

TP1

Analyse Numérique

Résolution de systèmes linéaires

Rappels

- Normes et conditionnements
- Systèmes Triangulaires
- Méthode de Gauss

Rappels / normes

- norme 1

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

- norme euclidienne (norme 2)

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}$$

- norme infinie

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Rappels / conditionnement

Définition

Soit une norme matricielle subordonnée notée $\| \cdot \|$

Le *conditionnement* relatif à cette norme d'une matrice inversible A est

$$K(A) \stackrel{\text{def}}{=} \|A\| \|A^{-1}\|$$

Propriétés. Soit A une matrice inversible. Le conditionnement $K(A)$ vérifie les propriétés

1. $K(A) = K(A^{-1})$,
2. $K(A) \geq 1$,
3. $\forall \alpha \neq 0, K(\alpha A) = K(A)$.

Rappels / Formule de descente (L)

$$\begin{bmatrix} l_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{b_1}{l_{11}} \quad \text{et} \quad x_i = \frac{1}{l_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j \right), \quad 2 \leq i \leq n$$

Rappels / Formule de remontée (U)

$$\begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$x_n = \frac{b_n}{u_{nn}} \quad \text{et} \quad x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j \right), \quad n-1 \leq i \leq 1$$

Rappels / méthode de Gauss

Objectif : Transformer le système $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en un système équivalent de la forme $\mathbb{U}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}$, où \mathbb{U} est une matrice triangulaire supérieure et $\hat{\mathbf{b}}$ est le second membre convenablement modifié.

On appelle **opérations élémentaires** sur les lignes d'une matrice les trois opérations suivantes :

- i) **Échange** de deux lignes ($L_i \leftrightarrow L_j$).
- ii) **Multiplication** d'une ligne par une constante non nulle ($L_i \leftarrow \lambda L_i$).
- iii) **Substitution** : remplacer une ligne par elle-même plus un multiple d'une autre ligne ($L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$).

On ne modifie pas l'ensemble des solutions d'un système linéaire en appliquant une ou plusieurs opérations élémentaires à sa matrice augmentée.

Cadre du TP

- Notebook Python)
- Utilisation de NumPY
- Implementation des exemples issus du TD/Cours

Exemple A, manipulations simples

- Calculer les normes et les conditionnements en utilisant les fonctions Python (cf. Exercice 1 du TD1)

Soient le vecteur x et la matrice A définis par

$$x = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer les normes 1, 2 et infinie du vecteur x et de la matrice A .
2. Déterminer le conditionnement de A en normes 1 et 2.

Exemple B, matrices triangulaires supérieures

- Implementer la resolution du système suivant (cf. exemple du cours)

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -13 \\ \frac{27}{4} \end{bmatrix}$$

Exemple C, Pivot de Gauss

- Implementer la resolution du système suivant (cf. cours)

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ 5x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -1 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Exemple D*

- Etendre et généraliser les exemples B et C (matrice aléatoire de taille 100)
 1. lecture du fichier contenant U : **`np.loadtxt("matrice_upper_100.txt")`**
 2. Lecture du fichier contenant A : **`np.loadtxt("matrice_100.txt")`**
 3. Lecture du fichier contenant b : **`np.loadtxt("rhs_100.txt")`**
- Calculer de l'erreur relative entre solution de reference et l'algorithme implémenté

Fin