

Programação II

Computação numérica com arrays (numpy)

Hugo Pacheco

DCC/FCUP

20/21

Operações matemáticas

- Podemos utilizar listas e listas de listas para representar vetores e matrizes
- No entanto, as operações habituais em matemática vetorial não estão disponíveis
- Temos de fazer a operação elemento a elemento
- E.g. somar ou multiplicar vetor por constante

```
>>> xs = [1, 2, 3]
```

```
>>> xs + 3
```

```
TypeError: can only concatenate list (not "int") to list
```

```
>>> xs * 3
```

```
[1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3]
```

```
>>> [ x * 3 for x in xs ]
```

```
[3, 6, 9]
```

Operações matemáticas

- Podemos utilizar listas e listas de listas para representar vetores e matrizes
- No entanto, não são necessariamente eficientes
 - espaço ocupado proporcional às dimensões
 - listas têm tipo/tamanho variável

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

```
matriz = [[0, 0, 0, 1, 0],  
          [0, 0, 0, 0, 0],  
          [0, 2, 0, 0, 0],  
          [0, 0, 0, 0, 0],  
          [0, 0, 0, 3, 0]]  
  
print(matriz[1][1])
```

Operações matemáticas

- Podemos utilizar dicionários para representar matrizes
- No entanto, as operações habituais em matemática vetorial não estão disponíveis
- No entanto, não são necessariamente eficientes
 - usa menos espaço, mas acessos mais lentos
 - dicionários também têm tipo/tamanho variável

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

```
matriz = {(0, 3): 1, (2, 1): 2, (4, 3): 3}
print(matriz.get((1, 3), 0))
```

```
>>> matriz * 3
```

```
TypeError: unsupported operand type(s) for *: 'dict' and 'int'
```

```
>>> { xy : v*3 for xy,v in matriz.items() }
{(0, 3): 3, (2, 1): 6, (4, 3): 9}
```

NumPy

- O módulo *numpy* fornece implementações eficientes de arrays multi-dimensionais (vetores, matrizes, etc) e suporta operações matemáticas
 - dimensões fixas
 - todos os elementos têm o mesmo tipo
- E.g., para multiplicar por uma constante

```
>>> import numpy as np
>>> a = np.array([2, 3, 8])
>>> a.dtype
int64
>>> b = 2.1 * a
>>> b
[ 4.2,  6.3, 16.8]
>>> b.dtype
float64
```

NumPy (shape)

- E.g., para multiplicar vetores ponto-a-ponto

```
>>> a = np.array([2, 3, 8])
>>> a * a
[ 4, 9, 64]
```

- Também podemos redimensionar arrays

```
>>> a = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6]])
>>> a.shape
(2, 3)
>>> a.reshape(3, 2)
[[1 2]
 [3 4]
 [5 6]]
>>> a.reshape(4, 4)
ValueError: cannot reshape array of
size 6 into shape (4, 4)
```

NumPy (criação)

- Podemos criar arrays passando listas ao construtor *array*
- Ou com valores por defeito

```
>>> a = np.zeros((2, 2))
>>> a
[[0.  0.]
 [0.  0.]]
>>> a.dtype
float64
>>> np.ones((2, 2), 'uint16')
[[1  1]
 [1  1]]
```

```
>>> np.empty((2, 2), 'uint16')
[[      0      0]
 [      0 16368]]
>>> np.full((2, 2), 3.5)
[[3.5  3.5]
 [3.5  3.5]]
```

NumPy (criação)

- Ou utilizando *arange* como *range* para sequências de inteiros
- Ou utilizando *linspace* para sequências de números não inteiros
 - recebe limite inferior e superior do intervalo (inclusivé), e número de elementos a gerar
- gera um array de elementos equidistantes

```
>>> np.arange(4)
[0 1 2 3]
>>> np.arange(1, 5)
[1 2 3 4]
```

```
>>> np.linspace(0, math.pi, 5)
[0.  0.78539816 1.57079633
 2.35619449 3.14159265]
```


NumPy (indexação)

- Podemos projetar arrays a várias dimensões
- Cuidado: projeções são vistas, não cópias!

```
>>> a = np.array([2, 3, 8])
>>> a[2]
8
>>> b = np.array([
    [2, 3, 8],
    [4, 5, 6],
])
>>> c = b[1]
>>> c
array([4, 5, 6])
```

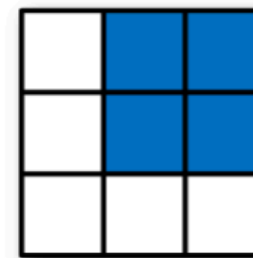
```
>>> b[1][2]
6
>>> b[1, 2]
6
>>> c[1] = 9
>>> b
[[2 3 8]
 [4 9 6]]
```

NumPy (slices)

- Podemos utilizar a notação familiar de slices
- Cuidado : também são vistas!

```
>>> vec = np.array([2, 3, 8])
>>> arr = np.array([[2, 3, 8],
                    [4, 5, 6]])

>>> vec[1:3] = 5
>>> vec
[2 5 5]
>>> arr[1, :2]
[4 5]
>>> arr[:2, 1]
[3 5]
>>> arr[:, :2]
> [[2 3]
>  [4 5]]
```

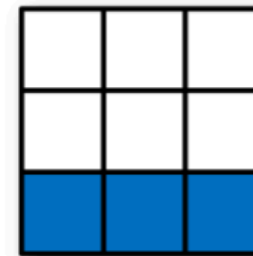


Expression

arr[:2, 1:]

Shape

(2, 2)



arr[2]

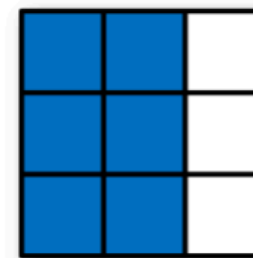
(3,)

arr[2, :]

(3,)

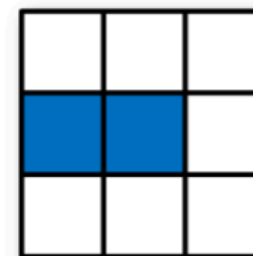
arr[2:, :]

(1, 3)



arr[:, :2]

(3, 2)



arr[1, :2]

(2,)

arr[1:2, :2]

(1, 2)

NumPy (máscaras)

- Máscara = vetor de booleanos com o tamanho do array
- Pode ser criada aplicando uma operação ao array
- Pode ser usada como índice

```
>>> a = np.array([1, 2, 3, 4])
>>> mask = (a >= 2) & (a < 4)
>>> mask
[False True True False]
>>> a[mask]
[2 3]
>>> a[mask] = 0
>>> a
[1 0 0 4]
```

NumPy (broadcasting)

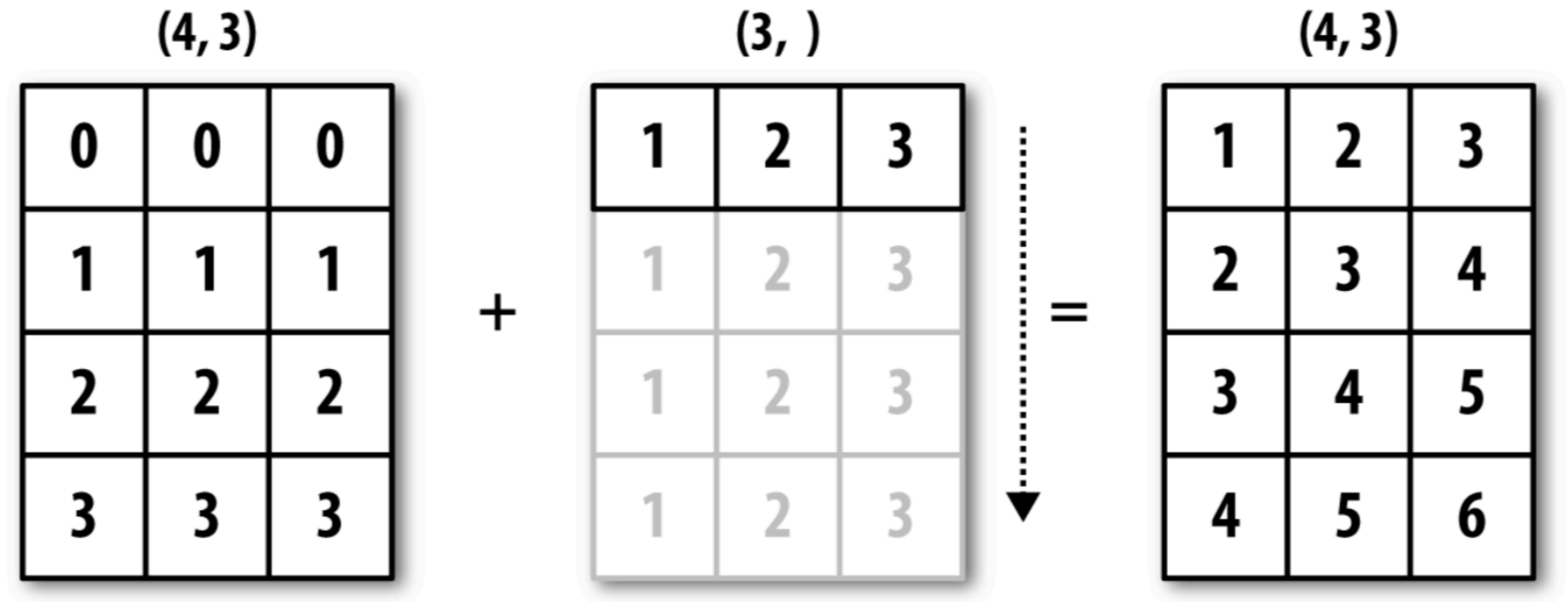
- Já vimos que podemos aplicar operações entre um array e uma constante, ou entre arrays com shapes iguais

```
>>> a =  
np.array([1, 2, 3])  
>>> a > 2  
[False False  True]  
>>> b =  
np.array([[1, 2, 3],  
[4, 5, 6]])  
>>> b * 3  
[[ 3  6  9]  
[12 15 18]]
```

```
>>> a =  
np.array([[1, 2, 3],  
[4, 5, 6]])  
>>> b =  
np.array([[1, 1, 1],  
[2, 2, 2]])  
>>> a * b  
[[ 1  2  3]  
[ 8 10 12]]
```

- Generaliza para arrays de shapes diferentes, desde que, expandindo as dimensões em falta, tenham a mesma shape

NumPy (broadcasting)

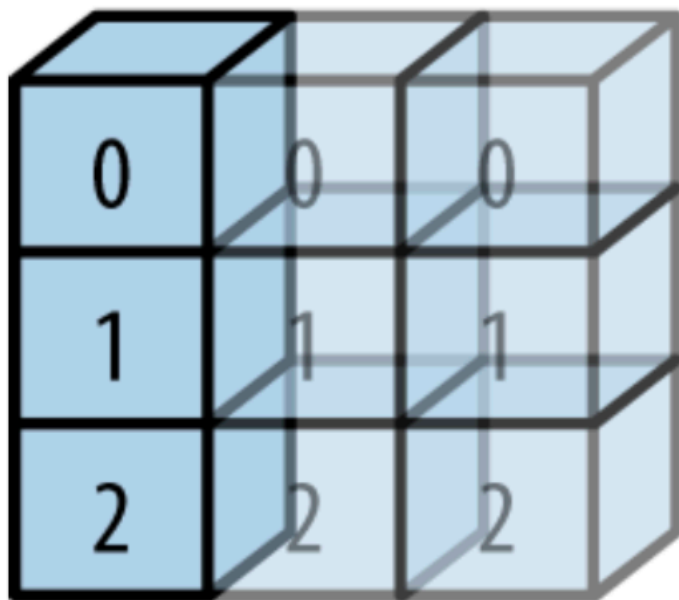


NumPy (broadcasting)

(4, 3)		(4, 1)		(4, 3)																																				
<table><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr></table>	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	+	<table><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr></table>	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	=	<table><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>7</td><td>7</td><td>7</td></tr></table>	1	1	1	3	3	3	5	5	5	7	7	7
0	0	0																																						
1	1	1																																						
2	2	2																																						
3	3	3																																						
1	1	1																																						
2	2	2																																						
3	3	3																																						
4	4	4																																						
1	1	1																																						
3	3	3																																						
5	5	5																																						
7	7	7																																						

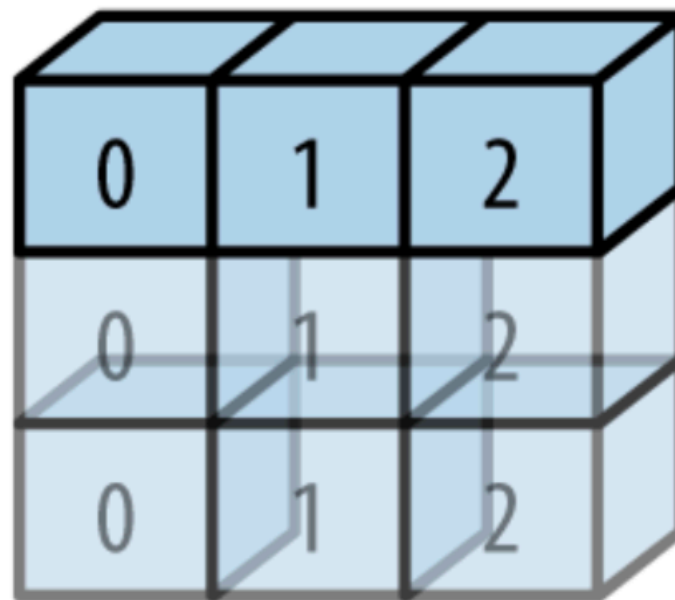
NumPy (broadcasting)

`np.ones((3, 1))+np.arange(3)`



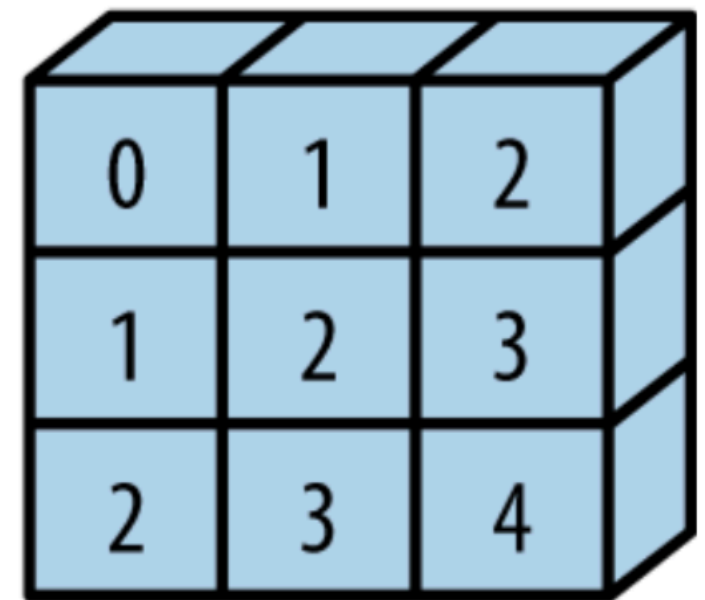
0	0	0
1	1	1
2	2	2

+



0	1	2
0	1	2
0	1	2

=



0	1	2
1	2	3
2	3	4

NumPy (funções universais)

- Além de operadores binários, o *numpy* também redefine funções matemáticas (*sin*, *cos*, *sqrt*, etc)
- Operam elemento a elemento
- Lista completa

```
>>> a = np.array([1, 2, 3, 4])
>>> np.sqrt(a)
[1.  1.41421356 1.73205081 2.  ]
>>> np.exp(a)
[2.71828183  7.3890561  20.08553692  54.59815003]
>>> b = np.array([4, 3, 2, 1])
>>> np.maximum(a, b)
[4  3  3  4]
```


NumPy (vectorize)

- A função *vectorize*, análogamente à função *map* para sequências, permite converter uma função genérica numa função universal *numpy* que pode ser aplicada a cada elemento do array
- E.g., para interpretar cada elemento como um índice e substituí-lo pelo valor correspondente numa lista

```
assocs = [10, 20, 30, 40, 50, 60]
a = np.array([[4, 2, 1, 3], [5, 0, 1, 2]])

# substitui cada elemento pelo seu valor na lista
def assoc(i) : return (assocs[i])
npassoc = np.vectorize(assoc)
print(npassoc(a))
```

NumPy (agregação)

- Algumas funções *numpy* agregam os elementos de um array, analogamente a funções de agregação para sequências

```
>>> a = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6]])
```

```
# soma
```

```
>>> np.sum(a)
```

```
21
```

```
# mínimo
```

```
>>> np.min(a)
```

```
1
```

```
# máximo
```

```
>>> np.max(a)
```

```
6
```

```
# desvio padrão
```

```
>>> np.std(a)
```

```
1.707825127659933
```

NumPy (álgebra linear)

- O *numpy* também oferece operações de álgebra linear
- E.g., produto de matrizes

```
>>> A = np.array([[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7, 8]])  
>>> B = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9], [10, 11, 12]])  
>>> A @ B  
[[ 70  80  90]  
 [158 184 210]]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 & 80 & 90 \\ 158 & 184 & 210 \end{pmatrix}$$

NumPy (álgebra linear)

- E.g., transposta de matrizes

```
>>> A = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6]])  
>>> np.transpose(A)  
[[1 4]  
 [2 5]  
 [3 6]]
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Exemplo NumPy

- Podemos ler um facilmente um ficheiro CSV para uma matriz *numpy*
- E.g., índice de secura mensal para o Porto publicado pelo IPMA [aqui](#)
 - Utilizado na última aula
- Contar os dias de chuva (a julgar pelo valor médio) e listar esses mesmos dias

```
data = np.genfromtxt('mpdsi-1312-porto.csv', delimiter=',', skip_header=1)
# coluna 4 = médias de índice de secura
medias = data[:,4]
# dias chuvosos têm índice >= 1
chuvosos = medias >= 1
num_dias_chuvosos = (medias[chuvosos]).size
print(num_dias_chuvosos)
```

```
dates = np.genfromtxt('mpdsi-1312-
porto.csv', delimiter=',', dtype='datetime64', usecols=0, skip_header=1)
dias_chuvosos = dates[chuvosos]
print(dias_chuvosos)
```