Note Title 2017/12/8

$A_{m,n}X=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(A)<n$

$\Leftrightarrow$ A 列向量组线性相关

定理：$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_s \in \mathbb{R}^m$.

$\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_s \in \mathbb{R}^n$

令 $\gamma_i=\begin{bmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{bmatrix}$ 则 $\gamma_i \in \mathbb{R}^{m+n}$.

① $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性无关 则 $\gamma_1 \cdots \gamma_s$ 线性无关

② $\gamma_1 \cdots \gamma_s$ 线性相关 则 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性相关.

证 $k_1\gamma_1+k_2\gamma_2+\cdots+k_s\gamma_s=\theta$

$k_1\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{bmatrix}+\cdots+k_s\begin{bmatrix}\alpha_s\\ \beta_s\end{bmatrix}=\theta$

$\Rightarrow k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\theta$

由 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 无关 故 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$

- 增~~加~~向量组中向量个数，不改变相关.
- 增加向量组的维数 不改变无关性.

1. 向量组的等价.

定义：① $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ ② $\beta_1 \cdots \beta_t$ 为 2 个 n 维向量组

若①中每个向量可由②中向量表出，称向量组①可被②表出 若向量组②也可被向量组①表示.

则称两个向量组 ① ② 等价

$$A=[\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s]_{n\times s} \quad B=[\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_t]_{n\times t}$$

$$\left.\begin{array}{l} \underset{n\times s}{A} = \underset{n\times t}{B}\,\underset{t\times s}{C} \\ \underset{n\times t}{B} = \underset{n\times s}{A}\,\underset{s\times t}{D} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = ADC. \\ B = BCD \\ \underset{s\times t}{D}\,\underset{t\times s}{C} = I_s \\ CD = I_t \end{array}$$

② 向量组等价满足:

① 反身性. $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 与 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 等价

② 对称性. $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 与 $\beta_1 \cdots \beta_t$ 等价

则 $\beta_1 \cdots \beta_t$ 与 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 等价

③ 传递性 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 与 $\beta_1 \cdots \beta_t$ 等价.

$\beta_1 \cdots \beta_t$ 与 $\gamma_1 \cdots \gamma_k$ 等价

则 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 与 $\gamma_1 \cdots \gamma_k$ 等价

$\exists\, D_1\ E_1 \quad [\alpha_1 \cdots \alpha_s] = [\beta_1 \cdots \beta_t] D_1, \quad [\beta_1 \cdots \beta_t] = [\alpha_1 \cdots \alpha_s] E_1$

$\exists\, D_2\ E_2 \quad [\beta_1 \cdots \beta_t] = [\gamma_1 \cdots \gamma_k] D_2 \quad [\gamma_1 \cdots \gamma_k] = [\beta_1 \cdots \beta_t] E_2$

$$[\alpha_1 \cdots \alpha_s] = [\gamma_1 \cdots \gamma_k] D_2 D_1$$

$$[\gamma_1 \cdots \gamma_k] = [\alpha_1 \cdots \alpha_s] E_1 E_2$$

(标准定理)

定理： $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 可由 $\beta_1 \cdots \beta_t$ 表出，且 $s > t$

则 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性相关

证明： $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = \theta$

$$[\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_s]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = \theta$$

又 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 可线性 $\beta_1 \cdots \beta_t$ 表出。 $[\alpha_1 \cdots \alpha_s] = [\beta_1 \cdots \beta_t] \underset{t \times s}{C}$

$$[\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_t] \underset{t\times s}{C} \underset{s \times 1}{X} = \theta$$

考察 $CX = 0$

$r(C) \leq t < s$ 故 $CX=0$ 有非零解 X_0

$CX_0 = 0$ 从而 $\underline{[\beta_1 \cdots \beta_t]} CX_0 = 0$

$[\alpha_1 \cdots \alpha_s] X_0 = 0$ $X_0 \neq 0$

即 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性相关

推论： $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 可被 $\beta_1 \cdots \beta_t$ 表出 且 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性无关

则 $s \leq t$

2. 向量组极大无关组（迭代表）.

①定义：在 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 中若存在 r 个向量 $\alpha_{i_1}\ \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_r}$.

线性无关. 再加上任何一个向量 α_j. $\alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_r},\ \alpha_j$

均线性相关. 则称 $\alpha_{i_1}\ \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_r}$ 为 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 之

一个极大无关组

Note: ① $\alpha_{i_1}.\alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_r}$ 与 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 等价

② $\alpha_{i_1}\ \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 之极大无关组.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \{\alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_r}\} \subseteq \{\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_s\} \\ \alpha_{i_1}\ \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_r} \text{ 线性无关.} \\ \alpha_1 \cdots \alpha_s \text{ 每个向量均可由 } \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_r} \text{ 表出} \end{cases}$

③若 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性无关 则其极大无关组是本身

3、定理：$\alpha_{i_1}\ \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_r}$ 与 $\alpha_{j_1}\ \alpha_{j_2} \cdots \alpha_{j_t}$ 均为

$\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 之极大无关组 则 $r = t$.

证：$\alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_r}$ 与 $\alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_t}$ 等价

$\alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_r}$ 可被 $\alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_t}$ 表示 由于 $\alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_r}$

无关之 则 $r \le t$ 同理 $r \ge t$ 则 $r = t$

Note. 极大无关组可以不唯一，但是其中向量之个数是唯一的. 即 极大无关组中向量之个数是一个不变量

定义： $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 中极大无关组中向量之个数称为向量组之秩 记作

$$r(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_s)$$

4. 极大线性无关组之求法

① 标准行梯型矩阵

$$A = \begin{array}{c|l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & 1 & & 0 & x_2 & y_2 \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & x_{r-1} & y_{r-1} \\ 0 & 0 & - - & 1 & x_r & y_r \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \downarrow & \vdots \\ & & & & r+1 & \end{bmatrix} & \begin{matrix} \to 1 \\ \to 2 \\ \\ \to 3 \\ \to r \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

② 若 $\alpha_1 . \alpha_2 \cdots \alpha_s$ 线性相关 则

存在不全为零之常数 $x_1 \ x_2 \cdots x_s$ 使

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = \theta$$

$$[\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_s]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = \theta$$

左乘一个可逆矩阵 P

$$x_1 P\alpha_1 + x_2 P\alpha_2 + \cdots + x_s P\alpha_s = \theta$$

$$[P\alpha_1, P\alpha_2 \cdots P\alpha_s]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = \theta$$

结论：$[\alpha_1 \cdots \alpha_s]$ 将矩阵做初等行变换

保持 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 之线性相关性与无关性.

若 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$

则左乘可逆矩阵 P

$P\beta = k_1 P\alpha_1 + k_2 P\alpha_2 + \cdots + k_s P\alpha_s$

结论：初等行变换不改变线性表出之系数

例：求 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\alpha_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

之一个极大无关组 和向量组之秩

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \\ 3 & 8 & -1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 8 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 8 & -7 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \\ 0 & 0 & -23 & -23 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是极大无关组. $\alpha_4 = -3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 也是极大无关组 $\alpha_3 = \alpha_4 + 3\alpha_1 - \alpha_2$

秩为 3

5. 向量组之秩之相关讨论

定义：极大无关组中向量个数为向量组之秩

性质：① $r(\alpha_1\cdots\alpha_s)\le S$

② $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(\alpha_1\cdots\alpha_s)=S$

③ $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow r(\alpha_1\cdots\alpha_s)<S$

④ 若 $r(\alpha_1\cdots\alpha_s)=r$. 则 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 中任何 r 个线性无关之向量 均为其极大无关组

证明：设 $\alpha_{i_1}\ \alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 中的 r 个线性无关的向量 $\forall\alpha_j\in\{\alpha_1\cdots\alpha_s\}$

$\alpha_{i_1}.\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_r}.\alpha_j$ 必定线性相关.

（若不是. $\alpha_{i_1}.\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_r}\ \alpha_j$ 线性无关 与 $r(\alpha_1\cdots\alpha_s)=r$ 矛盾）

从而 $\alpha_{i_1}\ \alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_r}$. 是 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 之极大无关组

6. 矩阵之秩 $=$ 其列向量组之秩

$=$ 其行向量组之秩

定理：$\beta_1 \cdots \beta_t$ 可由 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 表出.

$r(\alpha_1 \cdots \alpha_s) = r$
$r(\beta_1 \cdots \beta_t) = p$　　则 $p \le r$.

证明：设 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_r}$ 为 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 之极大无关组
$\beta_{j_1}, \beta_{j_2} \cdots \beta_{j_p}$ 为 $\beta_1 \cdots \beta_t$ 之极大无关组

$\beta_{j_1} \cdots \beta_{j_p}$ 可由 $\alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_r}$ 表出. 又
$\beta_{j_1} \cdots \beta_{j_p}$ 线性无关　故 $p \le r$.

证2：$[\beta_1 \cdots \beta_t] = [\alpha_1 \cdots \alpha_s] C$

$$r[\beta_1 \cdots \beta_t] = r\big[[\alpha_1 \cdots \alpha_s] C\big] \le r[\alpha_1 \cdots \alpha_s]$$

即 $p \le r$.