



FÖRELÄSNING 8

MULTIPOLUTVECKLINGEN

Fredrik Jonsson, Uppsala Universitet, 24 november 2025

Sammanfattning

Vi lämnar för denna föreläsning dipolmodellen för ett tag, och visar på att andra konstruktioner av laddningsfördelningar, exempelvis kvadrupoler och oktopoler, ger bidrag till fält som avklingar med en annan takt en det klassiska “ $1/r^2$ ”-uppträdandet. Vi utgår från de klassiska integralerna för den skalära potentialen ϕ och vektorpotentialen \mathbf{A} och ägnar oss åt en statisk modell för multipolutvecklingen.

Vi går igenom begreppen dipol, kvadrupol, oktopol och högre ordningar; specifikt visar vi på att även det enklast tänkbara fallet av en elektrisk dipol har högre ordningars multipolmoment närvärande, men att dessa oftast försummas vid beträktelse på stora avstånd.

Föreläsningen avslutas med att demonstrera multipolutvecklingen för generella laddningsfördelningar i termer av skalär potential (elektrostatik) och vektorpotential (magnetostatik), samt fastställande av dipolapproximationen för elektrostatiska och magnetostatiska fält.

Tre hållpunkter i föreläsningen

1. Multipolutvecklingen är i grund och botten en serieutveckling av potentialen (skalär eller vektor) i inversa potenser av distansen mellan källa och observationspunkt.
2. Multipolutvecklingen klassificeras term för term utifrån hur beroendet av avståndet $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ mellan källpunkt \mathbf{x}' och fältpunkt \mathbf{x} ser ut:
 1. Monopol (1-pol): $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r$
 2. Dipol (2-pol): $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^2$
 3. Kvadrupol (4-pol): $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^3$
 4. Oktopol (8-pol): $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^4$
 5. Hexadecapol (16-pol): $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^5$
 6. Dotriacantapol (32-pol): $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^6$
3. Dipolapproximationen för elektrostatiska ($\mathbf{E} = -\nabla\phi$) och magnetostatiska ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$) fält på långt avstånd $|\mathbf{x}|$ från laddningsfördelningen (källan) ρ lyder

$$\phi(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right), \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3},$$

där q är nettoladdningen och \mathbf{p} dipolmomentet hos en magnetisk dipol samt \mathbf{m} det magnetiska dipolmomentet.

Multipolutveckling av fält

Vi kan sammanfatta ämnet för dagens föreläsning, *multipolutvecklingen*, med följande punkter:

- Multipolutvecklingen bistår oss med en formalism för att projicera ut olika bidrag (så kallade ”moment”) till elektromagnetiska fält.
- Denna klassificering är i grund och botten bara en tämligen enkel serieutveckling, där de olika momenten (monopol, dipol, kvadrupol, oktopol, etc.) klassificeras utifrån hur deras avklingande sker i form av potenser i det inversa avståndet $1/r^n$ mellan källa och observationspunkt.
- Ofta förekommande för karakterisering av antenner.
- Molekyler som interagerar med elektromagnetiska fält agerar som ”antennor” vilka kan beskrivas utifrån deras multipolutvecklingar.
- Basen för beskrivning av ϵ_r i konstitutiva relationen $\mathbf{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$ (hur material polariseras av elektriska fält) eller $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$ (hur material magnetiseras av magnetiska fält).
- Oftast fokus på elektrisk dipol-approximation, men vissa fenomen, som optisk aktivitet, kan bara beskrivas om högre ordningars termer tas med.

Vi kommer här att i huvudsak använda de generella uttrycken för elektrisk skalär potential och vektorpotentialen, som¹

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV', \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV',$$

där $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m är den *elektriska permittiviteten för vakuum* (electric permittivity of vacuum), samt $\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6}$ N/A² den *magnetiska permeabiliteten för vakuum* (vacuum magnetic permeability). I dessa uttryck är ρ den elektriska laddningstätheten² (C/m³) och \mathbf{J} den elektriska strömtätheten (A/m²). Vi använder här de generella, tredimensionella uttrycken för potentialerna för att öva på deras tillämpningen, samt för att bygga upp en generell verktygslåda för att problemlösning inom elektromagnetisk fältteori.

För att rekapitulera själva vitsen med att använda den skalära potentialen och vektorpotentialen, så kan vi ur dessa extrahera de *statiska* (ej tidsberoende) elektriska och magnetiska fälten som³

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Vi kan också rekapitulera att SI-enheterna för den skalära potentialen och vektorpotentialen är

$$\begin{aligned} [\phi] &= \frac{[\rho][dV']}{[\epsilon_0][\mathbf{x}]} = \frac{(C/m^3)m^3}{(F/m)m} = \{ F = C/V \} = V, \\ [\mathbf{A}] &= \frac{[\mu_0][\mathbf{J}][dV']}{[\mathbf{x}]} = \frac{(N/A^2)(A/m^2)m^3}{m} = N/A. \end{aligned}$$

¹ För formulering av skalära potentialen $\phi(\mathbf{x})$ samt vektorpotentialen $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ från en generell laddningsdistribution, se Föreläsning 2 (för den skalära potentialen ϕ) samt Föreläsning 4 (för vektorpotentialen \mathbf{A}); alternativt Griffiths Ekv. (10.26), s. 445. Notera här hur vektorpotentialen $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ har en form som *exakt matchar det uttryck som vi under förra föreläsningen tog fram för samma vektorpotential för ett magnetiserat objekt* med magnetiseringen $\mathbf{M}(\mathbf{x})$, i termer av en *bunden volymström* $\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M}$ (A/m²) och en *bunden ytström* $\mathbf{K}_b = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_n$ (A/m). Detta uttrycker på ett mer generellt plan att vi med förra föreläsningens slutresultat *kan applicera den multipolutveckling som vi nu kommer att gå igenom på ett godtyckligt magnetiserat objekt!*

² Eller om vi så vill, *laddningsdensiteten*, för att anknyta till massdensitet.

³ Recap på ursprunget för vektorpotentialen: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \exists \mathbf{A} : \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Notera att uttrycket som här används för den elektriska fältstyrkan *endast* är giltig för *statiska* fält. Som vi kommer att se i Föreläsning 11 på retarderade (tidsfördröjda) potentialer, så är den egentliga elektrodynamiska formen

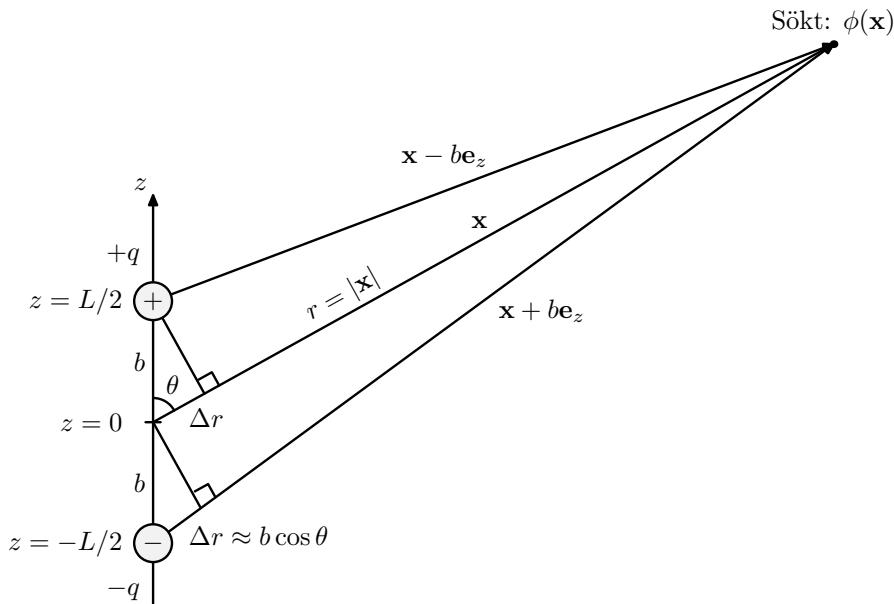
$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad \left(\text{här statiskt: } \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0 \right)$$

Multipolutveckling för skalär potential för en elektrisk dipol

Ett av de enklaste testobjekten inom elektromagnetism är den elektriska dipolen,⁴ bestående av en positiv och negativ laddning separerade ett avstånd L . Även för en elektrisk *dipol* finns det (paradoxalt) termer av *multipolmoment* då vi lämnar approximationen att den skalära elektriska potentialen enbart ges av skalärprodukten mellan dipolmomentet och ortsvektorn till observationsspunkten.

Vi betraktar en klassisk elektrisk dipol med två laddningar $+q$ or $-q$ separerade avståndet $L = 2b$. Dipolen kan beskrivas med en laddningsfördelning enligt *distributionen*

$$\rho(\mathbf{x}) = (+q)\delta(\mathbf{x} - b\mathbf{e}_z) + (-q)\delta(\mathbf{x} + b\mathbf{e}_z)$$

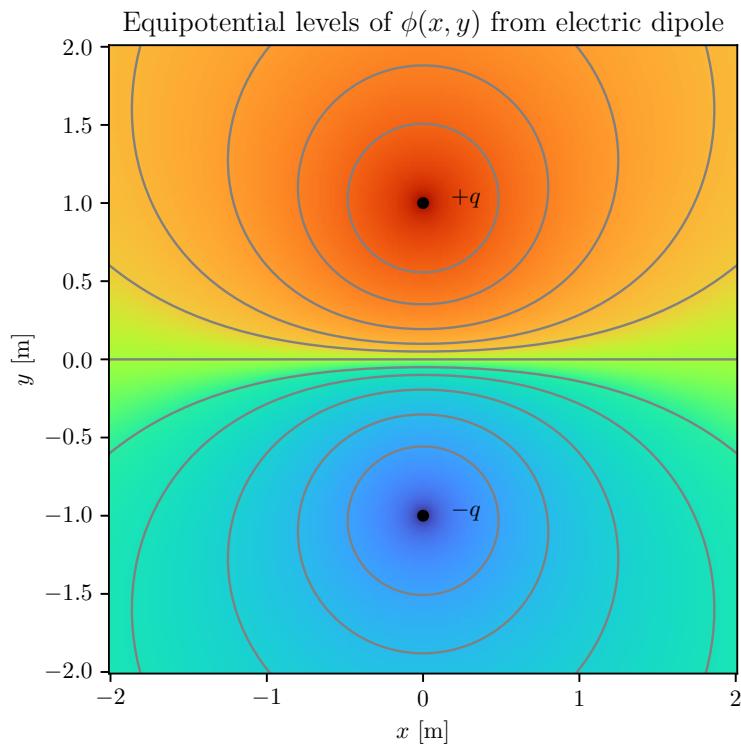


⁴ The English prefixes *bi-*, derived from Latin, and its Greek variant *di-* both mean “two”. The Latin prefix is far more prevalent in common words, such as *bilingual*, *biceps*, and *biped*; the more technical Greek *di-* appears in such words as *diphthong* and *dilemma*.

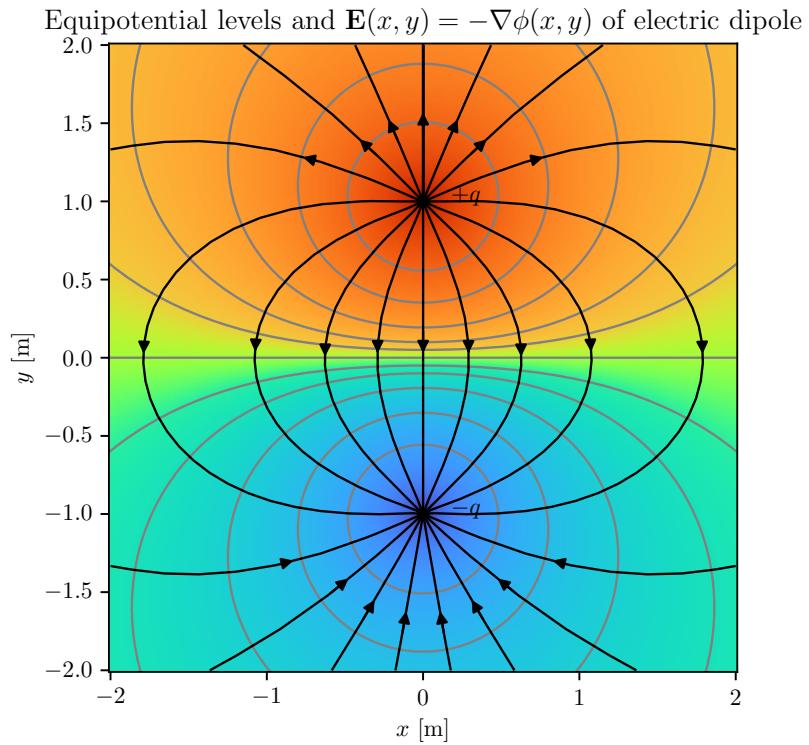
Den elektriska skalära potentialen från denna specifika distribution av två punktkällor⁵ blir därmed

$$\begin{aligned}
 \phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(+q)}{|\mathbf{x} - b\mathbf{e}_z|} + \frac{(-q)}{|\mathbf{x} + b\mathbf{e}_z|} \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r - b\cos\theta} - \frac{1}{r + b\cos\theta} \right) \\
 &= \{ \text{Definiera } \varepsilon \equiv (b/r)\cos\theta \} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{1}{1 - \varepsilon} - \frac{1}{1 + \varepsilon} \right) \\
 &= \{ \text{Taylor-utveckling för litet } \varepsilon \} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} ((1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \dots) - (1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \dots)) \\
 &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} (\varepsilon + \varepsilon^3 + \varepsilon^5 + \dots) \\
 &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(\underbrace{\frac{b\cos\theta}{r^2}}_{\text{dipol}} + \underbrace{\frac{(b\cos\theta)^3}{r^4}}_{\text{oktopol}} + \underbrace{\frac{(b\cos\theta)^5}{r^6}}_{\text{dotriaccontapol}} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

⁵ Vi utgår här ifrån den generella tre-dimensionella volymintegralen av en laddningstäthet $\rho(\mathbf{x})$, bara för att illustrera hur vi kan tillämpa denna även för lokaliseringar.



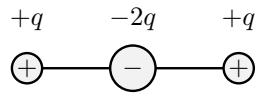
Skalär potential $\phi(x, y)$ för en elektrisk dipol.



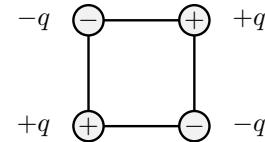
Skalär potential $\phi(x, y)$ för en elektrisk dipol med fältlinjer för $\mathbf{E}(x, y) = -\nabla\phi(x, y)$.

Exempel på multipoler

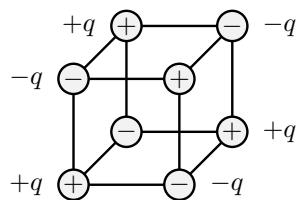
Som en relativt enkel illustration av multipoler kan vi konstruera olika multipolmoment utifrån diskreta laddningar.



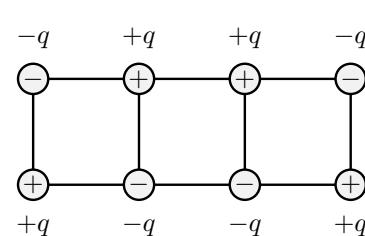
Linjär elektrisk kvadrupol



Kvadratisk elektrisk kvadrupol



3D kubisk elektrisk oktopol



Planär dubbel-kvadratisk elektrisk oktopol

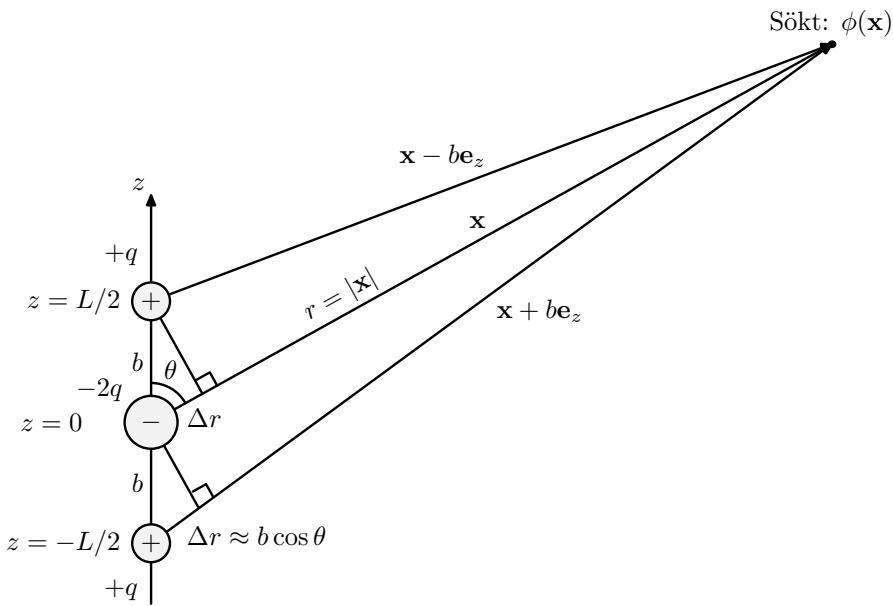
En intressant övning är att gå igenom dessa specifika multipoler och upprepa den geometriska analysen för dipolen, för att på så sätt extrahera styrkan på de olika multipolmomenten.

Multipolutveckling för skalär potential för en linjär elektrisk kvadrupol

Låt oss göra en liten ändring på den elektriska dipolen i föregående exempel, och istället lägga en punktladdning $-2q$ i centrum med två punktladdningar $+q$ på diametralt motsatt sida om denna. Denna konfiguration kan beskrivas med *distributionen*

$$\rho(\mathbf{x}) = (+q)\delta(\mathbf{x} - b\mathbf{e}_z) + (-2q)\delta(\mathbf{x}) + (+q)\delta(\mathbf{x} + b\mathbf{e}_z),$$

precis analogt med det föregående fallet för den elektriska dipolen.



På exakt samma sätt som tidigare, med den enda skillnaden att vi nu har *tre* laddningar (källtermer) för den skalära potentialen $\phi(\mathbf{x})$, så har vi att

$$\begin{aligned}
 \phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(+q)}{|\mathbf{x} - b\mathbf{e}_z|} + \frac{(-2q)}{|\mathbf{x}|} + \frac{(+q)}{|\mathbf{x} + b\mathbf{e}_z|} \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r - b\cos\theta} - \frac{2}{r} + \frac{1}{r + b\cos\theta} \right) \\
 &= \{ \text{Definiera } \varepsilon \equiv (b/r) \cos\theta \} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{1}{1 - \varepsilon} - 2 + \frac{1}{1 + \varepsilon} \right) \\
 &= \{ \text{Taylor-utveckling för litet } \varepsilon \} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} ((1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \dots) - 2 + (1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \dots)) \\
 &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} (\varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^6 + \dots) \\
 &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(\underbrace{\frac{(b\cos\theta)^2}{r^3}}_{\text{kvadrupol}} + \underbrace{\frac{(b\cos\theta)^4}{r^5}}_{\text{hexadecapol}} + \underbrace{\frac{(b\cos\theta)^6}{r^7}}_{\text{hexacontatetrapol}} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

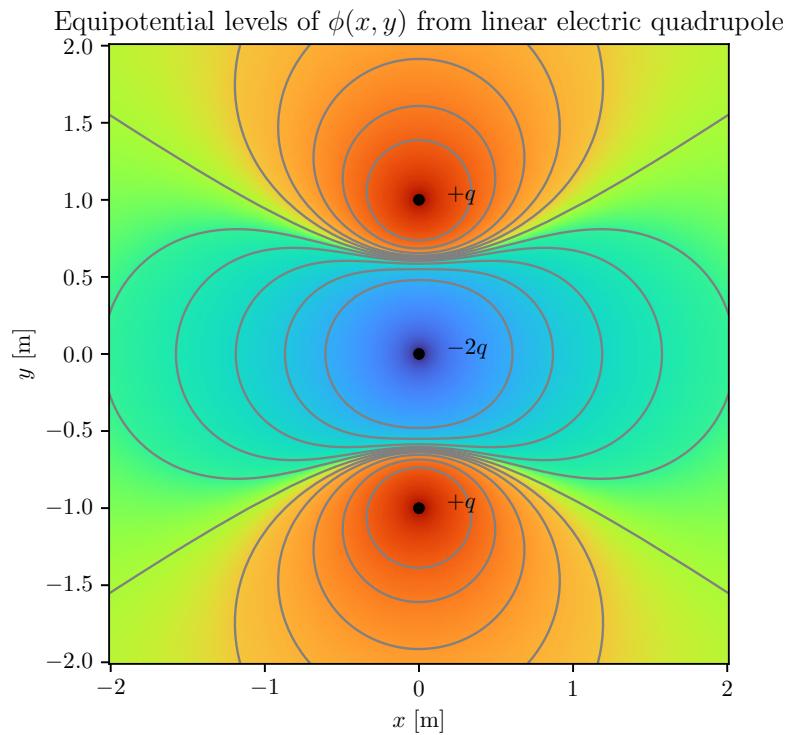
I denna serieutveckling återfinns nu endast *udda* potenser av avståndet r , varav den dominerande termen på stora avstånd kommer att vara den som går som $O(1/r^3)$, svarande mot en elektrisk kvadrupol. Värt att notera är att i denna serieutveckling återfinns *ingen dipolterm*.

Klassificering av multipolmoment

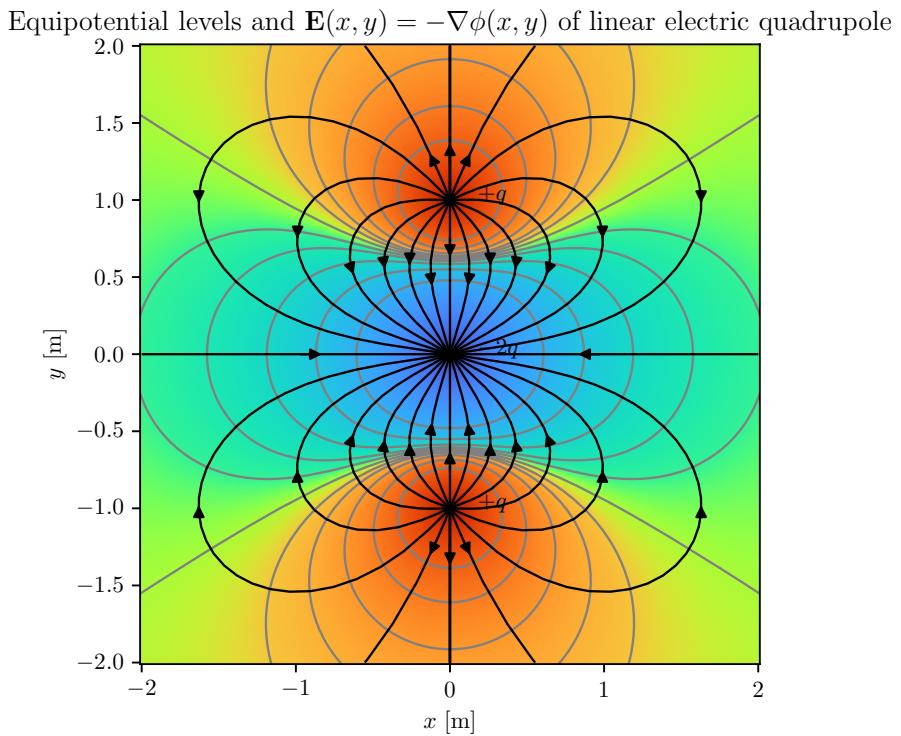
Multipolutvecklingen klassificeras term för term av hur beroendet av avståndet $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ mellan källpunkt \mathbf{x}' och fältpunkt \mathbf{x} ser ut:

- | | | |
|----|-----------------------------|-------------------------------|
| 1. | Monopol (1-pol): | $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r$ |
| 2. | Dipol (2-pol): | $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^2$ |
| 3. | Kvadrupol (4-pol): | $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^3$ |
| 4. | Oktopol (8-pol): | $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^4$ |
| 5. | Hexadecapol (16-pol): | $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^5$ |
| 6. | Dotriacontapol (32-pol): | $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^6$ |
| 7. | Hexacontatetrapol (64-pol): | $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^7$ |
| 8. | ... | ... |

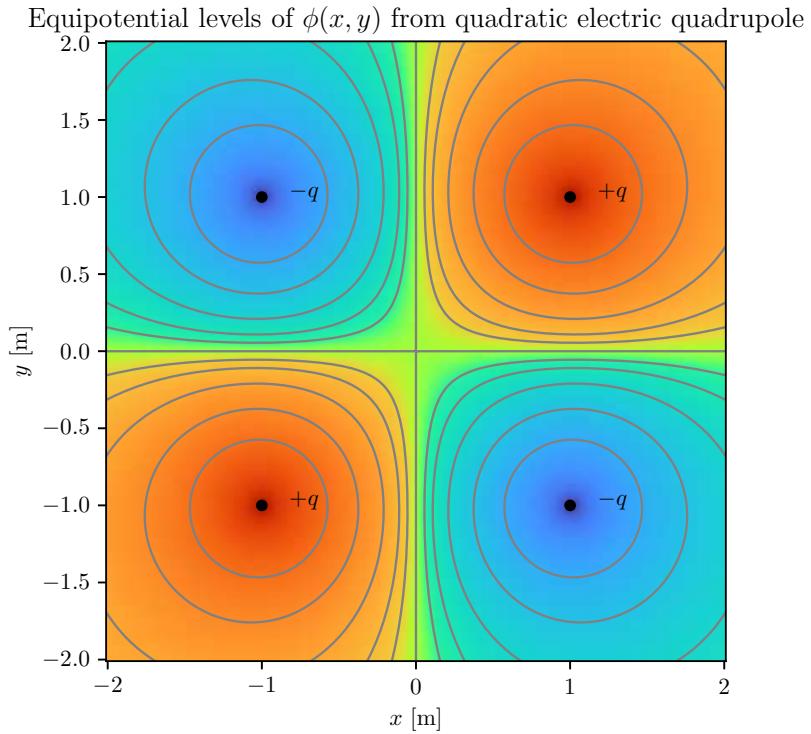
Sammanfattningsvis så har en klassisk elektrisk dipol samtliga multipolmoment som är *jämna*, det vill säga *dipol* ($\phi \sim 1/r^2$), *oktopol* ($\phi \sim 1/r^4$), *dotriacontapole* ($\phi \sim 1/r^6$), etc.

Skalär potential och elektriskt fält för en linjär elektrisk kvadrupol

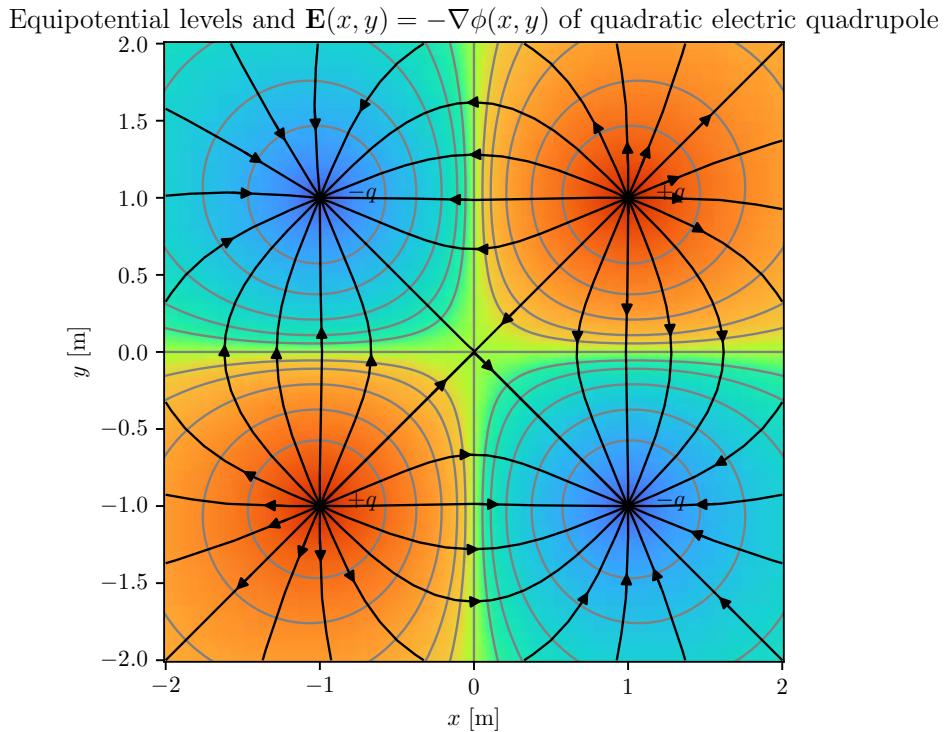
Skalär potential $\phi(x, y)$ för en linjär elektrisk kvadrupol.



Skalär potential $\phi(x, y)$ för en elektrisk linjär kvadrupol med fältlinjer för $\mathbf{E}(x, y) = -\nabla\phi(x, y)$.

Skalär potential och elektriskt fält för en kvadratisk elektrisk kvadrupol


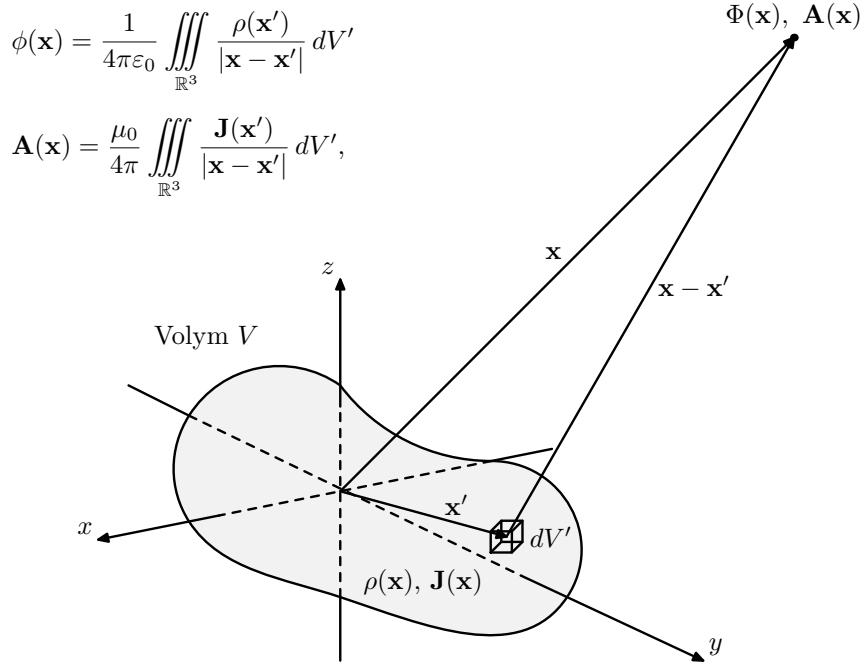
Skalär potential $\phi(x, y)$ för en kvadratisk elektrisk kvadrupol.



Skalär potential $\phi(x, y)$ för en kvadratisk elektrisk kvadrupol med fältlinjer $\mathbf{E}(x, y) = -\nabla\phi(x, y)$.

Multipolutveckling av skalär potential för generella laddningsfördelningar

Vi betraktar en generell laddningsfördelning enligt figur. Laddningsfördelningen kan vara en generell distribution i 3D, men även i kombinationer av 2D (ytladdningar, skärmar, jordplan), 1D (linjeladdningar, antenner) eller 0D (punktlladdningar). Vi kommer i det följande att använda en geometri i vilken laddningstätheten $\rho(\mathbf{x})$ är lokaliserad i näheten av origo (vilket gör det enklare rent algebraiskt att räta tillämpa en serieutveckling för laddningsdensiteten i en Maclaurin-utveckling, snarare än i en generell Taylor-utveckling, även om slutresultatet naturligtvis är det-samma), enligt figur.



Den skalära (elektriska) potentialen $\phi(\mathbf{x})$ från en punktkälla q placerad i \mathbf{x}' ges som

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|},$$

eller om vi så vill, det infinitesimala bidraget $d\phi$ till den skalära potentialen vid \mathbf{x} från källan $dq' = \rho(\mathbf{x}')dV'$ vid källpunkten \mathbf{x}' . Den skalära potentialen från distributionen $\rho(\mathbf{x})$ ges därmed analogt genom att helt enkelt summera upp alla bidrag från samtliga $\rho(\mathbf{x}')dV'$ i volymen V , som

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'$$

I denna integral så kan vi se det som att vi summerar upp alla element dV 's infinitesimala laddningar $dq = \rho(\mathbf{x}')dV'$ (eller strömtätheter $\mathbf{J}(\mathbf{x}')dV$ i fallet med vektorpotentialen \mathbf{A}), viktade med en skalär faktor

$$f(\mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

som kort och gott är det inversa geometriska avståndet mellan källpunkten \mathbf{x}' och fältpunkten (observationspunkten) \mathbf{x} . Vi kan, om vi så vill, se detta som en summation av potentialbidragen från alla infinitesimala elektriska *monopoler* som ryms i volymen V .

Maclaurin-utveckling av den geometriska viktfunktionen

Liksom i det enkla fallet med dipolen, siktar vi här mot en serieutveckling av denna viktfunktion för att enklare kunna tolka de termer som blir resultatet. För att rekapitulera, så var serieutvecklingen i fallet med dipolen i grund och botten en serieutveckling av position för källtermerna, med "litet separationsavstånd L i förhållande till avståndet till observationspunkten \mathbf{x}' ". Vi önskar därmed att uttrycka serieutvecklingen i koordinaten \mathbf{x}' för *källan* $\rho(\mathbf{x}')$. Generellt har vi att en Maclaurin-utveckling (Taylor-utveckling kring origo) i tre dimensioner ges av

$$f(\mathbf{x}') = f(\mathbf{0}) + \sum_{k=1}^3 x'_k \frac{\partial f(\mathbf{x}')}{\partial x'_k} \Big|_{\mathbf{x}'=\mathbf{0}} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 x'_j x'_k \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}')}{\partial x'_j \partial x'_k} \Big|_{\mathbf{x}'=\mathbf{0}} + \dots$$

För "viktfunktionen" $f(\mathbf{x}')$ har vi att

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}') &= \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}, \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}')}{\partial x'_k} &= \frac{\partial}{\partial x'_k} \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{-2(x_k - x'_k)}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = \dots = \frac{x_k - x'_k}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}, \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}')}{\partial x'_j \partial x'_k} &= \frac{\partial^2}{\partial x'_j \partial x'_k} \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \\ &= \frac{\partial}{\partial x'_j} \frac{x_k - x'_k}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\frac{\partial(x_k - x'_k)}{\partial x'_j} ((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2} - (x_k - x'_k) \frac{\partial((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}}{\partial x'_j}}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^3} \\ &= \dots \\ &= \frac{3(x_j - x'_j)(x_k - x'_k) - \delta_{jk}((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{5/2}} \\ &= \frac{3(x_j - x'_j)(x_k - x'_k) - \delta_{jk}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^5} \end{aligned}$$

För koefficienterna i Maclaurin-utvecklingen av den skalära potentialen innebär detta specifikt att

$$f(\mathbf{0}) = \frac{1}{|\mathbf{x}|}, \quad \frac{\partial f(\mathbf{x}')}{\partial x'_k} \Big|_{\mathbf{x}'=\mathbf{0}} = \frac{x_k}{|\mathbf{x}|^3}, \quad \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}')}{\partial x'_j \partial x'_k} \Big|_{\mathbf{x}'=\mathbf{0}} = \frac{3x_j x_k - \delta_{jk}|\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}|^5},$$

och vår Maclaurin-utveckling av viktfunktionen $f(\mathbf{x}')$ bistår direkt med respektive multipol-termer i uttrycket för skalära elektriska potentialen som

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \left(\frac{1}{|\mathbf{x}|} + \sum_{k=1}^3 \frac{x_k}{|\mathbf{x}|^3} x'_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{3x_j x_k - \delta_{jk}|\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}|^5} x'_j x'_k + \dots \right) \rho(\mathbf{x}') dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|} \iiint_V \rho(\mathbf{x}') dV' + \sum_{k=1}^3 \frac{x_k}{|\mathbf{x}|^3} \underbrace{\iiint_V x'_k \rho(\mathbf{x}') dV'}_{\text{dipolmoment, } p_k} \right)}_{\text{monopol, } q} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{3x_j x_k - \delta_{jk}|\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}|^5} \underbrace{\iiint_V x'_j x'_k \rho(\mathbf{x}') dV'}_{\text{kvadrupolmoment, } Q_{jk}} + \dots \end{aligned}$$

Notera att för dipoltermen utgörs skalära potentialen av en *skalärprodukt* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}$, medan kvadrupoltermen svarar mot en *matrisprodukt* från vilken spåret ("trace") subtraheras, $3\mathbf{x}^T \mathbb{Q} \mathbf{x} - |\mathbf{x}|^2 \text{Tr}[\mathbb{Q}]$.

Sammanfattnings av multipolutvecklingen av den skalära potentialen

För att sammanfatta detta, så har vi alltså kommit fram till att den skalära potentialen resulterande från en godtycklig laddningsfördelning $\rho(\mathbf{x})$ kan skrivas som en serieutveckling i olika *moment* som

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{x}|} q + \sum_{k=1}^3 \frac{x_k}{|\mathbf{x}|^3} p_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{(3x_j x_k - \delta_{jk} |\mathbf{x}|^2)}{|\mathbf{x}|^5} Q_{jk} + \dots \right),$$

där

$$\begin{aligned} q &= \iiint_V \rho(\mathbf{x}') dV' && \text{(elektriskt monopol; enhet: C)} \\ p_k &= \iiint_V x'_k \rho(\mathbf{x}') dV' && \text{(elektriskt dipolmoment; enhet: C · m)} \\ Q_{jk} &= \iiint_V x'_j x'_k \rho(\mathbf{x}') dV' && \text{(elektriskt kvadrupolmoment; enhet: C · m}^2\text{)} \end{aligned}$$

Analysen för vektorpotentialen $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ följer på samma sätt, med en helt och hållt analog serieutveckling av "viktfunktionen" $f(\mathbf{x}')$ för den elektriska strömdensiteten $\mathbf{J}(\mathbf{x})$.

Multipolutveckling av vektorpotentialen för generella strömtätheter

Motsvarande serieutveckling för vektorpotentialen följer direkt från exakt samma serietveckling av ”viktfunktionen” $f(\mathbf{x}')$ i källkoordinater som för den skalära potentialen, med den enda skillnaden att vi nu tar fram vektorpotentialen $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ i observationspunkten komponentvis från strömtätheten (källan) $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$, som

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{1}{|\mathbf{x}|} + \sum_{k=1}^3 \frac{x_k}{|\mathbf{x}|^3} x'_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{3x_j x_k - \delta_{jk} |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}|^5} x'_j x'_k + \dots \right) \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV' \\ &= \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{|\mathbf{x}|} \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV' + \sum_{k=1}^3 \frac{x_k}{|\mathbf{x}|^3} \iiint_V x'_k \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV' \right)}_{\text{magnetisk "monopol"}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{3x_j x_k - \delta_{jk} |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}|^5} \iiint_V x'_j x'_k \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV'}_{\text{magnetiskt dipolmoment, } \mathbf{m}} + \dots \\ &\quad + \underbrace{\dots}_{\text{magnetiskt kvadrupolmoment, } m_{jk}}.\end{aligned}$$

Tolkningen av de ingående magnetiska momenten, som nu involverar strömtätheten \mathbf{J} snarare än den statiska laddningstätheten ρ som för den skalära potentialen, blir dock lite annorlunda som vi nu skall se.

Ett antagande som vi behöver göra är att strömtätheten \mathbf{J} , likt den statiska laddningsfördelningen ρ i fallet för den skalära potentialen ϕ , måste uppfylla att den är *lokaliseras*, det vill säga att den går mot noll för ett tillräckligt stort avstånd från origo (som vi valt att lokalisera någonstans inuti källans utsträckning).

Magnetisk monopolterm

Låt oss först av allt ta oss an den magnetiska ”monopolen”.⁶ Från ”lagen om att laddning inte kan försvinna”⁷ har vi i statiska problem att

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{d\rho}{dt} = 0,$$

vilket i sin tur, genom att tolka $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ via vektoridentiteten⁸ $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$, ger att vi kan tolka den *magnetostatiska*⁹ strömtätheten som en rotation

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{K},$$

för någon vektorvärd funktion $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{x})$, som vi för stunden låter bli att definiera i detalj. Denna form av den magnetostatiska strömtätheten betyder att monopoltermen antar formen

$$\begin{aligned}\iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV' &= \iiint_V \nabla \times \mathbf{K}(\mathbf{x}') dV' \\ &= \{ \text{Rotations-versionen av Gauss teorem} \} \\ &= \iint_S d\mathbf{S}' \times \mathbf{K}(\mathbf{x}').\end{aligned}$$

⁶ Från Föreläsning 4 och Gauss lag för den magnetiska flödestätheten $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ så vet vi *a priori* att denna term kommer att vara noll, så i princip skulle vi här bara kunna konstatera detta faktum; dock finns det ett egenvärde i att faktiskt visa detta även utifrån egenskaper hos strömtätheten \mathbf{J} .

⁷ Se Föreläsning 4 eller Griffiths Ekv. (5.29), sid. 222.

⁸ Se exempelvis innerpärmen på Griffiths, *Second Derivatives* (9).

⁹ Notera att detta endast generellt gäller för *statiska* problem, och ej generellt för (elektro)dynamiska fall.

Eftersom denna identitet gäller för en godtycklig volum V med omslutande gränsyta S , så kan vi välja denna som exempelvis en sfär med radie $r \rightarrow \infty$. Med antagandet att vi har en ström som är lokaliseras (ej oändligt utspridd) så kan vi alltid välja funktionen $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ så att den liksom $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ går mot noll då $r \rightarrow \infty$. Den enda möjligheten är därmed att den inneslutna magnetiska laddningen, eller om man så vill magnetiska monopolen, måste vara noll,

$$\iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV' = 0.$$

Denna härledning lämnar dock en viss känsla av icke-stringens efter sig, då vi ju kan fråga oss om vi verkligen har visat att magnetiska monopoler inte kan existera bara för att den *inneslutna magnetiska netto-laddningen* alltid är noll. Trots allt, så kan vi ju exempelvis mycket väl ha en inneslutna elektrisk laddning som till sin total är noll, trots att vi mycket väl vet att elektriska monopoler (de elementarladdningar som är de diskreta byggblocken som bygger upp en elektrisk totalladdning) existerar i högsta grad.

Det argumentet ovan visar är att hur vi än vänder och vrider på problemet, så visar slutsatsen att den instängda magnetiska "laddningen" alltid summerar till exakt noll på att magnetiska "laddningar" (magnetiska monopoler) alltid måste uppträda parvis, vilket vi förvisso kan föreställa oss som Gilberts modell¹⁰ av magnetiska dipoler med associerade nord- och sydpoler, men som i en mer grundläggande form snarare bör ses som individuella magnetiska *dipolmoment* som i Ampères modell.

Fysikalisk tolkning av magnetisk monopolterm

Eftersom vi i magneto-statiken har att $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, det vill säga att strömtätheten överallt är *divergensfri*, så innebär detta att *varje strömlinje längs strömtätheten bildar en sluten slinga*. Detta betyder i sin tur att varje strömslingas bidrag måste vara i form av ett magnetiskt dipolmoment, med en perfekt matchning mellan "negativ och positiv magnetisk laddning", vilket i sin tur betyder att ingen isolerad magnetisk laddning kan existera. Med andra ord, *inga magnetiska monopoler kan existera*, och den magnetiska monopoltermen måste vara identiskt noll överallt.

Magnetisk dipolterm

Den magnetiska dipoltermen kan uttryckas som

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \frac{x_k}{|\mathbf{x}|^3} \iiint_V x'_k \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV' &= \frac{1}{|\mathbf{x}|^3} \iiint_V \underbrace{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{J}(\mathbf{x}')}_{\text{"}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}"} dV' \\ &= \left\{ \text{Vektoridentitet } \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \right\} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{x}|^3} \iiint_V [\mathbf{x} \times (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')) + \mathbf{x}'(\mathbf{x} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}'))] dV' \end{aligned}$$

Magnetisk kvadrupolterm

[TO BE CONTINUED]

¹⁰ Se Föreläsning 7, *Magnetiska fält i material*.

Kan dynamiska magnetiska monopoler existera?

Vi har just precis på ett alternativt sätt, utöver det tidigare $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ från exempelvis Föreläsning 4, visat att *magnetiska monopoler inte existerar i magneto-statiska problem*.¹¹ Frågan infinner sig då förstas om det finns möjlighet att magnetiska monopoler existerar om vi tillåter statiken att gå över till *dynamik*, där vi tillåter ett tidsberoende hos laddningsfördelningen ρ ?

Det enklaste argumentet för att magnetiska monopoler ej heller kan existera i en dynamisk regim följer från det klassiska statiska argumentet att $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Vi kan generalisera detta argument till en lika giltig *elektrodynamisk* lag genom att applicera divergensen på Faradays lag,¹²

$$\underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t))}_{\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) \equiv 0} = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Den sista likheten kan trivialt integreras till

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \text{konstant},$$

och om denna relation skall gälla för alla tider t , så måste den även gälla för någon start-tid (eller för den delen senare tid) då vi råkar ha en *statisk* konfiguration vid vilken $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0$. Enda möjligheten är därför att vi även *elektrodynamiskt* har att

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0,$$

vilket direkt ger vid hand att *magnetiska monopoler inte heller kan existera dynamiskt*. Argumentet ovan betyder också att Gauss lag för den magnetiska flödestätheten är identisk i magnetostatiska såväl som i elektrodynamiska situationer, något som vi kommer att använda i Föreläsning 9 då vi sätter samman den generella formen av *Maxwell's ekvationer*.

¹¹ Vi kan rekapsitulera att vi inom magnetostatiken, i Föreläsning 4, fann $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ som en direkt följd av formen på Biot–Savarts lag för en generell strömtäthet, samt från identiteten

$$\nabla \times \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = \underbrace{\nabla \times \left(-\nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right)}_{\nabla \times (\nabla f) \equiv 0} = 0.$$

¹² Se Föreläsning 5, *Faradays lag på differentialform*, eller Griffiths Ekv. (7.16), sid. 313.

Dipolapproximationen för stationära laddningsfördelningar och strömmar

För att sammanfatta ges den stationära skalära potentialen $\phi(\mathbf{x})$ och vektorpotentialen $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ från en laddnings- och strömtäthet i närheten av origo, i dipolapproximation och på långt avstånd från källan, som

$$\phi(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right), \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3},$$

där

$$q = \underbrace{\iiint_V \rho(\mathbf{x}') dV'}_{\text{nettoladdning [C]}}, \quad \mathbf{p} = \underbrace{\iiint_V x'_k \rho(\mathbf{x}') dV'}_{\text{elektriskt dipolmoment [Cm]}}, \quad \mathbf{m} = \underbrace{\frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV'}_{\text{magnetiskt dipolmoment [Am}^2\text{]}}.$$

Från dessa ges de *statiska* elektriska och magnetiska fälten som¹³

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}).$$

Man kan här fråga sig varför multipolutvecklingen för vektorpotentialen \mathbf{A} börjar med dipolmomentet, som går som $\sim 1/|\mathbf{x}|^3$, och inte som den skalära potentialen innehåller någon term som går som $\sim 1/|\mathbf{x}|$? Svaret på denna fråga är självfallet att vektorpotentialen, som är direkt länkad till magnetfältet genom $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, till skillnad från det elektrostatiska fallet *aldrig kan involvera magnetiska monopoler*, varför monopoltermer också saknas för just vektorpotentialen.

¹³ Notera att Ekv. (8.1.5) i Olov Ågrens *Elektromagnetism* (Studentlitteratur, 2014) definierar magnetiska fältet utifrån en konstruerad *magnetisk skalär potential* istället för vektorpotentialen. Vektorpotentialen är här dock mest naturlig att använda, utifrån den grundläggande egenskapen $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ hos magnetiska fältet, med \mathbf{A} som vektorpotentialen.

Sammanfattning av Föreläsning 8 – Multipolutvecklingen

- Multipolutvecklingen är i grund och botten bara en serieutveckling av potentialen (skalär eller vektor) i inversa potenser av distansen mellan källa och observationspunkt.
- Vi tar som vanligt fram uttrycken för potentialerna som

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV', \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'.$$

- Multipolutvecklingen klassificeras term för term utifrån hur beroendet av avståndet $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ mellan källpunkt \mathbf{x}' och fältpunkt \mathbf{x} ser ut:

1. Monopol (1-pol): $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r$
2. Dipol (2-pol): $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^2$
3. Kvadrupol (4-pol): $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^3$
4. Oktopol (8-pol): $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^4$
5. Hexadecapol (16-pol): $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^5$
6. Dotriaccontapol (32-pol): $\phi(\mathbf{x}) \sim 1/r^6$

- Multipolutvecklingen för den skalära potentialen för en linjär elektrisk dipol ges som

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(\underbrace{\frac{b \cos \theta}{r^2}}_{\text{dipol}} + \underbrace{\frac{(b \cos \theta)^3}{r^4}}_{\text{oktopol}} + \underbrace{\frac{(b \cos \theta)^5}{r^6}}_{\text{dotriaccontapol}} + \dots \right).$$

Notera att även den elektriska dipolen innehåller närfälts-termer svarande mot högre ordningars moment!

- Multipolutvecklingen för den skalära potentialen för en linjär elektrisk kvadrupol ges som

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(\underbrace{\frac{(b \cos \theta)^2}{r^3}}_{\text{kvadrupol}} + \underbrace{\frac{(b \cos \theta)^4}{r^5}}_{\text{hexadecapol}} + \underbrace{\frac{(b \cos \theta)^6}{r^7}}_{\text{hexacontatetrapol}} + \dots \right).$$

Notera att den elektriska kvadrupolen saknar dipolmoment!

- Dipolapproximationen för elektrostatiska ($\mathbf{E} = -\nabla\phi$) och magnetostatiska ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$) fält på långt avstånd $|\mathbf{x}|$ från laddningsfördelningen (källan) ρ lyder

$$\phi(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right), \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3},$$

där

$$q = \underbrace{\iiint_V \rho(\mathbf{x}') dV'}_{{\text{nettoladdning [C]}}}, \quad \mathbf{p} = \underbrace{\iiint_V x'_k \rho(\mathbf{x}') dV'}_{{\text{elektriskt dipolmoment [Cm]}}}, \quad \mathbf{m} = \underbrace{\frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV'}_{{\text{magnetiskt dipolmoment [Am}^2\text{]}}}.$$

Index

- Antenner, 2
- Dipol, 1, 4, 7
 - Elektrisk, 3, 5, 7
- Dipolapproximationen, 1, 16
- Dipolmoment
 - Elektriskt, 1
 - Magnetiskt, 1
- Dotriaccontapol, 1, 4, 7
- Elektrisk fältstyrka \mathbf{E} , 2, 16
- Hexacontatetrapol, 7
- Hexadecapol, 1, 7
- Integral
 - Volym-, 4
- Kvadrupol, 1, 7
- Laddningsfördelning
 - Distribution för punktladdning, 3
 - Lagen om att laddning inte kan försvinna, 13
- Maclaurin-utveckling, 10, 11, 13
- Magnetisk flödestäthet \mathbf{B} , 2, 16
- Magnetisk permeabilitet
 - Relativ permeabilitet μ_r , 2
 - Vakuumpermeabilitet μ_0 , 2
- Magnetiska monopoler
 - Från multipolutveckling av vektorpotential, 13
 - Icke-existens av, dynamiskt, 15
 - Icke-existens av, statiskt, 13, 16
- Magnetiskt dipolmoment
 - Från multipolutveckling av vektorpotential, 14
- Magnetiskt kvadrupolmoment
 - Från multipolutveckling av vektorpotential, 14
- Molekyler, 2
- Monopol, 1, 7
- Multipolutveckling, 2
 - För skalär potential, 10
 - För vektorpotential, 13
 - Generell laddningsfördelning, 10
 - Generell strömtäthet, 13
 - Klassificering av moment, 1, 7
- Oktopol, 1, 4, 7
- Punktladdning, 3
- Skalär potential ϕ , 2, 4, 5, 10, 11, 16
 - Multipolutveckling, 11
- Taylor-utveckling, 10, 11, 13
- Vektorpotential \mathbf{A} , 2, 16
 - Magnetisk monopolterm, 13
 - Magnetiska monopolterm, 14
 - Magnetiskt dipolmoment, 14
 - Magnetiskt kvadrupolmoment, 14
 - Multipolutveckling, 13