Föreläsning 1

Elektrostatik, superpositionsprincipen och Gauss lag

Fredrik Jonsson, Uppsala Universitet, 3 november 2025

Sammanfattning av föreläsningen

Med en kort sammanfattning av historiken bakom elektrostatik och upptäckten av elektronen som elementarladdning går vi direkt in på Coulombs lag för växelverkan mellan laddade partiklar. Coulombs lag, som i grund och botten kan härledas från utbyte av virtuella fotoner mellan laddade elementarpartiklar, tas här som ett axiom, från vilket vi härleder fram motsvarande kraft på en testladdning från ett system av laddningar, ur vilken det elektriska fältet definieras. En genomgång av superpositionsprincipen för elektriska fält följs av en härledning av Coulomb-växelverkan för en kontinuerlig distribution av laddningstäthet, den så kallade Coulombs generaliserade lag, eller kort och gott "Coulombintegralen". Vi introducerar det elektriska flödet som integralen av det elektriska fältet över en godtycklig yta, utifrån vilket vi härleder Gauss lag för elektriska fält, tillämpbar på godtyckliga laddningsfördelningar i form av punkt- linje- yt- eller volymladdningar. Slutligen avslutar vi med en härledning av Gauss lag på differentialform.

Sammanfattning i tre punkter

1. *Superpositionsprincipen, som är central i hela föreläsningsserien, innebär att vi kan addera separata lösningar för elektriska fält från separata laddningar och laddningsfördelningar till en lösning för det totala fältet.*
2. *Det elektriska fältet från ett system av punktladdningar q'_k, placerade i källpunkter $\mathbf{x}'_k$, kan för en kontinuerlig laddningsfördelning (laddningstäthet) $\rho(\mathbf{x})$ formuleras som Coulombs generaliserade lag ("Coulombintegralen"),*

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{N} q'_k \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}'_k)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'_k|^3}, \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \rho(\mathbf{x}')\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\,dV'.$$

   där laddningstätheten i sin tur kan beskriva punktladdningar som

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_k q_k \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_k)$$

3. *Gauss lag på integral- respektive differentialform:*

$$\oiint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho(\mathbf{x})\,dV \qquad \Leftrightarrow \qquad \nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}.$$

Introduktion till elektrostatik

Vi kommer i denna första föreläsning[1] att behandla *elektrostatik*, som är läran om hur *stationära* elektriska laddningar växelverkar. Vi passar redan nu på att sammanfatta begreppen elektrostatik och magnetostatik enligt följande:

- Stationära, tidsoberoende laddningar ⇒ Konstanta elektriska fält (elektro*statik*)
- Stationära, tidsoberoende strömmar ⇒ Konstanta magnetiska fält (magneto*statik*)

Historik – Elektrostatik från de gamla grekerna till Coulomb

Elektrostatikens historik kan sägas ha börjat med "de gamla grekerna", som observerade att bärnsten som gnuggades med skinn efteråt attraherade lätta objekt som damm eller hårstrån. Detta fenomen döptes till "elektricitet" från det gammalgrekiska (klassiskt grekiska) ordet för bärnsten, "elektron".[2] Under 1600- och 1700-talen gjordes framsteg primärt i och med William Gilberts *On Magnetism* (1600), där elektrisk attraktionskraft separerades från magnetism, samt François de Cisternay du Fays[3] (1730) upptäckt av *två typer* av laddning, "vitreous" ("glasaktig", associerat med att den uppstod då glas gnidits med silke) och "resinous" ("kådaktig", "hartsartad", associerat med att den uppstod då harts eller bärnsten gnidits med päls).

Benjamin Franklin (1706–1790) utförde under åren 1747–1749 experiment för att bevisa sin teori kring "en-vätskehypotesen", där han argumenterade för att du Fays "vitreous och resinuous" dubbel-vätsketori var felaktig och att det bara fanns en typ av "elektrisk vätska", och att alla elektrostatiska effekter kunde spåras till ett överflöd respektive underskott av denna "vätska". Franklin betecknade dessa som *positivt* (överflöd) respektive *negativt* (underskott) av elektrisk vätska, termer som fortfarande idag lever kvar för att beteckna laddningens polaritet.

Charles-Augustin de Coulomb (1736–1806) förtjänar ett eget kapitel i elektrostatikens historia, i och med publiceringen av hans *Second Mémoire sur l'Électricité et le Magnétisme* [*Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, sid. 578–611 (1785)].[4] I denna publikation, på sidan 579, fastställs det för första gången att den attraktiva kraften mellan två motsatt laddade sfärer är proportionell mot produkten av laddningarna på sfärerna, samt inverst proportionell mot kvadraten på avståndet mellan sfärerna;[5] med andra ord Coulombs lag så som vi idag känner den, och som dessutom är den primära basen för ämnet för denna föreläsning.

Rent historiskt är det anmärkningsvärt att det tog mer än hundra år innan den Brittiska fysikern Joseph John "J. J." Thomson (1856–1940, Nobelpris i fysik 1906) visade på existensen av elektroner 1897, genom experiment med elektroner i katodstrålerör. Genom att mäta hur katodstrålen kunde fås att avvika från en rät linje med elektriska och magnetiska fält drog han slutsatsen att katodstrålen bestod av vad han från början kallade "korpuskler" med negativ laddning och en storlek som var väsentligt mindre än atomer. Den vetenskapliga världen hade dock redan börjat anamma ordet "elektron" för dessa elementarladdningar, och Thomson anpassade sin terminologi därefter.

J. J. Thomsons upptäckt av elektronen hade effekt inte bara på elektrostatiken i sig, utan på vetenskapen i stort då han påvisade att atomer inte var de fundamentala partiklar som man tidigare hade trott, i form av homogena sfärer, utan kan sägas vara startskottet för nya atommodeller, som till exempel Ernest Rutherfords (1871–1937, Nobelpris i kemi 1908) upptäckt av atomkärnan 1912, och Niels Bohrs (1885–1962, Nobelpris i fysik 1922) skalmodell av atomen 1913.

---

[1] Detta avsnitt har sannolikt ett visst överlapp med tidigare kurser; anledningen till att vi trots allt väljer att inkludera fundamentan av växelverkan mellan laddningar är att notation och beteckningar kommer att återkomma frekvent genom kursen, samt att vissa detaljer som superpositionsprincipen är basen för senare, mer avancerade tillämpningar.

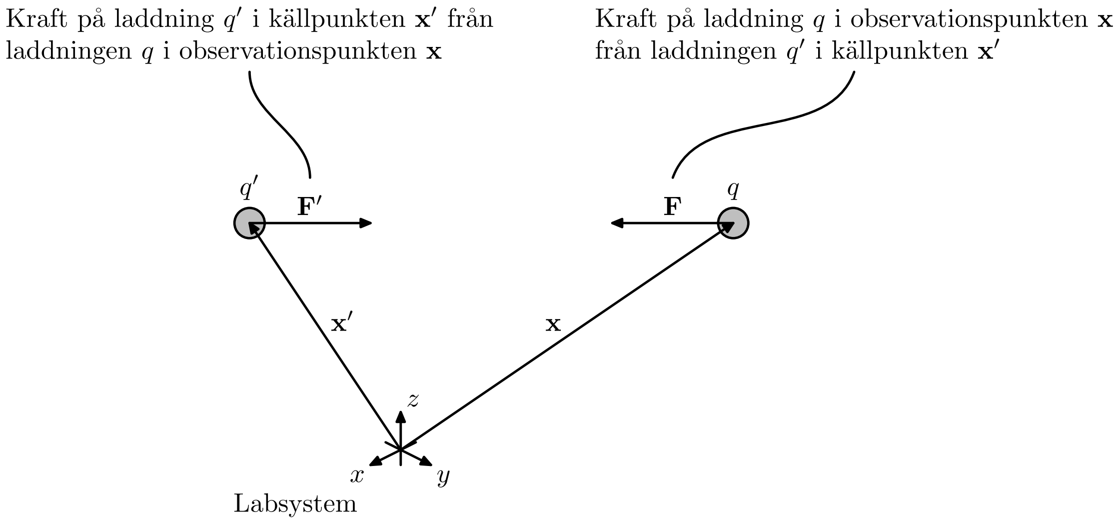
[2] $\eta\lambda\epsilon\kappa\tau\rho o$; från klassisk grekiska $\eta\lambda\epsilon\kappa\tau\rho o\nu$ (elektron, "bärnsten").

[3] Vilket namn!

[4] Väl värd att ta en titt på: `https://books.google.se/books?id=by5EAAAAcAAJ&pg=PA578`

[5] Coulombs lag var självfallet ej uttryckt i moderna enheter i denna tidiga artikel; SI-systemet skulle inte komma att träda i kraft förrän 1954.

Coulombs lag för punktladdningar



Som den mest fundamentala byggstenen i elektrostatiken har vi att två punktladdningar q och q', räknade med sina respektive tecken för positiv eller negativ laddning och placerade i respektive *observationspunkten* $\mathbf{x}$ och *källpunkten* $\mathbf{x}'$, attraherar eller repellerar varandra med en kraft $\mathbf{F}$ genom Coulombs lag[6]

$$\mathbf{F} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}}_{\sim 1/r^2},$$

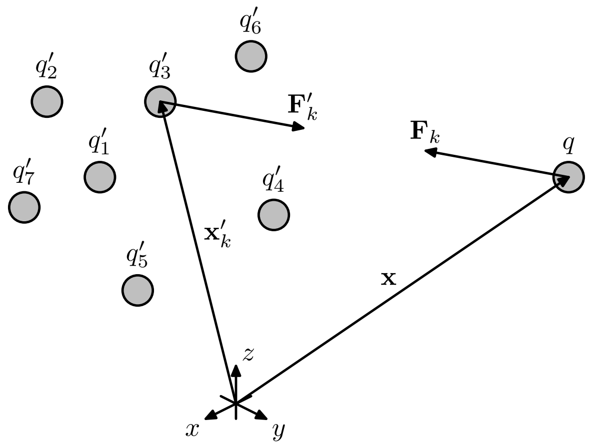
där

$$\varepsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{12}\ \mathrm{F/m}$$

är konstanten för den *elektriska permittiviteten i vakuum*, eller kort och gott *vakuumpermittiviteten.* Självfallet agerar denna kraft reciprokt på källaddningen q', och vi kan i uttrycket för Coulombs kraftlag ovan helt sonika växla primmet över till den andra positionen och direkt erhålla

$$\mathbf{F}' = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3}.$$

[6] Griffiths Ekv. (2.1), sid. 60; laddningen i observationspunkten betecknas som "test charge". Observera också Griffiths lite udda stil i notationen av "$(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$" som "scriptat $\mathbf{x}$" (se Griffiths Ekv. (2.2) på sid. 60). Den notation som Griffiths använder är lite olycklig i det att tolkningen av en ortsvektor $\mathbf{x}$ därmed blir beroende av vilken stil på typsnittet som använts; i denna föreläsningsserie kommer vi att helt undvika denna förbryllande notation och istället genomgående att i klartext skriva ut "$(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$".



Om vi istället för en enskild punktladdning vid källpunkten betraktar ett *system* av N laddningar q'_k vid respektive källpositioner $\mathbf{x}'_k$ (med prim för konsekvent notation för källpunkter), är den totala kraften som verkar på laddningen q vid observationspunkten uppenbarligen

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{N} q q'_k \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}'_k)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_k|^3} \\ &= q \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{N} q'_k \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}'_k)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_k|^3} \right) \\ &= q\mathbf{E}(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

där vi *definierade* det elektriska fältet $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ från de N punktladdningarna som[7]

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{N} q'_k \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}'_k)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_k|^3}.$$

Ett par observationer kring det elektriska fältet:

- Formuleringen av uttrycket för det elektriska fältet är *helt oberoende av testladdningen* q. Detta kan tyckas självklart, men har en fundamental betydelse när vi alldeles strax kommer att generalisera fältbeskrivningen som Gauss lag. Specifikt, så kan vi till ett elektriskt fält associerat med en viss grupp av laddningar det elektriska fältet associerat med en komplementär grupp av laddningar; exempelvis kan vi betrakta ett totalt fält som uppbyggt dels av käll-laddningarna q'_k dels av fältet som är associerat till testladdningen q.
- Summeringen av alla delbidrag vilar på att vi kan betrakta varje laddning som oberoende av alla andra laddningar. I grund och botten antar vi att detta är ett *linjärt* problem. Mer om detta strax.
- Denna möjlighet att addera individuella del-lösningar till en lösning för det totala problemet brukar vi beteckna med *superpositionsprincipen*, vilken är generellt giltig enbart för *linjära problem*.
- I detta antagande ligger implicit antagandet om att samtliga laddningar i problemet har fixa positioner som inte ändras genom närvaro av andra laddningar. Vi kommer senare i kursen att se hur exempelvis ytladdningar på ledande material justeras utifrån elektrostatiken till att bilda fördelningar beroende på externa faktorer (externa laddningar); i dessa fall är dock den stationära lösningen i *steady-state* fortfarande giltig under superpositionsprincipen.

[7] Griffiths Ekv. (2.4), sid. 61.

Vad är ursprunget för denna växelverkan? Kan vi härleda Coulombs lag?

Vi kan alla alltsedan sedan skoltiden i gymnasiet formen på Coulombs lag, och till slut sätter sig denna känsla för "proportionalitet mot produkten av laddningarnas värde och inversen av deras avstånd i kvadrat" i ryggmärgen som en given, praktiskt taget axiomatisk[8] naturlag. Om man börjar fundera lite på det och lämnar den intuition som vi erhållit kring Coulombs lag, så blir det dock aningen konstigt. Varför skulle laddningar överhuvudtaget ha egenskaper som gör att de attraheras eller repelleras av varandra? Vi vet ju dessutom att dessa laddningar (typiskt elektroner och protoner) är mycket små, och även om vi har mängder av dessa elementarpartiklar i ett material, varför skulle dessa sub-mikroskopiska partiklar ha en räckvidd som sträcker sig över makroskopiska avstånd?

Frågan blir därmed: Kan vi härleda Coulombs lag?

Svaret på denna fråga är utan tvekan "ja", men tyvärr inte med de klassiska verktyg som vi förfogar över i denna kurs. Om vi skall försöka sammanfatta grunden i växelverkan mellan laddade elementarpartiklar i ett par punkter, så bygger denna på följande.

- Växelverkan mellan elementarpartiklar som bär laddning sker via så kallade *virtuella fotoner*, vilka skiljer sig från våra "vardagliga" fotoner som är synliga kvanta av ljus. Virtuella fotoner är temporära och existerar endast under det att växelverkan sker, och är "bärarna av kraft" för elektromagnetiska krafter.
- Laddade partiklar som elektroner och protoner utbyter virtuella fotoner mellan sig hela tiden, men med starkare intensitet när de kommer nära varandra. Detta konstanta utbyte tillåter partiklarna att utöva krafter på varandra, så som attraktion eller repulsion.
- Viktig poäng: *Virtuella fotoner kan inte observeras direkt, till skillnad från vanliga fotoner.*
- Virtuella fotoner existerar och kan påvisas inom ramverket för kvantfältteori (*quantum field theory*). De är dock inte väldefinierade utanför fältet för växelverkan mellan partiklar, och de kan (i likhet med vanliga fotoner) "låna" eneri och moment under korta tidsrymder, helt enligt Heisenbergs osäkerhetsteori i kvantmekaniken.

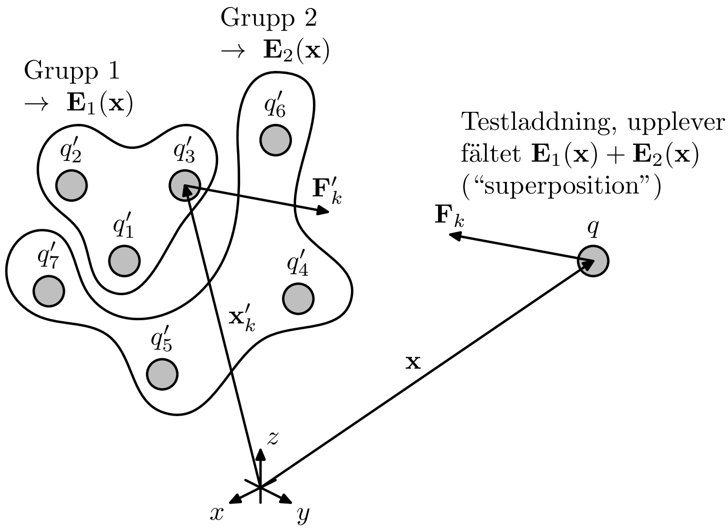
Med detta sagt, så kommer vi framöver i kursen helt och hållet att betrakta Coulombs lag som en axiomatiskt given naturlag.

[8] *Axiomatisk*: "självklart sann" eller baserad på ett eller flera axiom. Ett axiom är en grundläggande sats eller ett påstående som antas vara sant *utan bevis* och som används för att härleda andra sanningar i ett system.

Superpositionsprincipen

Att separat framtagna elektriska fält kan ses som och adderas som komponenter av ett totalt elektriskt fält är basen i vad vi kallar *superpositionsprincipen.*[9] Vi kan illustrera detta genom att godtyckligt dela upp det elektriska fält vi nyss tog fram i två delar, med två separata grupper av de N källaddningarna, enligt

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) \equiv \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{M} q'_k \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}'_k)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'_k|^3}}_{\substack{\text{Grupp 1} \to \ \mathbf{E}_1(\mathbf{x}) \\ (M \text{ laddningar})}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=M+1}^{N} q'_k \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}'_k)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'_k|^3}}_{\substack{\text{Grupp 2} \to \ \mathbf{E}_2(\mathbf{x}) \\ (N-M \text{ laddningar})}} = \mathbf{E}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{x}).$$



Med andra ord, så länge som inte de inbördes positionerna eller laddningarna påverkas av varandra (inga fria rörelser eller tillförsel av strömmar) och om vi råkar ha en geometri som på något sätt gynnar framtagandet av komponenter för det totala elektriska fältet, så står det oss fritt att *beräkna komponenterna separat och därefter sammanfoga dessa till en total lösning för det elektriska fältet.* Denna superpositionsprincip gäller generellt för så kallade *linjära problem.*

Coulombintegralen - Coulombs generaliserade lag

Så långt har vi endast betraktat system av *punktladdningar*, men med superpositionsprincipen i beaktande är naturligtvis steget minimalt att att överföra diskussionen till ett *kontinuum av laddning i rummet*, fördelad enligt en laddningstäthet $\rho(\mathbf{x})$ (C/m^3). I detta fall kan vi se det som att varje volymelement ΔV_k i källpunkterna $\mathbf{x}'_k$ i rummet uppbär en laddning som vi kan se som en punktladdning, vilket i ett kontinuum övergår till

$$q'_k = \rho(\mathbf{x}')\Delta V_k \to \rho(\mathbf{x}')dV'.$$

Då alla dessa infinitesimala volymelement summeras upp erhåller vi *Coulomb-integralen* för det elektriska fältet i en observationspunkt $\mathbf{x}$ som[10]

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_V \rho(\mathbf{x}')\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\,dV'.$$

[9] Generellt gäller det under *superposition* att vi rent matematiskt har att göra med en funktion F som har egenskaperna att $F(x+y) = F(x) + F(y)$ (additivitet) samt att $F(ax) = aF(x)$ (homogenitet). Ordet *superposition* härrör i sig från det senlatinska *superpositionem*, med betydelse *att placera över.* Ordet kommer sig av *super* ("ovanför") och *ponere* ("att placera").

[10] Notera att Griffiths Ekv. (2.8), sid. 63, betecknar *inte* denna som "*Coulomb integral*", vilket är lite synd då denna term på pricken beskriver vad det handlar om.

Vad är egentligen poängen med att använda elektriska fält?

När vi nu framställt två olika representationer för att behandla elektrostatiska fältproblem (och vi kommer alldeles strax att dessutom introducera en *tredje* variant i och med potentialer), så infinner sig naturligtvis frågan varför vi inte bara kan nöja oss med Coulombs lag? Denna ger ju direkt kraften, så vad är överhuvud vitsen med att (till synes) bara komplicera saker och ting genom att införa elektriska fält och potentialer?

Låt oss med anledning av denna retoriska fråga sammanfatta ett par anledningar till varför konceptet med fält underlättar för oss.[11]

Fältkonceptet eliminerar "verkan på distans" ("action at a distance")

- Enbart utifrån Coulombs lag så som den här fastställts, så verkar varje enskild laddning på alla andra laddningar momentant (direkt utan någon fördröjning) oavsett avstånd.
- Fältmodellen tillåter oss att låta en laddnings påverkan att propagera genom rummet, med en fix hastighet som normalt är ljushastigheten eller denna nedskalad med motsvarande brytningsindex för mediet i rummet.

Lokalitet och kausalitet

- Vi kan med fältkonceptet analysera kraften på en laddning *lokalt* vid punkten där den är placerad, utan att behöva bry oss om själva källan. (Detta när vi väl har beräknat själva fältet, självfallet!)
- Detta gör fältkonceptet kompatibelt med relativitetsteori och modern fältteori.

Förenkling av mångkropps-problem

- Med N laddningar blir beräkningen av alla parvisa krafter som verkar i systemet snabbt mycket omständligt, med $N(N-1)$ växelverkningar.
- Med fältkonceptet kan vi beräkna fältet från de N laddningarna en gång för alla (med superpositionsprincipen!) och därefter ta fram kraften på varje laddning q_k som $\mathbf{F}_k = q_k\mathbf{E}$.

Fält kan existera oberoende av laddning

- Fält kan existera och breda ut sig utan (direkt) närvaro av laddning, till exempel elektromagnetiska vågor.
- Detta visar på att fält är inte bara ett bekvämt matematiskt verktyg, de har en fysikalisk realitet bortom enbart varandes ett sätt att dela upp Coulombs kraftlag i faktorer.

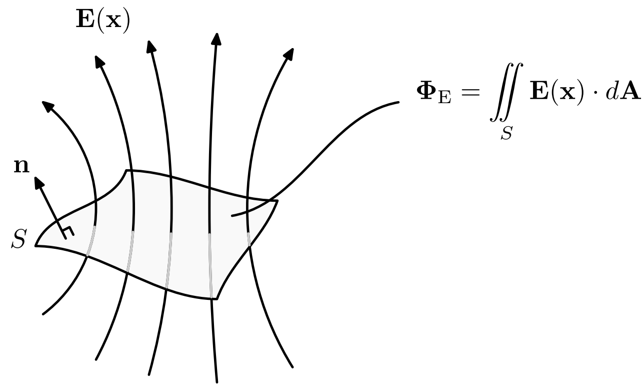
[11] Fundera gärna igenom argumenten och kom på fler exempel!

Gauss lag härledd i fyra steg

Vi skulle här i princip bara kunna hänvisa till den generella formen av Gauss lag, men skulle då riskera att missa några intressanta poänger. Låt oss därför ta detta från grunden, med utgångspunkt i Coulombs lag, i fyra enkla steg som förhoppningsvis ger oss en djupare fysikalisk förståelse för vad Gauss lag innebär.

Definition: Elektriskt flöde

För att diskutera resultaten i dessa fyra steg kommer vi att använda konceptet *elektriskt flöde* Φ_{E} (enhet: V·m), som definieras som den integrerade normalkomponenten av den elektriska fältstyrkan över en yta S,



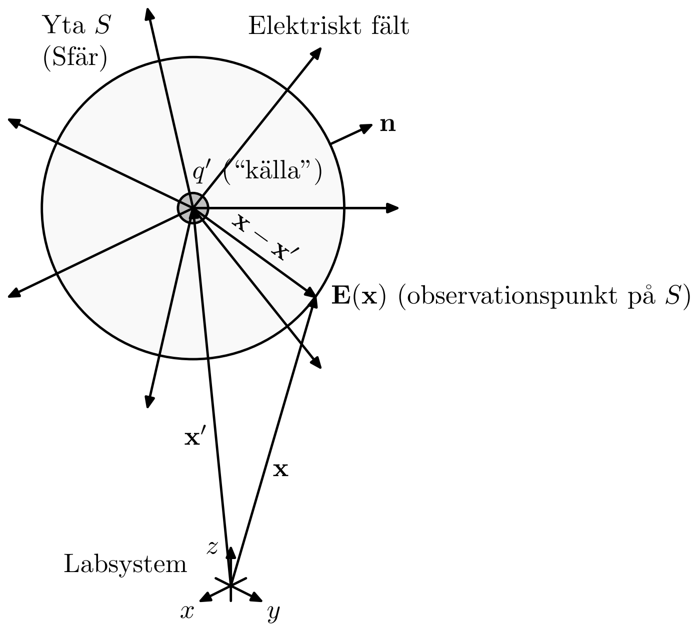
Notera att det *inte finns något fysikaliskt flöde associerat med ett elektriskt fält*, men att vi i analogi med andra vektorfält inom "riktiga flöden" hos gaser eller vätskor tänker oss ett flöde även för det elektriska fältet.[12] Vi kan lite handviftande säga att det elektriska flödet är ett mått på "hur många elektriska fältlinjer som passerar ut genom ytan", räknat med tecken utifrån ytans normalvektor $\mathbf{n}$.

[12] Notera även den lite olyckliga associationen man lätt gör till "elektriskt flöde" som en slags ström; det elektriska fältet i sig innebär ju dock ej någon explicit transport av laddning, vilket i så fall skulle betecknas som en elektrisk ström. Först i närvaro av fria laddningar har vi ett fysikaliskt flöde i form av en ström associerad med det elektriska flödet.

Steg 1: Sfärisk symmetrisk omslutande yta och punktladdning

Antag att vi har en punktladdning q' placerad i position vid ortsvektorn $\mathbf{x}'$. Då vi beräknar det elektriska flödet ut från denna laddning, så kan vi se det som att flödet härrör från en *källa*, och vi kommer framöver i kursen ofta att relatera till "källaddningar" som ger upphov till elektriska fält och flöden.[13]

Vi lägger en hypotetisk sfär S med radien $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = r =$ konstant runt punktladdningen, med syfte att försöka beräkna det totala elektriska flödet ut genom ytan.



Det elektriska flödet ut genom den slutna sfären S, räknat gentemot ytans normalvektor $\mathbf{n}$, ges med utnyttjandet av den sfäriska symmetrin som

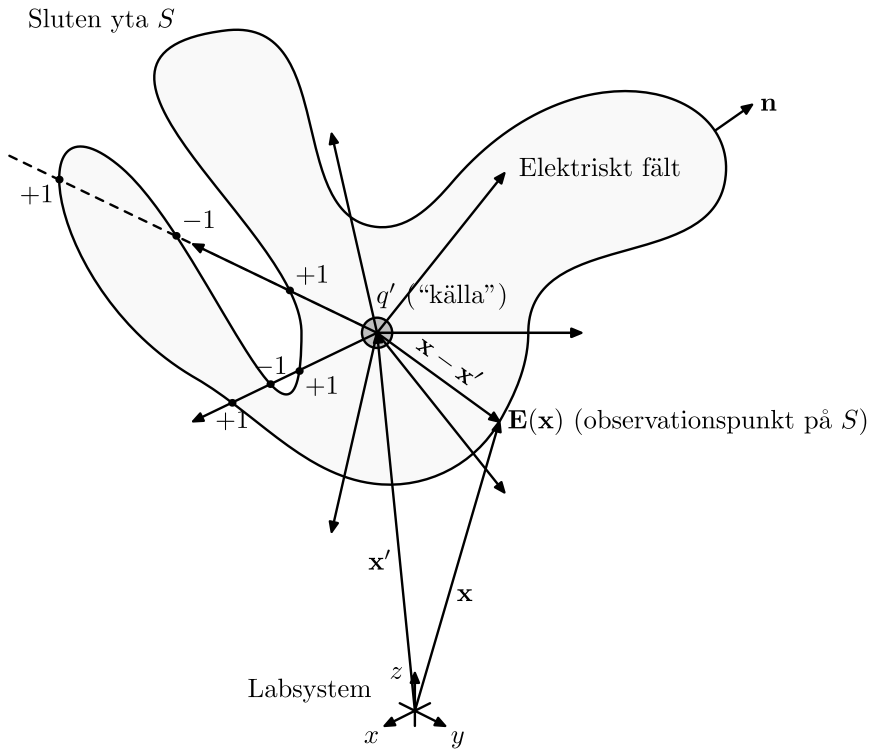
$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathrm{E}} &= \oiint_S \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{A} \\
&= \oiint_S \underbrace{\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}}_{=E_r(r)\mathbf{e}_r} \cdot \underbrace{\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dA}_{=\mathbf{e}_r dA} = \left\{ \text{Tag } r \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \right\} \\
&= \oiint_S \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \, dA = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \oiint_S dA = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q'}{\varepsilon_0}
\end{aligned}$$

Notera att det elektriska flödet Φ_{E} tolkat som "hur många fältlinjer som passerar ytan" är oberoende av radien på den omslutande sfären, och *enbart beror på styrkan av den inneslutna laddningen* (som kan vara positivt eller negativt) samt vakuumpermittiviteten ε_0. Vi kommer att utnyttja detta faktum i nästa steg.

[13] Genomgående kommer vi i kursen att sätta ett prim ($'$) på de objekt som vi betraktar som källor, som $\mathbf{x}'$, dA' eller dV', och låta observationspunkt och mätetal vid denna vara oprimmade. Vi kommer även att genomgående explicit använda Leibniz notation ($\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{d}{dx}$) för derivator, för att inte råka in i situationer där ett prim kan misstas för en derivata.

Steg 2: Godtycklig omslutande yta och punktladdning

Låt oss nu generalisera Steg 1 genom att ersätta den sfäriska referensytan mot en yta av godtycklig form, med det enda kravet att vi fortfarande omsluter punktladdningen q'. Denna nya yta behöver inte vara, säg, överallt konvex, och vi tillåter även att ytan exempelvis får vika sig runt sig själv.



Om vi nu betraktar det elektriska flödet som måttet på "hur många flödeslinjer som passerar ytan, räknat gentemot ytans normalvektor", så ser vi att oavsett hur den omslutande ytan är formad så kommer exakt lika många skärningspunkter att erhållas som i Steg 1 under sfärisk symmetri. I de fall där en fältlinje skär en del av den omslutande ytan som är vikt omlott, så kommer varje skärning in i volymen att exakt motsvaras av en skärning ut ifrån ytan, med följd att samtliga fältlinjer kommer att ha ett resultat av exakt en skärning utåt.

Ett sätt att bokföringsmässigt sätt hantera antalet skärningar mellan varje fältlinje och ytan omslutande punktladdningen är att associera varje skärning *ut* från ytan med värdet $+1$ ($\mathbf{n}\cdot\mathbf{E} > 0$) och varje skärning *in* mot ytan med värdet -1 ($\mathbf{n}\cdot\mathbf{E} < 0$). Om man följer varje fältlinje från källan ut mot oändligheten så inser man direkt att summan av alla skärningar, och därmed varje fältlinjes bidrag till det totala elektriska flödet, är *exakt en ekvivalent skärning utåt genom ytan.*

Notera att laddningar som ligger *utanför* volymen alltid kommer att ha fältlinjer som har ett *jämnt antal skärningar* med den godtyckliga ytan S (inklusive möjligheten att en fältlinje inte skär ytan alls). Slutsatsen av detta är att *laddningar utanför volymen alltid kommer att ha exakt noll i sina bidrag till det totala elektriska flödet genom den slutna ytan S.*

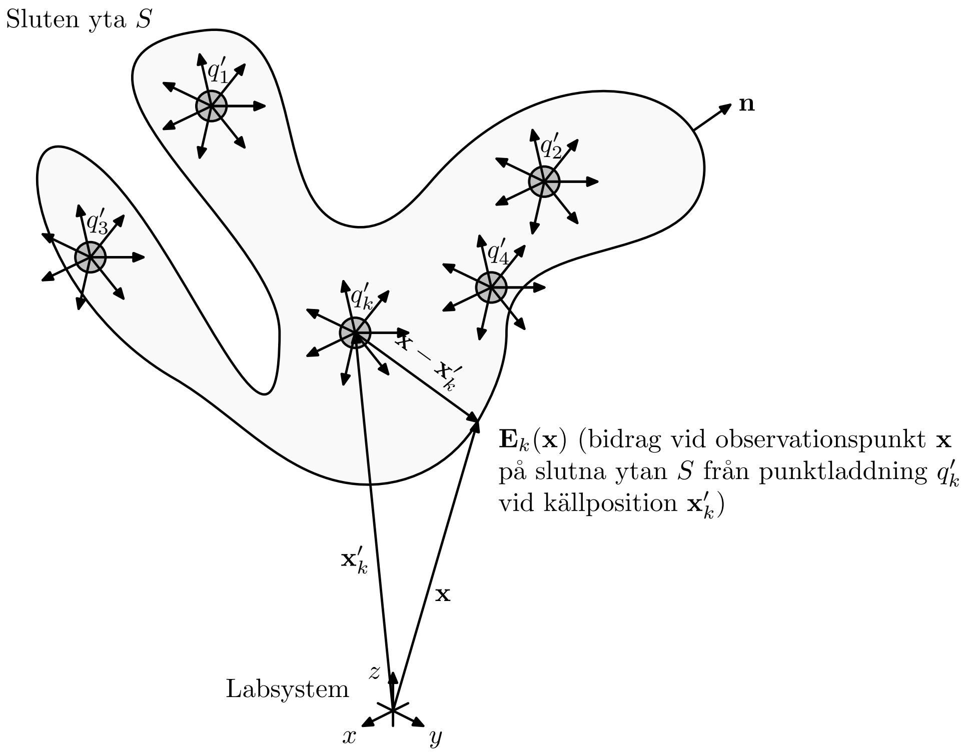
Resultatet av detta resonemang är att vi *fortfarande har exakt samma totala elektriska flöde* Φ_{E} ut genom ytan som omsluter punktladdningen q'. Med andra ord gäller det även för en *godtycklig* omslutande yta S att

$$\Phi_{\mathrm{E}} = \oiint_S \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{A} = \frac{q'}{\varepsilon_0},$$

det vill säga att *det totala elektriska flödet ut genom den slutna ytan enbart bestäms av värdet på den inneslutna punktladdningen.* Vi kommer nu att använda detta resultat i Steg 3.

Steg 3: Godtycklig omslutande yta och system av punktladdningar

Vi kommer nu att ytterligare generalisera föregående resultat genom att betrakta ett system av N statiska punktladdningar, fixerade i rummet och liksom tidigare inneslutna av en hypotetisk godtyckig yta S med samma egenskaper som tidigare.



Vi ser att situationen för varje enskild laddning i sig är identisk med situationen som vi analyserade i Steg 2. Varje enskild innesluten punktladdning ("källa") q'_k skulle därmed ge ett bidrag till det totala elektriska flödet som q'_k/ε_0.

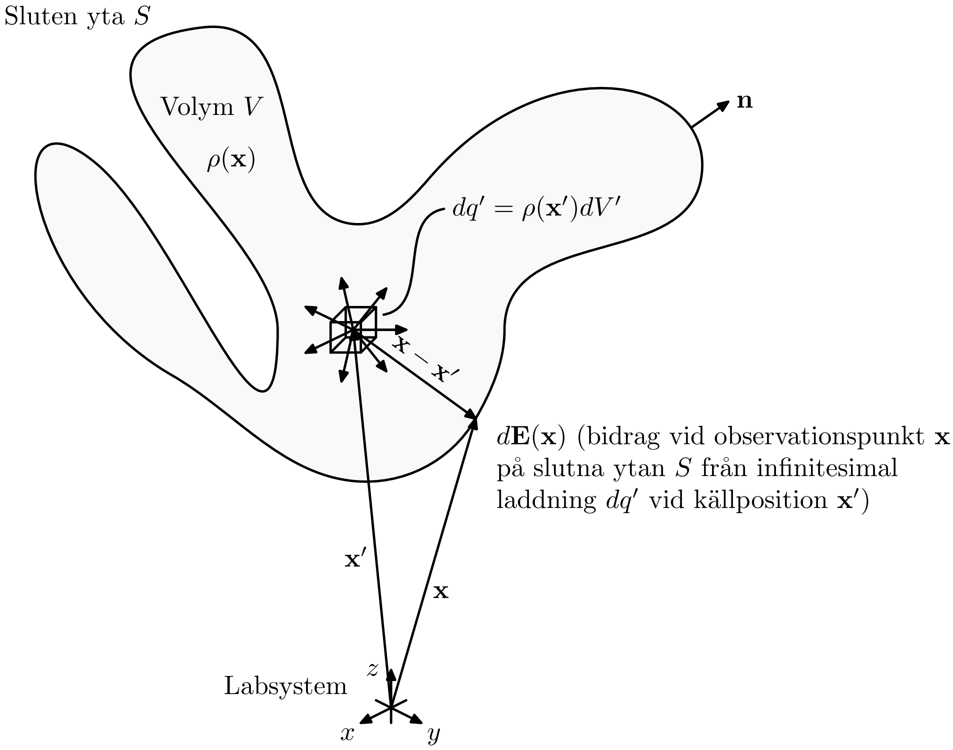
Rent formellt är det totala elektriska flödet ut genom den slutna generella ytan S enligt superpositionsprincipen given som

$$\begin{aligned}
\Phi_\mathrm{E} &= \oint\!\!\!\oint_S \mathbf{E}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{A} = \{\text{Superpositionsprincipen}\}\\
&= \oint\!\!\!\oint_S \left(\sum_{k=1}^{N} \mathbf{E}_k(\mathbf{x})\right)\cdot d\mathbf{A} = \{\text{Bryt ut summationen}\}\\
&= \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{E}_k(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{A}}_{=q'_k/\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{N} q'_k = q'_\mathrm{tot}/\varepsilon_0.
\end{aligned}$$

Slutsatsen av detta resultat är att *det totala elektriska flödet Φ_E ut genom den slutna ytan fortfarande enbart beror av den inneslutna laddningen q'_tot*. I det sista steget kommer vi nu att generalisera detta till godtyckliga kontinuerliga laddningsfördelningar.

Steg 4: Godtycklig omslutande yta och kontinuerlig laddningsfördelning
Antag att vi nu istället för diskreta punktladdningar q'_k har en laddningsfördelning $\rho(\mathbf{x})$ (enhet $\mathrm{C/m^3}$) i en sluten (i rummet begränsad) volym V. Denna laddningsfördelning kan variera kontinuerligt (jämnt) i rummet såväl som diskontinuerligt (stegvis), och vi lämnar även öppet för att $\rho(\mathbf{x})$ skall kunna tolkas som en fördelning innehållande (Dirac-)delta-funktioner $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'_k)$, med betydelsen av diskreta punktladdningar placerade vid källpositioner $\mathbf{x}'_k$.

I termer av laddningsfördelningen $\rho(\mathbf{x})$ uppbär då varje infinitesimalt *källelement* med volymen dV' vid källpositionen $\mathbf{x}'$ laddningen $dq' = \rho(\mathbf{x}')dV'$, vilken vi kan betrakta som en infinitesimal punktladdning.



Med det tidigare resultatet för framtagandet av det elektriska fältet från diskreta laddningar så följer det kontinuerliga fallet helt analogt, och med användande av superpositionsprincipen får vi direkt att den tidigare summan över diskreta laddningar i rummet ersätts av volymsintegralen[14]

$$\Phi_{\mathrm{E}} = \oiint_S \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{A} = \left\{ \text{ Steg 3: } \text{“}\tfrac{1}{\varepsilon_0} \textstyle\sum_{k=1}^{N} dq'_k\text{”} \right\} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho(\mathbf{x}')\, dV' = q_{\mathrm{tot}}/\varepsilon_0.$$

Vi har därmed kommit fram till den generella formen av *Gauss lag på integralform*, vilken vi sammanfattar med

$$\oiint_S \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho(\mathbf{x}')\, dV'.$$

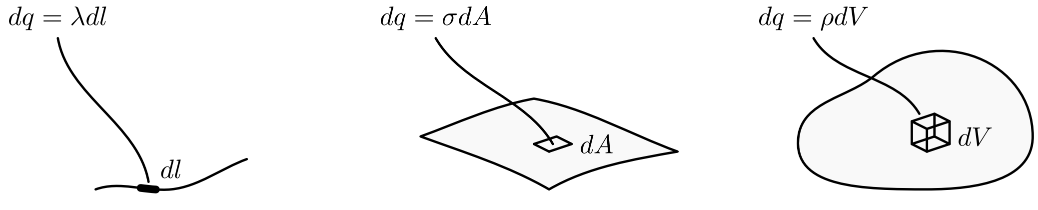
Vi rekapitulerar att *Gauss lag har härletts enbart utifrån Coulombs klassiska lag för punktladdningar samt superpositionsprincipen.*

Då Coulombs lag bygger på ett (för vår del) mer eller mindre heuristiskt $1/r^2$-beroende för det elektriska fältets avtagande från punktladdningen, så är det lätt att tro att detta beroende på något sätt också kommer att slå in på det elektriska fältet från en godtycklig laddningsfördelning. Detta är dock mer komplicerat till sin natur, och som vi senare kommer att se i Föreläsning 8 kring multipolutveckling av laddningsfördelningar så finns det en uppsjö av olika så kallade *multipoler* med olika grad av avklingande.

[14] Notera att Griffiths (sid. 70) olyckligtvis använder den udda och vilseledande notationen $Q_{\mathrm{enc}} = \int_V \rho\, d\tau$ för volymintegralen. Normalt använder vi τ som integrationsvariabel i *tid*.

Kontinuerliga laddningsfördelningar

Konceptet kontinuerlig laddningsfördelning kan självfallet appliceras på även trajektorior i rummet (linjeladdningar), ytor (ytladdningar). I de fall där man har att göra med punktladdningar på linjer, ytor eller i volymer, så kan dessa modelleras som spatiala delta-pulser $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ där $\mathbf{x}'$ är positionen för punktladdningen.



Linjeladdning λ (C/m) Ytladdning σ (C/m^2) Volymladdning ρ (C/m^3)

Från Gauss lag till Coulombs lag

En enkel exercis för att få en känsla för Gauss lag och vad det innebär är att gå andra vägen, och från vårt sista resultat härleda Coulombs lag för växelverkan mellan punktladdningar. Antag att vi placerat en “källa” i form av en punktladdning q' i källpunkten $\mathbf{x}'$. Sett som en distribution motsvarar detta laddningstätheten[15]

$$\rho(\mathbf{x}) = q'\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}').$$

Antag vidare att vi lägger en hypotetisk sfär med radien r centrerad runt denna punktladdning. Gauss lag för laddningsfördelningar ger oss då med användande av sfärisk symmetri att

$$\underbrace{\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{E}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{A}}_{=E_r(r)4\pi r^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\underbrace{\iiint_V \underbrace{q'\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}_{\rho(\mathbf{x})}\,dV'}_{=q'} \qquad \Rightarrow \qquad E_r(r) = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Utöver att visa på hur man kan “gå baklänges” från Gauss lag till Coulombs lag, med det välkända $1/r^2$-beroendet på avstånd från punktkällan, så ger denna härledning också vid hand hur koefficienten “$4\pi\varepsilon_0$” dyker upp. Vi kommer framöver i kursen att se hur denna koefficient dyker upp praktiskt taget överallt i elektrostatiken.

[15] Griffiths använder notationen $\delta^3(\mathbf{x})$ för den skalära (Dirac-)delta-funktionen i tre dimensioner; exponentlägets “3” är dock onödigt då det utifrån argumentet är uppenbart att det handlar om just tre dimensioner.

Gauss lag på differentialform

Så som vi formulerat Gauss lag hittills är den på *integralform.* Denna form följer mer eller mindre intuitivt utifrån sättet vi härlett den, genom successiva generaliseringar där vi adderar (integrerar) infinitesimala laddningar och via superpositionsprincipen lägger ihop delresultaten för fält och flöden till en total lösning. I många fall är det dock användbart att istället ha Gauss lag på differentialform till hands, och en fördel med denna form är att vi samtidigt enklare ser hur vi kan se laddningstätheten $\rho(\mathbf{x})$ som en *källfördelning* i elektrostatiska (och elektrodynamiska) problem.

Vi applicerar först divergensteoremet[16] på det elektriska fältet, som för en godtycklig volym V omsluten av en yta S lyder

$$\iiint\limits_V \nabla \cdot \mathbf{E}\, dV = \oint\!\!\!\!\oint\limits_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}.$$

Vi har samtidigt visat att detta uttryck enligt Gauss lag uppenbarligen ges som[17]

$$\oint\!\!\!\!\oint\limits_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint\limits_V \rho(\mathbf{x})\, dV,$$

vilket i sin tur betyder att

$$\iiint\limits_V \nabla \cdot \mathbf{E}\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint\limits_V \rho(\mathbf{x})\, dV.$$

Eftersom denna relation gäller för en *godtyckligt* vald volym V och för en *godtycklig* laddningstäthet $\rho(\mathbf{x})$, så betyder detta att integranderna i vänster- och högerledet måste vara identiska, det vill säga att

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0},$$

vilket sammanfattar *Gauss lag på differentialform.*

[16] Se exempelvis innerpärmen på Griffiths, "*Divergence Theorem*". Återigen, notera att Griffiths använder den aningen olyckliga notationen "$d\tau$" för volymelement.

[17] Vi tar oss här friheten att skippa primmet på källorna; det är i sammanhanget uppenbart över vilka domäner integralerna skall tolkas.

Sammanfattning av Föreläsning 1 – Elektrostatik, superpositionsprincipen och Gauss lag

- I elektrostatiken, och även senare i elektrodynamiken, har vi i huvudsak tre sätt att betrakta växelverkan mellan stationära laddningar: Som krafter mellan växelverkande laddningar, som fält och som potentialer. Mer om potentialer i kommande föreläsningar.
- Coulombs kraftlag för punktladdningar lyder

$$\mathbf{F} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r,$$

  där

$$\varepsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{12}\ \mathrm{F/m}$$

  är konstanten för den *elektriska permittiviteten i vakuum*, eller kort och gott *vakuumpermittiviteten.* Denna permittivitet kommer genom kursen att hänga med som en signatur på allt som hädanefter kommer att härledas från Coulombs lag.
- Superpositionsprincipen innebär att vi kan *addera separata lösningar* för elektriska fält och flöden från separata laddningar och laddningsfördelningar till en lösning för det *totala* fältet och flödet. Superpositionsprincipen gäller *enbart för linjära problem*, i vilka inga potenser av det elektriska fältet finns i de grundläggande ekvationerna.
- Det elektriska fältet från ett system av punktladdningar q'_k placerade i källpunkter $\mathbf{x}'_k$ är

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{N} q'_k \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}'_k)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'_k|^3},$$

  med kraften på en testladdning (punktladdning) q placerad i observationspunkten $\mathbf{x}$ given som

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}(\mathbf{x}).$$

- Coulomb-integralen för ett kontinuum av laddning fördelad enligt en laddningstäthet $\rho(\mathbf{x})$ lyder

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \rho(\mathbf{x}')\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\,dV'.$$

- Fält kan existera och breda ut sig *utan (direkt) närvaro av laddning*, till exempel elektromagnetiska vågor. Detta visar på att fält är inte bara ett bekvämt matematiskt verktyg, de har en fysikalisk realitet bortom enbart varandes ett sätt att dela upp Coulombs kraftlag i faktorer.
- Punktladdning q (C), linjeladdning λ (C/m), ytladdning σ (C/m^2), volymladdning ρ (C/m^3).
- Gauss lag på integral- respektive differentialform:

$$\oiint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho(\mathbf{x})\,dV \qquad \Leftrightarrow \qquad \nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}.$$

- Tolkningen av Gauss lag är att *det elektriska flödet Φ_{E} ut genom en sluten yta S ges som den av ytan inneslutna laddningen q_{tot} dividerad med vakuumpermittiviteten*,

$$\Phi_{\mathrm{E}} \equiv \oiint_S \mathbf{E}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho(\mathbf{x})\,dV \equiv q_{\mathrm{tot}}/\varepsilon_0.$$