UPPSALA
UNIVERSITET

Elektromagnetism II, 1TE626 (2024)
Lecture Notes, Fredrik Jonsson

Föreläsning 7

Magnetiska fält i material

Fredrik Jonsson, Uppsala Universitet, 19 november 2024

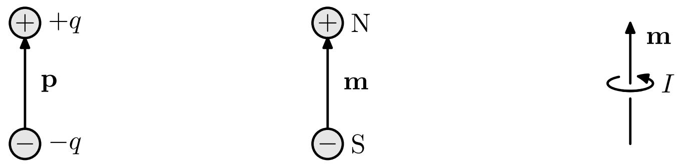
I denna föreläsning analyserar vi vad som händer då det magnetiska spinnet hos material linjeras och magnetiserar materialet, antingen genom ett externt pålagt magnetiskt fält eller genom att spinnen är naturligt linjerade i materialet, i så kallade permanentmagneter.

Dipolmodellen av magneter

Låt oss anta att det fanns en magnetisk motsvarighet till elektrisk laddning, motsvarande magnetiska monopoler. Från $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ följer det direkt via Gauss lag att om vi skulle försöka isolera en sådan magnetisk laddning Q_{m}, så skulle vi ha att

$$\iiint_V \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{B}}_{=0} \, dV = Q_{\mathrm{m}} = 0,$$

det vill säga att den enda möjligheten är att laddningen är just noll. *Med andra ord så existerar inga magnetiska monopoler.* Trots detta, så kan vi ändå tänka oss magnetisering som bestående av en magnetisk "nord-monopol" och en "syd-monopol". Denna modell betecknas med "Gilbert-modellen".



Elektrisk dipol | Gilberts modell | Ampères modell

En mer fysikalisk modell är dock att ansätta varje magnetisk dipol som bestående av en strömslinga uppbärande en ström, skapandes en inducerad magnetisk dipol. Denna modell kan vi kalla "Amère-modellen", då dipolmomentet i den direkt följer av Ampères klassiska lag. I Gilbert-modellen är det magnetiska moment som genereras kort och gott

$$\mathbf{m} = I \iint_A d\mathbf{A} = IA\mathbf{e_n},$$

där A är arean som innesluts av den strömbörande loopen, med riktningen $\mathbf{e}_n$ normal mot loopens plan. För att sammanfatta, så följer magnetism inte av några magnetiska monopoler, utan kommer från *rörelse av elektrisk laddning.*

Krafter och moment på dipoler

Elektriska och magnetiska dipoler i externt pålagda elektriska respektive magnetiska fält upplagrar energierna

$$W_\mathrm{e} = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_\mathrm{ext}, \qquad W_\mathrm{m} = -\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}_\mathrm{ext}$$

Jämför med elektrisk dipol placerad i fält med sin positiva laddning närmst källan för elektriska fältet (med linjer från "+"). Den elektriska dipolen strävar efter att linjera sig (med axeln pekande från negative till positiv laddning) längs med det externa elektriska fältet.

Kraften på den elektriska respektiva magnetiska dipolen ges då av gradienten av den upplagrade energin, som (observera tecken på ∇!)[1]

$$\mathbf{F}_\mathrm{e} = -\nabla W_\mathrm{e} = \nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_\mathrm{ext}), \qquad \mathbf{F}_\mathrm{m} = -\nabla W_\mathrm{m} = \nabla(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}_\mathrm{ext}).$$

Notera att för att ha en kraft på en elektrisk dipol som saknar netto-laddning, så krävs det att det pålagda elektriska fältet $\mathbf{E}$ har en gradient vid dipolen $\mathbf{p}$. Omvänt, om det pålagda elektriska fältet är homogent (utan gradienter), så måste dipolen ha en nettoladdning för att kunna påverkas av en kraft.

För det magnetiska fallet har vi att det inte existerar någon magnetisk nettoladdning (eftersom $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ alltid gäller; jämför med $\nabla\cdot\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$), så där blir kravet att det magnetiska fältet $\mathbf{B}$ ovillkorligen måste ha en gradient för att kunna utöva en nettokraft på den magnetiska dipolen $\mathbf{m}$.

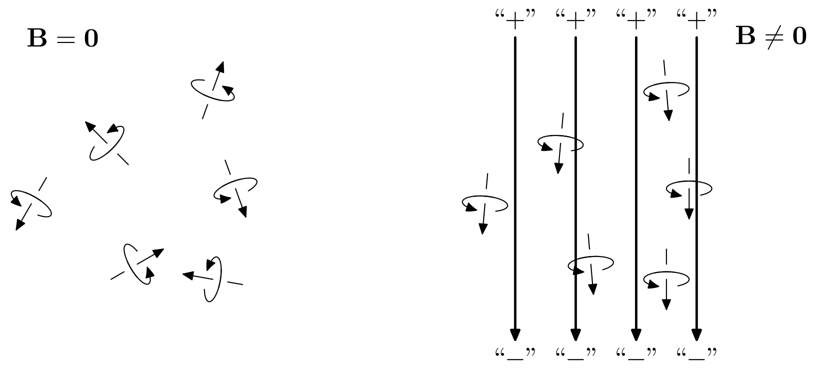
Vridmomentet τ (SI-enhet Nm) på en elektrisk respektive magnetis dipol i externt pålagda fält är

$$\tau = \mathbf{p}\times\mathbf{E}_\mathrm{ext}, \qquad \tau = \mathbf{m}\times\mathbf{B}_\mathrm{ext}.$$

Notera att vridmomenten blir noll då dipolerna är parallella med fälten ($\mathbf{e}\times\mathbf{e}\equiv\mathbf{0}$); dock är endast fallen då dipolerna dessutom pekar i samma riktning som fälten stabila (detta följer från att energierna W_e och W_m då minimeras; att dessutom visa att energimaximum är instabilt är enkelt att visa genom att uttrycka skalärprodukten som en faktor $\cos\theta$ i sfäriska koordinater och analysera andraderivatan av energierna med avseende på θ).

Magnetisering - "magnetisk polarisationsdensitet"

Liksom för den elektriska polarisationsdensiteten $\mathbf{P}$ följer att ett material som regel linjerar sina mikroskopiska magnetiska dipoler (molekylära spinn) efter ett externt pålagt magnetiskt fält. Även om man kan tänka sig en bild av detta som en dipol bestående av en moln av positiva och negativa "magnetiska laddningar", så är detta en felaktig bild då det inte existerar magnetiska laddningar (återigen, från $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$). Istället kan vi föreställa oss detta som en ensemble av mikroskopiska strömbärande slutna slingor som var och en bidrar med ett magnetisk dipolmoment.



Vi beskriver detta som en magnetisering $\mathbf{M}$ av magnetiska dipolmoment per volymenhet (därav en slags "magnetisk polarisationsdensitet"). Som en förenklad modell kan vi se denna inducerade magnetisering som linjärt beroende av det pålagda magnetiska fältet,

$$\mathbf{M} \equiv \left\langle \frac{d\mathbf{m}}{dV} \right\rangle = \frac{1}{\mu_0}\Big(1 - \frac{1}{\mu_\mathrm{r}}\Big)\mathbf{B}$$

[1] Fys. dimension: $[\nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_\mathrm{ext})] = \mathrm{m}^{-1}\mathrm{CmV/m} = \mathrm{J/m} = \mathrm{N}$; $[\nabla(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}_\mathrm{ext})] = \mathrm{m}^{-1}\mathrm{Am}^2\mathrm{N/Am} = \mathrm{N}$.

där μ_r är den *relativa magnetiska permeabiliteten* för materialet (μ_r är dimensionslös).

Liksom för den elektriska polarisationsdensiteten $\mathbf{P}$ är det inom elektromagnetisk fältteori bekvämt att baka ihop det magnetiska fältet $\mathbf{B}$ och magnetiseringen $\mathbf{M}$ till *magnetiseringsstyrkan*

$$\mathbf{H} \equiv \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0\mu_\mathrm{r}},$$

en konstitutiv relation som är lite avigt definierad då vi ser $\mathbf{B}$ som den primära beskrivningen av magnetfältet. Normalt uttrycker vi inom elektromagnetisk fältteori denna på formen[2]

$$\mathbf{B} = \mu_0\mu_\mathrm{r}\mathbf{H},$$

då detta är den naturliga tolkningen ($\mathbf{B}$ som funktion av $\mathbf{H}$ och inte tvärtom) då vi formulerar de elektromagnetiska vågekvationerna från Maxwells ekvationer. Dock, om vi utgår från Faradays induktionslag,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

så faller sig paret $[\mathbf{E}, \mathbf{B}]$ som det mest naturliga att använda, trots att $\mathbf{E}$ räknas som en (elektrisk) *fältstyrka* och $\mathbf{B}$ som en (magnetisk) *flödestäthet*.

- För *diamagnetiska material* har vi att $\mu_\mathrm{r} \leq 1$, för vilka magnetiseringen i materialet är riktat i *motsatt riktning* mot det pålagda magnetfältet. Supraledare är exempel på perfekta diamagneter, där de helt repellerar the pålagda fältet från det interna magnetfältet (som i en supraledare är noll).
- För *paramagnetiska* material är $\mu_\mathrm{r} > 1$, för vilka magnetiseringen i materialet är riktat i *samma riktning* som det pålagda magnetfältet.
- I *ferromagnetiska* material är de magnetiska momenten (molekylära spinn) permanent linjerade i en huvudsaklig riktning. *Curietemperaturen* för ett ferromagnetiskt material är den temperatur där materialet övergår från att vara ferromagnetiskt till att bli paramagnetiskt.

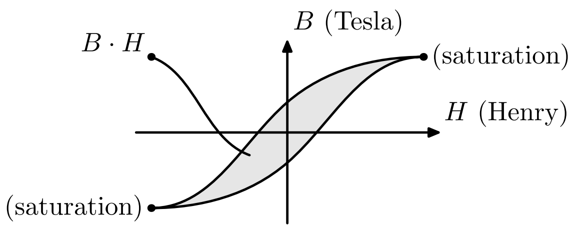
I elektromagnetisk vågpropagation och analys av vågekvationen kan vi så gott som alltid anta att mediet är ickemagnetiskt, med $\mu_\mathrm{r} = 1$, det vill säga att vi ur magnetisk synpunkt kan betrakta materialet som om det vore vakuum. (Detta antagande gäller dock alltsom oftast *ej* för den elektriska polarisationsdensiteten.)

Upplagrad energi i magnetfält

I likhet med ett dielektrikum kommer ett pålagt magnetiskt fält $\mathbf{B}$ då det magnetiserar mediet att lagra upp energi. Uttrycket för den upplagrade energin (i Joule) hos ett magnetiskt material under ett externt pålagt magnetiskt fält $\mathbf{B}$ ges av

$$W = \frac{1}{2}\iiint \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\,dV$$

Vid hysteres[3], som är en vanligt förekommande effekt i magnetiska material, finns det ett “minne” av historiken hur magnetfältet har varit riktat och med vilket styrka. När ett externt pålagt magnetfält stängs av kan en kvarvarande magnetisering finnas kvar, och om vi cykliskt varierar det pålagda fältet kommer eftersläpningen att innebära en tröghet där materialets magnetisering arbetar mot förändringar av det pålagda fältet. Med andra ord så utförs vid hysteres ett internt arbete som leder till att värme utvecklas.



[2] Griffiths betecknar H-fältet som “auxiliary field”; se Griffiths sidan 279.

[3] Griffiths sid. 291.

Vi kan se denna utvecklade värme som att vi i hystereskurvan för materialet täcker in en viss "area" $B \cdot H$ som har dimensionen energi per volymsenhet, och ju större area vi täcker in då vi går runt med en kurva i hysteresdiagrammet, desto större värmeutveckling.

Vektorpotential från ett magnetiserat objekt

Vi kommer nu att studera ett objekt som har den rumsberoende statiska magnetiseringen $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ given. Vi har sedan tidigare att såväl elektriska som magnetiska fält kan uttryckas i termer av skalär potential och vektorpotential, där speciellt magnetfältet $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ direkt kan uttryckas i vektorpotentialen[4] $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ som

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}).$$

Det är därför av intresse att se om vi utifrån en magnetisering $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ kan få fram vektorpotentialen $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ eftersom vi via den kan extrahera övriga fält.[5]

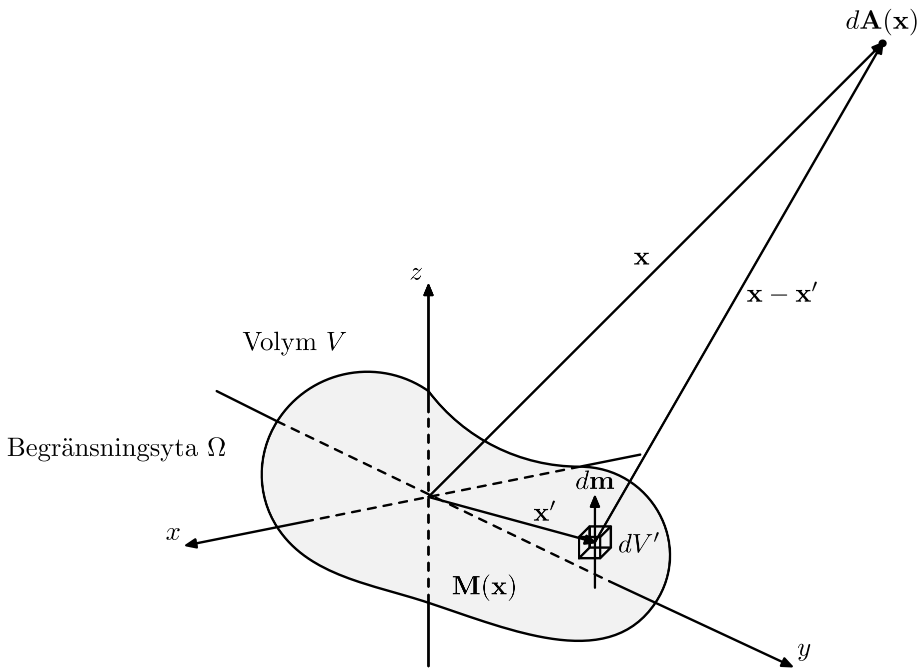
Som en första början i den kommande vektoralgebran, så kan vi konstatera att vektorpotentialen i en *observationspunkt* $\mathbf{x}$ från en enda, isolerad magnetisk dipol $\mathbf{m}$ i *källpunkten* $\mathbf{x}'$ ges av[6]

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{e}_r}{r^2},$$

där

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \qquad \text{och} \qquad \mathbf{e}_r = (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$$

är respektive avståndet och enhetsvektorn från källpunkten $\mathbf{x}'$ till observationspunkten $\mathbf{x}$. Med denna enkla relation kan vi enkelt gå vidare med en generalisering om vi ser små volumselement dV som en ensemble av källpunkter, var och en uppbärande en rumsberoende magnetisering ("magnetisk polarisationsdensitet") $\mathbf{M}(\mathbf{x}')$.



[4] Recap: Existensen av en vektorpotential $\mathbf{A}$ motiveras av "teoremet om att inga magnetiska dipoler existerar",

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

detta eftersom vi har vektoridentiteten $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$ för *godtycklig* vektorfunktion $\mathbf{A}$.

[5] Vi följer här i huvudsak Griffiths kapitel 6.2.1, sidorna 274–275.

[6] Se Griffiths Ekv. (5.85), sidan 253.

Bidraget $d\mathbf{A}(\mathbf{x})$ till vektorpotentialen vid observationspunkten $\mathbf{x}$ från ett enskild magnetiskt dipolmoment $d\mathbf{m}$ vid källpunkten $\mathbf{x}'$ har tagits fram tidigare, och ges av

$$d\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d\mathbf{m}\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}.$$

Varje volymselement dV' av det magnetiserade mediet uppbär ett magnetiskt moment

$$d\mathbf{m}(\mathbf{x}') = \mathbf{M}(\mathbf{x}')dV',$$

och den totala vektorpotentialen vid observationspunkten $\mathbf{x}$ ges då genom att summera (integrera) all delbidrag $d\mathbf{A}(\mathbf{x})$, enligt

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \iiint_V d\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}')\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\,dV'.$$

I princip är detta uttryck en helt acceptabel slutdestination; dock finns det ett "trick" som vi kan tillämpa, och som vi även kommer att använda senare i kursen för att förenkla uttryck för mutipolutveckling för elektriska fält och skalär potential. Detta "trick" går ut på att utnyttja relationen[7]

$$\nabla'\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x'},\frac{\partial}{\partial y'},\frac{\partial}{\partial z'}\right)\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3},$$

vilket tillåter oss att formulera vektorpotentialen som

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \left[\mathbf{M}(\mathbf{x}')\times\left(\nabla'\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)\right]dV'.$$

Vi kan här tillämpa partiell integration[8] på detta uttryck, genom att observera att rotationen av en produkt mellan en skalär funktion f och vektor $\mathbf{G}$ ges som

$$\begin{gathered}\nabla\times(f\mathbf{G}) = f\nabla\times\mathbf{G} - \mathbf{G}\times(\nabla f)\\ \Updownarrow\\ \mathbf{G}\times(\nabla f) = f\nabla\times\mathbf{G} - \nabla\times(f\mathbf{G})\end{gathered}$$

vilket ger oss att vektorpotentialen kan uttryckas som

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{(\nabla'\times\mathbf{M}(\mathbf{x}'))}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,dV' - \frac{\mu_0}{4\pi}\underbrace{\iiint_V \nabla'\times\left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)dV'}_{\text{Stokes! Gauss? (Eller?)}}$$

[7] Detta eftersom

$$\begin{aligned}\nabla'\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial x'},\frac{\partial}{\partial y'},\frac{\partial}{\partial z'}\right)\frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}}\\ &= -\frac{1}{2}\frac{\Big(-2(x-x'),-2(y-y'),-2(z-z')\Big)}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}\\ &= \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\end{aligned}$$

[8] Av någon outgrundlig anledning kallar Griffiths denna för "integration by parts, using product rule 7" på sidan 274. Varför? Jo, den finns på insidan av pärmen som en "Product Rule".

Den sista termen har en form som är misstänkt lik grunden för Stokes teorem; detta är dock en återvändsgränd i och med att vi här har att göra med en *volymsintegral* av en ingående rotation (och inte en ytintegral, som annars är integranden i Stokes teorem). (Med andra ord varken Stokes eller Gauss teorem, i den bemärkelsen vi normalt använder terminologin i denna kurs.) Istället kan vi här använda en liknande variant,[9]

$$\iiint_V (\nabla \times \mathbf{v})\, dV = -\oiint_\Omega \mathbf{v} \times d\mathbf{A}.$$

Den andra integralen i högerledet kan nu omformuleras med hjälp av detta "kvasi-Gauss-teorem" som

$$\iiint_V \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right) dV' = \oiint_\Omega \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right) \times d\mathbf{A}'.$$

Vektorpotentialen enligt ovan uttrycks därmed (nästan) slutligen som

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{(\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}'))}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\, dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_V \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right) \times d\mathbf{A}'.$$

Den första termen kan tolkas som ett potentialbidrag från en *volymsström* orsakad av *bundna laddningar*,

$$\mathbf{J}_\mathrm{b} = \nabla \times \mathbf{M},$$

medan den andra termen istället kan tolkas som ett potentialbidrag från en *ytström*, även den orsakad av bundna laddningar,

$$\mathbf{K}_\mathrm{b} = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_n,$$

där $\mathbf{e}_n$ är normalvektorn ut från den slutna ytan. Summa summarum kan alltså vektorpotentialen skrivas i termer av ekvivalenta volyms- och ytströmmar som

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}_\mathrm{b}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\, dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_V \left(\frac{\mathbf{K}_\mathrm{b}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right) \times d\mathbf{A}'.$$

[9] Denna form finns som ett härlednings-problem 1.61 (b) i Griffiths, sidan 56. Lösningen är som följer, enligt Griffiths ledtrådar: Ansätt först $\mathbf{v} \to \mathbf{v} \times \mathbf{c}$, där $\mathbf{c}$ är en konstant godtycklig vektor, och använd denna form i Gauss teorem:

$$\iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{c}) dV = \oiint_S (\mathbf{v} \times \mathbf{c}) \cdot d\mathbf{A}.$$

Genom användande av produktregeln ("product rule #6" i pärmen i Griffiths),

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \underbrace{(\nabla \times \mathbf{c})}_{=0} = \mathbf{c} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}),$$

samt att vi genom vektoridentiteten (1) i pärmen i Griffiths har att

$$d\mathbf{A} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (d\mathbf{A} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{A}),$$

så omformuleras Gauss teorem enligt ovan till

$$\iiint_V \mathbf{c} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})\, dV = \oiint_S -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{A}) \quad \Leftrightarrow \quad \iiint_V (\nabla \times \mathbf{v})\, dV = -\oiint_S (\mathbf{v} \times d\mathbf{A}). \qquad \text{(Q.E.D.)}$$

Detta betyder att vektorpotentialen $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, och därmed även det magnetiska fältet $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{x})$ från det magnetiserade objektet ges som om objektet istället hade uppburit en motsvarande volymsström $\mathbf{J}_\mathrm{b}$ och en ytström $\mathbf{K}_\mathrm{b}$. Detta illustrerar den täta kopplingen mellan magnetiska fält och ekvivalenta strömmar.