TP2
Analyse Numérique

Approximation

CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE

Rappels / régression linéaire

- Soient n couples de points (x_i, y_i) $\rightarrow$ tolérer des variations des y_i
- Droite de **droite de régression** $\mathcal{D}$ représentative de ces points ?
- Détermination des coefficients a et b vérifiant

$$y_i = ax_i + b + r_i \quad 1 \leq i \leq n$$

Rappels / régression linéaire

- Minimisation de la somme des distances au carré entre la droite et les points

$$\sum_{i=0}^{n}(y_i - (ax_i + b))^2$$

- Minimisation de la norme 2 du résidu

$$\sum_{i=0}^{n}(y_i - (ax_i + b))^2 = \sum_{i=0}^{n} r_i^2 \stackrel{\text{def}}{=} ||r||_2^2 = r^\top r$$

Rappels / regression linéaire

- Relations de dépendances entre x et y

$$i = n \quad \to \quad y_n = a x_n + b + r_n$$

- Formulation matricielle

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_i \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

$$\boxed{y = Mp + r}$$

$$m_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} x_i^{j-1},\ y \stackrel{\text{def}}{=} (y_1, \cdots, y_n)^\top,\ r \stackrel{\text{def}}{=} (r_1, \cdots, r_n)^\top,\ p \stackrel{\text{def}}{=} (b, a)^\top$$

$$\boxed{r^\top r = p^\top Q p - 2p^\top s + y^\top y}$$

avec $Q \stackrel{\text{def}}{=} M^\top M$ matrice de dimension 2×2 et $s \stackrel{\text{def}}{=} M^\top y$ vecteur de dimension 2.

$$Q = \begin{bmatrix} n & \sum_{k=1}^{n} x_k \\ \sum_{k=1}^{n} x_k & \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad s = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} y_k \\ \sum_{k=1}^{n} y_k x_k \end{bmatrix}$$

Rappels / regression linéaire

Equations normales

La droite de régression est obtenue en résolvant le système suivant

$$M^\top M p = M^\top y$$

avec $M^\top M$ matrice de dimension 2×2

Coefficient de corrélation linéaire

$$r_{xy} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

- $-1 \leq r_{xy} \leq 1$
- -1 : points alignés sur une droite de pente négative
- 1 : points alignés sur une droite de pente positive
- régression linéaire représentative : $|r_{xy}| > \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.86$

CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE

Rappels / pôlynome d'approximation

- Soient n couples de points (x_i, y_i) $\rightarrow$ tolérer des variations des y_i
- Polynôme d'approximation représentatif de ces points ?
- Détermination les coefficients a_j vérifiant

$$y_i = \sum_{j=0}^{d} a_j x_i^j + r_i \quad 1 \leq i \leq n$$

Rappels / pôlynome d'approximation

- Minimisation de la somme des distances au carré entre le polynôme et les points

$$\sum_{i=0}^{n} \left(y_i - \sum_{j=0}^{d} a_j x_i^j \right)^2$$

- Minimisation de la norme 2 du résidu

$$\sum_{i=0}^{n} \left(y_i - \sum_{j=0}^{d} a_j x_i^j \right)^2 = \sum_{i=0}^{n} r_i^2 \stackrel{\text{def}}{=} ||r||_2^2 = r^\top r$$

estp

CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE

Rappels / pôlynome d'approximation

- Relations de dépendances entre x et y

$$i = n \quad \rightarrow \quad y_n = \sum_{j=0}^{d} a_j x_n^j + r_n$$

- formulation matricielle

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^d \\ 1 & x_2 & & x_2^d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_i & & x_i^d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

$$\boxed{r^\top r = p^\top Q p - 2p^\top S + y^\top y}$$

avec $Q \overset{\text{def}}{=} M^\top M$ matrice de dimension $(d+1) \times (d+1)$ et $S \overset{\text{def}}{=} M^\top y$ vecteur de dimension $(d+1)$.

$$Q = \begin{bmatrix} n & \cdots & \sum_{k=1}^{n} x_k^d \\ \vdots & \sum_{k=1}^{n} x_k^{i+j-2} & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} x_k^d & \cdots & \sum_{k=1}^{n} x_k^{2d} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad s = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} y_k x_k^0 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} y_k x_k^d \end{bmatrix}$$

Rappels / pôlynome d'approximation

Equations normales

La droite de régression est obtenue en résolvant le système suivant

$$M^\top M p = M^\top y$$

avec $M^\top M$ matrice de dimension $(d+1) \times (d+1)$

Cadre du TP

- Notebook Python.
- Utilisation de NumPY.
- Implementation des exemples issus du TD/Cours (majoritairement).

Exemple A, régression linéaire

Soient les quatre points de $\mathbb{R}^2$,

$$(1, -0.5),\ (2, 0),\ (3, 1.5),\ (4, 2).$$

En réutilisant les formules issues du cours :

1. Construire la matrice Vandermonde ***M***
2. Generer la matrice associé ***Q*** et le vecteur ***s***
3. Résoudre le système d'équations normales et déduire l'expression de la droite de regression.

Exemple B, polynômes d'approximation

Soient les quatre points de $\mathbb{R}^2$,

$$(-3, 17),\ (-1, 1),\ (0, -1),\ (2, 7).$$

1. Déterminer la droite de régression de ces points.
2. Calculer et interpréter le coefficient de corrélation linéaire.
3. Déterminer le polynôme de degré 2 minimisant la norme 2 du résidu de ces points.
4. Calculer la norme 2 du résidu obtenu avec le polynôme de degré deux. Conclure

Exemple C, généralisation

Pour ***n*** points et un polynôme de regression d'ordre ***p***, généraliser :

1. la construction de la matrice Vandermonde ***M***
2. La construction de la matrice ***Q*** et du vecteur ***s***
3. Le calcul du polynôme de regression d'ordre ***p***.
4. Le calcul de la norme 2 du résidu.

5. Pour les points-ci-dessous, calculer le polynôme de regression d'ordre 2 et d'ordre 3
6. Representer ces points et les polynômes de regression en utilisant *matplotlib.*

$$(1,2)\ (2,9)\ (3,28)\ (4,65)\ (5,126)\ (6,217)\ (7,344)\ (8,513)\ (9,730)$$

→ Comparer les résultats avec la fonction python ***np.polyfit***

Fin

CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE