特征值、特征值：$A\in M_n(K)$. $|\lambda I-A|$ 特征多项式

Note Title 2017/12/29

$|\lambda I-A|=0$ 特征值　$A\xi=\lambda\xi$. $\xi\neq 0$ 特征向量.

① $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=tr(A)$

② $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$

例：A 是 n 阶特征值为 $\underline{\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n}$ 求 $|2I-A|$.

$A\xi=\lambda\xi$. $(2I-A)\xi=2\xi-\lambda\xi$

$=(2-\lambda)\xi$.

$2I-A$ 特征值为 $2-\lambda_1$、$2-\lambda_2\cdots$ $2-\lambda_n$.

$|2I-A|=(2-\lambda_1)(2-\lambda_2)\cdots(2-\lambda_n)$.

相抵：A 可以经过一系列初等变换变为 B.

称 A.B 等价（相抵）

A.B 相抵 $\Leftrightarrow$ $r(A)=r(B)$.

∃可逆阵 P.Q.　$PAQ=B$

相似关系：$A.B\in M_n(K)$ 若∃可逆矩阵 P

使 $P^{-1}AP=B$ 则称 A.B 相似

① 反身性: $A = I^{-1} A I$

② 对称性: $P^{-1}AP = B$. $\qquad A = \underline{\underline{P}}\, B\, \underline{\underline{P^{-1}}}$

③ 传递性: $P^{-1}AP = B$. $\qquad Q^{-1}BQ = C$

$$\Rightarrow \quad Q^{-1}P^{-1}APQ = C$$

$$(PQ)^{-1}A(PQ) = C$$

Note: 为何引入相似? $\quad A^n$.

$$A = P^{-1}BP \qquad A^2 = P^{-1}B\underline{\underline{P \cdot P^{-1}}}BP$$

$$= P^{-1}B^2P$$

$$A^n = P^{-1}B^nP.$$

希望B简单一些，最好是对角阵

$$\underline{\underline{P^{-1}}}AP = B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$AP = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$P = [\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n] \qquad AP = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$A[\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n] = [\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$A\xi_1 = \lambda_1 \xi_1 \quad A\xi_2 = \lambda_2 \xi_2 \cdots \quad A\xi_n = \lambda_n \xi_n$

相似的性质：① 相似矩阵特征值相同.

（相似矩阵的特征多项式相同）. $P^{-1}AP = B$

$$|\lambda I - B| = |\lambda I - P^{-1}AP|$$
$$= |\lambda P^{-1}IP - P^{-1}AP|$$
$$= |P^{-1}(\lambda I - A)P|$$
$$= |P^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |P|$$
$$= |\lambda I - A|.$$

② 相似矩阵有相同的迹、行列式

例：$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. A、B相似，则 $trB = 6$

例：$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ $B = P^{-1}AP$

求 A^{100}.

解：

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A = P \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

$$A^2 = P \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$A^3 = P \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}$$

$\vdots$

$$A^{100} = \underline{\underline{P \begin{bmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}} P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \checkmark$$

2. 方阵的对角化.

$|\lambda I - A| = 0$. $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

$\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n$.

$A\xi_1 = \lambda_1 \xi_1 \quad A\xi_2 = \lambda_2 \xi_2 \cdots \quad A\xi_n = \lambda_n \xi_n$

$$A\underbrace{[\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n]}_{P} = [\lambda_1 \xi_1, \lambda_2 \xi_2 \cdots \lambda_n \xi_n]$$

$$= \underbrace{[\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n]}_{P} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$AP = P\Lambda$$ (对角阵)

若 P 可逆　$A = P \Lambda P^{-1}$

A 与对角阵 Λ 相似.

$A^n = P \Lambda^n P^{-1}$.

Note: P 有可能可逆. 有可能不可逆.

什么情况 P 可逆?

定理: $A \in M_n(K)$　A 可对角化 当且仅当

(相似于对角阵)

A 有 n 个线性无关的特征向量.

定理: 属于不同特征值的特征向量是线性无关.

证: 设 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_k$ 是 A 的 k 个不同的特征值

$\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_k$ 是其对应的特征向量.

$k=1$ 时　$\xi_1 \neq 0$ 显然线性无关.

假设 $k-1$ 的情形时结论成立. 下证 k 时结论成立.

$$\boxed{l_1 \xi_1 + l_2 \xi_2 + \cdots + l_k \xi_k = \theta} \quad (*)$$

左乘 A: $l_1 \lambda_1 \xi_1 + l_2 \lambda_2 \xi_2 + \cdots + l_k \lambda_k \xi_k = \theta$

$\downarrow\ l_1\lambda_1\xi_1 + l_2\lambda_1\xi_2 + \cdots + l_k\lambda_1\xi_k = \theta$

$l_2(\lambda_2-\lambda_1)\xi_2 + l_3(\lambda_3-\lambda_1)\xi_3 + \cdots + l_k(\lambda_k-\lambda_1)\xi_k = \theta$

由归纳假设 $\xi_2, \xi_3, \cdots \xi_k$ 线性无关，则

$l_2(\lambda_2-\lambda_1)=0,\ l_3(\lambda_3-\lambda_1)=0 \cdots\quad l_k(\lambda_k-\lambda_1)=0$

由于 $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow l_2 = l_3 = \cdots = l_k = 0$ 由(*)式

$l_1 = 0$ 即 $\xi_1 \cdots \xi_k$ 线性无关、

例：由上一节例子.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 0 \quad \xi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{2,3} = 2 \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ \xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$A\xi_1 = \lambda_1\xi_1 \quad A\xi_2 = \lambda_2\xi_2. \quad A\xi_3 = \lambda_3\xi_3$

$$A[\xi_1\ \xi_2\ \xi_3] = [\xi_1\ \xi_2\ \xi_3]\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$= [\xi_1\ \xi_2\ \xi_3]\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

由于 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关. 故 $P = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]$ 可逆.

即 A 可以相似对角化.

推论1：若 A 有 n 个不同的特征值，则 A 可以对角化.

情况2：若A有重特征值，且每一个重特征值的代数重数等于几何重数，则A可以对角化

例：$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ 是否可以对角化：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

$\lambda_1=1$ (2重)　　$\lambda_2=2$ (1重)

$\lambda=1$ 时　$(I-A)X=0$

$$\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\quad X=k\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

例：$A=\begin{bmatrix}3&-1&-2\\2&0&-2\\2&-1&-1\end{bmatrix}$ A是否可以对角化

$$|\lambda I-A|=\underbrace{\begin{vmatrix}\lambda-3&1&2\\-2&\lambda&2\\-2&1&\lambda+1\end{vmatrix}}=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&2\\0&\lambda&2\\\lambda-1&1&\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&1&2\\0&\lambda&2\\1&1&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&1&2\\0&\lambda&2\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$=(\lambda-1)^2\lambda$,　　$\lambda_1=0$ (1重)　$\lambda_2=\lambda_3=1$ (2重)

$\lambda=1$ 时 $(I-A)X=0$ $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} X = 0$

$r(I-A)=1$ $X = k_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda=0.$ $(0-A)X=0$

$AX=0$ $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\xi_1 = k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

令 $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 则 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$