$$

Dock är *gradienten* av potentialen diskontinuerlig, vilket vi intuitivt kan se direkt från att fältlinjerna så att säga “strålar ut” åt motsatta håll från en yta som uppbär laddningar, helt i analogi med Gauss lag för punktladdningar. Eftersom $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, så har vi från Föreläsning 2 att[13]

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\sigma(\mathbf{x}))}{\varepsilon_0}\mathbf{e}_z$$

där $\mathbf{x}$ är i en omgivning nära ytan $z = 0$. Att det elektriska fältet är ortogonalt mot ytan följer av att ytan antas vara perfekt ledande. Vi kan vända på detta resonemang och istället betrakta detta som ett samband som ger laddningstätheten i planet som funktion av det elektriska fältet, som

$$\sigma(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 E_z(\mathbf{x}) = -\varepsilon_0[\nabla\phi]_z = -\varepsilon_0\frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial z}.$$

Vi har dock räknat fram det elektriska fältet ovan, och vi kan sammanfatta med att ytladdningstätheten $\sigma(\mathbf{x})$ i planet $z = 0$ erhålls som

$$\begin{aligned}
\sigma(z = 0) &= \varepsilon_0 E_z(x, y, z = 0^+) \\
&= \varepsilon_0 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\mathbf{e}_z \cdot \left.\left(\frac{\mathbf{x} - h\mathbf{e}_z}{|\mathbf{x} - h\mathbf{e}_z|^3} - \frac{\mathbf{x} + h\mathbf{e}_z}{|\mathbf{x} + h\mathbf{e}_z|^3}\right)\right|_{z=0^+} \\
&= \frac{q}{4\pi}\left(\frac{(-h)}{\big(x^2 + y^2 + (-h)^2\big)^{3/2}} - \frac{(+h)}{\big(x^2 + y^2 + (+h)^2\big)^{3/2}}\right) \\
&= -\frac{qh}{2\pi(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

---

[13] Recap: Det elektriska fältet från en godtyckligt buktande och perfekt ledande yta, uppbärande laddningen $\sigma$ (C/m$^2$), ges som

$$E_z(z) = -[\nabla\phi]_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\mathrm{sgn}(z).$$

Vi kan kontrollera att den fysikaliska dimensionen på detta uttryck som förväntat är $\mathrm{C/m^2}$, samt att $\sigma \to 0$ då $|(x,y)| \to \infty$. Vi kan även notera att laddningen hos den totala ytladdningstätheten $\sigma$ i ytan $z=0$ ges som

$$\begin{aligned}
Q &= \iint_S \sigma \, dS \\
&= -\frac{qh}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+y^2+h^2)^{3/2}} \, dx \, dy \\
&= \{ \dots \} \\
&= -q,
\end{aligned}$$

ett värde som vi nog egentligen faktiskt kunde ha gissat oss till på grund av symmetrin i konstruktionen av spegelladdningen för att uppfylla potentialen $\phi = 0$ på ytan $z=0$.

**Spegelladdningar i plana gränsytor mellan dielektrika**

Spegling av laddning i gränsytor mellan två dielektrika[14] följer på liknande sätt som för spegling i perfekt ledande plan; om laddningen $q$ placeras i ett dielektrikum med den relativa elektriska permittiviteten $\varepsilon_\mathrm{r}$ och med ett avstånd $z = h$ från ytan $z = 0$ som avgränsar från den relativa permittiviteten $\varepsilon'_\mathrm{r}$, så kommer *bundna* laddningar (till skillnad från de fria laddningarna i fallet med ett perfekt ledande plan) att fortfarande motsvara en spegelladdning $q'$ symmetriskt placerad vid $z = -h$ men istället ha värdet

$$q' = \frac{\varepsilon_\mathrm{r} - \varepsilon'_\mathrm{r}}{\varepsilon_\mathrm{r} + \varepsilon'_\mathrm{r}} q.$$

**Spegelladdningar i cylindriska perfekt ledande gränsytor**

**Spegelladdningar i sfäriska perfekt ledande gränsytor**

**Sammanfattning av Föreläsning 3 – Entydighet för lösningar till potentialproblem, randvillkor och spegelladdningar**

- Lösningar till Laplaces ekvation $\nabla^2\phi = 0$ saknar lokala extrempunkter. Extrempunkter till $\phi$ finns *endast* på randen $S$ till den volym $V$ i vilket Laplace ekvation gäller. [Teorem I]
- Genom att använda denna information kan vi visa att *lösningen till Laplaces ekvation $\nabla^2\phi = 0$ i en godtycklig volym $V$ är unikt (entydigt) bestämd om potentialen $\phi$ är specificerad på randen $S$ till volymen.* [Teorem II, *First uniqueness theorem* enligt Griffiths]
- Detta betyder i sin tur att om vi finner en lösning till Laplace ekvation, *så är detta den enda lösningen, oavsett hur vi funnit eller konstruerat lösningen så länge som lösningen uppfyller de föreskrivna randvillkoren.* Detta argument är själva kärnan i hur vi motiverar användandet av spegelladdningar i lösningen av potentialproblem, med närvaro av ledare med fria laddningar.
- "Entydighetsteoremet är en licens till din fantasi. Det spelar ingen roll *hur* du finner din lösning; om den (a) uppfyller Laplaces (eller Poissons!) ekvation och (b) har korrekt värde på randen, så är den *korrekt.*"
- [Spegling av laddning i perfekt ledande plan] Lösningen $\phi(\mathbf{x})$ till Poissons ekvation för en punktladdning $q$ placerad ett avstånd $z = h$ ovanför ett perfekt ledande plan $z = 0$ ges som friryrmdlösningen med en virtuell spegelladdning $-q$ placerad på samma avstånd bakom planet, vid $z = -h$.
- [Spegling av laddning i plan mellan dielektrika] Spegelladdningen placeras på samma sätt som i fallet med perfekt ledande plan, men istället med värdet

  $$q' = \frac{\varepsilon_\mathrm{r} - \varepsilon'_\mathrm{r}}{\varepsilon_\mathrm{r} + \varepsilon'_\mathrm{r}} q,$$

  där $\varepsilon_\mathrm{r}$ och $\varepsilon'_\mathrm{r}$ är de relativa elektriska permittiviteterna för respektive $z > 0$ och $z < 0$.

[14] Vi går här händelserna i förväg en aning; dielektrika behandlas egentligen först längre fram i kursen i Föreläsning 6.