

Programação II

+

Estruturas de Dados para

Bioinformática

Hugo Pacheco

DCC/FCUP

23/24

Computação numérica com arrays (numpy)

Operações matemáticas

- Podemos utilizar listas e listas de listas para representar vetores e matrizes
- No entanto, as operações habituais em matemática vetorial não estão disponíveis
- Temos de fazer a operação elemento a elemento
- E.g. somar ou multiplicar vetor por constante

```
>>> xs = [1, 2, 3]
```

```
>>> xs + 3
```

```
TypeError: can only concatenate list (not "int") to list
```

```
>>> xs * 3
```

```
[1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3]
```

```
>>> [ x * 3 for x in xs ]
```

```
[3, 6, 9]
```

Operações matemáticas

- Podemos utilizar listas e listas de listas para representar vetores e matrizes
- No entanto, não são necessariamente eficientes
 - espaço ocupado proporcional às dimensões
 - listas têm tipo/tamanho variável, matrizes não

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

```
matriz = [[0, 0, 0, 1, 0],  
          [0, 0, 0, 0, 0],  
          [0, 2, 0, 0, 0],  
          [0, 0, 0, 0, 0],  
          [0, 0, 0, 3, 0]]  
  
print(matriz[1][1])
```

Operações matemáticas

- Podemos utilizar dicionários para representar matrizes
- No entanto, as operações habituais em matemática vetorial não estão disponíveis
- No entanto, não são necessariamente eficientes
 - usa menos espaço, mas acessos mais lentos
 - dicionários também têm tipo/tamanho variável

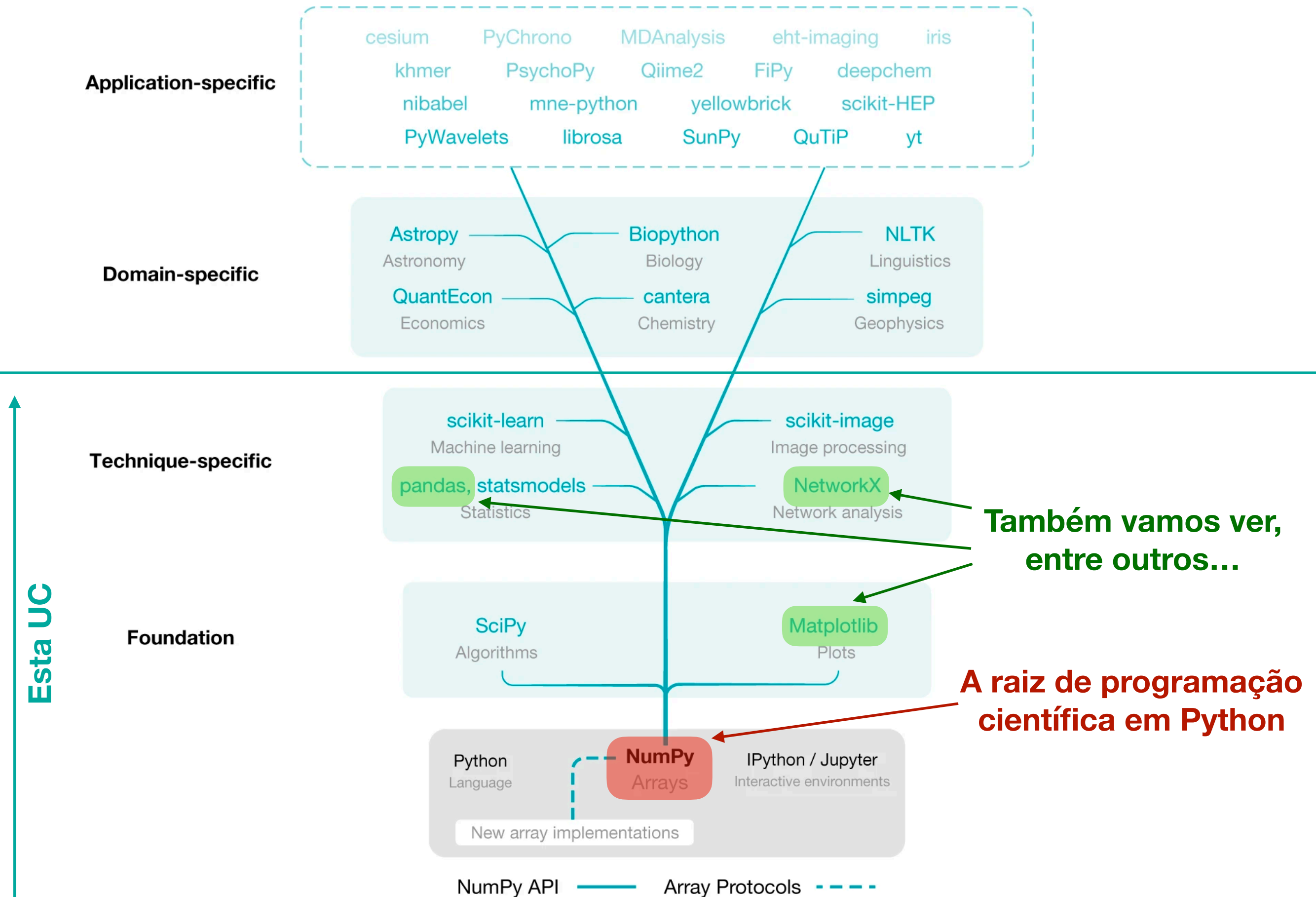
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

```
matriz = {(0, 3): 1, (2, 1): 2, (4, 3): 3}
print(matriz.get((1, 3), 0))
```

```
>>> matriz * 3
```

```
TypeError: unsupported operand type(s) for *: 'dict' and 'int'
```

```
>>> { xy : v*3 for xy,v in matriz.items() }
{(0, 3): 3, (2, 1): 6, (4, 3): 9}
```



NumPy

- O módulo *numpy* fornece implementações eficientes de arrays multi-dimensionais (vetores, matrizes, etc) e suporta operações matemáticas
 - dimensões fixas
 - todos os elementos têm o mesmo tipo
- E.g., para multiplicar por uma constante

```
>>> import numpy as np
>>> a = np.array([2, 3, 8])
>>> a.dtype
int64
>>> b = 2.1 * a
>>> b
[ 4.2,  6.3, 16.8]
>>> b.dtype
float64
```

NumPy (shape)

- E.g., para multiplicar vetores ponto-a-ponto

```
>>> a = np.array([2, 3, 8])
>>> a * a
[ 4, 9, 64]
```

- Também podemos redimensionar arrays

```
>>> a = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6]])
>>> a.shape
(2, 3)
>>> a.reshape(3, 2)
[[1 2]
 [3 4]
 [5 6]]
>>> a.reshape(4, 4)
ValueError: cannot reshape array of
size 6 into shape (4, 4)
```


NumPy (criação)

- Podemos criar arrays passando listas ao construtor *array*
- Ou com valores por defeito

```
>>> a = np.zeros((2, 2))
>>> a
[[0. 0.]
 [0. 0.]]
>>> a.dtype
float64
>>> np.ones((2, 2), 'uint16')
[[1 1]
 [1 1]]
```

```
>>> np.empty((2, 2), 'uint16')
[[      0      0]
 [      0 16368]]
>>> np.full((2, 2), 3.5)
[[3.5 3.5]
 [3.5 3.5]]
```

NumPy (criação)

- Ou utilizando *arange* como *range* para sequências de inteiros
- Ou utilizando *linspace* para sequências de números não inteiros
 - recebe limites inferior e superior do intervalo (inclusive) e número de elementos a gerar
 - gera um array de elementos equidistantes

```
>>> np.arange(4)
```

```
[0 1 2 3]
```

```
>>> np.arange(1, 5).reshape(2, 2)
```

```
[[1 2]
```

```
[3 4]]
```

```
>>> np.linspace(0, math.pi, 5)
```

```
[0. 0.78539816 1.57079633  
2.35619449 3.14159265]
```

NumPy (indexação)

- Podemos projetar arrays a várias dimensões
- Cuidado: **projeções são vistas, não cópias!**

```
>>> a = np.array([2, 3, 8])
>>> a[2]
8
>>> b = np.array([
    [2, 3, 8],
    [4, 5, 6],
])
>>> c = b[1]
>>> c
array([4, 5, 6])
```

```
>>> b[1][2]
6
>>> b[1, 2]
6
>>> c[1] = 9
>>> b
[[2 3 8]
 [4 9 6]]
```

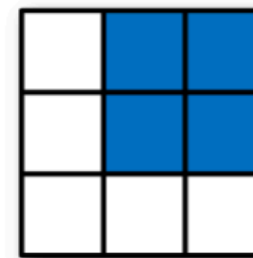
NumPy (slices)

- Podemos utilizar a notação familiar de slices

- Cuidado : **também são vistas!**

```
>>> vec = np.array([2, 3, 8])
>>> arr = np.array([[2, 3, 8],
                    [4, 5, 6]])

>>> vec[1:3] = 5
>>> vec
[2 5 5]
>>> arr[1, :2]
[4 5]
>>> arr[:2, 1]
[3 5]
>>> arr[:, :2]
> [[2 3]
>  [4 5]]
```

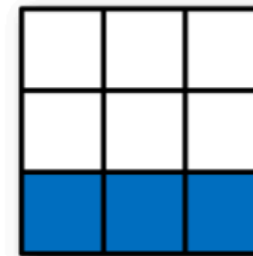


Expression

arr[:2, 1:]

Shape

(2, 2)



arr[2]

(3,)

arr[2, :]

(3,)

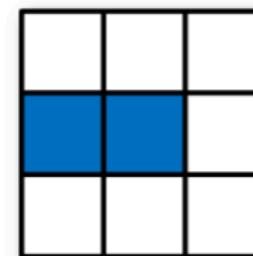
arr[2:, :]

(1, 3)



arr[:, :2]

(3, 2)



arr[1, :2]

(2,)

arr[1:2, :2]

(1, 2)

NumPy (máscaras)

- Máscara = vetor de booleanos com o tamanho do array
- Pode ser criada aplicando uma operação ao array
- Pode ser usada como índice

```
>>> a = np.array([1, 2, 3, 4])
>>> mask = (a >= 2) & (a < 4)
>>> mask
[False True True False]
>>> a[mask]
[2 3]
>>> a[mask] = 0
>>> a
[1 0 0 4]
```

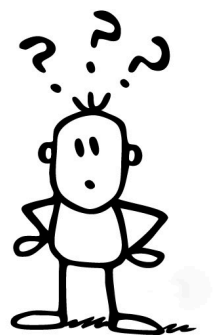
NumPy (broadcasting)

- Já vimos que podemos aplicar operações entre um array e uma constante, ou entre arrays com shapes iguais

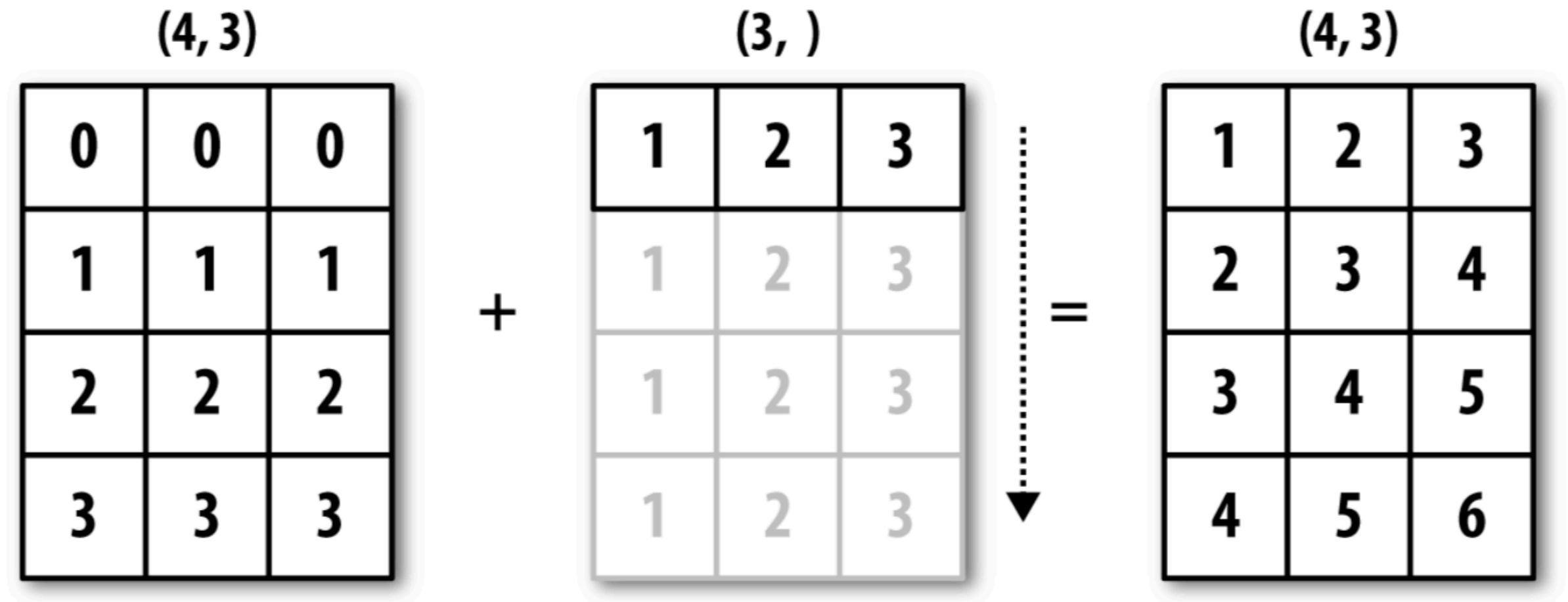
```
>>> a =  
np.array([1, 2, 3])  
>>> a > 2  
[False False  True]  
>>> b =  
np.array([[1, 2, 3],  
[4, 5, 6]])  
>>> b * 3  
[[ 3  6  9]  
[12 15 18]]
```

```
>>> a =  
np.array([[1, 2, 3],  
[4, 5, 6]])  
>>> b =  
np.array([[1, 1, 1],  
[2, 2, 2]])  
>>> a * b  
[[ 1  2  3]  
[ 8 10 12]]
```

- Generaliza para arrays de shapes diferentes, desde que, expandindo as dimensões em falta, tenham a mesma shape



NumPy (broadcasting)

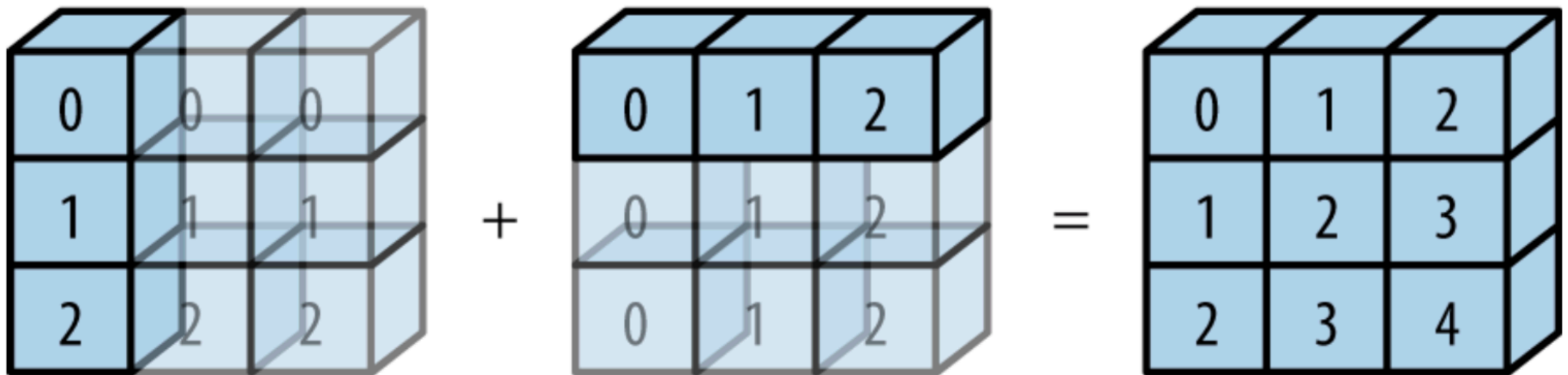


NumPy (broadcasting)

(4, 3)				(4, 1)				(4, 3)		
0	0	0	+	1	1	1	=	1	1	1
1	1	1		2	2	2		3	3	3
2	2	2		3	3	3		5	5	5
3	3	3		4	4	4		7	7	7

NumPy (broadcasting)

```
np.arange(3)  
.reshape(3,1) + np.arange(3)
```



NumPy (funções universais)

- Além de operadores binários (+, -, *, /, etc), o *numpy* também redefine funções matemáticas (*sin*, *cos*, *sqrt*, etc)
- Operam elemento a elemento
- Lista completa

```
>>> a = np.array([1, 2, 3, 4])
>>> np.sqrt(a)
[1.  1.41421356 1.73205081 2.  ]
>>> np.exp(a)
[2.71828183  7.3890561  20.08553692  54.59815003]
>>> b = np.array([4, 3, 2, 1])
>>> np.maximum(a, b)
[4  3  3  4]
```

NumPy (vectorize)

- A função *vectorize*, analogamente à função *map* para sequências, permite converter uma função genérica numa função universal *numpy* que pode ser aplicada a cada elemento do array
- E.g., para interpretar cada elemento como um índice e substituí-lo pelo valor correspondente numa lista

```
assocs = [10, 20, 30, 40, 50, 60]  
a = np.array([[4, 2, 1, 3] \  
              , [5, 0, 1, 2]])
```

```
# substitui cada elemento pelo seu valor na lista  
def assoc(i) : return (assocs[i])  
npassoc = np.vectorize(assoc)  
print(npassoc(a))
```

```
[[50 30 20 40]  
 [60 10 20 30]]
```

NumPy (agregação)

- Algumas funções *numpy* agregam os elementos de um array, analogamente a funções de agregação para sequências

```
>>> a = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6]])
# soma
>>> np.sum(a)
21
# mínimo
>>> np.min(a)
1
# máximo
>>> np.max(a)
6
# índice do máximo
>>> np.argmax(a)
5
```

NumPy (estatísticas)

- Várias funções *numpy* de agregação para calcular estatísticas

```
>>> a = np.array([[1, 1, 3], [4, 5, 5]])  
>>> np.median(a) # mediana  
3.5
```

```
>>> np.mean(a) # média  
3.1666666666666665
```

```
>>> np.std(a) # desvio padrão  
1.674979270186815
```

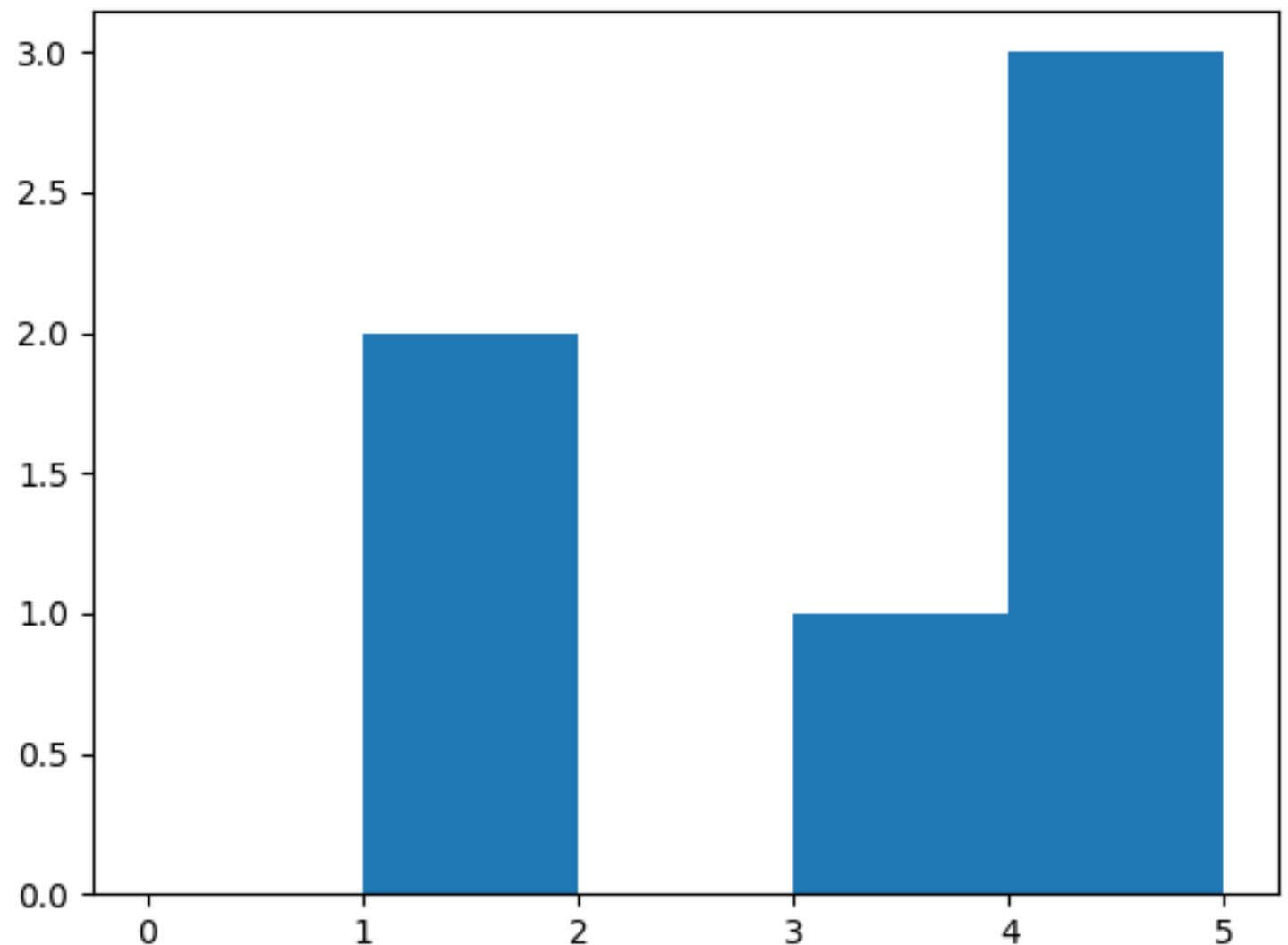
```
>>> np.var(a) # variância  
2.8055555555555554
```

NumPy (estatísticas)

- Podemos calcular histogramas (contagem de elementos)

```
>>> a = np.array([[1, 1.5, 3], [4, 5, 5]])  
>>> hist, bins = np.histogram(a, bins=range(6))
```

```
>>> hist  
[0  2  0  1  3]  
>>> bins  
[0  1  2  3  4  5]
```



NumPy (apply)

- Também podemos aplicar funções ao longo de uma dimensão específica de um array multidimensional.
- Dimensões são índices 0,1,...
- As funções operam sobre as projeções do array (arrays com menos uma dimensão) ao longo da dimensão escolhida

```
>>> a = np.array([[1,2,3] \
                  , [4,5,6]])
```

```
# soma de cada coluna na vertical
```

```
>>> np.apply_along_axis(np.sum, 0, a) )
[5 7 9]
```

```
# soma de cada linha na horizontal
```

```
>>> np.apply_along_axis(np.sum, 1, a) )
[ 6 15]
```

NumPy (álgebra linear)

- O *numpy* também oferece operações de álgebra linear
- E.g., produto de matrizes

```
>>> A = np.array([[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7, 8]])  
>>> B = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9], [10, 11, 12]])  
>>> A @ B  
[[ 70  80  90]  
 [158 184 210]]
```

$$\begin{pmatrix} \text{1} & \text{2} & \text{3} & \text{4} \\ \text{5} & \text{6} & \text{7} & \text{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{1} & \text{2} & \text{3} \\ \text{4} & \text{5} & \text{6} \\ \text{7} & \text{8} & \text{9} \\ \text{10} & \text{11} & \text{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{70} & \text{80} & \text{90} \\ \text{158} & \text{184} & \text{210} \end{pmatrix}$$

NumPy (álgebra linear)

- E.g., transposta de matrizes

```
>>> A = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6]])  
>>> np.transpose(A)  
[[1 4]  
 [2 5]  
 [3 6]]
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Exemplo (CSV)

- Podemos ler facilmente um ficheiro CSV para uma matriz *numpy*
- E.g., índice de secura mensal para o Porto publicado pelo IPMA [aqui](#)
 - Utilizado na última aula
- Contar os meses de chuva (a julgar pelo valor médio) e listar os seus primeiros dias

```
data = np.genfromtxt('mpdsi-1312-porto.csv', delimiter=',', skip_header=1)
# coluna 4 = médias de índice de secura
medias = data[:,4]
# dias chuvosos têm índice >= 1
chuvosos = medias >= 1
num_dias_chuvosos = (medias[chuvosos]).size
print(num_dias_chuvosos)
```

```
dates = np.genfromtxt('mpdsi-1312-porto.csv', delimiter=',', dtype='datetime64', usecols=0, skip_header=1)
dias_chuvosos = dates[chuvosos]
print(dias_chuvosos)
```

Exemplo (Excel)

- Podemos ler facilmente uma folha de um ficheiro Excel para uma matriz *numpy* (via *pandas*)
- E.g., precipitação durante os últimos ~90 anos publicado pelo IPMA [aqui](#) e [aqui](#)
- Anos mais e menos chuvoso de que há registo
- Médias de precipitação nos Séculos XX e XXI

```
import pandas as pd
```

```
dados = pd.read_excel('PT100-tx-tn-prec.xlsx', sheet_name=3).to_numpy()  
anual = dados[:89, [0, 17]]
```

```
min_prec = anual[:, 1].min()  
max_prec = anual[:, 1].max()
```

```
xx = anual[anual[:, 0] < 2000]  
xx_prec = np.mean(xx[:, 1])
```

```
xxi = anual[anual[:, 0] >= 2000]  
xxi_prec = np.mean(xxi[:, 1])
```

Exemplo (Excel)

- E.g., temperatura máxima anual durante os últimos ~90 anos publicado pelo IPMA, até 2019
- Podemos prever o futuro? \Rightarrow *Prophet*
- Previsões de temperatura para > 2020



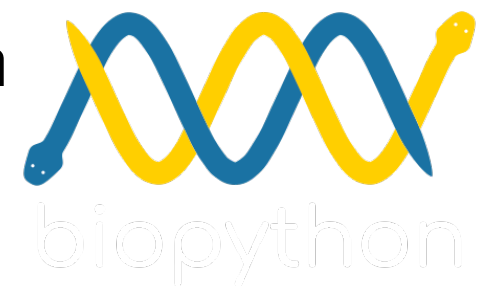
```
from prophet import Prophet
```

```
years : np.ndarray = [ '1931' '1932' .. '2019' ]  
temps : np.ndarray = [ 19.20333333 18.585 .. 21.53666667 ]  
df_for_prophet = pd.DataFrame( { "ds":years, "y":temps } )  
model = Prophet()  
model.fit(df_for_prophet)
```

```
forecast_df = model.make_future_dataframe(periods=10, freq='Y')  
forecast = model.predict(forecast_df)
```

Exemplo (FASTA)

- Podemos ler sequências genéticas para arrays NumPy
- E.g, ler alinhamentos de várias sequências, calculadas com ferramentas como BioPython (formato Aligned FASTA)
- Retornar percentagem de equivalência entre duas sequências



```
from Bio import AlignIO
```

```
alignments = AlignIO.read(open("apoex.afa"), "fasta")
d = { a.id : np.array(a) for a in alignments }
```

```
a1 = d['APE_BOVIN']
a2 = d['APE_MOUSE']
```

```
alphas = np.vectorize(lambda c: c>='A' and c<='Z')
mask = alphas(a1) & alphas(a2) & (a1==a2)
score = sum(mask[mask]) / len(mask) * 100
print(score, '%')
```

Pillow (imagens)

- Podemos usar uma biblioteca de processamento de imagens como o *Pillow* para ler imagens na forma de arrays *numpy* 2D
- Podemos transformar a imagem manipulando a matriz
 - E.g., aumentar a imagem 2x

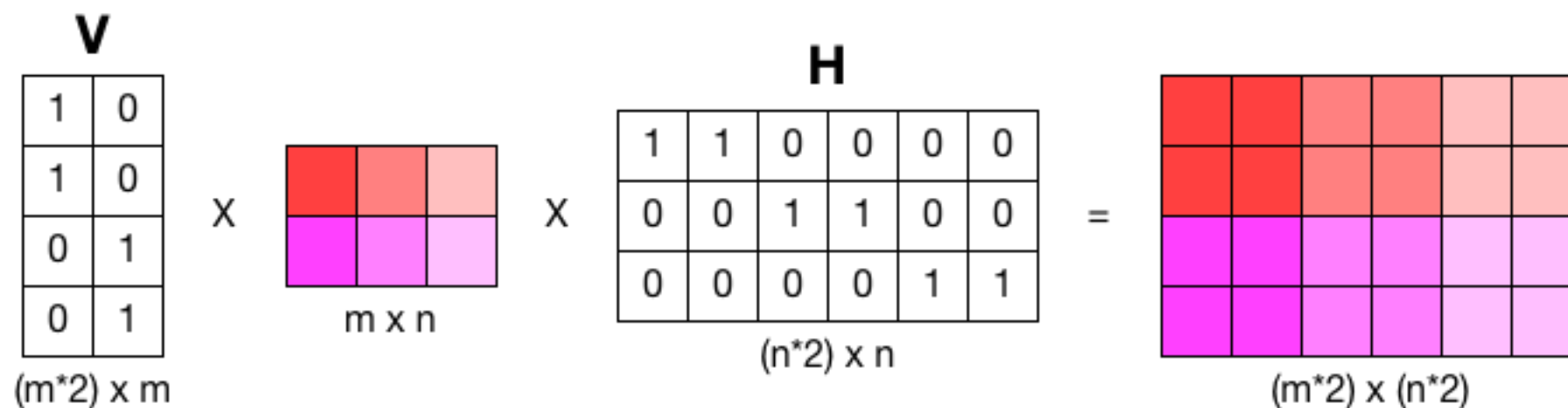


```
import numpy as np
from numpy import asarray
from PIL import Image

dcc=asarray(Image.open("dcc.jpg"))
x,y,z = dcc.shape
dcc_big = np.empty((x*2, y*2, z), dtype=dcc.dtype)
for i,row in enumerate(dcc):
    for j,pixel in enumerate(row):
        dcc_big[i*2-1:i*2+1,j*2-1:j*2+1] = pixel
Image.fromarray(dcc_big).save('dcc2x.jpg')
```

Numpy (transformações)

- Podemos transformar a imagem manipulando a matriz com álgebra linear
- E.g., aumentar a imagem 2x
 - Multiplicar por uma matriz com o dobro da altura
 - Multiplicar por uma matrix com o dobro do comprimento



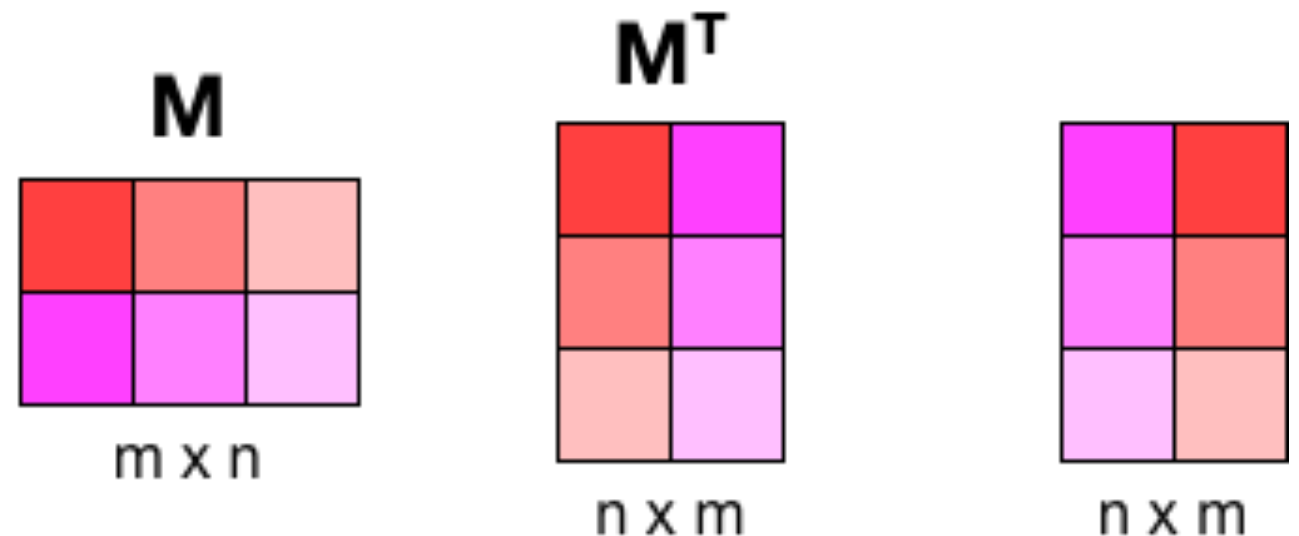
```
V = np.zeros((m*2,m), dtype="uint8")
np.fill_diagonal(V[0::2, :], np.ones((m)))
np.fill_diagonal(V[1::2, :], np.ones((m)))
```

```
H = np.zeros((n,n*2), dtype="uint8")
np.fill_diagonal(H[:, 0::2], np.ones((n)))
np.fill_diagonal(H[:, 1::2], np.ones((n)))
```


Numpy (transformações)

- Podemos transformar a imagem manipulando a matriz com álgebra linear
 - E.g., rodar a imagem 90° no sentido do relógio
 - Calcular a transposta
 - Inverter as colunas

```
m, n = M.shape
M_t = np.transpose(M)
M_rot = M_t[:, ::-1]
```

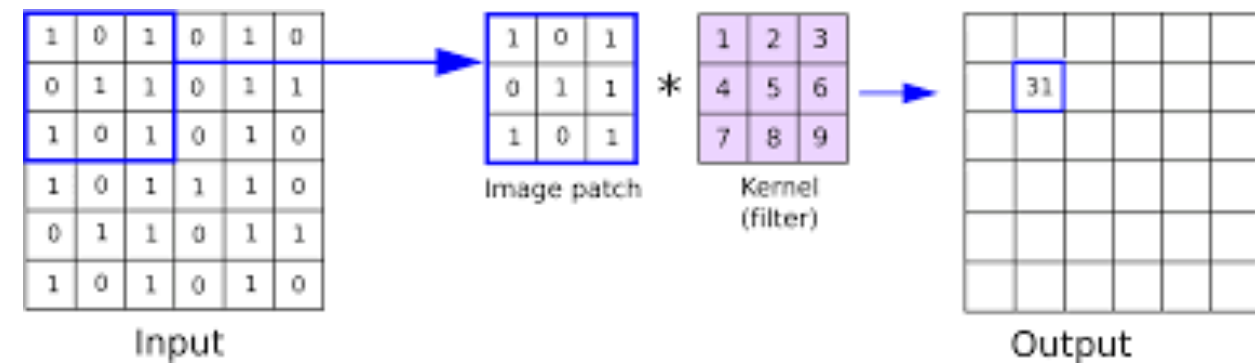


Numpy (filtros)

- Uma transformação matemática muito usada em processamento de imagens é a chamada *convolução 2D* ([Wikipedia](#)), que aplica um filtro w a uma imagem f

$$g(x, y) = \omega * f(x, y) = \sum_{i=-a}^a \sum_{j=-b}^b \omega(i, j) f(x - i, y - j)$$

```
def convolution2d(f, w):
    m, _ = w.shape
    a = math.floor(m/2)
    x = f.shape[0]
    y = f.shape[1]
    g = np.zeros((x, y, z), dtype="uint8")
    for i in range(x):
        for j in range(y):
            ff = f[max(0, i-a):i+a+1, max(0, j-a):j+a+1]
            ww = w[max(0, a-i):min(m, m+x-i-a-1), max(0, a-j):min(m, m+y-j-a-1)]
            ww = ww.reshape(ww.shape+(1,))
            s = np.sum(ff*ww, axis=(0, 1))
            s = np.minimum(np.maximum(0, s), 255)
            g[i][j] = s
    return g
```



Numpy (filtros)

- Diferentes filtros = diferentes matrizes de *kernel*
- E.g., 5x5 Gaussian Blur
- E.g., 3x3 Sharpen

$$\frac{1}{256} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$



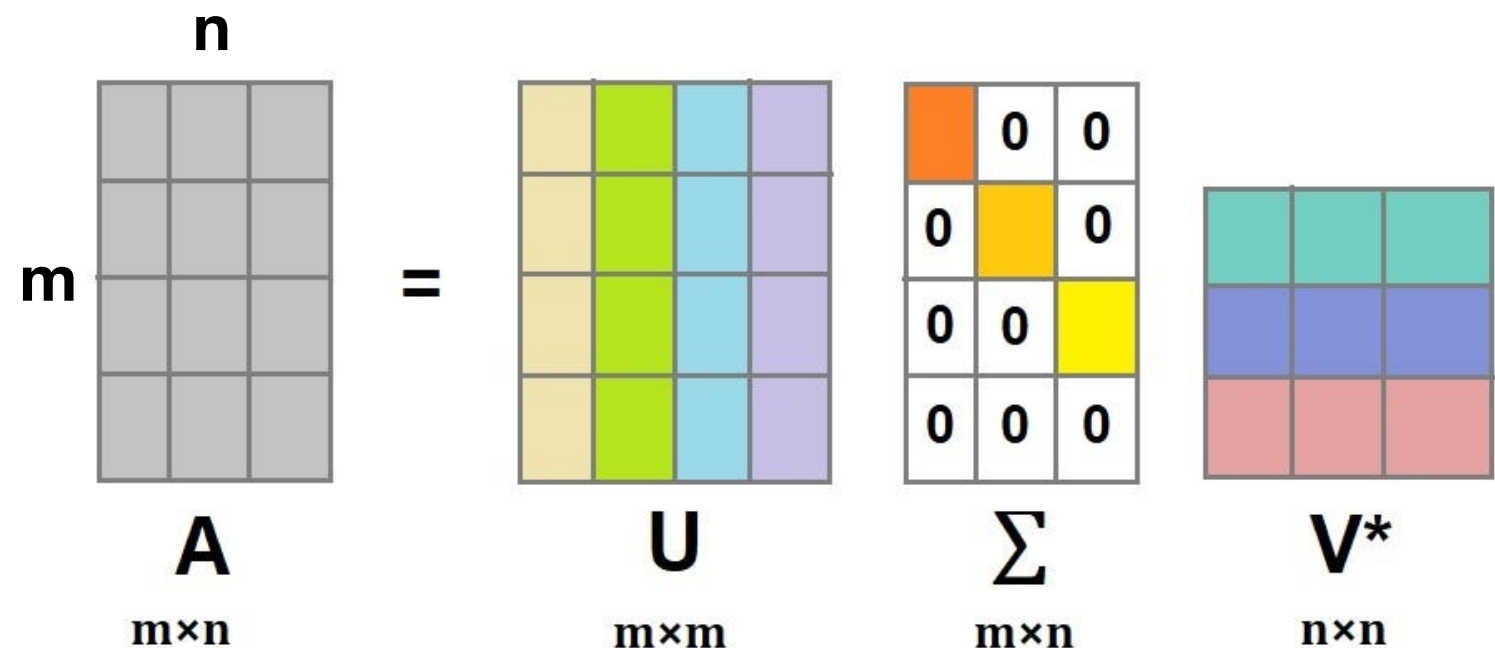
NumPy (compressão)

- Uma das ferramentas de álgebra linear muito usada, e.g., em data science, é factorização de matrizes
- Uma das mais comuns é SVD (Singular Value Decomposition)
 - Decompor uma matriz na multiplicação de sub-matrizes
 - Reconstrução muito perto da matriz original

```
m, n = A.shape
U, s, Vt = np.linalg.svd(A)

Sigma = np.zeros((m, n))
np.fill_diagonal(s)

A_approx = U @ Sigma @ Vt
```



NumPy (compressão)

- Uma das formas mais comuns de fatorização de matrizes é SVD (Singular Value Decomposition)
- Podemos reconstruir uma imagem $m \times n$ utilizando apenas r ranks, com $0 \leq r \leq n$, em que r = fator de compressão

Diagram illustrating the SVD decomposition of a matrix A (size $m \times n$) into three components:

- U_r (size $m \times r$): Matrix of left singular vectors.
- Σ_r (size $r \times r$): Matrix of singular values d_1, \dots, d_r .
- V_r^T (size $r \times n$): Matrix of right singular vectors.

The decomposition is shown as:

$$A = U_r \Sigma_r V_r^T$$

```
U_r = U[:, :r]
Sigma_r = Sigma[:, :r, :r]
Vt_r = Vt[:, :r, :]
```

```
A_compressed = U_r @ Sigma_r @ Vt_r
```


NumPy (compressão)

- Diferentes fatores de compressão

Original



r=5



r=20



r=50



r=100



r=200

