第5章 线性方程组

- 存在. ✓
- 个数 ✓
- $AX=b$ 公式 → 方阵. Cramer 法则 ✓
- 解法问题: Gauss 消元
- 解不唯一时: 解之结构. ✓

(一) 齐次方程组: $AX=0$ $A\in M_{m,n}(K)$

1. 存在性 $AX=0$ 一定有解

个数

$AX=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow r(A)=n$

$$[\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow A \text{ 列向量组线性无关}$$

$AX=0$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A)<n$

$\Leftrightarrow$ A 列向量线性相关

2. 解之结构: 若 η_1,η_2 为 $AX=0$ 之解.

则 $A(\eta_1+\eta_2)=A\eta_1+A\eta_2=0+0=0$

故 $\eta_1+\eta_2$ 也为 $AX=0$ 之解

$A(k\cdot\eta_1)=k(A\eta_1)=k\cdot 0=0$

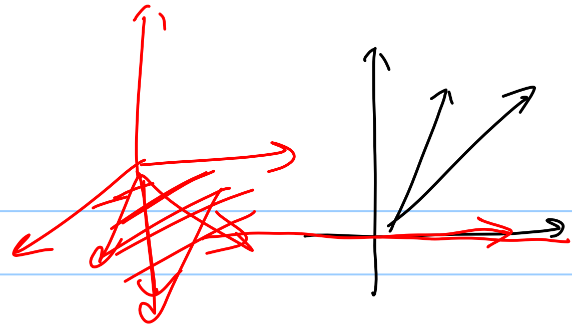
故 $k\eta_1$ 也为 $AX=0$ 之解.

AX=0 解空间

N(A): A 之化零空间

Note: $\underline{\{X\in\mathbb{R}^n \mid AX=0\}}$ 对加法. 数乘封封闭.

($AX=0$ 之解空间是 $\mathbb{R}^n$ 之一个子空间)



3. $AX=0$ $r(A)<n$ 时

基础解系：① $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 为 $AX=0$ 的解

② $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 线性无关

③ $AX=0$ 任何一个解 也可由 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 表出

称 $\eta_1 \cdots \eta_t$ 为 $AX=0$ 之基础解系

($\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 为 $N(A)$ 一组基).

定理：$A \in M_{m,n}(K)$ $r(A)=r<n$

则 $AX=0$ 之基础解系中 有 $\underline{(n-r)}$ 个向量.

证明：

$$A \longrightarrow \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} \\ & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} \\ & & \ddots & c_{rr} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad c_{ii} \neq 0 . \ (i=1,2\cdots r).$$

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n = 0 \\ \quad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n = 0 \\ \quad \cdots \\ \quad c_{rr}x_r + c_{r\,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r = -c_{1\,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n \\ \quad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r = -c_{2\,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n \\ \quad \cdots \\ \quad c_{rr}x_r = -c_{r\,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n . \end{cases}$$

$$\eta_1=\begin{bmatrix}\vdots\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ \to r+1\\ \\ \\ \to n\end{array}\qquad \eta_2=\begin{bmatrix}\vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ \to r+1\\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\qquad \cdots\cdots \qquad \eta_{n-r}=\begin{bmatrix}\vdots\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ \to r+1\\ \\ \\ \to n\end{array}$$

由上面讲，$\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_{n-r}$ 线性无关、要证 $\eta_1 \cdots \eta_{n-r}$ 也为

$AX=0$ 的解.

下证 $\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_{n-r}$ 可以表出 $AX=0$ 任意一个解

$$\forall \beta=\begin{bmatrix} l_1\\ l_2\\ \vdots\\ l_r\\ l_{r+1}\\ \vdots\\ l_n\end{bmatrix} \text{ 是 } AX=0 \text{ 的解.}$$

令 $\gamma = l_{r+1}\eta_1 + l_{r+2}\eta_2 + \cdots + l_n \eta_{n-r} - \beta$

下证 $\gamma=0$ 由 $A\gamma = 0$. 假设 $\gamma=\begin{bmatrix} d_1\\ d_2\\ \vdots\\ d_r\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n}\\ & c_{22} & \cdots & c_{2r} & c_{2r+1} & \cdots & c_{2n}\\ & & \ddots & & & & \\ & & & c_{rr} & c_{rr+1} & \cdots & c_{rn}\\ 0 & & & & & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1\\ d_2\\ \vdots\\ d_r\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r}\\ & c_{22} & \cdots & c_{2r}\\ & & \ddots & \\ & & & c_{rr}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1\\ d_2\\ \vdots\\ d_r\end{bmatrix}=0$$

$c_{11} \cdots c_{rr} \neq 0$

$\Rightarrow d_1 = d_2 = \cdots = d_r = 0$

$\Rightarrow \gamma = 0$

$\beta = l_{r+1}\eta_1 + l_{r+2}\eta_2 + \cdots + l_n \eta_{n-r}$ 表出

$\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_{n-r}$ 为 $AX=0$ 之基础解系

例：
$$\begin{cases} x_1+3x_2-5x_3-x_4+2x_5=0 \\ 2x_1+6x_2-8x_3+5x_4+3x_5=0 \\ x_1+3x_2-3x_3+6x_4+x_5=0 \end{cases}$$

解：
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -8 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & \boxed{-5} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

过去：
$$\begin{cases} x_1 = -3k_1 - \frac{33}{2}k_2 + \frac{1}{2}k_3 \\ x_2 = k_1 \\ x_3 = -\frac{7}{2}k_2 + \frac{1}{2}k_3 \\ x_4 = k_2 \\ x_5 = k_3 \end{cases}$$

现在：
$$X = k_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -\frac{33}{2} \\ 0 \\ -\frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ ✓

$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$

(二) 非齐次方程组.

1. $AX=\beta \; (\beta \neq 0)$ $\quad A=[\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n]$

$\underline{AX=\beta}$ 有解 $\Leftrightarrow$ $\underline{x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n}=\beta$

$\Leftrightarrow$ β 可由 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 表出

$\Leftrightarrow$ $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 与 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n, \beta$ 等价.

$\Leftrightarrow$ $r(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n) = r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta)$

$\Longleftrightarrow r(A) = r(A \vdots \beta)$

Note: 等价的向量组有相同的秩.

$\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 与 $\beta_1 \cdots \beta_t$ 等价.

$\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 的极大无关组 与 $\beta_1 \cdots \beta_t$ 极大无关组等价

$p \qquad r$

$AX = \beta$ 有解 $\Longleftrightarrow r(A) = r(A \vdots \beta)$

当 $r(A) = r(A \vdots \beta) = n$ 时 $AX = \beta$ 有唯一解.

$< n$ 时 $AX = \beta$ 有无穷多解.

证: 当 $r(A) = r(A \vdots \beta)$ 时 $AX = \beta$ 有解

即 β 可由 $\alpha_1 . \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 表出.

又 $r(A) = n$ 则 $\alpha_1 . \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 线性无关

β 可由 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 唯一表出.

若不然 $\beta = l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + \cdots + l_n \alpha_n$

$= k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_n \alpha_n$

$\Rightarrow (l_1 - k_1)\alpha_1 + (l_2 - k_2)\alpha_2 + \cdots + (l_n - k_n)\alpha_n = \theta$

$\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 无关 $l_1 - k_1 = l_2 - k_2 = \cdots = l_n - k_n = 0$

当 $r(A)=r(A\vdots\beta)<n$ 时.

β 可由 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 表出

$$\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_n\alpha_n$$

由于 $r(A)<n$ 故 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性相关.

存在不全为0的 $k_1\cdots k_n$. s.t

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=\theta$$

故 $\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_n\alpha_n+t\theta \quad t\in\mathbb{R}$

$=(l_1+tk_1)\alpha_1+(l_2+tk_2)\alpha_2+\cdots+(l_n+tk_n)\alpha_n$

$AX=\beta$ 有无穷多解 $\quad t\in\mathbb{R}$

$AX=\beta$ 有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A\vdots\beta)=n$ 有唯一解

$<n$ 有无穷多解.

2. 解的结构: $\eta_1.\ \eta_2$ 均为 $AX=\beta$ 的解

则 (1) $A(\eta_1+\eta_2)=A\eta_1+A\eta_2=\beta+\beta=2\beta$

(2) $A(k\eta_1)=kA\eta_1=k\beta$

(3) $A(\eta_1-\eta_2)=A\eta_1-A\eta_2=\beta-\beta=\theta$

当 $r(A)=r(A\vdots\beta)<n$ 时: $AX=\beta$ 有无穷多解

$AX=0$ 有无穷多解.

设 X_0 为 $AX=\beta$ 之解　$AX=\beta$.　$AX_0=\beta$

$$\Rightarrow \quad A(X-X_0)=AX-AX_0=\beta-\beta=\theta$$

$X-X_0$ 为 $AX=0$ 解

$$X-X_0=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$$

$$X=X_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}.$$

非齐次方程组通解 $=$ 齐次方程组通解加上非齐次方程组之一个特解

例:
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2 \end{cases}$$

解:
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$X=k_1\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$