TP4
Analyse Numérique

Méthode des différences-finies en 1D

CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE

Rappels / differences-finies 1D

$$\mathcal{L}(u) = f, \tag{4.1}$$

où $\mathcal{L}$ est l'opérateur, u la fonction inconnue et f le second membre.

Une EDP est

— *linéaire* si $\mathcal{L}$ est linéaire par rapport aux dérivées partielles de la fonction inconnue,

— *d'ordre* d, où d désigne l'ordre de la plus grande dérivée de $\mathcal{L}$ (on distingue l'ordre en espace et l'ordre en temps),

— *instationnaire* si $\mathcal{L}$ dépend du temps,

— *homogène* lorsque son second membre est nul.

Une EDP stationnaire est

— posée sur un *domaine d'espace* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ où d est la dimension de l'espace $(1 \leq d \leq 3)$,

— complétée par une *condition aux limites* g imposée sur la *frontière* $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$ de Ω,

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left(u(x)\right) = f & \text{dans } \Omega, \\ u(x) = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Rappels / differences-finies 1D

Formule de Taylor–Young. *Soit f définie sur un intervalle $I = [a, b]$. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ alors $\forall h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in I$,*

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + o(h^n).$$

CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE

Rappels / differences-finies 1D

$$\boxed{\mathcal{D}_h^+ f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

$$\boxed{\mathcal{D}_h^- f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}}$$

$$\boxed{\mathcal{D}_h f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}}$$

$$\boxed{\mathcal{D}_h^{(2)} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}}$$

$$\boxed{\mathcal{D}_h^{(4)} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 6f(x) - 4f(x+h) + f(x+2h)}{h^4}}$$

CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE

Rappels / differences-finies 1D

$$(\mathcal{P}^1)\begin{cases} -u''(x) = f(x), & \forall x \in]0, L[\\ u(0) = \alpha, \\ u(L) = \beta. \end{cases}$$

$$-u''(x_i) = f(x_i), \quad \{x_i = ih\}_{1 \leq i \leq N}$$

$$\frac{-u_h(x_i - h) + 2u_h(x_i) - u_h(x_i + h)}{h^2} = f(x_i), \quad \{x_i = ih\}_{1 \leq i \leq N}$$

$$\boxed{\frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} = f_i,} \quad 1 \leq i \leq N$$

Rappels / differences-finies 1D

$$(\mathcal{P}_h^1)\begin{cases} -u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1} = h^2 f_i \quad , 2 \leq i \leq N-1 \\ 2u_1 - u_2 = h^2 f_1 + \alpha, \\ -u_{N-1} + 2u_N = h^2 f_N + \beta. \end{cases}$$

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{bmatrix} + \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}$$

estp
CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE

Cadre du TP

- Notebook Python.
- Utilisation de NumPY.
- Implementation des exemples issus du TD/Cours (majoritairement).

Exemple A

On considère les fonctions $sin\ (x)$, $\ln(1 + \mathrm{x})$ et x^2

1. Utiliser les opérateurs $\mathcal{D}_h^+$, $\mathcal{D}_h^-$,$\mathcal{D}_h$ et $\mathcal{D}_h^* f$ (cf. cours) afin d'évaluer la valeur approchée de ces dérivées en x=1
2. Comparer les résultats aux valeurs analytiques.
3. Tracer la courbe log-log de l'erreur en fonction de la valeur de h, quelle interprétation peut-on faire de cette courbe ?

CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE

Exemple B

$$\begin{cases} -u'' + au = 0, \quad \forall x \in]0,1[\\ u(0) = 0, \quad u(1) = 1 \end{cases}$$

Equation de reaction-diffusion décrite dans l'exercice 3 du TD4 (a est une constante positive)

1. Rappeler la solution analytique de cette équation
2. Ecrire le schema centré pour approcher l'équation
3. Rappeler la matrice et le second member pour ce systeme (***N=5***)
4. Implémenter la resolution en python de cette EDP avec N arbitraire (utiliser notamment les fonctions Python *linspace, diag et linalg.solve*

1. Tracer la courbe log-log de l'erreur en fonction de la valeur de *h* (pas de discrétisation en espace)
2. Quel est l'impact d'une division par 2, 4 ou 8 de ***h*** (pas de discrétisation) ? Quel est le lien avec l'ordre du schema numérique ?

estp

CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE

Fin

CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE