第五章 图的基本概念

无向图及有向图，通路、回路和图的连通性

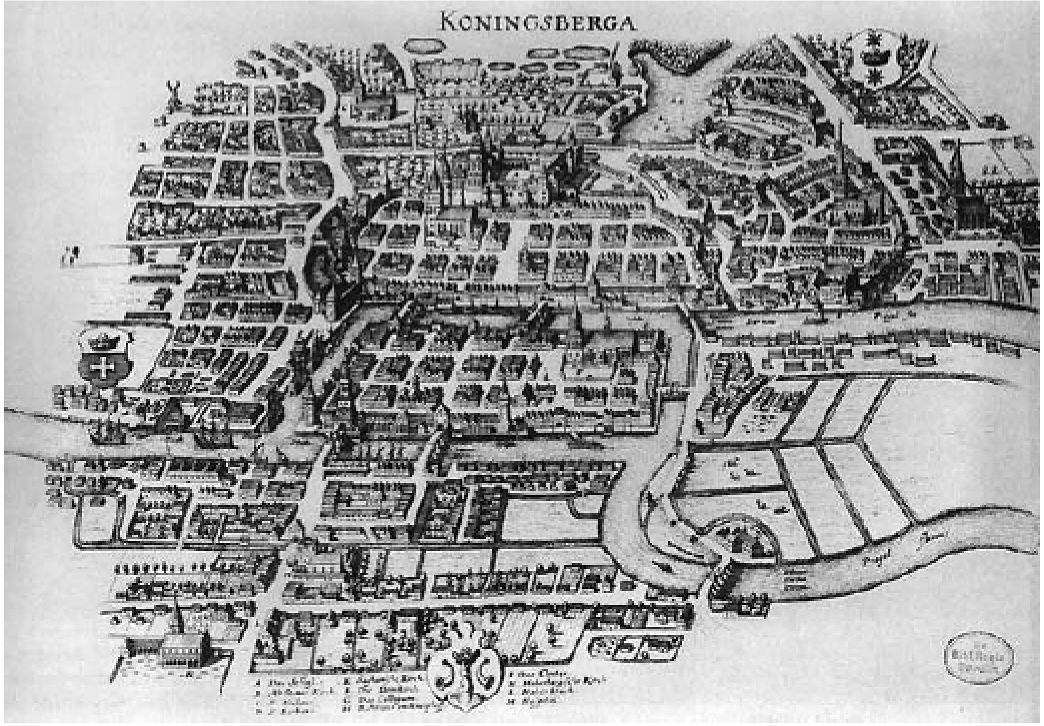
郝杰

haojie@bupt.edu.cn

北京邮电大学信息安全中心

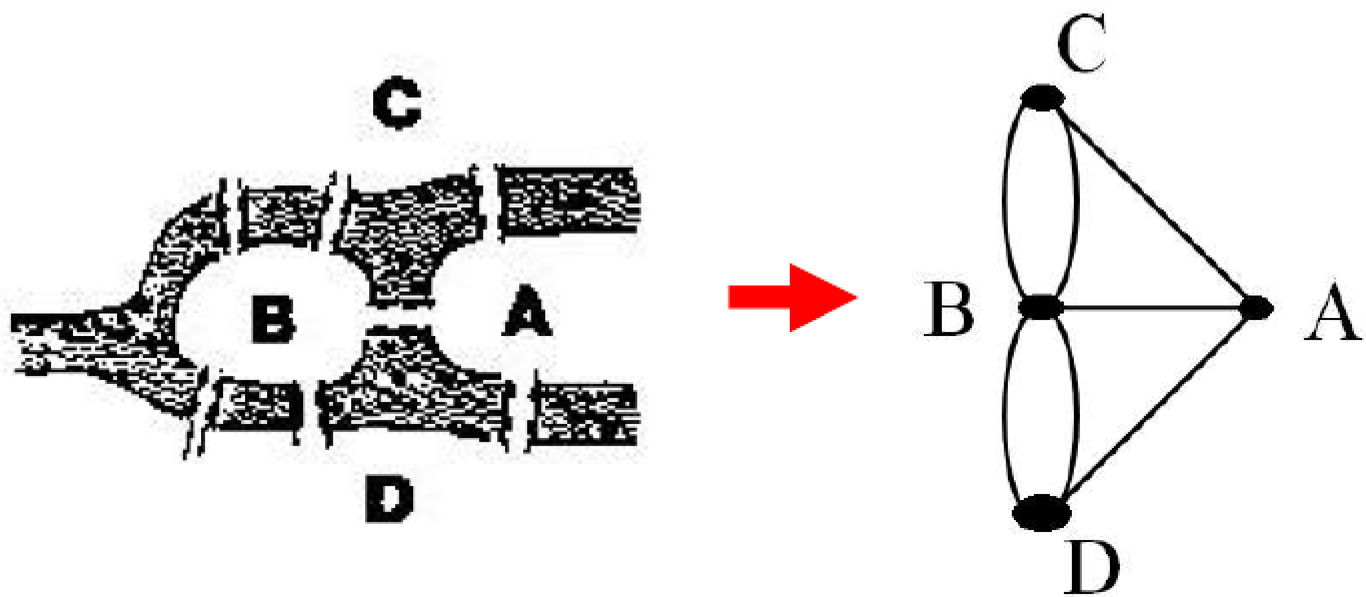
图论

□ 欧拉与哥尼斯堡城七桥问题（1736年）



图论

- 欧拉七桥问题问题的研究是图论研究的开始



5.1 无向图及有向图

- 无向图与有向图
- 顶点的度数
- 握手定理
- 简单图
- 完全图
- 子图
- 补图

无向图

- 多重集合：元素可以重复出现的集合.
- 无序积：$A\&B = \{\{x, y\} \mid x \in A \wedge y \in B\}$.

定义 无向图 $G = \langle V, E \rangle$, 其中

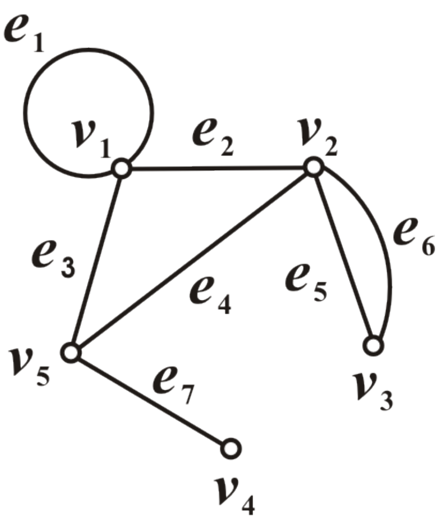
(1) 顶点集 V 是非空有穷集合, 其元素称为顶点.

(2) 边集 E 为 $V\&V$ 的多重子集, 其元素称为无向边, 简称边.

- 例如, $G=\langle V,E \rangle$, 其中

  $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$,

  $E=\{(v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_3), (v_2,v_5), (v_1,v_5), (v_4,v_5)\}$.



有向图

定义 有向图 $D = \langle V, E\rangle$, 其中

(1) 顶点集 V 是非空有穷集合, 其元素称为顶点.

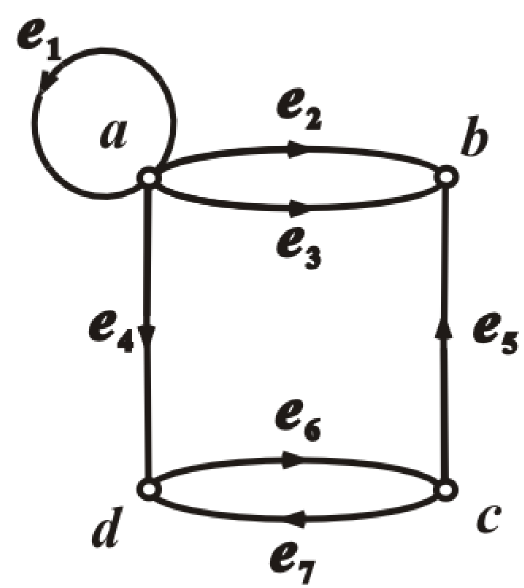
(2) 边集 E 为 $V\times V$ 的多重子集, 其元素称为有向边, 简称边.

- 基图: 用无向边代替有向边

- 例如 $D = \langle V, E\rangle$, 其中

  $V=\{a,b,c,d\}$

  $E=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,b\rangle,$
  $\langle a,d\rangle, \langle c,b\rangle,\langle d,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$



无向图与有向图

- 通常用 G 表示无向图,
  D 表示有向图,
  也常用 G 泛指无向图和有向图.
- $V(G), E(G), V(D), E(D)$: G和D的顶点集, 边集.

- **n 阶图**: n 个顶点的图.
- **零图**: $E = \varnothing$.
- **平凡图**: 1 阶零图.
- **空图**: $V = \varnothing$.

顶点和边的关联与相邻

- 定义 设$e = (u, v)$ 是无向图 $G = \langle V, E\rangle$ 的一条边，称 u, v 为 e 的端点, e与$u\,(v)$关联.
  - 若$u \neq v$, 则称e与$u\,(v)$的关联次数为1;
  - 若$u=v$, 则称e为环, 此时称e与u 的关联次数为2;
  - 若w不是e端点, 则称e与w 的关联次数为0.
  - 无边关联的顶点称作孤立点.

顶点和边的关联与相邻

定义 设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, $u,v \in V$, $e,e' \in E$, 若$(u, v) \in E$, 则称u, v **相邻**；若e, e'至少有一个公共端点, 则称e, e'**相邻**.

对于有向图，设 $e = \langle u, v \rangle$是有向图的一条边,又称 u 是 e 的**始点**, v是 e 的**终点**, u **邻接到** v, v **邻接于**u.

顶点的度数

北京邮電大学 Beijing University of Posts and Telecommunications

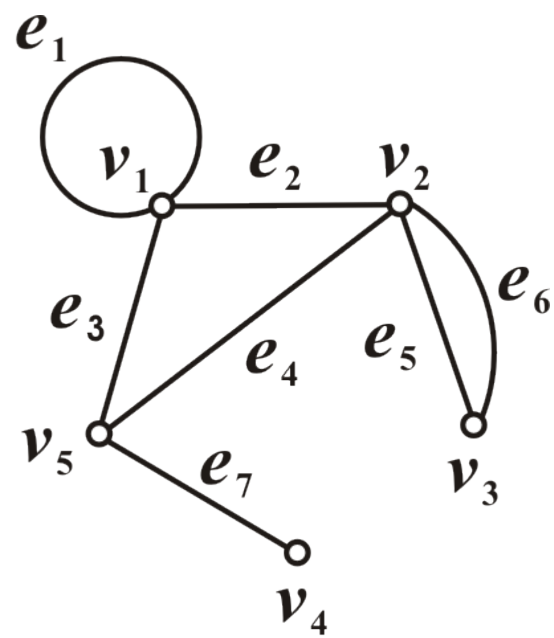
- 设 $G=\langle V,E \rangle$ 为无向图, $v \in V$,
  - v 的度数(度) $d(v)$: v 作为边的端点次数之和.
  - 悬挂顶点: 度数为 1 的顶点.
  - 悬挂边: 与悬挂顶点关联的边.
  - G 的最大度 $\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}$.
  - G 的最小度 $\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}$.

- 例如:

$d(v_5)=3$, $d(v_2)=4$, $d(v_1)=4$,

$\Delta(G)=4$, $\delta(G)=1$,

v_4是悬挂顶点, e_7是悬挂边, e_1是环.



顶点的度数

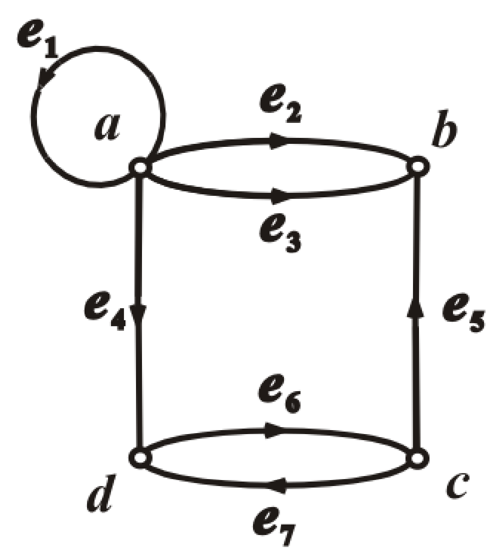
- 设 $D=<V, E>$为有向图, $v\in V$,
  - v的出度$d^+(v)$: v作为边的始点次数之和.
  - v的入度$d^-(v)$: v作为边的终点次数之和.
  - v的度数(度) $d(v)$: v作为边的端点次数之和,

$$d(v)= d^+(v)+ d^-(v)$$

- 例如

$d^+(a)=4, d^-(a)=1, d(a)=5,$

$d^+(b)=0, d^-(b)=3, d(b)=3,$

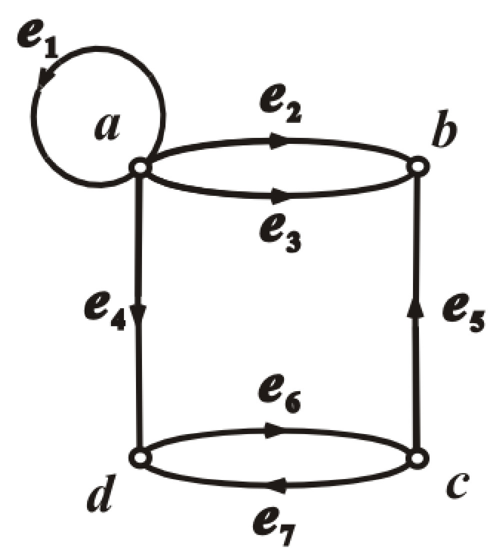


顶点的度数

- 设 $D=<V, E>$为有向图, $v\in V$,
  - 最大出度$\Delta^+(D)=\max\{d^+(v)\mid v\in V\}$.
  - 最小出度$\delta^+(D)=\min\{d^+(v)\mid v\in V\}$.
  - 最大入度$\Delta^-(D)=\max\{d^-(v)\mid v\in V\}$.
  - 最小入度$\delta^-(D)=\min\{d^-(v)\mid v\in V\}$.
  - 最大度$\Delta(D)=\max\{d(v)\mid v\in V\}$.
  - 最小度$\delta(D)=\min\{d(v)\mid v\in V\}$.
- 例如:

  $\Delta^+(D)=4$, $\delta^+(D)=0$, $\Delta^-(D)=3$,

  $\delta^-(D)=1$, $\Delta(D)=5$, $\delta(D)=3$.



图论基本定理——握手定理

定理 任意无向图和有向图的所有顶点度数之和都等于边数的2倍，并且有向图的所有顶点入度之和等于出度之和等于边数.

- 证明:
  - *G* 中每条边（包括环）均有两个端点,
  - *G* 中各顶点度数之和, *m*条边共提供2*m*度.
  - 有向图的每条边提供一个入度和一个出度, 故所有顶点入度之和等于出度之和等于边数.

推论 任意无向图和有向图的奇度顶点个数必为偶数.

图的度数列

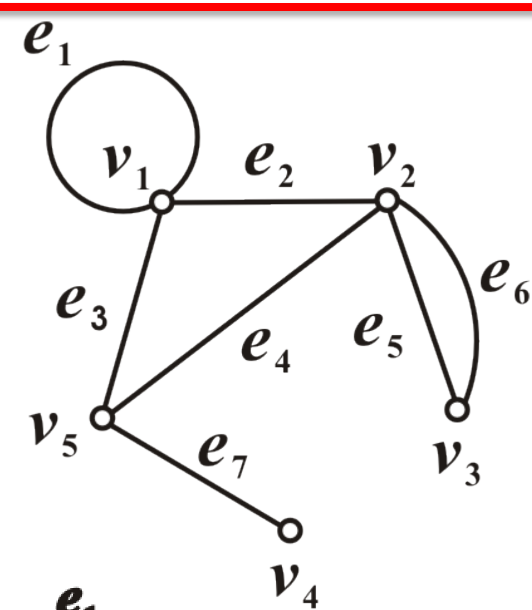
- 设无向图 G 的顶点集

  $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

  G的度数列为:

  $d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$

- 例如右图度数列: 4,4,2,1,3



- 设有向图 D 的顶点集

  $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

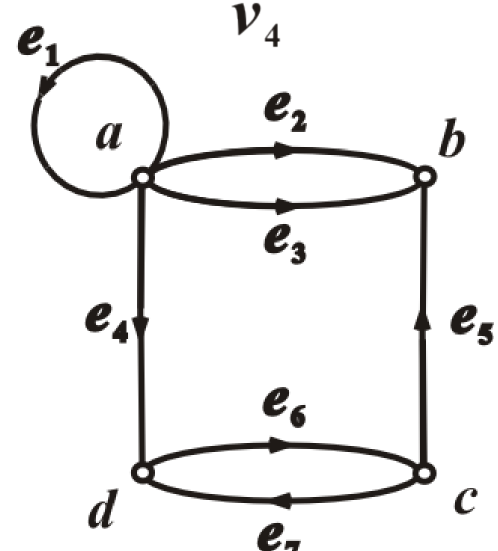
  D的度数列: $d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$

  D的出度列: $d^+(v_1), d^+(v_2), \ldots, d^+(v_n)$

  D的入度列: $d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n)$

- 例如右图度数列: 5,3,3,3

  出度列: 4,0,2,1 入度列: 1,3,1,2



握手定理的应用

- 例：(3,3,3,4), (2,3,4,6,8)能成为图的度数列吗?

解：不可能. 它们都有奇数个奇数.

- 例: 已知图G有10条边, 4个3度顶点, 其余顶点的度数均小于等于2, 问G至少有多少个顶点?

解：设G有n个顶点. 由握手定理,

$$4\times3+2\times(n-4)\geq2\times10$$

得 $n\geq8$

握手定理的应用

■ 例： 证明不存在具有奇数个面且每个面都具有奇数条棱的多面体.

◆ 证明: 用反证法. 假设存在这样的多面体,

作无向图 $G=<V,E>$， 其中

$$V=\{v \mid v\text{为多面体的面}\},$$

$$E=\{(u,v) \mid u,v\in V \wedge u\text{与}v\text{有公共的棱} \wedge u\neq v\}.$$

根据假设, $|V|$为奇数且$\forall v\in V$, $d(v)$为奇数. 这与握手定理的推论矛盾.

多重图与简单图

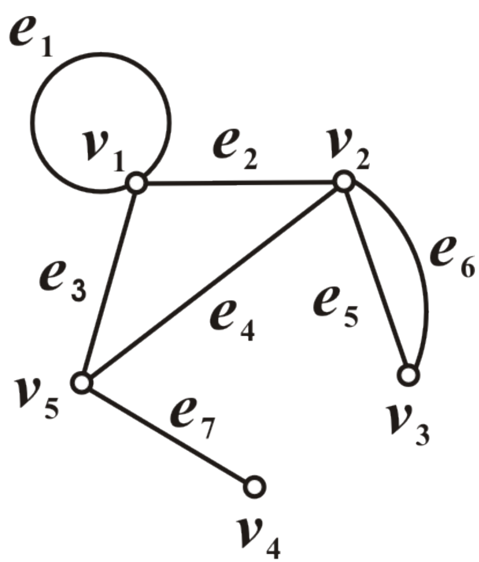
北京邮电大学 Beijing University of Posts and Telecommunications

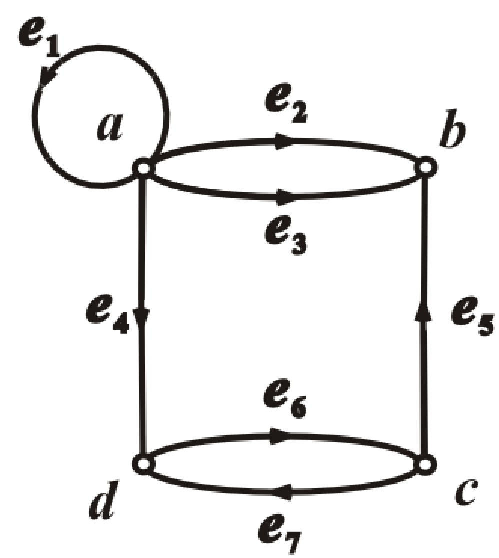
定义

- 在无向图中,如果有2条或2条以上的边关联同一对顶点, 则称这些边为平行边, 平行边的条数称为重数.
- 在有向图中,如果有2条或2条以上的边具有相同的始点和终点, 则称这些边为有向平行边, 简称平行边, 平行边的条数称为重数.
- 含平行边的图称为多重图.
- 既无平行边也无环的图称为简单图.

◆ 注意:简单图是极其重要的概念

实例





- e_5 和 e_6 是平行边
- 重数为 2
- 不是简单图

- e_2 和 e_3 是平行边,重数为2
- e_6 和 e_7 不是平行边
- 不是简单图

图的同构

定义 设$G_1 = <V_1, E_1>$, $G_2 = <V_2, E_2>$为两个无向图 (有向图), 若存在**双射函数** $f: V_1 \to V_2$, 使得对于任意的顶点 $v_i, v_j \in V_1$, 有

$$(v_i, v_j) \in E_1 \ (<v_i, v_j> \in E_1),$$

当且仅当

$$(f(v_i), f(v_j)) \in E_2 \ (<f(v_i), f(v_j)> \in E_2),$$

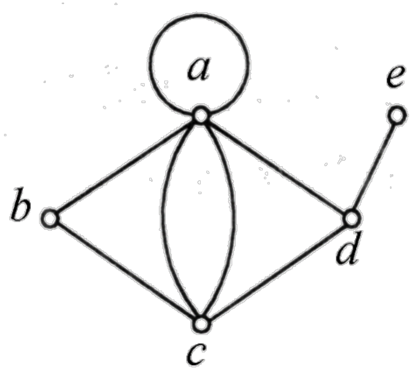
并且,

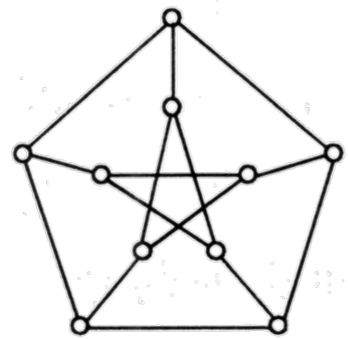
(v_i, v_j) $(<v_i, v_j>)$ 与 $(f(v_i), f(v_j))$ $(<f(v_i), f(v_j)>)$的重数相同，则称 G_1与 G_2是**同构**的，记作$G_1 \cong G_2$.

同构实例

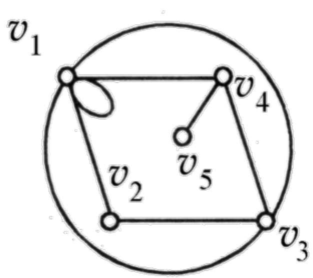
北京邮电大学 Beijing University of Posts and Telecommunications

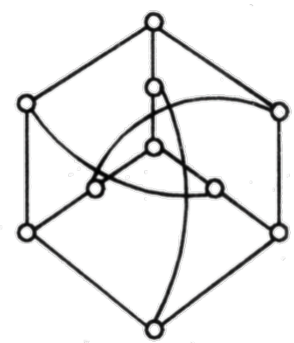
- 例: 证明下述2对图是同构的





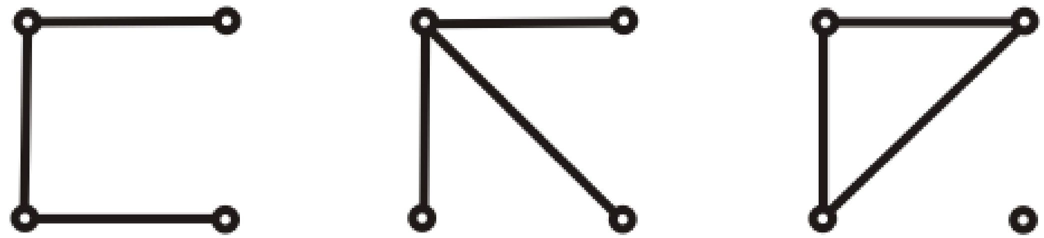
彼得森图





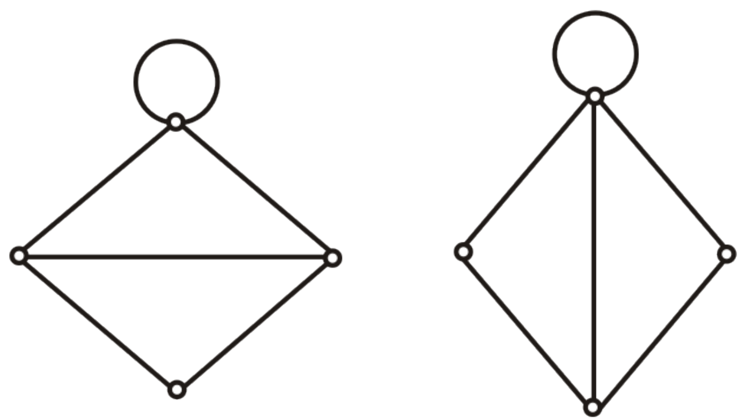
同构实例

- 例: 试画出4阶3条边的所有非同构的无向简单图



- 例: 判断下述每一对图是否同构:

(1)

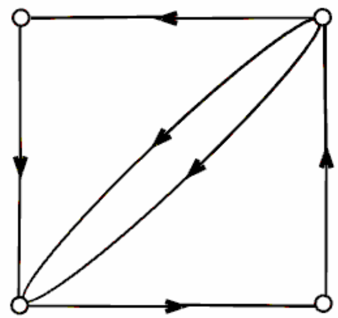


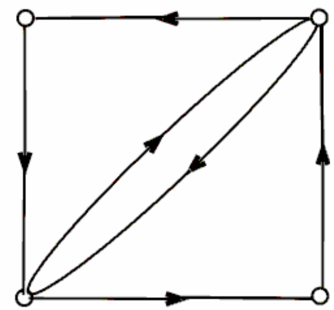
度数列不同

不同构

同构实例

(2)

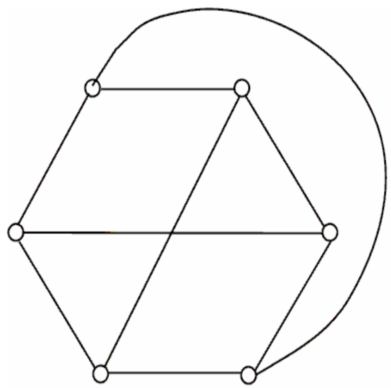




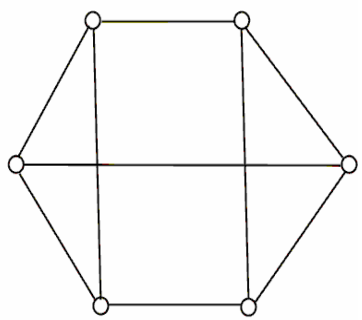
不同构

入(出)度列不同

(3)



(1)



(2)

不同构(左边没有三角形,
右边有三角形)

注意:度数列相同

图的同构

- 几点说明：
- 图之间的同构关系具有自反性、对称性和传递性.
- 有多条同构的必要条件，但它们都不是充分条件：
  ① 边数相同，顶点数相同；
  ② 度数列相同(不计度数的顺序)；
  ③ 对应顶点的关联集及邻域的元素个数相同，等等
- 若不满足必要条件，则两图不同构

至今没有找到判断两个图同构的多项式时间算法

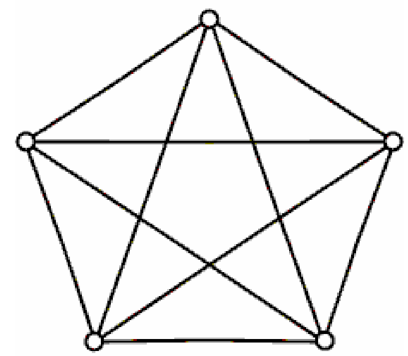
完全图

- **n 阶无向完全图 K_n**

  每个顶点都与其余顶点相邻的 n 阶无向简单图.

  ➢ 简单性质:

  边数 $m = n(n-1)/2$, $\Delta = \delta = n-1$.



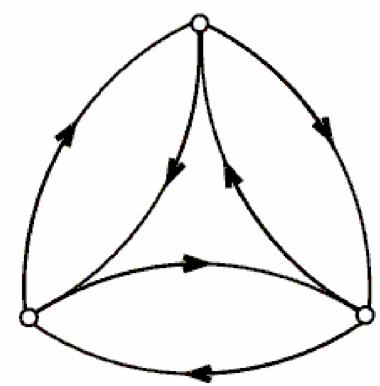
- **n 阶有向完全图**:

  每对顶点之间均有两条向相反的有向边的 n 阶方有向简单图.

  ➢ 简单性质:

  边数 $m = n(n-1)$, $\Delta = \delta = 2(n-1)$,

  $\Delta^+ = \delta^+ = \Delta^- = \delta^- = n-1$.



子图

定义 设 $G=<V,E>$, $G'=<V',E'>$ 是两个图

(1) 若$V'\subseteq V$ 且 $E'\subseteq E$, 则称G'为G的子图, G为G'的母图，记作$G'\subseteq G$.

(2) 若$G'\subseteq G$ 且$V'=V$，则称G'为G的生成子图.

(3) 若$V'\subset V$ 或$E'\subset E$，称G'为G的真子图.

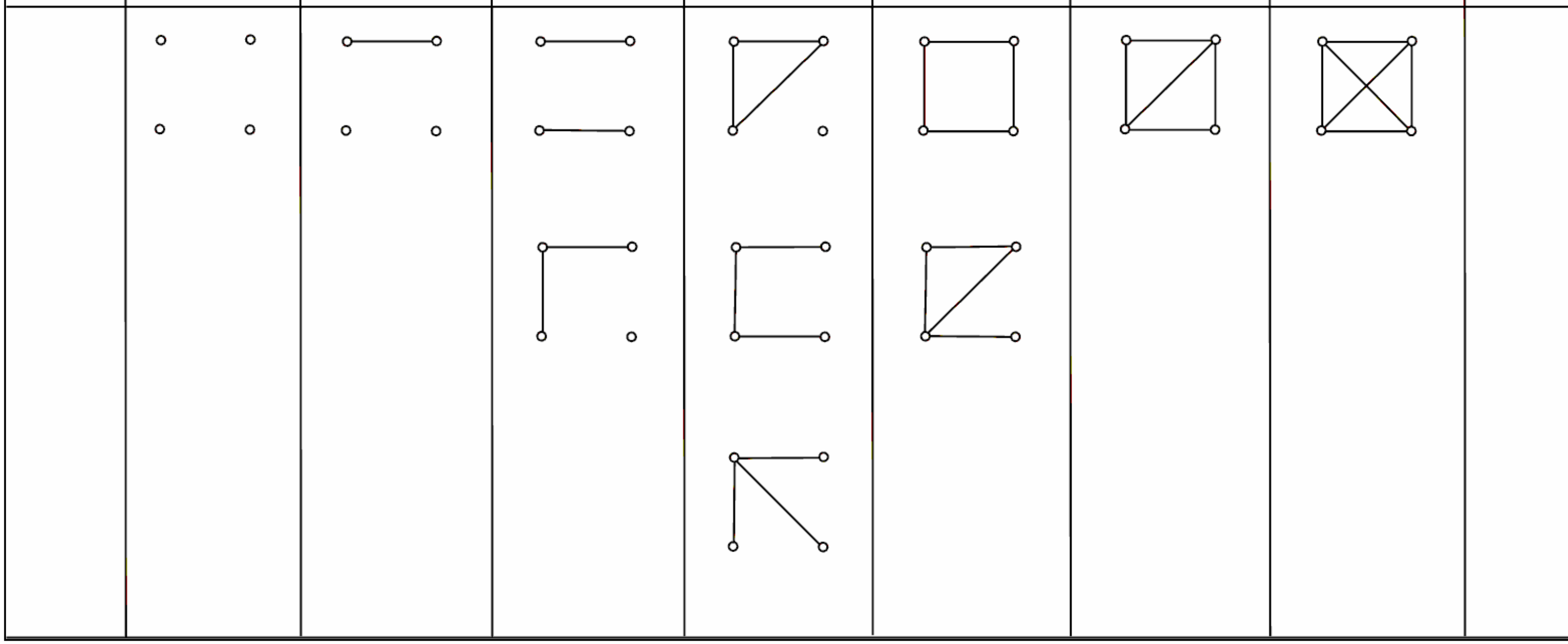
(4) 设$V'\subseteq V$ 且$V'\neq\varnothing$, 以V'为顶点集, 以两端点都在V'中的所有边为边集的G的子图称作V'的导出子图，记作 $G[V']$.

(5) 设$E'\subseteq E$且$E'\neq\varnothing$, 以E'为边集, 以E'中边关联的所有顶点为顶点集的G的子图称作E'的导出子图, 记作 $G[E']$.

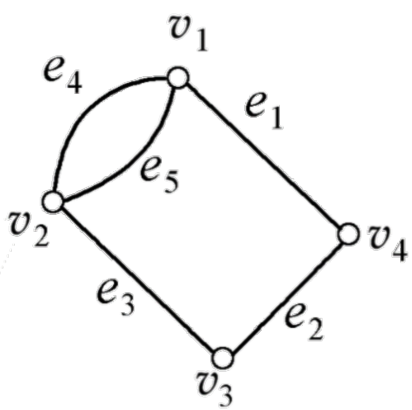
生成子图

- K_4的所有非同构的生成子图

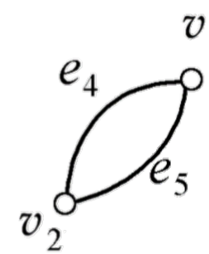
m	0	1	2	3	4	5	6	



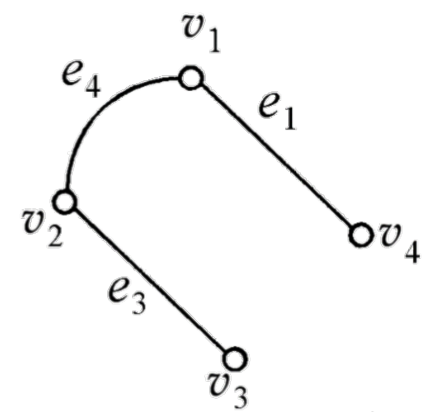
导出子图



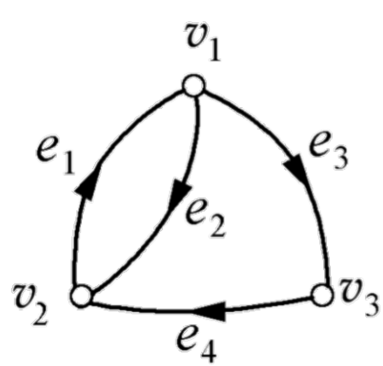
G



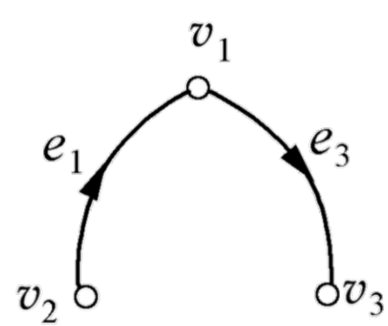
$G[\{v_1,v_2\}]$



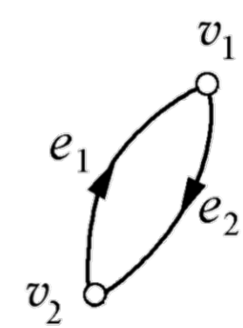
$G[\{e_1,e_3,e_4\}]$



D



$D[\{e_1,e_3\}]$



$D[\{v_1,v_2\}]$

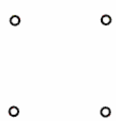
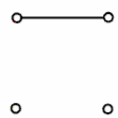
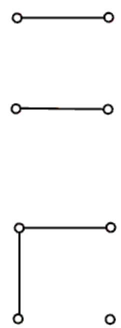
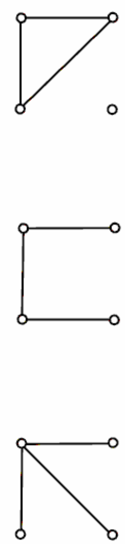
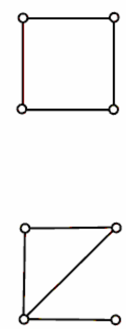
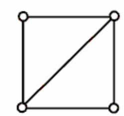
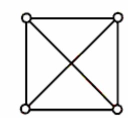
补图

定义 设 $G=<V, E>$为 n 阶无向简单图，以 V 为顶点集, 所有使 G 成为完全图 K_n 的添加边组成的集合为边集的图，称为 G 的补图，记作 $\overline{G}$.

➢ 若$G \cong \overline{G}$, 则称 G 是自补图.

补图

- 例 对K_4的所有非同构子图, 指出互为补图的每一对子图, 并指出哪些是自补图.

m	0	1	2	3	4	5	6	
								

5.2 通路、回路和图的连通性

- 简单通(回)路, 初级通(回)路, 复杂通(回)路
- 无向图的连通性

  无向连通图, 连通分支
- 有向连通图

  弱连通图, 单向连通图, 强连通图
- 点割集与割点
- 边割集与割边(桥)

通路与回路

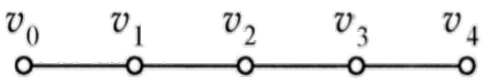
定义 给定图 $G = <V, E>$ (无向或有向的),对于 G 中顶点与边的交替序列$\Gamma = v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$,

(1) 若$\forall i$ $(1 \le i \le l)$, v_{i-1}, v_i 是 e_i 的端点(对于有向图, 要求v_{i-1}是始点, v_i是终点), 则称 Γ 为通路, v_0是通路的起点, v_l 是通路的终点, l 为通路的长度. 又若$v_0 = v_l$, 则称 Γ为回路.

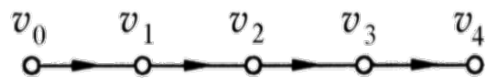
(2) 若通路(回路)中所有顶点(对于回路, 除$v_0=v_l$)各异，则称为初级通路(初级回路).初级通路又称作路径，初级回路又称作圈.

(3) 若通路(回路)中所有边各异, 则称为简单通路(简单回路), 否则称为复杂通路(复杂回路).

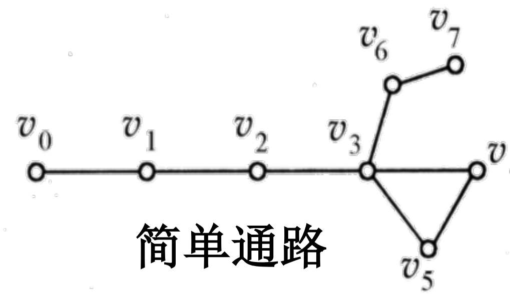
通路与回路



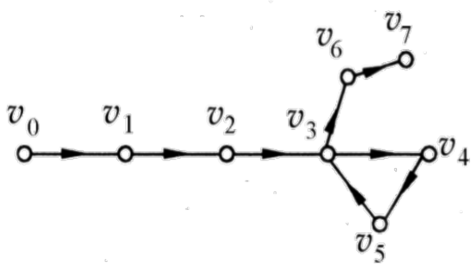
初级通路



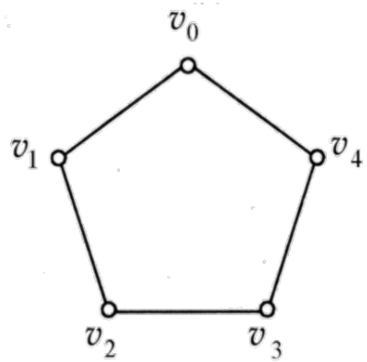
初级通路



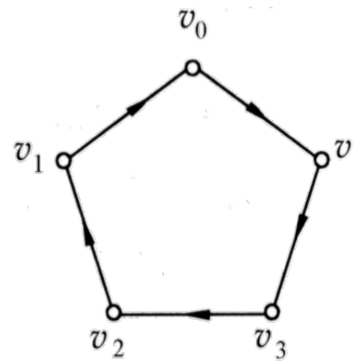
简单通路



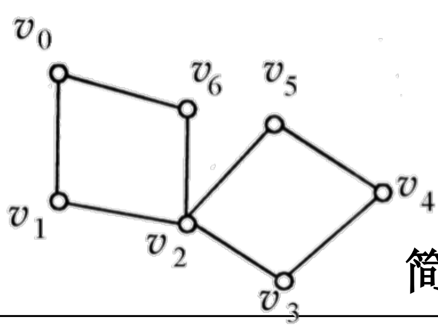
简单通路



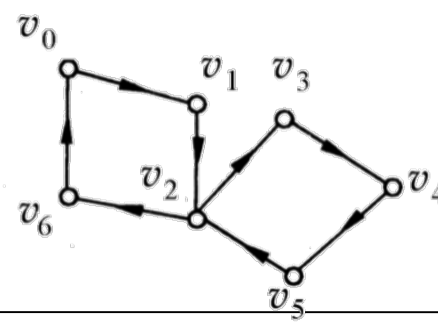
初级回路



初级回路



简单回路



简单回路

通路与回路

定理 在 n 阶图 G 中, 若从顶点u到v ($u \neq v$) 存在通路, 则从 u 到 v 存在长度小于等于 $n-1$ 的通路.

证明:

设$\Gamma = v_0e_1v_1e_2 \ldots e_lv_l$ 为从 $u=v_0$ 到 $v= v_l$ 的通路.

如果$l > n-1$, 由于图中有n个顶点, $v_0, v_1, \ldots, v_l$ 必有2个相同, 设$v_i = v_j$, 则存在v_i到 v_j 的回路.

删除这条回路, 得到 $v_0e_1v_1e_2 \ldots v_ie_{j+1} \ldots e_lv_l$仍为从 $u=v_0$ 到 $v= v_l$的通路, 长度减少 $j-i$.

重复此过程, 得到长度不超过 $n-1$ 的通路.

通路与回路

推论 在 n 阶图 G 中, 若从顶点u到v $(u \neq v)$ 存在通路，则从 u 到 v 存在长度小于等于 $n-1$ 的初级通路.

定理 在一个 n 阶图 G 中，若存在 v 到自身的回路, 则一定存在 v 到自身长度小于等于 n 的回路.

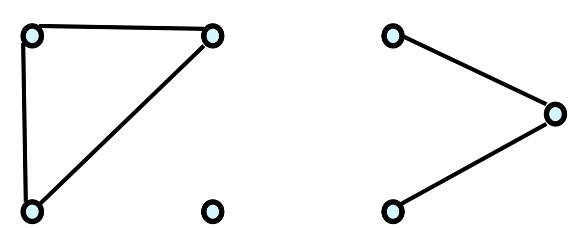
推论 在一个 n 阶图 G 中, 若存在 v 到自身的简单回路, 则存在v到自身长度小于等于n的初级回路.

无向图的连通性

北京邮电大学 Beijing University of Posts and Telecommunications

- 设无向图$G=<V,E>$,
  - u 与 v 连通: 若u与v之间有通路. 规定u与自身总连通.
  - 连通关系 $R = \{<u,v> \mid u,v \in V$ 且$u \sim v\}$是V上的等价关系.
  - 连通图: 任意两点都连通的图.
  - 连通分支: V 关于连通关系 R 的等价类的导出子图
- 设 $V/R = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$, $G[V_1], G[V_2], \ldots, G[V_k]$是 G 的连通分支, 其个数记作 $p(G) = k$.
- G是连通图 $\Leftrightarrow p(G)=1$

例



点割集

记 $G-v$: 从 G 中删除 v 及关联的边.

$G-V'$: 从 G 中删除 V'中所有的顶点及关联的边.

$G-e$: 从 G 中删除 e .

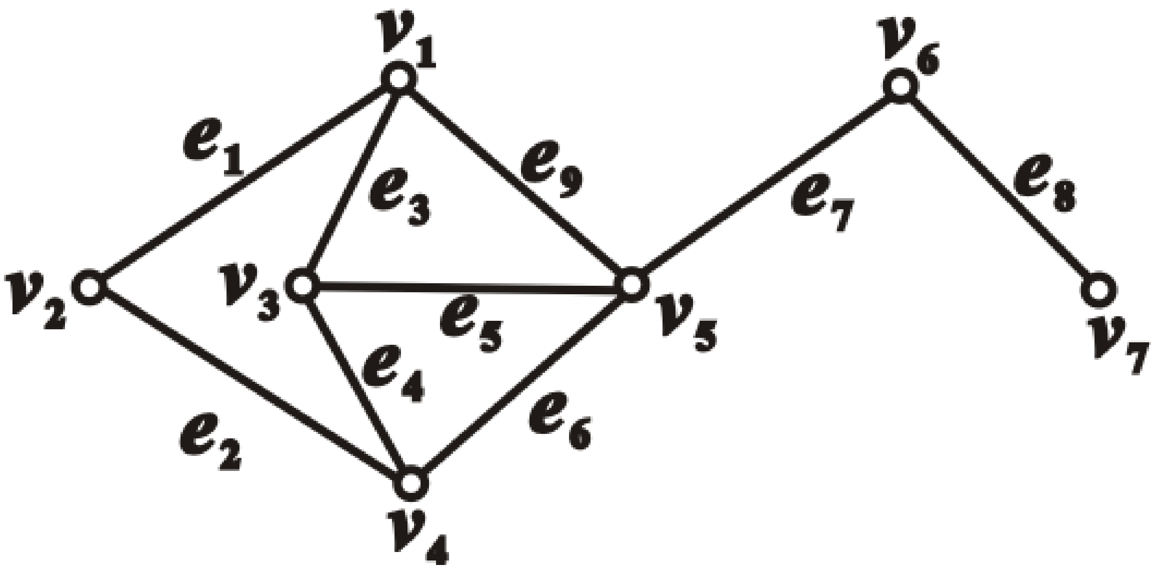
$G-E'$: 从 G 中删除 E' 中所有边.

定义 设无向图 $G=\langle V,E\rangle$, $V'\subset V$, 若 $p(G-V')>p(G)$ 且$\forall V''\subset V'$, $p(G-V'')=p(G)$, 则称V'为G的点割集.

若$\{v\}$为点割集, 则称v为割点.

点割集

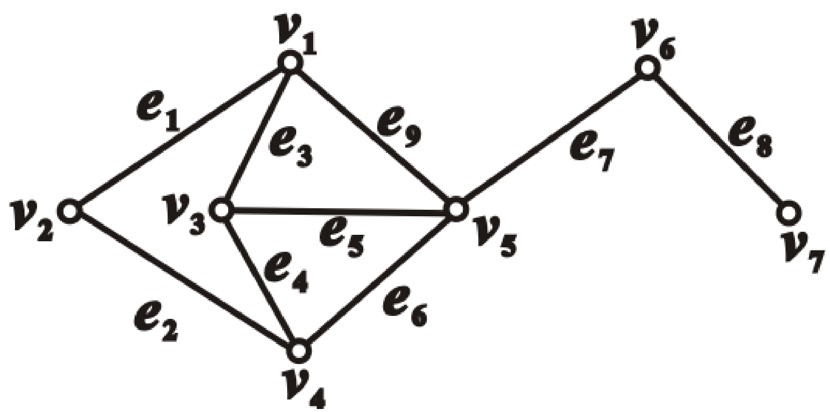
- 例 $\{v_1,v_4\}$, $\{v_6\}$是点割集, v_6是割点.
  $\{v_2,v_5\}$不是点割集



边割集

定义 设无向图 $G = <V, E>$, $E' \subseteq E$, 若$p(G-E')>p(G)$且$\forall E'' \subset E'$, $p(G-E'')=p(G)$, 则称E'为G的**边割集**. 若$\{e\}$为边割集, 则称e为**割边**或**桥**.

- 例 $\{e_1, e_2\}$, $\{e_1, e_3, e_5, e_6\}$, $\{e_8\}$等是边割集, e_8是桥, $\{e_7, e_9, e_5, e_6\}$不是边割集



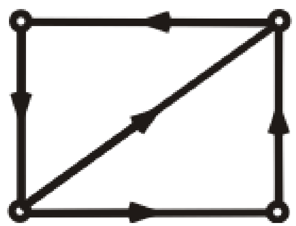
有向图的连通性

- 设有向图$D=\langle V,E\rangle$
  - u可达v: u 到 v 有通路.
    (可达具有自反性和传递性)
  - D弱连通(连通): 基图为无向连通图.
  - D单向连通: $\forall u, v\in V$，u可达v 或 v可达u.
  - D强连通: $\forall u, v\in V$，u 与 v 相互可达.

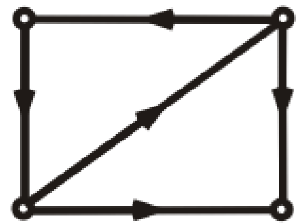
强连通 $\Rightarrow$ 单向连通 $\Rightarrow$ 弱连通

有向图的连通性

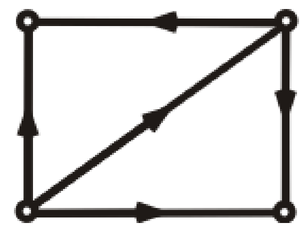
■ 例



强连通



单向连通



弱连通

定理(强连通判别法) D强连通当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的回路

定理(单向连通判别法) D单向连通当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的通路

- 作业
  - 5.6
  - 5.10