第三章 集合的基本概念和运算

郝杰

haojie@bupt.edu.cn

北京邮电大学信息安全中心

集合的基本概念

- 集合 (**Set**)：无法给出严格精确定义的最基本的数学概念之一
  - 一般理解为集合是一些确定的、可以区分的事物汇聚在一起组成的一个整体.

集合与元素

- 元素：组成集合的对象称为该集合的元素.
  - 元素可以是任何具体或者抽象的事物.
  - 元素也可以是集合.

- 集合的记号“{, }”
  - $A = \{1, 2, 3\}$
  - $S = \{1, \{2,3\}, 10\}$

集合与元素

- 元素与集合的关系：**隶属关系**
  - 当对象 a 是集合 A 的成员时, 称 a 属于A, 记做 "$a \in A$".
  - 当对象 a 不是 A 的成员时, 称 a 不属于A, 记做 "$\neg(a \in A)$" 或者 "$a \notin A$".

- 例如：

$$A=\{\, x \mid x\in \mathbf{R} \wedge x^2-1=0 \,\},\ A=\{-1,1\}.$$

$$1\in A,\ 2\notin A.$$

集合的表示

- **列举法:** 将所有元素列举出来

$$A = \{\, 1, 2, 3, 4 \,\}$$

$$B = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

- **谓词表示法：** 将集合中元素的特征用谓词公式来描述

$$B = \{\, x \mid P(x) \,\}$$

——表示 $x \in B$ 当且仅当 $P(x)$

集合与元素

隶属关系的层次结构：

$A=\{a, \{b,c\}, d, \{\{d\}\}\}$

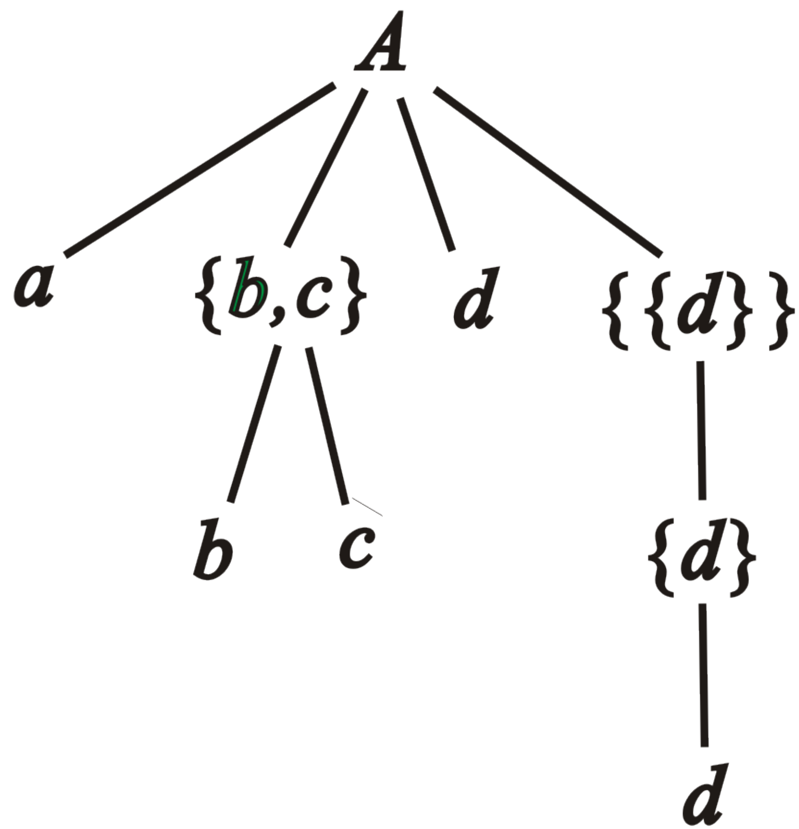
$\{b,c\}\in A$

$b\notin A$

$\{\{d\}\}\in A$

$\{d\}\notin A$

$d\in A$



集合与子集

定义 子集

- 设 A, B为集合，若 B 中的每个元素都是 A 的元素，则称 B 为 A 的子集合，简称子集.
- 称作 B 被 A 包含，或 A 包含 B, 记作 $B \subseteq A$.

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x\,(x \in B \rightarrow x \in A)$$

- 如果 B 不被 A 包含，记作 $B \nsubseteq A$.

$$B \nsubseteq A \Leftrightarrow \exists x\,(x \in B \wedge x \notin A)$$

子集合的例子

- $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, d\}$
- $\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c\}$
- $a \subseteq \{a, b, c\}$不成立，应为 $a \in \{a, b, c\}$
- $\{a, b\} \subseteq \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$：错误
- $\{a, b\} \in \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$：正确
- 有时候隶属和包含关系会同时成立
- {1}和{1, {1}}之间的关系

定义 相等

- 设 A, B为集合，如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则称 A 与 B 相等, 记作 $A = B$.

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \land B \subseteq A.$$

- 如果 A 与 B 的不相等, 记作 $A \neq B$.

定义 真子集

- 设 A, B为集合，如果 $B \subseteq A$ 且 $B \neq A$, 则称 B 是A的真子集, 记作 $B \subset A$.

$$B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge B \neq A.$$

定义 空集

- 不含任何元素的集合称作空集，记作 $\varnothing$.

$$\varnothing = \{x \mid x \neq x\}.$$

- 例如：$\{x \mid x^2+1=0 \wedge x \in \mathbf{R}\}$ 就是空集.

定理 空集是任何集合的子集.

证明：$\varnothing \subseteq A \Leftrightarrow \forall x\,(x \in \varnothing \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow T$.

推论 空集是惟一的.

证明：假设存在$\varnothing_1$和$\varnothing_2$，则$\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$ 且$\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$，

因此$\varnothing_1 = \varnothing_2$.

定义 幂集

- 设 A 为集合，由 A 的所有子集组成的集合称为 A 的**幂集**，记作 $P(A)$.

$$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}.$$

- 例如：对于3元集 $A=\{a, b, c\}$, 其

  0 元子集: $\varnothing$; **1** 元子集: $\{a\},\{b\},\{c\}$;

  2 元子集: $\{a, b\},\{a, c\},\{b, c\}$; **3** 元子集: $\{a, b, c\}$.

$$P(A) = \{\varnothing, \{a\},\{b\},\{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

定理 幂集计数

- 如果 $\boldsymbol{A}$ 是 n 元集，则 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$ 有 2^n 个元素.

证明：对于 n 元集 $\boldsymbol{A}$, 其 m $(0 \le m \le n)$ 元子集有C_n^m个, 故不同子集总数为

$$\mathrm{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{0}}+\mathrm{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{1}}+\cdots+\mathrm{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{2}^{\boldsymbol{n}}$$

定义 全集

- 在一个具体问题中，如果所涉及的集合都是某个集合的子集，则称这个集合为全集，记作E(或U).

- 注意：全集是个相对性概念，由于所研究的问题不同，所取的全集也不同.

集合基本运算

- 集合运算指以集合作为运算对象，结果还是集合的运算

1) 并集 (**union**)

定义：$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$

例如：$\{1,2,5\} \cup \{1,3,4\} = \{1,2,3,4,5\}$

2) 交集 (**intersection**)

定义：$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$

例如：$\{1,2,5\} \cap \{2,3\} = \{2\}$

集合基本运算

3) 相对补集 (差集, difference)

定义： $A-B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$

例如： {1,2,5}-{1,3,4}={2,5}

4) 绝对补集 (补集, complement)

定义： $\sim A = E - A = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A\}$

或： $\sim A = \{x \mid x \notin A\}$

例如： $E = \{0,1,2,3\}$, $A = \{0,1,2\}$, $\sim A = \{3\}$

集合基本运算

5) 对称差 (symmetric difference)

定义： $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

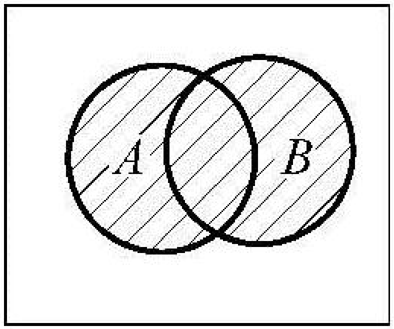
$= (A \cup B) - (A \cap B)$

例如： $A = \{0,1,2\}$, $B=\{2,3\}$.

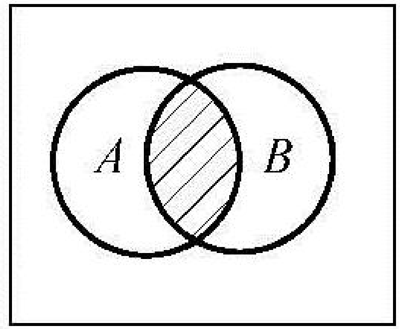
$A \oplus B = \{0,1\} \cup \{3\} = \{0,1,3\}$

$= \{0,1,2,3\} - \{2\} = \{0,1,3\}$.

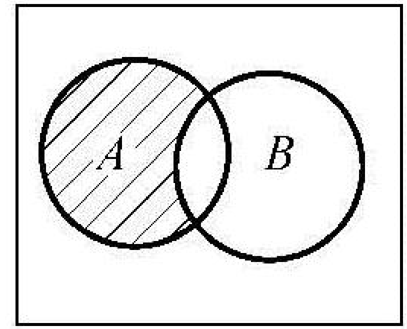
文氏图（ Venn Diagram ）



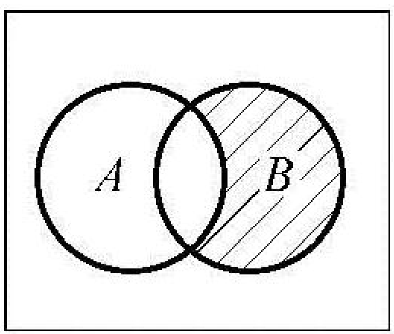
$A\cup B$



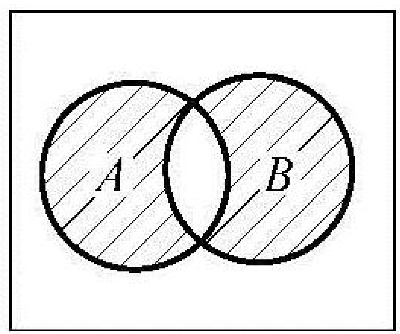
$A\cap B$



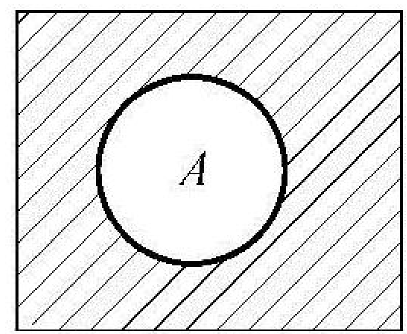
$A-B$



$B-A$



$A\oplus B$



$\sim A$

集合运算示例

F:一年级大学生的集合　S：二年级大学生的集合

R：计算机系学生的集合　M：数学系学生的集合

T：选修离散数学的学生的集合

L：爱好文学学生的集合　P：爱好体育运动学生的集合

所有计算机系二年级学生都选修离散数学

数学系一年级的学生都没有选修离散数学

数学系学生或爱好文学或爱好体育运动

只有一、二年级的学生才爱好体育运动

除去数学和计算机系二年级学生外都不选修离散数学

$T \subseteq (M \cup R) \cap S$

$R \cap S \subseteq T$

$(M \cap F) \cap T = \varnothing$

$M \subseteq L \cup P$

$P \subseteq F \cup S$

关于运算的说明

- 并集和交集的推广

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\}$

$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n\}$

例如：

$\{0, 1\} \cup \{1, 2\} \cup \{ \{0, 1\}, \{1, 2\} \} =$

$\{0, 1, 2, \{0, 1\}, \{1, 2\}\}$

$\{0, 1\} \cap \{1, 2\} \cap \{\{0, 1\}, \{1, 2\}\} = \varnothing$

集合运算优先顺序

- 称幂集，绝对补运算($P(A)$, $\sim A$)为一类运算；
- 并，交，对称差，相对补运算($\cup$, $\cap$, $\oplus$, $-$)为二类运算 。

❖ 一类运算优先于二类运算；

❖ 二类运算优先于集合关系运算($=$, $\subseteq$, $\subset$, $\in$)；

❖ 同时，上述集合运算优先于逻辑运算($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$)。

❖ 括号内优先于括号外的；同一层括号内，相同优先级的，按从左到右的顺序进行。

集合运算的算律

- 幂等律：$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$
- 交换律：

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

- 结合律：

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- 分配律：

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

集合运算的算律

- 同一律：$A \cup \varnothing = A \quad A \cap E = A$
- 零律：$A \cap \varnothing = \varnothing \quad A \cup E = E$
- 排中律：$A \cup \sim A = E$
- 矛盾律：$A \cap \sim A = \varnothing$
- 吸收律：$A \cup (A \cap B) = A$

  $A \cap (A \cup B) = A$
- 双重否定律：$\sim\sim A = A$

集合运算的算律

- **德·摩根律：**

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$$

$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$$

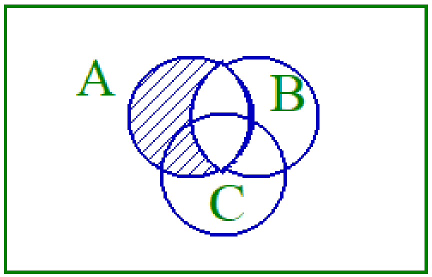
$$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$$

$$\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$$

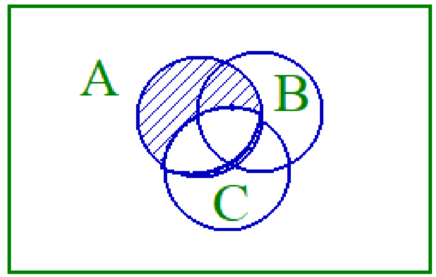
$$\sim\varnothing=E$$

$$\sim E=\varnothing$$

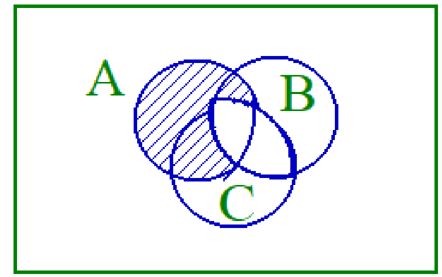
- $A - (B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$



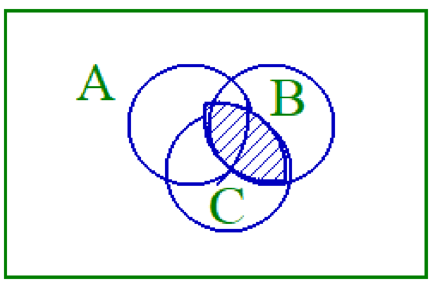
$A-B$



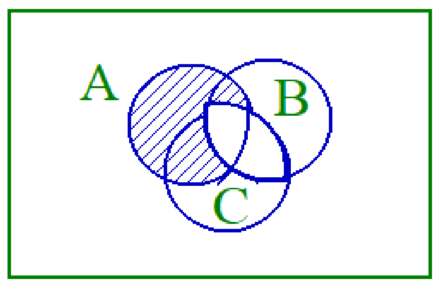
$A-C$



$(A-B) \cup (A-C)$



$B \cap C$



$A-(B \cap C)$

命题演算法证明恒等式：

欲证 $P = Q$, 即证 $P \subseteq Q \wedge Q \subseteq P$,

即对于任意的 x, 有

$$x \in P \Rightarrow x \in Q \text{ 和 } x \in Q \Rightarrow x \in P,$$

也就是

$$x \in P \Leftrightarrow x \in Q.$$

- 证明 $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$
- 证：对任意x，$x\in A-(B\cap C)$

$$\Leftrightarrow x\in A \wedge x\notin B\cap C$$

$$\Leftrightarrow x\in A \wedge \neg(x\in B\cap C)$$

$$\Leftrightarrow x\in A \wedge \neg(x\in B \wedge x\in C)$$

$$\Leftrightarrow x\in A \wedge (\neg x\in B \vee \neg x\in C)$$

$$\Leftrightarrow (x\in A \wedge \neg x\in B) \vee (x\in A \wedge \neg x\in C)$$

$$\Leftrightarrow x\in A-B \vee x\in A-C$$

$$\Leftrightarrow x\in (A-B)\cup(A-C)$$

常用集合运算性质

- $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$
- $A \subseteq A \cup B$, $A \subseteq A \cup B$
- $A - B \subseteq A$
- $A - B = A \cap \sim B$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \varnothing$

常用集合运算性质

- $A \oplus B = B \oplus A$
- $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
- $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$
- $A \oplus \varnothing = A \quad A \oplus A = \varnothing$
- $A \oplus B = A \oplus C \Rightarrow B = C$

例1：试证明 $(A - B) \cup B = A \cup B$

证明：$(A - B) \cup B = (A \cap \sim B) \cup B$

$= (A \cup B) \cap (\sim B \cup B)$

$= (A \cup B) \cap E$

$= A \cup B$

例2：已知 $A \subseteq B$，证明：$\sim B \subseteq \sim A$.

证明：由 $A \subseteq B$，得 $B \cap A = A$，由德·摩根律：

$\sim B \cup \sim A = \sim (B \cap A) = \sim A$,

于是可得 $\sim B \subseteq \sim A$

- 利用包含的等价条件证 $X \subseteq Y$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \varnothing$$

例3 证明 $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

证明: $A \subseteq C \Rightarrow A \cup C = C$

$B \subseteq C \Rightarrow B \cup C = C$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup C = C$

$(A \cup B) \cup C = C \Leftrightarrow A \cup B \subseteq C$

命题得证

❑ 由已知等式通过运算产生新的等式

$X=Y \Rightarrow X \cap Z=Y \cap Z,\ X \cup Z=Y \cup Z,\ X-Z=Y-Z$

例4 证明 $A\cap C=B\cap C \wedge A\cup C=B\cup C \Rightarrow A=B$

证：由 $A \cap C=B \cap C$ 和 $A \cup C=B \cup C$ 得到

$$(A \cup C)-(A \cap C)=(B \cup C)-(B \cap C)$$

从而有 $A\oplus C=B\oplus C$

因此,

$$(A\oplus C)\oplus C = (B\oplus C)\oplus C$$

$$\Rightarrow A\oplus(C\oplus C) =B\oplus(C\oplus C) \Rightarrow A\oplus\varnothing=B\oplus\varnothing \Rightarrow A=B$$

集合运算的算律

	∪	∩	⊕
交换	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	$A\oplus B=B\oplus A$
结合	$(A\cup B)\cup C=$ $A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=$ $A\cap(B\cap C)$	$(A\oplus B)\oplus C=$ $A\oplus(B\oplus C)$
幂等	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$	

	∪与∩	∩与⊕
分配	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
吸收	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	

集合运算的算律

	$-$	$\sim$
德·摩根律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双重否定		$\sim\sim A=A$

	$\varnothing$	E
排中律 矛盾律	$A\cap\sim A=\varnothing$	$A\cup\sim A=E$
零律	$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
否定	$\sim\varnothing=E$	$\sim E=\varnothing$

集合的计数

北京邮电大学 Beijing University of Posts and Telecommunications

定义 集合A的基数

- 集合中的元素个数称为集合A的基数（**cardinality**），记作card A 或 $|A|$.
- 若存在自然数 n, 使得 card A = $|A|$ = n, 则称 A 为有限集，否则称 A 为无限集.

❖ 有穷集的实例：

- $A=\{a, b, c\}$, card A = $|A|$ = 3;
- $B=\{ x \mid x^2+1=0, x\in R\}$, card B = $|B|$ = 0.

❖ 无穷集的实例：N, Z, Q, R, C 等

集合的计数

例5 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被 5 和6 整除，也不能被 8 整除的数有多少个?

解：$S=\{x \mid x\in Z, 1\le x \le 1000\}$，定义 S 的 3 个子集 A, B, C 分别为S 中可被5、6或8整除的数的集合. 于是:

$|S|=1000$,

$|A|=\lfloor 1000/5 \rfloor=200$,

$|B|=\lfloor 1000/6 \rfloor=133$,

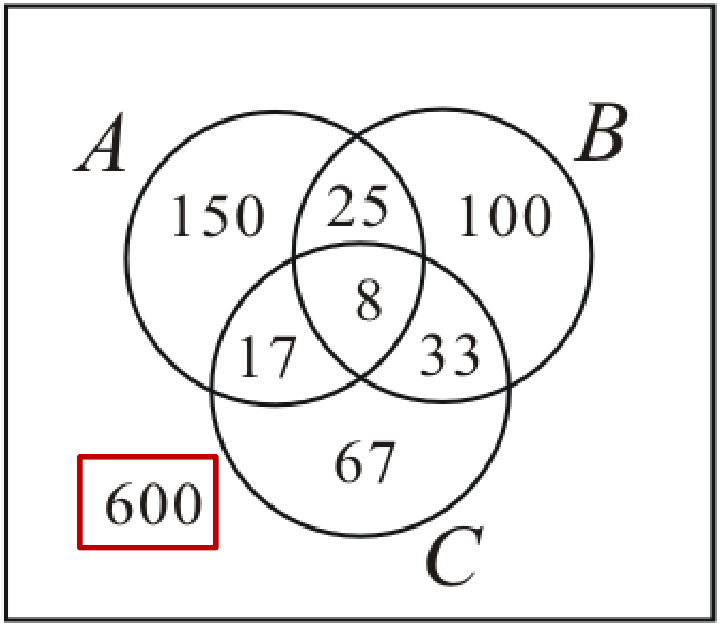
$|C|=\lfloor 1000/8 \rfloor=125$,

$|A\cap B|=\lfloor 1000/30 \rfloor=33$,

$|A\cap C|=\lfloor 1000/40 \rfloor=25$,

$|B\cap C|=\lfloor 1000/24 \rfloor=41$,

$|A\cap B\cap C|=\lfloor 1000/120 \rfloor=8$,



集合的计数

- $S=\{x \mid x\in Z, 1\le x \le 1000\}$，定义 S 的 3 个子集 A, B, C分别为S 中可被5、6或8整除的数的集合.

$|S|=1000$, $|A|=200$, $|B|=133$, $|C|=125$, $|A\cap B|=33$,

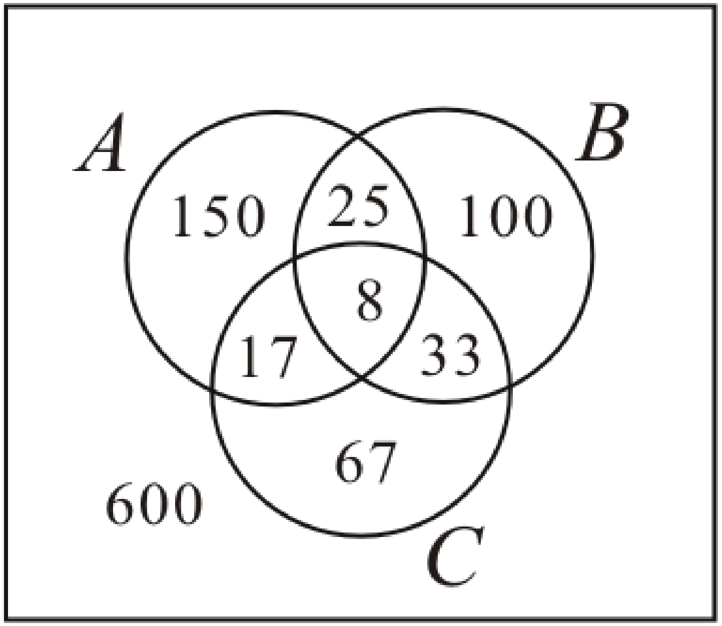
$|A\cap C|=25$, $|B\cap C|=41$, $|A\cap B\cap C|=8$,

既不能被 5 和6 整除，也不能被 8 整除的数有：

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}| = |S| - (|A|+|B|+|C|) + |A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C| - |A\cap B\cap C|$$

$$= 1000-(200+133+125)+(33+25+41)-8$$

$$= 600$$



包含排斥原理

定理

- 设 S 为有穷集，$P_1, P_2, \ldots, P_m$ 是 m 种性质，A_i 是 S 中具有性质 P_i 的元素构成的子集, $i = 1, 2, \ldots, m$, 则 S 中不具有性质 $P_1, P_2, \ldots, P_m$ 的元素数为

$$
\begin{aligned}
&|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_m}| \\
&= |S| - \sum_{i=1}^{m} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots \\
&+ (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|
\end{aligned}
$$

- 证明要点：任何元素 x，如果不具有任何性质，则对等式右边计数贡献为 1，否则为 0.

证明： 设 x 不具有性质 $P_1, P_2, \ldots, P_m$,

$x \notin A_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$

$x \notin A_i \cap A_j$, $1 \le i < j \le m$

$\ldots$

$x \notin A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m$,

x 对右边计数贡献为

$$1 - 0 + 0 - 0 + \ldots + (-1)^m \cdot 0 = 1$$

证明(续)：设 x 具有 n 条性质，$1 \le n \le m$

x 对 $|S|$ 的贡献为 1

x 对 $\sum_{i=1}^{m} |A_i|$ 的贡献为 C_n^1

x 对 $\sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j|$ 的贡献为 C_n^2

….

x 对 $|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$ 的贡献为 C_n^m

x 对右边计数贡献为

$$1 - C_n^1 + C_n^1 - \cdots + (-1)^m C_n^m \ (n \le m)$$
$$= 1 - C_n^1 + C_n^1 - \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$$

包含排斥原理

推论

- S中至少具有一条性质的元素数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m|$$

$$= \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le m} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots$$

$$+ (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

证明：$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m|$

$$= |S| - |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m}|$$

$$= |S| - |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_m}|$$

将包含排斥定理代入即可

例6 欧拉函数：$\phi(n)$ 表示$\{0, 1, \ldots, n-1\}$中与n互素的数的个数. 如 $\phi(12)=4$, 与12互素的数有1, 5, 7, 11.

解：n 的素因子分解式为 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$

令$A_i = \{ x \mid 0 \le x < n-1$ 且 p_i 整除 $x\}$,则 $\phi(n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_k}|$

$$|A_i| = \frac{n}{p_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

$$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}, \quad 1 \le i < j \le n$$

$$\ldots$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k| = \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_k}$$

进而有：

$$
\begin{aligned}
\phi(n) &= |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_k}| \\
&= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \ldots + \frac{n}{p_k}\right) + \left(\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \ldots + \frac{n}{p_{k-1} p_k}\right) \\
&\quad - \ldots + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_k} \\
&= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)
\end{aligned}
$$

- 作业
  - 3.1
  - 3.15
  - 3.16
  - 3.18