第一章 命题逻辑

推理理论

郝杰

haojie@bupt.edu.cn

北京邮电大学信息安全中心

❑ 什么是推理？

- 一组前提，一个结论
- 前提、结论都是命题
- 若前提为$A_1, A_2, \ldots, A_k$，结论为B，则将这样的推理形式称为$A_1, A_2, \ldots, A_k$推出B.

推理的形式结构

- $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$
- 前提： $A_1, A_2, \ldots, A_k$

  结论： B

什么是正确的推理?

- 直观上，正确的推理应保证：如果前提正确，则结论也应该正确.

定义 推理正确

- 若对于任意赋值，如果 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为真时，B 也为真，则称由前提 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推出结论 B 的推理正确，并称B是 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 的逻辑结论或有效结论.

什么是正确的推理？

定理

- 若 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \rightarrow B$ 为重言式，则称由前提 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推出结论 B 的推理正确, 并称B是 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 的逻辑结论或有效结论.

- 若推理正确，则记作：

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B.$$

❑ 说明

- $\rightarrow$ 与 $\Rightarrow$是有区别的，$\rightarrow$是联结词，$A\rightarrow B$仍然是公式，而$\Rightarrow$是公式关系符.
- $\Rightarrow$ 描述了两个公式的关系，只能说 $A \Rightarrow B$式成立或不成立.
- 公式$A\rightarrow B$，当且仅当A真B假时才为假，因此$A \Rightarrow$ B要成立的充要条件是对一切赋值如果使A为真，必须使B也为真.

- 下列推理是否正确？
  - $\{p \to q,\ p\}$ 推出 q
  - $\{p \lor q,\ \neg p\}$ 推出 q

例：$\neg p_1 \vee p_2, p_1 \rightarrow (p_3 \wedge p_4), p_4 \rightarrow p_2, p_3 \rightarrow p_4$

推出 $p_2 \vee p_4$ 是否正确？

解：看能否找到某个赋值使得前提为真且结论为假。

使 $p_2 \vee p_4$ 为假的赋值有（*, 0, *, 0）

其中使 $\neg p_1 \vee p_2$ 为真的赋值有（0, 0, *, 0）

其中使 $p_3 \rightarrow p_4$ 为真的赋值有（0, 0, 0, 0）

（0, 0, 0, 0）使得 $p_1 \rightarrow (p_3 \wedge p_4)$ 和 $p_4 \rightarrow p_2$ 都为真，

从而这个推理不正确。

推理

- 推理的形式结构

$$“A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \to B”.$$

- 判断推理是否正确的方法
  - 真值表法
  - 等值演算法
  - 主析取范式法

真值表法

例： 判断下面推理是否正确

(1) $p \vee q$，$\neg p$ 推出 q

解：$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$ 为重言式

p　q	$\neg p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \neg p$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$
0　0	1	0	0	1
0　1	1	1	1	1
1　0	0	1	0	1
1　1	0	1	0	1

等值演算法

(2) 若今天是1号，则明天是5号. 今天是1号. 所以明天是5号.

解：设 p：今天是1号，q：明天是5号.

推理的形式结构为：$(p\rightarrow q)\wedge p\rightarrow q$

证明：（用等值演算法）

$$
\begin{aligned}
& (p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q \\
\Leftrightarrow\ & \neg((\neg p \vee q) \wedge p) \vee q \\
\Leftrightarrow\ & \neg p \vee \neg q \vee q \Leftrightarrow 1
\end{aligned}
$$

得证推理正确

主析取范式法

(3) 若今天是1号，则明天是5号. 明天是5号. 所以今天是1号.

解：设 p：今天是1号，q：明天是5号.

推理的形式结构为：$(p \to q) \wedge q \to p$

证明（用主析取范式法）

$$(p \to q) \wedge q \to p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge q \to p$$

$$\Leftrightarrow \neg ((\neg p \vee q) \wedge q) \vee p$$

$$\Leftrightarrow \neg q \vee p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_3$$

结果不含m_1, 故01是成假赋值，所以推理不正确.

构造证明法

- 推理的形式结构

  “前提: A_1, A_2, … , A_k, 结论: B”.

- 推理的证明
  - 描述推理过程的命题公式序列.
  - 序列中每个命题公式或者是已知的前提,
  - 或者是由前面的命题公式应用推理规则得到的结论.

构造证明法

构造证明法，建立在推理定律（重言蕴含式）的基础之上

$A \Rightarrow (A \vee B)$	附加律
$(A \wedge B) \Rightarrow A$	化简律
$(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$	假言推理
$(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$	拒取式
$(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$	析取三段论
$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$	假言三段论
$(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$	等价三段论
$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$	构造性二难
$(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B) \Rightarrow B$	构造性二难(特殊形式)
$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (\neg B \wedge \neg D) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg C)$	破坏性二难

证明中常用推理规则

(1) 前提引入规则：在证明的任一步，都可引入前提

(2) 结论引入规则：中间结论可作为后续推理的前提

(3) 置换规则：利用等值公式对部分公式进行置换

(4) 假言推理规则

$$\begin{array}{l} A\rightarrow B \\ A \\ \hline \therefore B \end{array}$$

(5) 附加规则

$$\begin{array}{l} A \\ \hline \therefore A\vee B \end{array}$$

(6) 化简规则

$$\begin{array}{l} A\wedge B \\ \hline \therefore A \end{array}$$

证明中常用推理规则

(7) 拒取式规则

$$\begin{array}{l} A\rightarrow B \\ \neg B \\ \hline \therefore \neg A \end{array}$$

(8) 假言三段论规则

$$\begin{array}{l} A\rightarrow B \\ B\rightarrow C \\ \hline \therefore A\rightarrow C \end{array}$$

(9) 析取三段论规则

$$\begin{array}{l} A\vee B \\ \neg B \\ \hline \therefore A \end{array}$$

(10)构造性二难推理规则

$$\begin{array}{l} A\rightarrow B \\ C\rightarrow D \\ A\vee C \\ \hline \therefore B\vee D \end{array}$$

(11) 合取引入规则

$$\begin{array}{l} A \\ B \\ \hline \therefore A\wedge B \end{array}$$

构造证明之一 ：直接证明法

例: 构造下面推理的证明:

若明天是星期一或星期三，我就有考试. 若有考试，今天必复习. 我今天下午没复习. 所以，明天不是星期一和星期三.

解 设 p：明天是星期一，q：明天是星期三，

r：我有考试，s：我复习.

此推理的形式结构为

前提：$(p \vee q) \rightarrow r$，$r \rightarrow s$，$\neg s$

结论：$\neg p \wedge \neg q$

构造证明之一：直接证明法

前提：$(p\vee q)\to r$，$r\to s$，$\neg s$　结论：$\neg p\wedge\neg q$

证明：

① $r\to s$　　前提引入

② $\neg s$　　前提引入

③ $\neg r$　　①②拒取式

④ $(p\vee q)\to r$　　前提引入

⑤ $\neg(p\vee q)$　　③④拒取式

⑥ $\neg p\wedge\neg q$　　⑤置换

构造证明之二 ：附加前提证明法

- 欲证明
  - 前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$
  - 结论：$B \to C$
- 等价地证明
  - 前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, B$
  - 结论：C
- 原因：$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \to (B \to C)$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee (\neg B \vee C)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee (\neg B) \vee C$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge B) \vee C$$

$$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge B) \to C$$

构造证明之二 ：附加前提证明法

例: 前提：$p\lor q$, $p\to r$, $r\to\neg s$　结论：$s\to q$

解　前提：$p\lor q$, $p\to r$, $r\to\neg s$, s　结论：q

① s	附加前提引入
② $p\to r$	前提引入
③ $r\to\neg s$	前提引入
④ $p\to\neg s$	②③假言三段论
⑤ $\neg p$	①④拒取式
⑥ $p\lor q$	前提引入
⑦ q	⑤⑥析取三段论

构造证明之三 ：归谬法 (反证法)

- 欲证明　前提：$A_1, A_2, \dots, A_k$，结论：B.
- 将$\neg B$加入前提，若推出矛盾，则得证推理正确.

定理

- $(A_1 \land A_2 \land \dots \land A_k) \Rightarrow B$ 推理正确，当且仅当 $A_1 \land A_2 \land \dots \land A_k \land \neg B$ 为矛盾式.

原因:

$$A_1 \land A_2 \land \dots \land A_k \to B$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \land A_2 \land \dots \land A_k) \lor B$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \land A_2 \land \dots \land A_k \land \neg B)$$

构造证明之三 ：归谬法 (反证法)

例 构造下面推理的证明

前提：$\neg(p\wedge q)\vee r$，$r\rightarrow s$，$\neg s$，p

结论：$\neg q$

证明：用归缪法，证明 $\neg(p\wedge q)\vee r) \wedge (r\rightarrow s) \wedge \neg s \wedge p \wedge q$ 为矛盾式

① q	结论否定引入
② $r\rightarrow s$	前提引入
③ $\neg s$	前提引入
④ $\neg r$	②③拒取式
⑤ $\neg(p\wedge q)\vee r$	前提引入
⑥ $\neg(p\wedge q)$	④⑤析取三段论
⑦ $\neg p\vee\neg q$	⑥置换
⑧ $\neg p$	①⑦析取三段论
⑨ p	前提引入
⑩ $\neg p\wedge p$	⑧⑨合取

- 作业
  - 1.19 (3)(4)(5)

- 提交时间：

  2018年11月02日