TP3
Analyse Numérique

Interpolation et Intégration

CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE

Rappels / Interpolation

Nous souhaitons trouver le *polynôme d'interpolation* P_n de degré n associé aux $n+1$ couples (x_i, y_i), c'est-à-dire vérifiant

$$P_n(x_i) = y_i, \quad 0 \leq i \leq n \tag{3.1}$$

Ces $n+1$ égalités s'appellent les *contraintes d'interpolation.*

FIGURE 3.1 – Exemple de polynôme d'interpolation P_5 passant par 6 points.

Nous désignons par $\mathbb{P}^n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré n.

Théorème d'unicité. *Soient $n+1$ couples de points (x_i, y_i), il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{P}^n[X]$ tel que*

$$P_n(x_i) = y_i, \quad \forall\, 0 \leq i \leq n$$

Rappels / Interpolation

Polynômes de Lagrange. *Soient* $n+1$ *réels distincts notés* $\{x_i\}_{0\leq i\leq n}$. *Les* $n+1$ *polynômes de Lagrange associés à ces points sont définis par*

$$\boxed{L_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)},} \quad 0\leq i\leq n \tag{3.2}$$

$$\boxed{L_i(x_j) = \delta_{ij}}$$

Formule de Lagrange. *Le polynôme d'interpolation est défini à partir des polynômes de Lagrange* L_i *selon la relation suivante*

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)} \tag{3.4}$$

Rappels / Quadrature

Soit $I(f)$ l'intégrale d'une fonction f continue sur l'intervalle $[a, b]$,

$$I(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(x)dx.$$

Nous souhaitons approcher cette intégrale par le nombre $\tilde{I}_n(f) \simeq I(f)$,

$$\boxed{\tilde{I}_n(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i).}$$

Cette relation est une *formule quadrature* dans laquelle

- les x_i sont les *points d'intégration*,
- les w_i sont les *poids d'intégration*,
- n désigne le nombre de points de la quadrature.

Rappels / Quadrature

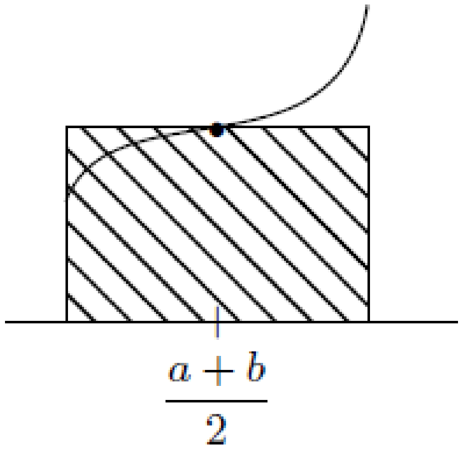
Quadratures interpolantes

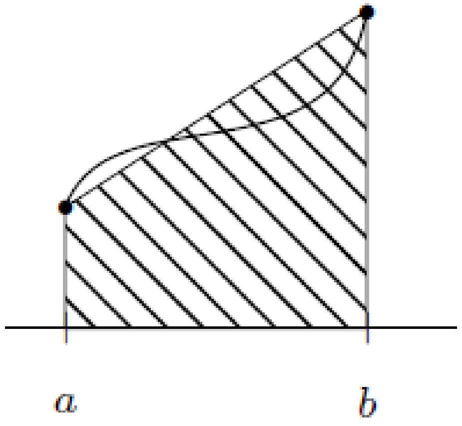
les points d'intégration sont répartis uniformément sur l'intervalle

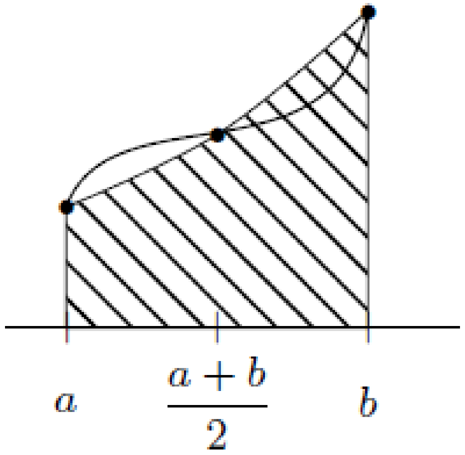
Formule de Newton–Cotes. *Soit un ensemble de n points distincts $\{x_i\}, 1 \leq i \leq n$ dans $[a,b]$. L'intégrale sur $[a,b]$ du polynôme d'interpolation P_{n-1} de $f \in \mathcal{C}([a,b])$ associé à ces points est*

$$I(P_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \quad \text{avec} \quad w_i \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b L_i(x)dx,$$

où $L_i(x)$ désigne le i-ème polynôme de Lagrange associé aux x_i.







$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{a+b}{2} \\ w_1 = b-a \end{array}\right\} \Rightarrow \quad I(f) \simeq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a,\ x_2 = b \\ w_1 = w_2 = \dfrac{b-a}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad I(f) \simeq \frac{(b-a)}{2}(f(a) + f(b))$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a,\ x_2 = \dfrac{a+b}{2},\ x_3 = b \\ w_1 = w_3 = \dfrac{b-a}{6},\ w_2 = \dfrac{2(b-a)}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad I(f) \simeq \frac{(b-a)}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Rappels / Quadrature

Quadratures de Gauss

Les quadratures de Gauss imposent la répartition des points d'intégration

- Polynome de Legendre

$$\forall k > 1, \quad \boxed{(k+1)P_{k+1}(x) = (2k+1)xP_n(x) - kP_{k-1}(x)} \quad \text{avec} \quad P_0(x) = 0 \text{ et } P_1(x) = x.$$

- Points d'integrations (x_i) → racines du polynome de Legendre
- Poids (w_i)→ cf. cours (formule associant la dérivée du polynome de Legendre)

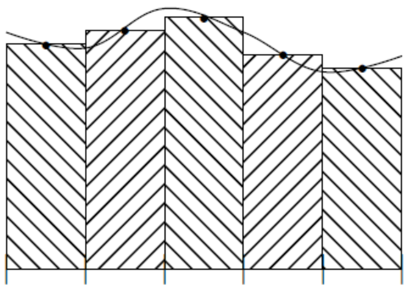
- Gauss-Legendre
- Gauss-Hermite
- Gauss-Chebychev
- ....

CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE

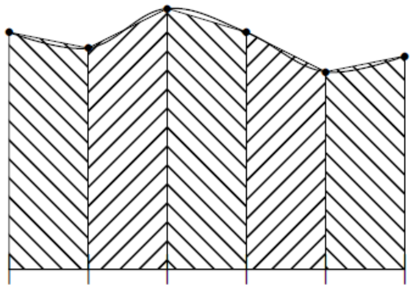
Rappels / Quadrature

Le principe des formules composites repose sur la relation de Chasles,

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{m} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx,$$



Méthode des rectangles



Méthode des trapèzes

Figure 3.5 – Illustration de formules composites.

Intégration

Partie A : ex1 TD

- Déterminer la base de polynomes de Lagrange en 0,1,2 et 3
- En déduire le polynome interpolant les points (0,1), (1,-1), (2,2) et (3,-2)
- Tracer ce polynôme.

Partie B

- Adapter le programme pour l’intervalle [-1,1], en considérant un nombre variable de points (n)
    - Interpolation de la fonction de ***cosinus***.
    - Interpolation de la fonction de ***Runge***.

A me renvoyer par mail

- 2 figures (une par fonction) + 1 paragraphe
- Tracer l’erreur entre les fonctions précédentes et leurs interpolations pour n=5,7,9.
- Analyser ces résultats et proposer des ameliorations (méthodes numériques).

Quadrature

Calcul de l'integrale de la fonction ***$1/(1+x^2)$*** entre [0,1]

a) Utiliser les methodes du Rectangle, du Trapeze et de Simpson (sans subdivision)
b) Utiliser les formules composites de ces méthodes afin d'améliorer les résultats (n=5)
c) Comparer les résultats aux méthodes de quadrature de Gauss (cf. Cours)
d) Comparer les résultats à la formule analytique (si possible).

Appliquer la même méthodologie pour la function de *Runge*.

A me renvoyer par mail

- Deux diagrammes en bâton (par fonction) representant l'erreur relative pour chaque méthode.
- Paragraphe expliquant ces résultats.

Fin

CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE