1 解三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 & ① \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 & ② \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 & ③ \end{cases}$$

不妨设 $a_{11} \neq 0$　② × a_{11} − ① × a_{21} ，③ × a_{11} − ① × a_{31}

$$\begin{cases} (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})y + (a_{23}a_{11} - a_{13}a_{21})z = b_2 a_{11} - b_1 a_{21} \\ (a_{32}a_{11} - a_{12}a_{31})y + (a_{33}a_{11} - a_{13}a_{31})z = b_3 a_{11} - b_1 a_{31} \end{cases}$$

设 $\Delta = \begin{vmatrix} a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} & a_{23}a_{11} - a_{13}a_{21} \\ a_{32}a_{11} - a_{12}a_{31} & a_{33}a_{11} - a_{13}a_{31} \end{vmatrix} \neq 0$

y、z 可定一论

$$\Delta = a_{22}a_{11}^2 a_{33} - a_{11}a_{22}a_{13}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{11}$$
$$+ \cancel{a_{12}a_{21}a_{13}a_{31}} - a_{32}a_{11}^2 a_{23} + a_{32}a_{11}a_{13}a_{21}$$
$$+ a_{12}a_{31}a_{23}a_{11} - \cancel{a_{12}a_{31}a_{13}a_{21}}$$

$$= a_{11}(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{31}a_{23}$$
$$- a_{22}a_{13}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})$$

定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32}.$$

1 2 3　　3 1 2

2 3 1　　3 2 1

则有唯一解
$$
\begin{cases}
x = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \\[2em]
y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \\[2em]
z = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}
\end{cases}
$$

解n个方程 n个未知量之方程组 需要引入n阶行列式

2. 排列与逆序

定义：由1.2,⋯,n 组成的有序数组称为一个n阶排列 记为 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 共有 $n!$ 种方式.

定义：在 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 中 若大数在小数前面 则这两个数构成一个逆序. 逆序之总数称为逆序数. 记作 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$

若 $\tau(j_1\cdots j_n)$ 为奇数，则称 $j_1\cdots j_n$ 为奇排列。类似定义偶排列。

$$\tau(2341)=3. \qquad \tau(2143)=2.$$

对换：对换改变排列之奇偶性。

Case 1：对换相邻之两个数，逆序差1

$$\cdots\ i\ j\ \cdots \longrightarrow \cdots\ j\ i\ \cdots$$

Case2：对换不相邻之两个数

$$\cdots\ i\ k_1\ k_2\cdots k_s\ j\ \cdots$$

$$\cdots\ i\ j\ k_1\ \cdots\cdots\ k_s\ \cdots$$

共对换 $2s+1$ 次

$$\cdots\ j\ k_1\ k_2\cdots k_s\ i\ \cdots$$

定理：在 n 之排列中，奇排列个数与偶排列个数相等

证：设 n 之排列中奇排列总数为 s，偶……为 t

将所有之奇排列前两位对换，变为 s 个偶排。

故 $s\leq t$. 同理 $t\leq s$，故 $t=s$.

A. B 有限集

$A\subseteq B$

3. 定义: n阶行列式:　　　　Cauchy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\{j_1 j_2 \cdots j_n\}=\{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

Note: ① $n!$项之代数和

② 行标是顺序排列时，符号取决于列标之逆序

③ 行列式实际上是一个映射

$$f: M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$ 一个n^2元连续函数

Note: A、B为两个非空集合

$f: A \to B$ 为一映射

$A \subseteq \mathbb{R}$. $B=\mathbb{R}$ 一元函数.

$A \subseteq \mathbb{R}^n$. $B=\mathbb{R}$ 多元函数.

A 线性空间 $B=\mathbb{R}$ 泛函.

A 线性空间 B 线性空间: 算子,

$A=B$ 线性空间 变换..

例1：写出4阶行列式中，含有 a_{13}, a_{32} 的项
并确定符号

$$+a_{13}\,a_{21}\,a_{32}\,a_{44} \qquad -a_{13}\,a_{24}\,a_{32}\,a_{41}$$

$$\tau(3124)=2$$

例2：若 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & \boxed{4} \\ 1 & 1 & \boxed{2x} & 1 \end{vmatrix}$，求 x^3 系数

$$(-1)^{\tau(1234)}x^3+(-1)^{\tau(1243)}x\cdot x\cdot 4\cdot 2x=-7x^3$$