北京邮电大学
Beijing University of Posts and Telecommunications

第四章 二元关系和函数

集合的笛卡尔积与二元关系、关系的运算

郝杰

haojie@bupt.edu.cn

北京邮电大学信息安全中心

有序对

定义 有序对

- 设由两个元素 x 和 y，按照一定的顺序组成的二元组称为有序对，记作<x, y>.
- x 为第一元素， y 为第二元素.

例如：平面直角坐标系中点的坐标

<1, -1>, <2, 0>, < 1, 1>, <-1, 2>

有序对

- 有序性：$<x, y> \neq <y, x>$ （当$x\neq y$时）
- $<x, y>$ 与 $<u, v>$ 相等的充分必要条件是

$$<x, y> = <u, v> \Leftrightarrow x=u \wedge y=v$$

例如：$<2, x+5> = <3y-4, y>$，求 x, y.

解：由于相等，有 $3y-4=2$

$$x+5=y$$

$$\Rightarrow \quad y=2, x=-3$$

有序n元组

定义 有序n元组

- 一个有序 n 元组 ($n \geq 3$) 是一个有序对，其中第一个元素是一个有序 n-1 元组，一个有序 n 元组记作$< x_1, x_2, \ldots, x_n >$, 即

$$<x_1, x_2, \ldots, x_n> = < <x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}>, x_n>.$$

例如：空间直角坐标系中点的坐标为有序 3元组.

$$<1, 1, -1>, <1, 2, 0>, <1, 1, 3>.$$

笛卡尔积

定义 笛卡尔积

- 设A, B为集合，用 A 中元素为第一元素, B 中元素为第二元素构成有序对, 所有这样的有序对组成的集合称作A与 B 的笛卡尔积, 记作 $A\times B$, 即

$$A\times B = \{ <x, y> \mid x\in A \wedge y\in B \}.$$

例如：$A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$.

$$A\times B =\{<1,a>, <1,b>, <1,c>, <2,a>, <2,b>, <2,c>\}.$$

$$B\times A =\{<a,1>, <a,2>, <b,1>, <b,2>, <c,1>, <c,2>\}.$$

笛卡尔积的性质

- 若 $|A| = m, |B| = n$, 则 $|A\times B| = mn$;
- 若A或B中有一个为空集，则$A\times B$就是空集,

$$A\times\varnothing = \varnothing\times B = \varnothing;$$

- 不满足交换律 $A\times B \neq B\times A \quad (A\neq B, A\neq\varnothing, B\neq\varnothing)$;
- 不满足结合律 $(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C) \quad (A\neq\varnothing, B\neq\varnothing)$;
- 对于并或交运算满足分配律,

$$A \times (B\cup C) = (A\times B) \cup (A\times C);$$

$$(B\cup C) \times A = (B\times A) \cup (C\times A);$$

$$A \times (B\cap C) = (A\times B) \cap (A\times C);$$

$$(B\cap C) \times A = (B\times A) \cap (C\times A).$$

笛卡尔积的性质

- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

证明：对于任意的 $<x, y>$

$$<x, y> \in A \times (B \cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \land y \in B \cup C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \land (y \in B \lor y \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \land y \in B) \lor (x \in A \land y \in C)$$

$$\Leftrightarrow <x, y> \in A \times B \lor <x, y> \in A \times C$$

$$\Leftrightarrow <x, y> \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

故有 $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

关系的基本概念

- 关系是各个对象之间的联系和对应.
- 最常见到是两组对象之间的联系和对应.
  - 职员–部门的隶属关系
- 也有三组或者更多对象之间的联系和对应.
  - 学生–专业–学院的隶属关系
- 采用二元有序对或者有序 n 元组 $(n\geq 3)$的集合来表示关系.
  - {⟨张三, 人事部⟩, ⟨李四, 销售部⟩, ⟨王五, 技术部⟩}
  - {⟨小明, 信息安全专业, 网安学院⟩, ⟨小强, 计算机专业, 信息学院⟩}

二元关系

定义 二元关系

- 如果一个集合满足以下条件之一，则称该集合为一个二元关系, 一般记作 R.

  1) 集合非空, 且集合中的元素都是有序对;

  2) 集合是空集.

- 如果$<x, y>\in R$, 则记作 xRy；如果$<x, y>\notin R$, 则记作$x \not R\, y$.

例如：$R = \{<1,2>, <a,b>\}$, 且 $1R2$, aRb, $a \not R\, c$ 等.

二元关系

定义

- 设 A, B 为集合，$A\times B$的任何子集所定义的二元关系称做从 A 到 B 的二元关系, 特别地,当 $A=B$ 时, 称做 A上的二元关系.

例：$A=\{0, 1\}$, $B=\{1, 2, 3\}$，$R_1=\{<0, 2>\}$，$R_2= A\times B$, $R_3=\{<0,1>\}$. 则 R_1, R_2, R_3是从 A到 B 的二元关系, R_3也是 A 上的二元关系.

- 当$|A| = n$, $|A\times A| = n^2$ 时, $A\times A$的子集有2^{n^2}个. 所以 A上有 2^{n^2} 种不同的二元关系.

集合 A 上的特殊关系

- A 为任意集合:
  - $\varnothing$ 是 A 上的关系，称为空关系.
  - 全域关系 E_A:

$$E_A = \{ <x, y> \mid x \in A \wedge y \in A \} = A \times A.$$

  - 恒等关系 I_A:

$$I_A = \{<x, x> \mid x \in A\}.$$

- 例如, $A=\{1, 2\}$, 则

$$E_A=\{<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <2, 2>\}.$$

$$I_A=\{<1, 1>,<2, 2>\}.$$

其它常用关系

- 小于等于关系 L_A

$$L_A = \{<x, y> \mid x, y \in A \wedge x \leq y\},\ A \subseteq R,\ R\text{为实数集合}.$$

- 整除关系 D_B

$$D_B = \{<x, y> \mid x, y \in B \wedge x\text{整除}y\},$$

$$B \subseteq Z^+,\ Z^+\text{为非 0 整数集}.$$

- 包含关系 $R_\subseteq$

$$R_\subseteq = \{<x, y> \mid x, y \in A \wedge x \subseteq y\},\ A\text{ 是集合族}.$$

例如 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, 则

- $L_A = \{<1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <2, 2>, <2, 3>, <3, 3>\}$.
- $D_A = \{<1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <2, 2>, <3, 3>\}$.
- $A = P(B) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$, 则 A上的包含关系是

$$R_{\subseteq} = \{<\varnothing,\varnothing>, <\varnothing,\{a\}>, <\varnothing,\{b\}>, <\varnothing,\{a,b\}>,$$
$$<\{a\},\{a\}>, <\{a\},\{a,b\}>, <\{b\},\{b\}>,$$
$$<\{b\},\{a,b\}>, <\{a,b\},\{a,b\}> \}.$$

关系的表示

1) 关系矩阵

- 若$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$， R 是从 A 到 B 的关系, R 的关系矩阵是**布尔矩阵**

$$M_R = [\, r_{ij} \,]_{m\times n},$$

其中 $r_{ij} = 1$, 当$<a_i, b_j> \in R$; $r_{ij} = 0$, 当$<a_i, b_j> \notin R$.

❖ 例如：

$A=\{1, 2, 3, 4\}$.

$R=\{<1,1>, <1,2>, <2,3>, <2,4>, <4,2>\}$.

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$.

$$M_{\varnothing} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

空关系 $\varnothing$

$$M_{I_A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

恒等关系 I_A

$$M_{L_A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

小于等于关系 L_A

$$M_{E_A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

全域关系 E_A

关系的表示

2) 关系图

- 若$A=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, R 是A上的关系, 其关系图为

$$G_R=<V, E>,$$

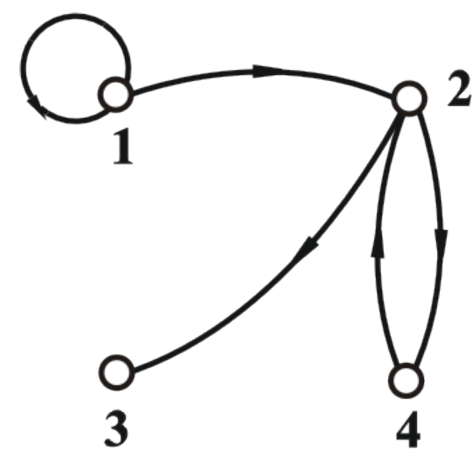
其中$V=A$为结点集, E 为边集. 如果$<x_i, x_j>$属于关系 R, 则从 x_i 到 x_j 的有向边 $<x_i, x_j> \in E$.

❖ 例如:

$A=\{1, 2, 3, 4\}$.

$R=\{<1, 1>, <1, 2>, <2, 3>,$

$<2, 4>, <4, 2>\}$.



二元关系

定义

- 关系 R 的定义域 dom$R$, 值域 ran$R$ 和 域 fld$R$ 分别为:

$$\mathrm{dom}R = \{\, x \mid \exists y(<x, y>\in R) \,\}.$$

$$\mathrm{ran}R = \{\, y \mid \exists x(<x, y>\in R) \,\}.$$

$$\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R.$$

- 例如: R={<1, 2>, <1, 3>, <2, 4>, <4, 3>}, 则

dom$R$={1, 2, 4}　ran$R$={2, 3, 4}　fld$R$={1, 2, 3, 4}

关系的基本运算

1. 关系 R 的逆记作R^{-1}, 定义为：

$$R^{-1} = \{<y, x> \mid <x, y>\in R\}.$$

❖ 例如： $R = \{<1, 2>, <2, 3>, <1, 4>, <2, 2>\}.$

$$R^{-1} = \{<2, 1>, <3, 2>, <4, 1>, <2, 2>\}.$$

2. 关系 R 和S的合成记作 $R\circ S$, 定义为：

$$R\circ S = |<x, z> \mid \exists y(<x, y>\in S \wedge <y, z>\in R)\}.$$

➢ 注意：左复合，S 先起作用，然后将R复合到S上.

关系的基本运算

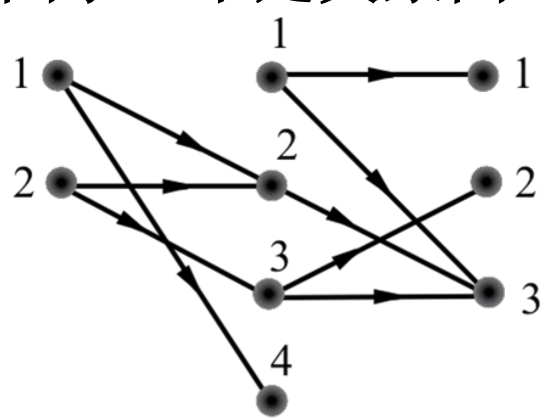
❖ 例如：$\boldsymbol{R} = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$.

$\boldsymbol{S} = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$.

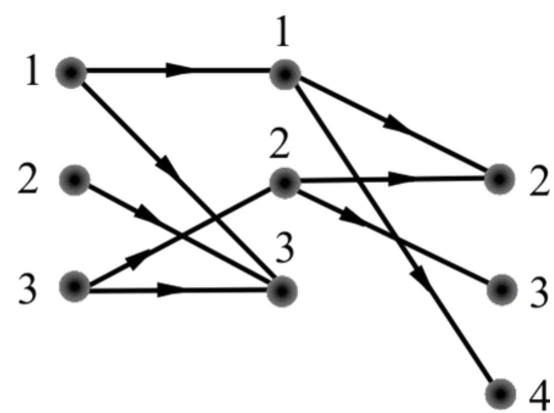
$\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$.

$\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{R} = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$.

➢ 利用图示（不是关系图）方法求合成



$R \circ S$



$S \circ R$

关系的基本运算

❖ 例如：$R = \{<1, 1>, <1, 3>, <2, 3>, <3, 2>, <3, 3>\}$.

$S = \{<1, 2>, <2, 3>, <1, 4>, <2, 2>\}$.

$R \circ S = \{<1, 3>, <2, 2>, <2, 3>\}$.

➢ 关系矩阵相乘求合成

$$R \circ S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \boxed{0 \quad 1 \quad 1 \quad 0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

运算中加法‘+’是逻辑加:

$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1, \quad 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 1.$

关系的基本运算

3. 关系 R 在集合A的上的**限制**记作 $R\upharpoonright A$, 定义为:

$$R\upharpoonright A = \{\langle x, y\rangle \mid xRy \wedge x\in A\}.$$

4. 集合A 在R下的**像**记作 $R[A]$, 定义为:

$$R[A] = \mathrm{ran}(R\upharpoonright A).$$

❖ 例如: $R=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$.

$R\upharpoonright\{1\} = \{\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle\}$.

$R[\{1\}] = \{2,4\}$.

$R[\{1,2\}] = \{2,3,4\}$.

定理

- 设F、G、H是任意的关系, 则有

1) $(F^{-1})^{-1} = F$;
2) $\mathrm{dom}F^{-1} = \mathrm{ran}F$, $\mathrm{ran}F^{-1} = \mathrm{dom}F$;
3) $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$;
4) $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$.

- $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$.

➢ 证明： 任取$<x, y>$,

$$
\begin{aligned}
& <x, y> \in (F \circ G)^{-1} \\
\Leftrightarrow\ & <y, x> \in F \circ G \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,(<y, t> \in G \wedge (t, x) \in F) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,(<x, t> \in F^{-1} \wedge (t, y) \in G^{-1}) \\
\Leftrightarrow\ & <x, y> \in G^{-1} \circ F^{-1}.
\end{aligned}
$$

定理

- 设F、G、H是任意的关系, 则有

  1) $F\circ(G\cup H) = F\circ G \cup F\circ H$;

  2) $F\circ(G\cap H) \subseteq F\circ G \cap F\circ H$;

  3) $(G\cup H)\circ F = G\circ F \cup H\circ F$;

  4) $(G\cap H)\circ F \subseteq G\circ F \cap H\circ F$.

A上关系的幂运算

北京邮电大学 Beijing University of Posts and Telecommunications

定义

- 设 R 为 A 上的关系, n为自然数, 则 R 的 n 次幂为:

  (1) $R^0 = \{<x, x> \mid x \in A\} = I_A$;

  (2) $R^{n+1} = R^n \circ R,\ n \geq 0.$

➢ 注意:

- 对于A上的任何关系R_1和R_2都有

$$R_1^{\,0} = R_2^{\,0} = I_A\,.$$

- 对于A上的任何关系 R 都有

$$R^1 = R\,.$$

幂的求法

- ❖ 对于集合表示的关系R，计算 R^n 就是 n 个 R 左复合 .
- ❖ 矩阵表示就是 n 个矩阵相乘, 其中相加采用逻辑加.

例如: 设$A = \{a, b, c, d\}$, $R = \{<a, b>,<b, a>,<b, c>,<c, d>\}$,

求 R 的各次幂, 分别用关系矩阵和关系图表示.

解： R 与 R^2 的关系矩阵分别为

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

幂的求法

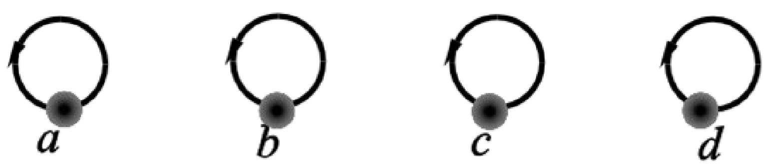
- 同理，$R^0=I_A$，R^3 和 R^4 的矩阵分别是

$$M^0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad M^3=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad M^4=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

- 因此 $M^4=M^2$, 即$R^4=R^2$. 因此可得:
  - $R^2=R^4=R^6=\ldots$
  - $R^3=R^5=R^7=\ldots$

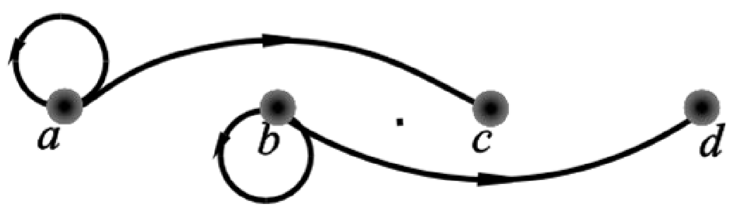
幂的求法

- $R^0, R^1, R^2, R^3, \ldots$的关系图如下图所示

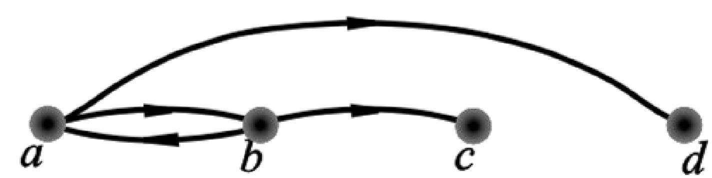


R^0

R^1



$R^2 = R^4 = \ldots$



$R^3 = R^5 = \ldots$

幂运算的性质

北京邮电大学 Beijing University of Posts and Telecommunications

定理 幂关系有限定理

- 设 A 为 n 元集合, R是A上的关系, 则存在自然数 s 和 t, 使得 $R^s = R^t$.

- **证明:** R 为 A 上的关系, 对于任意自然数 k, R^k都是 $A \times A$ 的子集, 又$|A \times A|=n^2$, $|P(A \times A)| = 2^{n^2}$, A 上的不同关系只有2^{n^2}个. 当列出 R 的各次幂

$$R^0, R^1, R^2, \ldots, R^{2^{n^2}}$$

必存在自然数 s 和 t 使得 $R^s = R^t$.

幂运算的性质

定理

- 则 R 是 A 上的关系, $m, n \in \mathrm{N}$, 则
  1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$
  2) $(R^m)^n = R^{mn}$

➢ 证明: (1)对于任意给定的$m \in \mathrm{N}$, 对n进行归纳.

- 若n=0, 则有

$$R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m = R^{m+0};$$

- 假设 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$, 则有

$$R^m \circ R^{n+1} = R^m \circ (R^n \circ R) = (R^m \circ R^n) \circ R = R^{m+n+1},$$

故对一切 $m, n \in \mathrm{N}$有$R^m \circ R^n = R^{m+n}$.

➢ **证明: (2) 对于任意给定的$m\in$N, 对n进行归纳.**

- **若n=0, 则有**

$$(R^m)^0=I_A=R^0=R^{m\times 0};$$

- **假设 $(R^m)^n=R^{mn}$, 则有**

$$(R^m)^{n+1}=(R^m)^n\circ R^m=(R^{mn})\circ R^m=R^{mn+m}=R^{m(n+1)},$$

故对一切 $m,n\in$N 有 $(R^m)^n=R^{mn}$.

- 作业
  - 4.13