TP1
Analyse Numérique

Résolution de systèmes linéaires

estp
CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE

Rappels

- Normes et conditionnements
- Systèmes Triangulaires
- Méthode de Gauss

Rappels / normes

- norme 1

$$||A||_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

- norme euclidienne (norme 2)

$$||A||_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}$$

- norme infinie

$$||A||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Rappels / conditionnement

Définition

Soit une norme matricielle subordonnée notée $||\cdot||$
Le *conditionnement* relatif à cette norme d'une matrice inversible A est

$$\boxed{K(A) \stackrel{\text{def}}{=} ||A||\ ||A^{-1}||}$$

Propriétés. *Soit A une matrice inversible. Le conditionnement $K(A)$ vérifie les propriétés*

1. $K(A) = K(A^{-1})$,
2. $K(A) \geq 1$,
3. $\forall \alpha \neq 0, K(\alpha A) = K(A)$.

Rappels / Formule de descente (L)

$$\begin{bmatrix} l_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{b_1}{l_{11}} \quad \text{et} \quad x_i = \frac{1}{l_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j\right), \quad 2 \le i \le n}$$

estp
CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE

Rappels / Formule de remontée (U)

$$\begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\boxed{x_n = \frac{b_n}{u_{nn}} \quad \text{et} \quad x_i = \frac{1}{u_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j\right), \quad n-1 \leq i \leq 1}$$

Rappels / méthode de Gauss

Objectif : Transformer le système $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en un système équivalent de la forme $\mathbb{U}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}$, où $\mathbb{U}$ est une matrice triangulaire supérieure et $\hat{\mathbf{b}}$ est le second membre convenablement modifié.

On appelle opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice les trois opérations suivantes :

i) Échange de deux lignes ($L_i \leftrightarrow L_j$).

ii) Multiplication d'une ligne par une constante non nulle ($L_i \leftarrow \lambda L_i$).

iii) Substitution : remplacer une ligne par elle-même plus un multiple d'une autre ligne ($L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$).

On ne modifie pas l'ensemble des solutions d'un système linéaire en appliquant une ou plusieurs opérations élémentaires à sa matrice augmentée.

Cadre du TP

- Notebook Python.
- Privilégier l’utilisation de NumPY
- Implémentation de quelques exemples (majoritairement) issus du TD

Cadre du TP

- Notebook Python)
- Utilisation de NumPY
- Implementation des exemples issus du TD/Cours (majoritairement)

Exemple A, manipulations simples

- Calculer les normes et les conditionnements en utilisant les fonctions Python (cf. Exercice 1 du TD1)

Soient le vecteur x et la matrice A définis par

$$x = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer les normes 1, 2 et infinie du vecteur x et de la matrice A.
2. Déterminer le conditionnement de A en normes 1 et 2.

Exemple B, matrices triangulaires supérieures

- Implementer la resolution du système suivant
  (cf. exemple du cours)

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -13 \\ \frac{27}{4} \end{bmatrix}$$

estp
CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE

Exemple C, Pivot de Gauss

- Implementer la resolution du système linéaire suivant (cf. cours)

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ 5x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -1 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Exemples D1 et D2

- Généraliser les exemples B (D1) et C (D2).
- ✓ Matrice et second member aléatoire de taille 100.

1. lecture du fichier contenant U : **np.loadtxt("matrice_upper_100.txt")**
2. Lecture du ficher contenant A : **np.loadtxt("matrice_100.txt")**
3. Lecture du ficher contenant b : **np.loadtxt("rhs_100.txt")**

- Calculer de l'erreur relative entre la solution de reference et l'algorithme implémenté

estp
CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE

Fin