Note Title 2017/12/22

例1: $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ $\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ $\alpha_3=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$

$\mathcal{L}(\alpha_1\cdots\alpha_s)=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s \mid k_1\cdots k_s\in\mathbb{R}\}$

$\mathcal{L}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\mathcal{L}(\alpha_1,\alpha_2)$ $\dim\mathcal{L}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$

α_1,α_2 为一组基.

例2: $A\in M_{m,n}(K)$ $A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)$

$N(A)=\{X \mid X\in\mathbb{R}^n,\ AX=0\}$

$R(A)=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n \mid k_1\cdots k_n\in\mathbb{R}\}$

A的列空间 $=\mathcal{L}(\underline{\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n})$

X_0 为 $AX=0$ 的解 $\Leftrightarrow$ $X_0\in N(A)$

$AX=\beta$ 有解 $\Leftrightarrow$ $\beta\in R(A)$

例: $A=\begin{bmatrix}1&0&1&2\\1&1&2&5\\0&2&2&6\end{bmatrix}$ 求 $R(A)$ 基与维数. 将其余向量用基表出.

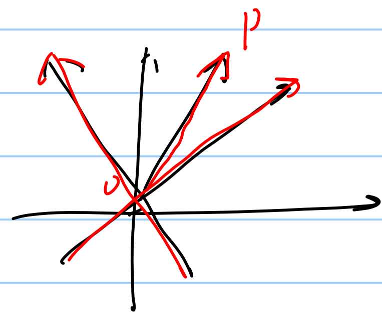
$$\begin{array}{cccc}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4\end{array}$$

$$A\to\begin{bmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&3\\0&2&2&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

α_1,α_2 为基

$\dim R(A)=2$ $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$. $\alpha_4=2\alpha_1+3\alpha_2$

第六章. 特征值与特征向量.



$\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$: 旋转矩阵.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}}$$

- AX 表示的几何意义：旋转加伸缩

図形变换
- 平移 ✓
- 伸缩
- 对称。
- 旋转
- 翻折。

1.定义：$A \in M_n(\mathbb{R})$. 若 $\exists \lambda \in \mathbb{C}$

$\xi \in \mathbb{C}^n$ 使 $A\xi = \lambda\xi$，则称

$\xi \neq 0$

λ 是 A 的特征值. ξ 是对应于特征 λ 的特征向量.

Note: $\xi \neq 0$

① $A\xi = \lambda\xi$. $\xi \neq 0$. $A\eta = \lambda\eta$ $\eta \neq 0$

$A(\xi+\eta) = A\xi + A\eta = \lambda\xi + \lambda\eta = \lambda(\xi+\eta)$

$A(k\xi) = kA\xi$.

② 对应于 λ 的全体特征向量 + 零向量 构成了

$\mathbb{R}^n$ 的一个子空间.

2. 如何求特征值. 如何求特征向量.

$A\xi = \lambda\xi$. $\xi \neq 0$

$\underline{(\lambda I - A)}\xi = 0$ 即 $(\lambda I - A)X \Rightarrow$ 存在非

零解. $|\lambda I - A| = 0$.
$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \\ -a_{n1} & \cdots & & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

称 $f_A(\lambda) = |\lambda I - A|$ 为 A 的特征多项式.

Note: ① A 与 A^T 特征值相同.

$$|\lambda I - A| = |\lambda I - A^T| = 0.$$

② A 不可逆 $\Leftrightarrow$ $r(A) < n$ $\Leftrightarrow$ $|A| = 0$ $\Leftrightarrow$ $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 相关

(方阵) $\Leftrightarrow$ A 存在零特征值.

③ 当 A 可逆时. 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$

则 A^{-1} 的特征值为 $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \cdots \frac{1}{\lambda_n}$.

$$A\xi_1 = \lambda_1 \xi_1 \quad A\xi_2 = \lambda_2 \xi_2 \cdots \quad A\xi_n = \lambda_n \xi_n$$

$$\xi_1 = \lambda_1 A^{-1} \xi_1 \quad \xi_2 = \lambda_2 A^{-1} \xi_2 \cdots \quad \xi_n = \lambda_n A^{-1} \xi_n$$

$$A^{-1}\xi_1 = \frac{1}{\lambda_1}\xi_1, \quad A^{-1}\xi_2 = \frac{1}{\lambda_2}\xi_2 \cdots, \quad A^{-1}\xi_n = \frac{1}{\lambda_n}\xi_n$$

对应的特征向量相同.

例: 已知 0 为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$ 特征值. 求 A 的特征值

及特征向量.

解: $$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-a \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-a \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda-2)\left[\lambda^2-(a+1)\lambda+a-1\right]=0$$

$\lambda=0$ 是特征值. $a=1$.

$$(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda)=0 \qquad \lambda(\lambda-2)^2=0$$

$\lambda_1=0$, $\lambda_2=\lambda_3=2$. (二重根)

$A\xi=\lambda\xi$ ① $\lambda=0$. $AX=0X=0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad X=k\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$k\in\mathbb{R}$. $k\neq 0$.

② $\lambda=2$ 时 $AX=2X$

$$(A-2I)X=0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{-1} \end{bmatrix} X=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad X=k_1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

k_1. k_2 不同时为零

例: $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}=0 \qquad (\lambda-1)^2=0 \quad \lambda_1=\lambda_2=1.$$

1 是 A 的 2 重特征值.

$$(A-I)X=0 \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=0 \qquad X=k\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $f_A(\lambda)=0$ 中，$\lambda=\lambda_0$ 为根，λ_0 的重数称为特征值 λ_0 的代数重数

- 对应于特征值 λ 的线性无关的特征向量的个数称为 λ 的几何重数.

- 几何重数 $\leq$ 代数重数

例 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$ 的特征值为 $a_{11}, a_{22} \cdots a_{nn}$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & & \cancel{*} \\ & \lambda-a_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

- 特征值的重要性质：① $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = tr(A)$ 迹

② $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$ （韦达定理）

- 韦达定理：$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0 = 0$ ($a_i \in \mathbb{R}$ $a_n \neq 0$) 有复数域内有 n 个根 $z_1, z_2 \cdots z_n$（重根重计）

则

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 = a_n(x-z_1)(x-z_2)\cdots(x-z_n)$$

$$a_{n-1} = a_n(-z_1-z_2-\cdots-z_n)$$

$$a_{n-2} = a_n \sum_{1\leq i<j\leq n} z_i z_j$$

$$a_0 = a_n (-1)^n z_1 z_2 \cdots z_n$$

$$|\lambda I - A| = 0 = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (*)$$

$$= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

λ^{n-1} 系数:

$$-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}) = -(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)$$

$$\Rightarrow \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$(*)$ 中令 $\lambda=0$. $\quad \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |A|$

例1: $A^2=A$. 求 A 特征值.

解: $A^2-A=0$ 设 λ 为 A 特征值. X 为其对应之特征向量.

$$AX = \lambda X \qquad A\cdot AX = \lambda\cdot(AX)$$

$$A^2X = \lambda^2 X$$

$$(A^2-A)X = (\lambda^2-\lambda)X$$

即 $(\lambda^2-\lambda)X = 0 \qquad \lambda^2-\lambda=0 \qquad \lambda=0$ 或 1

例：A为3阶矩阵，特征值为1，2，-1.

求 A^3-5A^2 特征值. $2I-A$ 特征值.

解：$AX=\lambda X \Rightarrow A^2X=\lambda^2X$

$A^3X=\lambda^3X$

$(A^3-5A^2)X=(\lambda^3-5\lambda^2)X$