TP6
Analyse Numérique

Résolution des EDO

CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE

Rappels / resolution EDO

- Résolution de l'équation différentielle d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1([0, T])$

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & \forall t \in]0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

avec $f \in \mathcal{C}([0, T])$ second membre
y_0 condition initiale

- Unicité de la solution (théorème de Cauchy)

Rappels / resolution EDO

- Dérivée temporelle approchée par l'opérateur décentré à droite

$$y'(t) \simeq \mathcal{D}^+_{\delta t} y(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y(t+\delta t) - y(t)}{\delta t}$$

- Problème discret

$$\forall\ 0 \leq n \leq N_T - 1, \quad \frac{y_h(t^n + \delta t) - y_h(t^n)}{\delta t} = f(t^n, y_h(t^n))$$

- Schéma d'Euler explicite

$$\boxed{y^{n+1} = y^n + \delta t f(t^n, y^n)}$$

Rappels / resolution EDO

- Dérivée temporelle approchée par l'opérateur décentré à gauche

$$y'(t) \simeq \mathcal{D}^{-}_{\delta t} y(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y(t) - y(t-\delta t)}{\delta t}$$

- Problème discret

$$\forall\ 1 \leq n \leq N_T, \quad \frac{y_h(t^n) - y_h(t^n - \delta t)}{\delta t} = f(t^n, y_h(t^n))$$

- Schéma d'Euler implicite ($n \to n+1$)

$$\boxed{y^{n+1} = y^n + \delta t f(t^{n+1}, y^{n+1})}$$

CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE

Consignes

- Mail : fabrice.dupros@estp.fr
- Preciser le nom des étudiants composant le groupe d'étudiants (max 3)
  - Document pdf
  - Pas de code source
  - 2 courbes et un paragraphe structuré par problème.

CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE

Exemple A

Les populations $p(t)$ et $q(t)$ de deux espèces animales en interaction, ayant un comportement mutuel de type prédateur-proie, sont modélisées au cours du temps par le système de *Lotka–Volterra*,

$$\begin{cases} p'(t) = \alpha p(t) + \beta p(t)q(t), & \forall t > 0 \\ q'(t) = \gamma q(t) + \delta p(t)q(t), & \forall t > 0 \\ p(0) = p_0, q(0) = q_0. \end{cases}$$

$$\alpha = -1, \quad \beta = 0.01, \quad \gamma = 0.25, \quad \delta = -0.01, \quad p_0 = 30, \quad q_0 = 80 \quad \text{et} \quad \delta t = 1j.$$

- <u>A renvoyer par mail</u>
  - Courbe solution en utilisant le schema d'Euler explicite (30 jours)
  - Courbe log-log montrant que le schema numérique est d'ordre 1 *(erreur L2 / dt)*
  - Paragraphe détaillant les avantages/limites de l'utilisation d'un schema implicite.

estp

CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE

Exemple B

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f & \text{dans }]0, L[\times]0, T] \\ u(0,\cdot) = u(L,\cdot) = g & \text{sur }]0, T] \\ u(\cdot, 0) = u^0 & \text{sur } [0, L] \end{cases}$$

- $u(x,t)$ fonction inconnue (ex : température)
- $f(x,t)$ terme source
- $g(t)$ condition aux limites ($g = 0 \rightarrow$ CL homogène)
- $u^0(x)$ condition initiale

- Terme source $f(x,t) = \sin(\pi x)\,\sin(\pi t)$
- Condition aux limites : Dirichlet homogène
- Condition initiale nulle , L = 1.0m et Tfinal = 1.0s

- <u>A renvoyer par mail</u>
  - Courbe solution en utilisant le schema d'euler explicite(temps) et un schema d'ordre 2 en espace
  - Courbe log-log validant l'ordre du schema en temps *(erreur L2 / dt)* et en espace *(erreur L2 / dx)*
  - Paragraphe détaillant les avantages/limites de l'utilisation d'un schema en espace ou en temps d'ordre elevé

Fin

CONSTRUCTEURS D'UN NOUVEAU MONDE