UPPSALA
UNIVERSITET

Elektromagnetism II, 1TE626 (2025)
Lecture Notes, Fredrik Jonsson

Föreläsning 1

Elektrostatik, superpositionsprincipen och Gauss lag

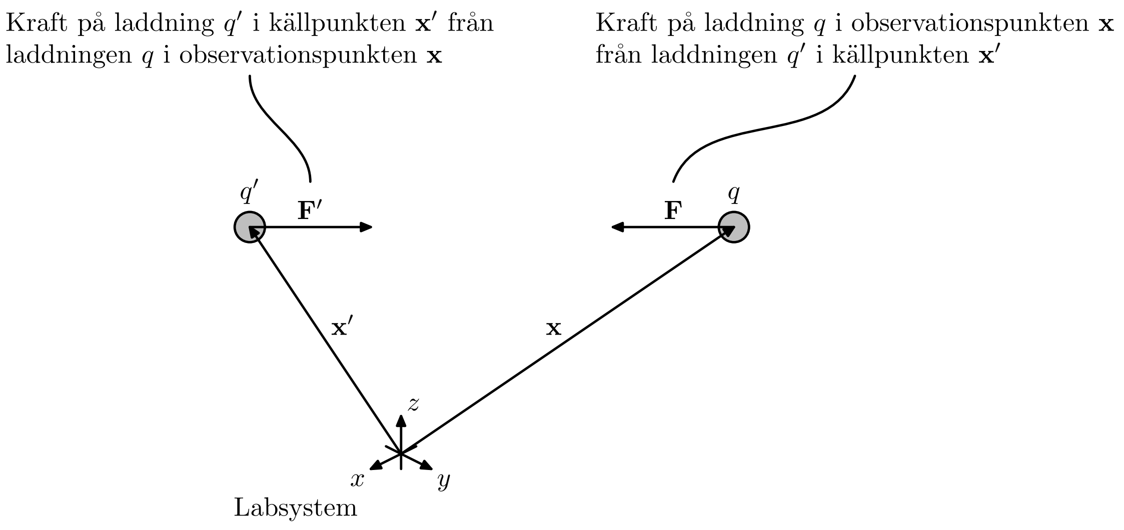
Fredrik Jonsson, Uppsala Universitet, 3 november 2025

Elektrostatik

Vi kommer i denna första föreläsning[1] att behandla elektrostatik, som är läran om hur *stationära* elektriska laddningar växelverkar. Som den mest fundamentala byggstenen i elektrostatiken har vi att två punktladdningar q och q', räknade med sina respektive tecken för positiv eller negativ laddning och placerade i respektive *observationspunkten* $\mathbf{x}$ och *källpunkten* $\mathbf{x}'$, attraherar eller repellerar varandra med en kraft $\mathbf{F}$ genom Coulombs lag[2]

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\frac{qq'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}_{\sim O(1/|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2)}$$

där $\varepsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{12}$ F/m är konstanten för den *elektriska permittiviteten i vakuum*, eller kort och gott *vakuumpermittiviteten.*



[1] Detta avsnitt har högst sannolikt ett visst överlapp med tidigare kurser; anledningen till att vi trots allt väljer att inkludera fundamentan av växelverkan mellan laddningar är att notation och beteckningar kommer att återkomma frekvent genom kursen, samt att vissa detaljer som superpositionsprincipen kommer att vara essentiella för att kunna tillgodogöra sig mer avancerade tillämpningar framöver i kursen.

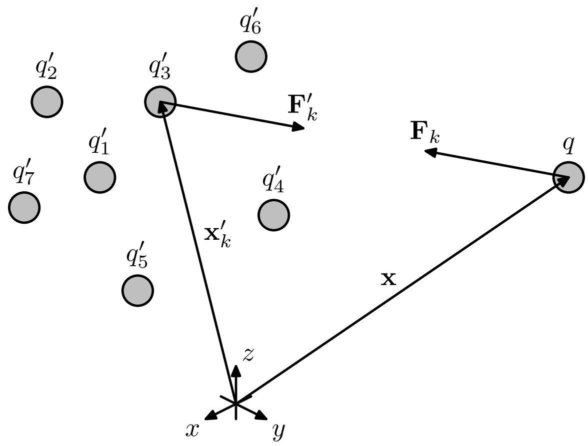
[2] Griffiths Ekv. (2.1), sid. 60; laddningen i observationspunkten betecknas som "test charge". Observera också Griffiths lite udda stil i notationen av "$\mathbf{x}-\mathbf{x}'$" som "scriptat $\mathbf{x}$" (se Griffiths Ekv. (2.2) på sid. 60. Den notation som Griffiths använder är lite olycklig i det att tolkningen av en ortsvektor $\mathbf{x}$ därmed blir beroende av vilken stil på typsnittet som använts; i denna föreläsningsserie kommer vi att helt undvika denna förbryllande notation och istället genomgående att i klartext skriva ut "$\mathbf{x}-\mathbf{x}'$".

Om vi istället för en enskild punktladdning vid källpunkten betraktar ett system av N laddningar q'_k vid respektive positioner $\mathbf{x}'_k$ (med prim för konsekvent notation för källpunkter), är den totala kraften som verkar på laddningen q vid observationspunkten uppenbarligen

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{N} q q'_k \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}'_k)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_k|^3} \\ &= q\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{N} q'_k \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}'_k)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_k|^3} \right) \\ &= q\mathbf{E}(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

där vi definierade det elektriska fältet $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ som[3]

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{N} q'_k \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}'_k)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_k|^3}.$$



Ett par observationer kring det elektriska fältet:

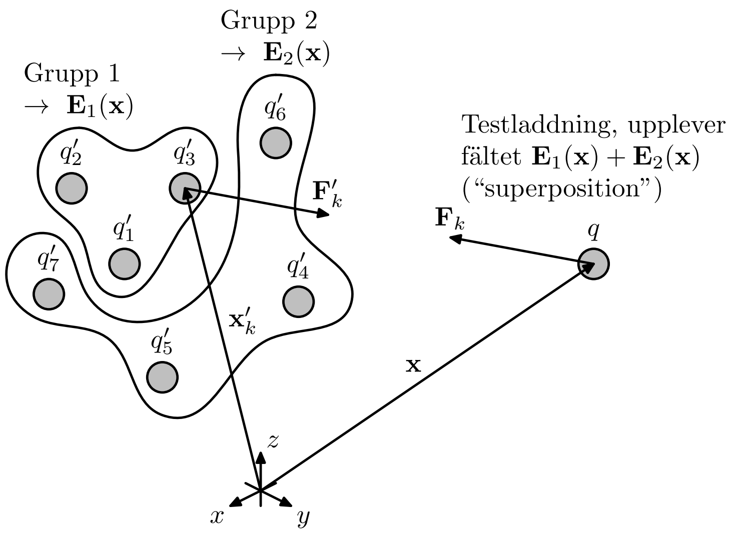
- Formuleringen av uttrycket för det elektriska fältet är *helt oberoende av testladdningen q*. Detta kan tyckas självklart, men har en fundamental betydelse när vi alldeles strax kommer att generalisera fältbeskrivningen som Gauss lag. Specifikt, så kan vi till ett elektriskt fält associerat med en viss grupp av laddningar addera ett annat elektriskt fält, det senare associerat till en annan grupp av laddningar, exempelvis genom att betrakta ett totalt fält uppbyggt dels av käll-laddningarna q'_k dels av fältet som är associerat till testladdningen q.
- Summeringen av alla delbidrag vilar på att vi kan betrakta varje laddning som oberoende av alla andra laddningar. I grund och botten antar vi att detta är ett *linjärt* problem, där ekvationen för hur ......
- Denna möjlighet att addera individuella del-lösningar till en lösning för det totala problemet brukar vi beteckna med *superpositionsprincipen*, vilken generellt endast är giltig för *linjära problem*.
- I detta antagande ligger implicit antagandet om att samtliga laddningar i problemet har fixa positioner som inte ändras genom närvaro av andra laddningar. Vi kommer senare i kursen att se hur exempelvis ytladdningar på ledande material justeras utifrån elektrostatiken till att bilda fördelningar beroende på externa faktorer (externa laddningar); i dessa fall är dock den stationära lösningen i *steady-state* fortfarande giltig under superpositionsprincipen.

[3] Griffiths Ekv. (2.4), sid. 61.

Superpositionsprincipen

Att separat framtagna elektriska fält kan ses som och adderas som komponenter av ett totalt elektriskt fält är basen i vad vi kallar *superpositionsprincipen*[4]. Vi kan illustrera detta genom att godtyckligt dela upp det elektriska fält vi nyss tog fram i två delar, med två separata grupper av de N källaddningarna, enligt

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) \equiv \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{M} q'_k \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}'_k)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'_k|^3}}_{\substack{\text{Grupp 1} \to\ \mathbf{E}_1(\mathbf{x}) \\ (M \text{ laddningar})}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=M+1}^{N} q'_k \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}'_k)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'_k|^3}}_{\substack{\text{Grupp 2} \to\ \mathbf{E}_2(\mathbf{x}) \\ (N-M \text{ laddningar})}} = \mathbf{E}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{x}).$$



Med andra ord, så länge som inte de inbördes positionerna eller laddningarna påverkas av varandra (inga fria rörelser eller tillförsel av strömmar) och om vi råkar ha en geometri som på något sätt gynnar framtagandet av komponenter för det totala elektriska fältet, så står det oss fritt att beräkna komponenterna separat och därefter sammanfoga dessa till en total lösning för det elektriska fältet. Denna superpositionsprincip gäller generellt för så kallade *linjära problem*.

Vad är egentligen poängen med att använda elektriska fält?

När vi nu framställt tre olika representationer för att behandla elektrostatiska fältproblem, så infinner sig naturligtvis frågan varför vi inte bara kan nöja oss med Coulombs lag? Denna ger ju direkt kraften, så vad är överhuvud vitsen med att (till synes) bara komplicera saker och ting genom att införa elektriska fält och potentialer?

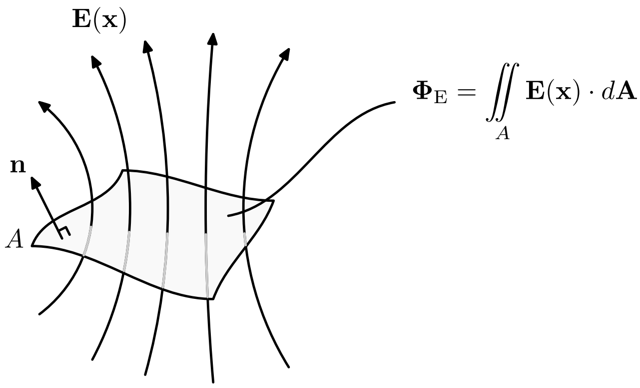
[4] Generellt gäller det under superposition att vi rent matematiskt har att göra med en funktion F som har egenskaperna att $F(x+y) = F(x) + F(y)$ (additivitet) samt att $F(ax) = aF(x)$ (homogenitet). Ordet *superposition* härrör från senlatinska *superpositionem*, med betydelse *att placera över*. Ordet kommer sig av *super* ("ovanför") och *ponere* ("att placera").

Gauss lag härledd i fyra steg

Vi skulle här i princip bara kunna hänvisa till den generella formen av Gauss lag, men skulle då riskera att missa några intressanta poänger. Låt oss därför ta detta från grunden, med utgångspunkt i Coulombs lag, i fyra enkla steg som förhoppningsvis ger oss en djupare fysikalisk förståelse för vad Gauss lag innebär.

Definition: Elektriskt flöde

För att diskutera resultaten i dessa fyra steg kommer vi att använda konceptet *elektriskt flöde* Φ_{E} (enhet: V·m), som definieras som den integrerade normalkomponenten av den elektriska fältstyrkan över en yta A,



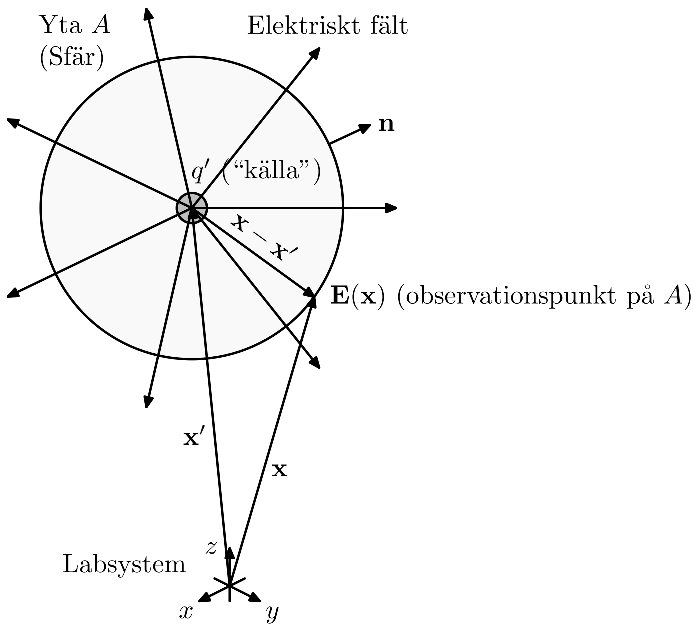
Notera att det *inte finns något fysikaliskt flöde associerat med ett elektriskt fält*, men att vi i analogi med andra vektorfält inom "riktiga flöden" hos gaser eller vätskor tänker oss ett flöde även för det elektriska fältet.[5] Vi kan lite handviftande säga att det elektriska flödet är ett mått på "hur många elektriska fältlinjer som passerar ut genom ytan", räknat med tecken utifrån ytans normalvektor $\mathbf{n}$.

[5] Notera även den lite olyckliga associationen man lätt gör till "elektriskt flöde" som en slags ström; det elektriska fältet i sig innebär ju dock ej någon explicit transport av laddning, vilket i så fall skulle betecknas som en elektrisk ström. Först i närvaro av fria laddningar har vi ett fysikaliskt flöde i form av en ström associerad med det elektriska flödet.

Steg 1: Sfärisk symmetrisk omslutande yta och punktladdning

Antag att vi har en punktladdning q' placerad i position vid ortsvektorn $\mathbf{x}'$. Då vi beräknar det elektriska flödet ut från denna laddning, så kan vi se det som att flödet härrör från en *källa*, och vi kommer framöver i kursen ofta att relatera till "källaddningar" som ger upphov till elektriska fält och flöden.[6]

Vi lägger en hypotetisk sfär A med radien $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| = r =$ konstant runt punktladdningen, med syfte att försöka beräkna det totala elektriska flödet ut genom ytan.



Det elektriska flödet ut genom den slutna sfären A, räknat gentemot ytans normalvektor $\mathbf{n}$, ges med utnyttjandet av den sfäriska symmetrin som

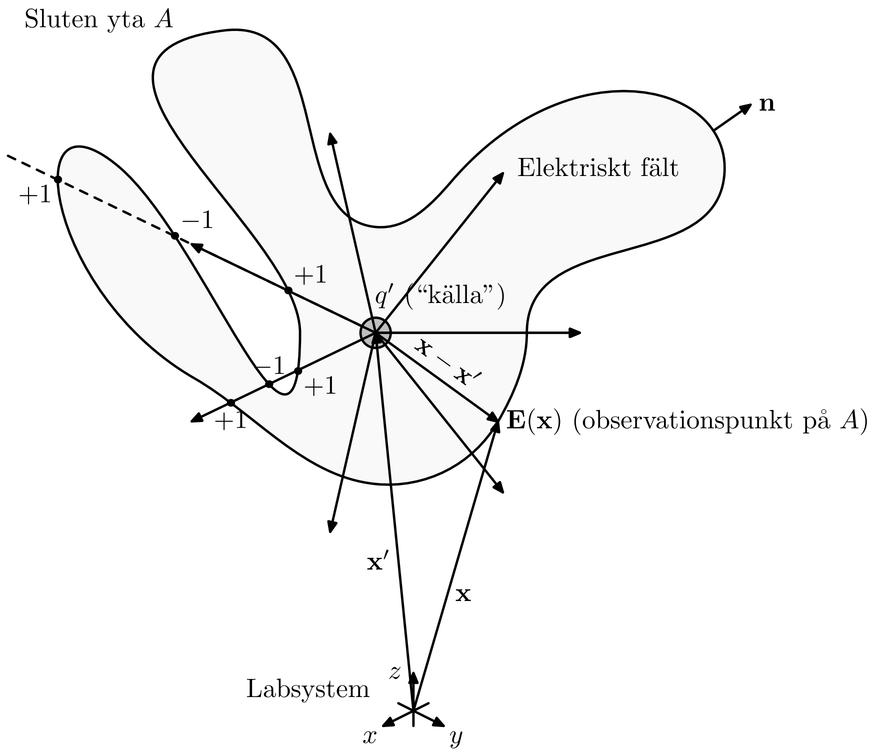
$$
\begin{aligned}
\Phi_{\mathrm{E}} &= \oiint_A \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{A} \\
&= \oiint_A \underbrace{\frac{q'(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}}_{=E_r(r)\mathbf{e}_r} \cdot \underbrace{\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} dA}_{=\mathbf{e}_r dA} = \left\{\text{Tag } r \equiv |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\right\} \\
&= \oiint_A \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dA = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \oiint_A dA = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q'}{\varepsilon_0}
\end{aligned}
$$

Notera att det elektriska flödet Φ_{E} tolkat som "hur många fältlinjer som passerar ytan" är oberoende av radien på den omslutande sfären, och *enbart beror på styrkan av den inneslutna laddningen* (som kan vara positivt eller negativt) samt vakuumpermittiviteten ε_0. Vi kommer att utnyttja detta faktum i nästa steg.

[6] Genomgående kommer vi i kursen att sätta ett prim ($'$) på de objekt som vi betraktar som källor, som $\mathbf{x}'$, dA' eller dV', och låta observationspunkt och mätetal vid denna vara oprimmade. Vi kommer även att genomgående explicit använda Leibniz notation ($\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{d}{dx}$) för derivator, för att inte råka in i situationer där ett prim kan misstas för en derivata.

Steg 2: Godtycklig omslutande yta och punktladdning

Låt oss nu generalisera Steg 1 genom att ersätta den sfäriska referensytan mot en yta av godtycklig form, med det enda kravet att vi fortfarande omsluter punktladdningen q'. Denna nya yta behöver inte vara, säg, överallt konvex, och vi tillåter även att ytan exempelvis får vika sig runt sig själv.



Om vi nu betraktar det elektriska flödet som måttet på "hur många flödeslinjer som passerar ytan, räknat gentemot ytans normalvektor", så ser vi att oavsett hur den omslutande ytan är formad så kommer exakt lika många skärningspunkter att erhållas som i Steg 1 under sfärisk symmetri. I de fall där en fältlinje skär en del av den omslutande ytan som är vikt omlott, så kommer varje skärning in i volymen att exakt motsvaras av en skärning ut ifrån ytan, med följd att samtliga fältlinjer kommer att ha ett resultat av exakt en skärning utåt.

Ett sätt att bokföringsmässigt sätt hantera antalet skärningar mellan varje fältlinje och ytan omslutande punktladdningen är att associera varje skärning *ut* från ytan med värdet $+1$ ($\mathbf{n}\cdot\mathbf{E} > 0$) och varje skärning *in* mot ytan med värdet -1 ($\mathbf{n}\cdot\mathbf{E} < 0$). Om man följer varje fältlinje från källan ut mot oändligheten så inser man direkt att summan av alla skärningar, och därmed varje fältlinjes bidrag till det totala elektriska flödet, är *exakt en ekvivalent skärning utåt genom ytan.*

Notera att laddningar som ligger *utanför* volymen alltid kommer att ha fältlinjer som har ett *jämnt antal skärningar* med den godtyckliga ytan A (inklusive möjligheten att en fältlinje inte skär ytan alls). Slutsatsen av detta är att *laddningar utanför volymen alltid kommer att ha exakt noll i sina bidrag till det totala elektriska flödet genom den slutna ytan A.*

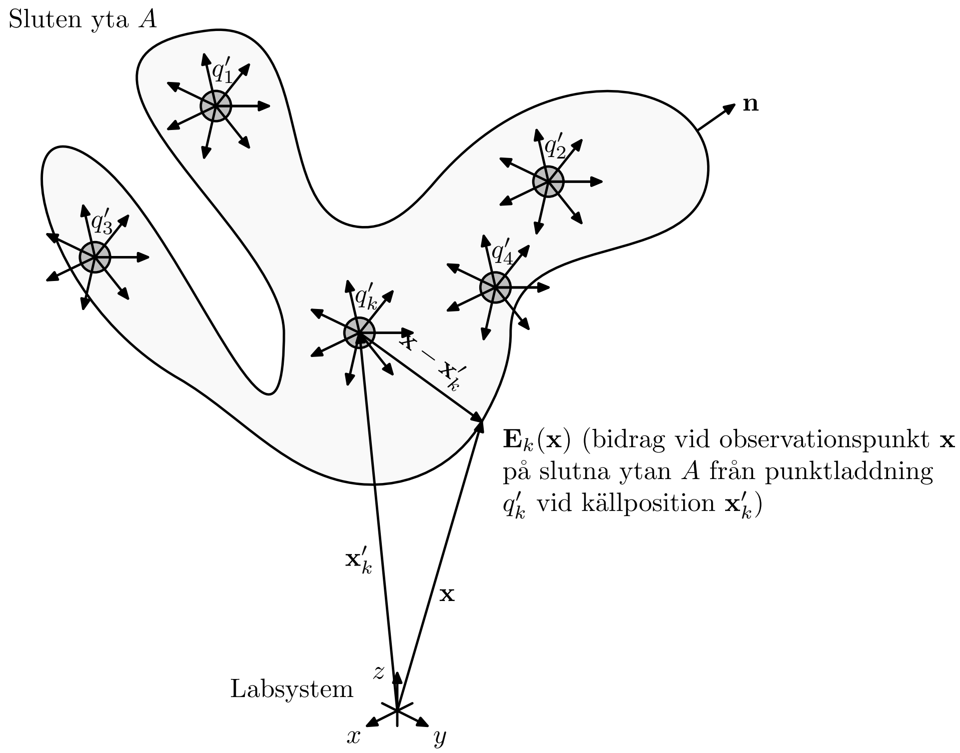
Resultatet av detta resonemang är att vi fortfarande har exakt samma totala elektriska flöde Φ_{E} ut genom ytan som omsluter punktladdningen q'. Med andra ord gäller det för en godtycklig omslutande yta A att

$$\Phi_{\mathrm{E}} = \oiint_A \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{A} = \frac{q'}{\varepsilon_0},$$

det vill säga att *det totala elektriska flödet ut genom den slutna ytan enbart bestäms av värdet på den inneslutna punktladdningen.* Vi kommer nu att använda detta resultat i Steg 3.

Steg 3: Godtycklig omslutande yta och system av punktladdningar

Vi kommer nu att ytterligare generalisera föregående resultat genom att betrakta ett system av N statiska punktladdningar, fixerade i rummet och liksom tidigare inneslutna av en hypotetisk godtyckig yta A med samma egenskaper som tidigare.



Vi ser att situationen för varje enskild laddning i sig är identisk med situationen som vi analyserade i Steg 2. Varje enskild innesluten punktladdning ("källa") q'_k skulle därmed ge ett bidrag till det totala elektriska flödet som q'_k/ε_0.

Rent formellt är det totala elektriska flödet ut genom den slutna generella ytan A enligt superpositionsprincipen given som

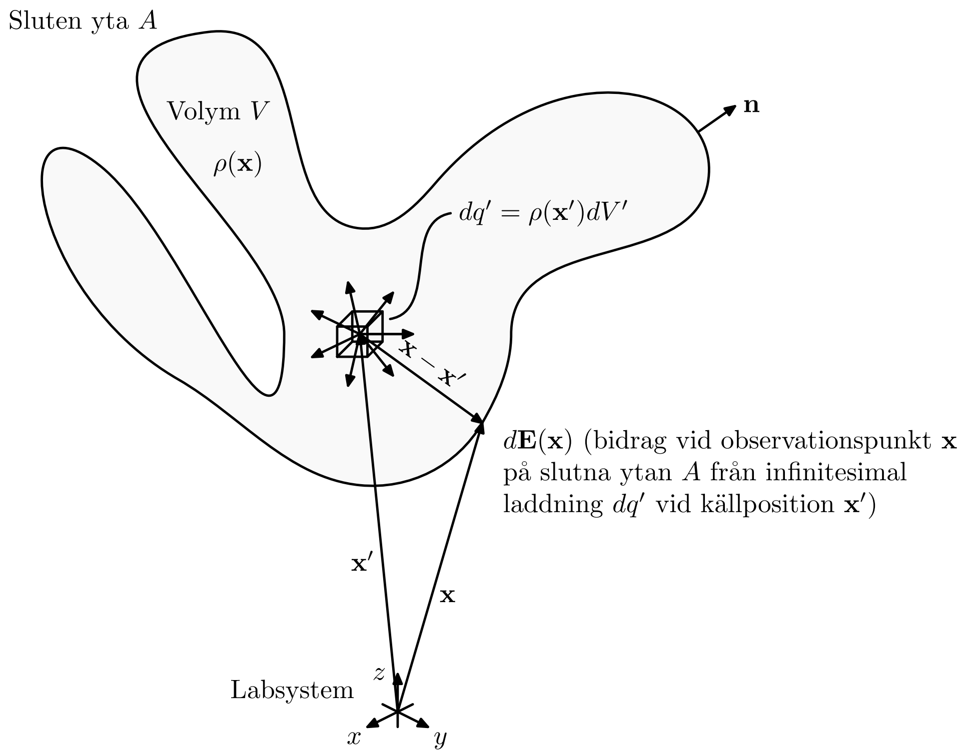
$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathrm{E}} &= \oiint_A \mathbf{E}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{A} = \{\text{Superpositionsprincipen}\} \\
&= \oiint_A \left(\sum_{k=1}^{N} \mathbf{E}_k(\mathbf{x})\right)\cdot d\mathbf{A} = \{\text{Bryt ut summationen}\} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\oiint_A \mathbf{E}_k(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{A}}_{=q'_k/\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{N} q'_k = q'_{\mathrm{tot}}/\varepsilon_0.
\end{aligned}$$

Slutsatsen av detta resultat är att *det totala elektriska flödet* Φ_{E} *ut genom den slutna ytan fortfarande enbart beror av den inneslutna laddningen* q'_{tot}. I det sista steget kommer vi nu att generalisera detta till godtyckliga kontinuerliga laddningsfördelningar.

Steg 4: Godtycklig omslutande yta och kontinuerlig laddningsfördelning

Antag att vi nu istället för diskreta punktladdningar q'_k har en laddningsfördelning $\rho(\mathbf{x})$ (enhet $\mathrm{C/m^3}$) i en sluten (i rummet begränsad) volym V. Denna laddningsfördelning kan variera kontinuerligt (jämnt) i rummet såväl som diskontinuerligt (stegvis), och vi lämnar även öppet för att $\rho(\mathbf{x})$ skall kunna tolkas som en fördelning innehållande (Dirac-)delta-funktioner $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'_k)$, med betydelsen av diskreta punktladdningar placerade vid källpositioner $\mathbf{x}'_k$.

I termer av laddningsfördelningen $\rho(\mathbf{x})$ uppbär då varje infinitesimalt *källelement* med volymen dV' vid källpositionen $\mathbf{x}'$ laddningen $dq' = \rho(\mathbf{x}')dV'$, vilken vi kan betrakta som en infinitesimal punktladdning.



Med det tidigare resultatet för framtagandet av det elektriska fältet från diskreta laddningar så följer det kontinuerliga fallet helt analogt, och med användande av superpositionsprincipen får vi direkt att den tidigare summan över diskreta laddningar i rummet ersätts av volymsintegralen[7]

$$\Phi_{\mathrm{E}} = \oiint_A \mathbf{E}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{A} = \left\{ \text{ Steg 3: } “\tfrac{1}{\varepsilon_0}\textstyle\sum_{k=1}^{N} dq'_k” \right\} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho(\mathbf{x}')\,dV'. = q_{\mathrm{tot}}/\varepsilon_0.$$

Vi har därmed kommit fram till den generella formen av Gauss lag på integralform, vilken vi sammanfattar med

$$\oiint_A \mathbf{E}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho(\mathbf{x}')\,dV'.$$

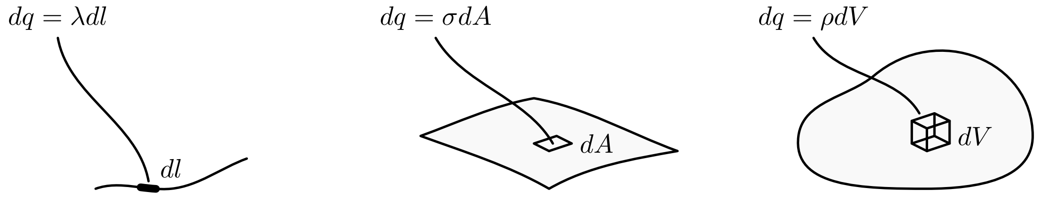
Vi rekapitulerar att Gauss lag har härletts enbart utifrån Coulombs klassiska lag för punktladdningar samt superpositionsprincipen.

Då Coulombs lag bygger på ett (för vår del) mer eller mindre heuristiskt $1/r^2$-beroende för det elektriska fältets avtagande från punktladdningen, så är det lätt att tro att detta beroende på något sätt också kommer att slå in på det elektriska fältet från en godtycklig laddningsfördelning. Detta är dock mer komplicerat till sin natur, och som vi senare kommer att se i föreläsningen kring multipolutveckling av laddningsfördelningar så finns det en uppsjö av olika så kallade *multipoler* med olika grad av avklingande.

[7] Notera att Griffiths (sid. 70) olyckligtvis använder den udda och vilseledande notationen $Q_{\mathrm{enc}} = \int_V \rho\, d\tau$ för volymintegralen. Normalt använder vi τ som integrationsvariabel i *tid*.

Kontinuerliga laddningsfördelningar

Konceptet kontinuerlig laddningsfördelning kan självfallet appliceras på även trajektorior i rummet (linjeladdningar), ytor (ytladdningar). I de fall där man har att göra med punktladdningar på linjer, ytor eller i volymer, så kan dessa modelleras som spatiala delta-pulser $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ där $\mathbf{x}'$ är positionen för punktladdningen.



Linjeladdning λ (C/m) Ytladdning σ (C/m^2) Volymladdning ρ (C/m^3)

Från Gauss lag till Coulombs lag

En enkel exercis för att få en känsla för Gauss lag och vad det innebär är att gå andra vägen, och från vårt sista resultat härleda Coulombs lag för växelverkan mellan punktladdningar. Antag att vi placerat en "källa" i form av en punktladdning q' i källpunkten $\mathbf{x}'$. Sett som en distribution motsvarar detta laddningstätheten[8]

$$\rho(\mathbf{x}) = q'\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}').$$

Antag vidare att vi lägger en hypotetisk sfär med radien r centrerad runt denna punktladdning. Gauss lag för laddningsfördelningar ger oss då med användande av sfärisk symmetri att

$$\underbrace{\oiint_A \mathbf{E}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{A}}_{=E_r(r)4\pi r^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\underbrace{\iiint_V \underbrace{q'\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}_{\rho(\mathbf{x})}\, dV'}_{=q'} \qquad \Rightarrow \qquad E_r(r) = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Utöver att visa på hur man kan "gå baklänges" från Gauss lag till Coulombs lag, med det välkända $1/r^2$-beroendet på avstånd från punktkällan, så ger denna härledning också vid hand hur koefficienten "$4\pi\varepsilon_0$" dyker upp. Vi kommer framöver i kursen att se hur denna koefficient dyker upp praktiskt taget överallt i elektrostatiken.

Gauss lag på differentialform

Så som vi formulerat Gauss lag hittills är den på *integralform.* Denna form följer mer eller mindre intuitivt utifrån sättet vi härlett den, genom successiva generaliseringar där vi adderar (integrerar) infinitesimala laddningar och via superpositionsprincipen lägger ihop delresultaten för fält och flöden till en total lösning. I många fall är det dock användbart att istället ha Gauss lag på differentialform till hands, och en fördel med denna form är att vi samtidigt enklare ser hur vi kan se laddningstätheten $\rho(\mathbf{x})$ som en *källfördelning* i elektrostatiska (och elektrodynamiska) problem.

Genom att applicera divergensteoremet[9] på det elektriska fältet,

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{E}\, dV = \oiint_A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A},$$

[8] Griffiths använder notationen $\delta^3(\mathbf{x})$ för den skalära (Dirac-)delta-funktionen i tre dimensioner; exponentlägets "3" är dock onödigt då det utifrån argumentet är uppenbart att det handlar om just tre dimensioner.

[9] Se exempelvis innerpärmen på Griffiths. Återigen, notera att Griffiths använder den aningen olyckliga notationen "$d\tau$" för volymelement.

Vi har samtidigt att detta uttryck enligt Gauss lag uppenbarligen ges som[10]

$$\oiint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho(\mathbf{x})\, dV,$$

vilket i sin tur betyder att

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E}\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho(\mathbf{x})\, dV.$$

Eftersom denna relation gäller för en godtyckligt vald volym V och för en godtycklig laddningstäthet $\rho(\mathbf{x})$, så betyder detta att integranderna i vänster- och högerledet måste vara identiska, det vill säga

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0},$$

vilket sammanfattar *Gauss lag på differentialform.*

Sammanfattning

- I elektrostatiken, och även senare i elektrodynamiken, har vi tre sätt att betrakta växelverkan mellan laddningar: Som krafter mellan laddningar, som fält och som potentialer. Mer om potentialer i kommande föreläsningar.
- Superpositionsprincipen innebär att vi kan addera separata lösningar för elektriska fält och flöden från separata laddningar och laddningsfördelningar till en lösning för det totala fältet och flödet. Superpositionsprincipen gäller enbart för linjära problem, i vilka inga potenser av det elektriska fältet finns i de grundläggande ekvationerna.
- Gauss lag på integral- respektive differentialform:

$$\oiint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho(\mathbf{x})\, dV \qquad \Leftrightarrow \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}$$

[10] Vi tar oss här friheten att droppa primmet på källorna; det är i sammanhanget uppenbart över vilken domän integralerna skall tolkas.