2023 - 2024

Analyse numérique

Exercices

Pierre Sochala

École Spéciale des Travaux Publics, du Bâtiment et de l'Industrie

Les exercices repérés par un astérisque sont plus difficiles et permettent un apprentissage approfondi des notions abordées dans le cours.

TD1 - Résolution des systèmes matriciels

Exercice 1

Soient le vecteur x et la matrice A définis par

$$x = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer les normes 1, 2 et infinie du vecteur x et de la matrice A.
2. Déterminer le conditionnement de A en normes 1 et 2.
3. Retrouver ces résultats en utilisant `Matlab`.

Exercice 2

On considère le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + z = 4 \end{cases}$$

1. Ecrire ce système sous forme matricielle.
2. Appliquer la méthode de Gauss pour le résoudre.

Exercice 3

On souhaite étudier l'influence du pivotage dans la méthode de Gauss sur la résolution du système suivant

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -x - y + z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

dont la solution est $(-1, 1, 1)^\top$.

1. Appliquer la méthode de Gauss sans pivotage.
2. Appliquer la méthode de Gauss avec pivotage partiel. Conclure.

Exercice 1*

Soient le vecteur x et la matrice A définis par

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer les normes 1, 2 et infinie du vecteur x et de la matrice A.
2. Retrouver ces résultats en utilisant `Matlab`.

Indication : 1 est une valeur propre de $A^\top A$.

Exercice 2*

Soit la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Donner les propriétés de A.
2. Déterminer les matrices d'élimination et de permutation de la méthode de Gauss.
3. En déduire la factorisation LU de A.
4. Calculer $Ax_i = e_i$ pour $1 \leq i \leq 3$ où les e_i sont les vecteurs de base de $\mathbb{R}^3$.
5. En déduire A^{-1}.

TD2 - Approximation

Exercice 1

Soient les quatre points de $\mathbb{R}^2$,

$$(1, -0.5),\ (2, 0),\ (3, 1.5),\ (4, 2).$$

1. Déterminer la matrice M et le vecteur y associés à ces points.
2. En déduire la matrice Q et le vecteur s.
3. Résoudre le système d'équations normales.
4. En déduire l'expression de la droite de régression de ces points.

Exercice 2

Soient les quatre points de $\mathbb{R}^2$,

$$(-3, 17),\ (-1, 1),\ (0, -1),\ (2, 7).$$

1. Déterminer la droite de régression de ces points.
2. Calculer et interpréter le coefficient de corrélation linéaire.
3. Déterminer le polynôme de degré 2 minimisant la norme 2 du résidu de ces points.
4. Calculer la norme 2 du résidu obtenu avec le polynôme de degré deux. Conclure

Exercice 3

L'une des rares lois mise en évidence en écologie est la relation entre le nombre d'espèces N présentes sur une surface S. Cette relation est de la forme

$$N = AS^B,$$

où A et B sont des constantes. Afin de vérifier cette relation pour les plantes présentes dans une prairie, les mesures indiquées dans le tableau ont été réalisées.

N	6	6	7	8	9	10	11	13	15	15
S	1	2	3	4	8	12	16	32	64	128

1. Quelle transformation des données permet d'obtenir un modèle linéaire ?
2. Déterminer la droite de régression des données transformées $\tilde{N}$ et $\tilde{S}$.
3. Calculer et interpréter le coefficient de corrélation linéaire.
4. Calculer les constantes A et B.
5. Donner le nombre d'espèces pouvant coexister dans un habitat de surface 100 et 1000.

TD3 - Interpolation et intégration numérique

Exercice 1

1. Déterminer la base des polynômes de Lagrange associés aux points $0, 1, 2$ et 3.
2. Tracer chaque polynôme de la base (en utilisant `Matlab`).
3. En déduire le polynôme interpolant les points $(0, 1), (1, -1), (2, 2), (3, -2)$.
4. Tracer ce polynôme.

Exercice 2

1. Déterminer la base des polynômes de Lagrange en $0, 1$ et 4.
2. Donner le polynôme interpolant $\sqrt{x}$ en ces points.
3. En déduire une approximation de $\sqrt{2}$.

Exercice 3

On propose de tester différentes formules d'intégration numérique pour calculer l'intégrale (triviale) suivante

$$I = \int_0^3 x^2 dx.$$

1. Utiliser la formule du rectangle puis celle du trapèze pour estimer I.
2. Utiliser la formule composite du rectangle avec 3 intervalles.
3. Utiliser la formule composite du rectangle avec 10 intervalles (en utilisant `Matlab`).
4. Comparer ces résultats avec l'intégrale exacte.

Exercice 4

Une fusée est lancée verticalement du sol et l'on mesure l'accélération toutes les 10 secondes pendant 80 secondes :

t $[s]$	0	10	20	30	40	50	60	70	80
a $[m/s^2]$	30	31.63	33.44	35.47	37.75	40.33	43.29	46.70	50.67

1. Donner la formule composite obtenue avec la méthode de Simpson.
2. Calculer la vitesse v à $80s$ par la méthode composite des trapèzes puis celle de Simpson.

Exercice 5

Le moment d'inertie est une grandeur couramment utilisée en résistance des matériaux. Pour une poutre de section rectangulaire S, le moment d'inertie par rapport à l'axe Ox est défini par

$$I_x \stackrel{\text{def}}{=} \int_S y^2 ds = \iint_S y^2 dx dy. \tag{1}$$

La section S a une largeur b selon la direction x et une hauteur h selon y (voir figure 1). Nous souhaitons calculer l'intégrale (1) avec une formule d'intégration numérique (ou formule de quadrature) Q. Une telle formule est entièrement définie par sa fonction de poids $\omega_Q : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$\int_{\Gamma_Q} f(x)dx \simeq Q(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s \in \Gamma_Q} \omega_Q(x) f(x),$$

où Γ_Q désigne le support de la fonction $\omega_Q(x)$. Pour obtenir des formules en dimensions supérieures à un, on *tensorise* des formules de quadrature à l'aide de la relation suivante

$$\omega_{Q \otimes Q'}(x, x') = \omega_Q(x)\omega_{Q'}(x').$$

1. Calculer exactement l'intégrale I_x.
2. Définir une formule d'intégration d'ordre deux valable sur un rectangle.
3. Retrouver la valeur de I_x avec cette formule.

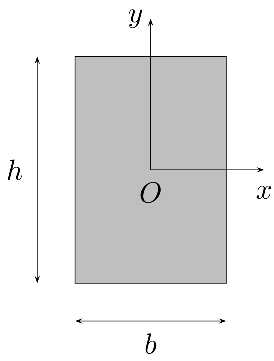

FIGURE 1 – Section transversale S.

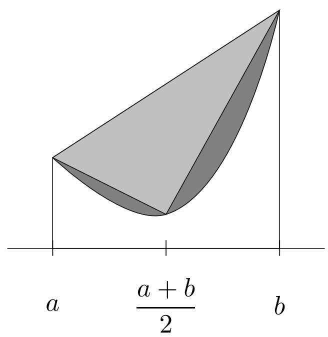

FIGURE 2 – Parabole tronquée.

Exercice 6

Soient une parabole et une droite se coupant comme sur la figure 2. Retrouver le résultat démontré par Archimède (savant Grec, 3*ème* siècle av J-C) :

$$Aire(parabole) = \frac{4}{3} Aire(triangle)$$

Exercice 1*

1. Donner l'ordre des formules du rectangle, du trapèze et de Simpson.
2. Vérifier l'ordre trois de la quadrature de Gauss définie sur l'intervalle $[0,1]$ par les points $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ et les poids $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
3. Donner cette formule de quadrature sur l'intervalle $[-1,1]$.

Exercice 2*

1. Déterminer w_1, w_2 et x_2 dans la formule (de Radau)

$$\int_0^1 p(x)dx = w_1 p(0) + w_2 p(x_2).$$

   pour obtenir l'ordre maximal que l'on précisera.

2. En déduire une approximation de $\int_0^2 \sqrt{1+x}dx$

3. Calculer l'erreur.

TD4 - Méthode des différences finies en 1d

Exercice 1

Montrer comment l'on obtient les opérateurs $\mathcal{D}_h^+ f(x)$, $\mathcal{D}_h^- f(x)$, $\mathcal{D}_h f(x)$ et $\mathcal{D}_h^{(2)} f(x)$.

Exercice 2

Les vibrations transversales u_y d'une poutre sont modélisées par une EDP dans laquelle apparait l'opérateur bi-laplacien (dérivée d'ordre 4),

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho S}\frac{\partial^4 u_y}{\partial y^4} = 0,$$

où ρ est la masse volumique, S et I la section et le moment d'inertie de la poutre et E le module d'Young. On souhaite déterminer un opérateur discret approchant la dérivée quatrième sur un maillage uniforme constitué de segments de longueurs h.

1. Rappeler les unités de I et E.
2. Définir un opérateur approchant $u^{(4)}$.

Exercice 3

On étudie l'équation de diffusion-réaction monodimensionnelle complétée de conditions aux limites de Dirichlet,

$$\begin{cases} -u'' + au = 0, \quad \forall x \in]0,1[\\ u(0) = 0, \quad u(1) = 1 \end{cases}$$

Le coefficient a est constant positif. On utilise un maillage uniforme du domaine $[0,1]$ qui est ainsi subdivisé en $N+1$ segments de longueur h.

1. Déterminer la solution exacte de l'équation.
2. Ecrire le schéma centré utilisé pour approcher l'équation.
3. Comment résoudre le schéma obtenu ?
4. Ecrire la matrice et le second membre du système pour $N = 5$.
5. Vérifier que le terme général du schéma précédent est
$$u_i = \frac{r_1^i - r_2^i}{r_1^{N+1} - r_2^{N+1}},$$
avec $r_1 = 1 + c - \sqrt{c(2+c)}$, $r_2 = 1 + c + \sqrt{c(2+c)}$ et $c = \dfrac{ah^2}{2}$.
6. Comparer la solution approchée (pour $N = 5$) avec la solution exacte en $x = 0.5$ pour $a = 0.1, a = 1$ et $a = 10$.
7. Retrouver le terme général de la question 4.

Indication $Q7$: la solution générale d'une suite récurrente linéaire à trois termes (indicée par n) est du type $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$, où α et β sont des constantes réelles. Les quantités r_1 et r_2 désignent les racines du polynôme caractéristique associé à la suite.

Exercice 1*

Trouver l'ordre de consistance des opérateurs $\mathcal{D}_h^+ f(x)$, $\mathcal{D}_h^- f(x)$ et $\mathcal{D}_h f(x)$.

Exercice 2*

On étudie l'équation de diffusion non linéaire monodimensionnelle complétée de conditions aux limites de Dirichlet,

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = f(x), \quad \forall x \in]0,1[\\ \qquad u(0) = 0, \quad u(1) = 1, \end{cases}$$

où le coefficient de diffusion $a \in \mathcal{C}([0,1])$. On utilise un maillage uniforme du domaine $[0,1]$ qui est ainsi subdivisé en $N+1$ segments de longueur h. Les noeuds du maillage sont notés $x_i \stackrel{\text{def}}{=} ih$ avec $0 \le i \le N+1$ et $x_0 = 0$, $x_{N+1} = 1$. L'approximation de u au noeud x_i est noté u_i et on définit l'opérateur centré suivant

$$\mathcal{D}_{a,h}^{(2)} u(x_i) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a_{i-\frac{1}{2}} u_{i-1} - (a_{i-\frac{1}{2}} + a_{i+\frac{1}{2}}) u_i + a_{i+\frac{1}{2}} u_{i+1}}{h^2}.$$

où $a_{i-\frac{1}{2}}$ et $a_{i+\frac{1}{2}}$ sont les valeurs de $a(x)$ aux noeuds intermédiaires $x_{i-\frac{1}{2}} \stackrel{\text{def}}{=} (i-1/2)\,h$ et $x_{i+\frac{1}{2}} \stackrel{\text{def}}{=} (i+1/2)\,h$.

1. Représenter les noeuds d'un maillage avec les noeuds intermédiaires pour $N = 5$.
2. Quel opérateur obtient-on lorsque $a(x) = 1$? Est-ce cohérent ?
3. Montrer que $\mathcal{D}_{a,h}^{(2)} u(x) = (\mathcal{D}_{h/2} \circ a\mathcal{D}_{h/2}) u(x)$.
4. Ecrire le schéma centré utilisé pour approcher l'équation de diffusion non linéaire.
5. En déduire les équations obtenues lorsque $N = 5$.
6. Donner la matrice et le second membre du système discret pour $N = 5$.

TD5 - Méthode des différences finies en 2d et 3d

Exercice 1

1. Déterminer les opérateurs centrés approchant le laplacien en dimension 2 et 3,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \text{et} \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

2. Donner les représentations symboliques de ces deux opérateurs.

Exercice 2

On considère l'équation de diffusion suivante en dimension 2

$$\begin{cases} \Delta u = xy, & \forall (x,y) \in \Omega =]0,1[^2 \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous résolvons cette équation sur un maillage de pas h identique suivant les directions x et y.

1. Faire un dessin du maillage lorsque $h = 1/3$.
2. En déduire les équations vérifiées lorsque $h = 1/3$.
3. Ecrire la matrice et le second membre du système matriciel à résoudre.

Exercice 3

On étudie l'équation d'advection-diffusion stationnaire suivante

$$\begin{cases} v \cdot \nabla c - \Delta c = f & \text{dans } \Omega \times]0,T], \\ c = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On considère le domaine bidimensionnel $\Omega = [0,L]^2$ et les composantes de la vitesse v_x et v_y positives. Le laplacien sera discrétisé par l'opérateur centré classique.

1. Discrétiser le terme $v \cdot \nabla c$ par un opérateur décentré amont.
2. En déduire un schéma pour approcher l'équation d'advection-diffusion.

TD6 - Résolution des EDO

Exercice 1

Déterminer la solution exacte de l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\forall t > 0, \quad y'(t) = -\lambda y + 1 + \lambda t, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

complétée de la condition initiale $y(0) = 2$.

Exercice 2

Les populations $p(t)$ et $q(t)$ de deux espèces animales en interaction, ayant un comportement mutuel de type prédateur-proie, sont modélisées au cours du temps par le système de *Lotka–Volterra*,

$$\begin{cases} p'(t) = \alpha p(t) + \beta p(t)q(t), \quad \forall t > 0 \\ q'(t) = \gamma q(t) + \delta p(t)q(t), \quad \forall t > 0 \\ p(0) = p_0, q(0) = q_0. \end{cases}$$

1. Quelles sont les unités de α, β, γ et δ ?
2. Justifier le signe des coefficients

$$\alpha < 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0 \quad \text{et} \quad \delta < 0.$$

3. Ecrire le problème de Cauchy obtenu en posant $X = (p,q)^\top$. Ce problème est-il linéaire ?
4. Utiliser le schéma d'Euler explicite pour discrétiser la dérivée temporelle.
5. En déduire le nombre de prédateurs et de proies à 1, 2 et 3 jours avec les valeurs suivantes

$$\alpha = -1, \quad \beta = 0.01, \quad \gamma = 0.25, \quad \delta = -0.01, \quad p_0 = 30, \quad q_0 = 80 \quad \text{et} \quad \delta t = 1j.$$

Exercice 3

L'évolution de la concentration c d'un polluant répandu dans un fluide ayant une vitesse v peut être modélisé par l'équation d'advection-diffusion instationnaire suivante

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c}{\partial t} + v \cdot \nabla c - \Delta c = f & \text{dans } \Omega \times]0,T], \\ c(x,\cdot) = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ c(\cdot,0) = c^0 & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

On considère le domaine bidimensionnel $\Omega = [0,L]^2$ et les composantes de la vitesse v_x et v_y positives. La partie stationnaire de cette équation a été traitée dans l'exercice 2 du TD5.

1. Ecrire le schéma obtenu avec Euler explicite. Préciser la condition CFL.
2. Ecrire le schéma obtenu avec Euler implicite. Préciser la forme matricielle.