第二章 一阶逻辑

一阶逻辑等值式与前束范式

郝杰
haojie@bupt.edu.cn
北京邮电大学信息安全中心

等值式

定义 等值式

- 设A、B是一阶逻辑中的两个公式，若$A \leftrightarrow B$为逻辑有效式，则称A与B是等值的，
- 记作 $A \Leftrightarrow B$，并称$A \Leftrightarrow B$为等值式.

等值式

- **命题逻辑中基本等值式的代换实例**
  - $\forall xF(x) \to \exists yG(y) \Leftrightarrow \neg\forall xF(x) \lor \exists yG(y)$
  - $\neg(\forall xF(x) \lor \exists yG(y)) \Leftrightarrow \neg\forall xF(x) \land \neg\exists yG(y)$
  - 等等
- **消去量词等值式**

  对于有限个体域 $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

  - $\forall xA(x) \Leftrightarrow A(a_1) \land A(a_2) \land \ldots \land A(a_n)$
  - $\exists xA(x) \Leftrightarrow A(a_1) \lor A(a_2) \lor \ldots \lor A(a_n)$

定理 量词否定等值式

- 设$A(x)$是任意的公式
  - $\neg\forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$
  - $\neg\exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$

等值式

- 个体域为有限集 $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ 时
  - $\neg\forall x A(x) \Leftrightarrow \neg(A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots \wedge A(a_n))$
    $\Leftrightarrow \neg A(a_1) \vee \neg A(a_2) \vee \ldots \vee \neg A(a_n)$
    $\Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$
  - $\neg\exists x A(x) \Leftrightarrow \neg(A(a_1) \vee A(a_2) \vee \ldots \vee A(a_n))$
    $\Leftrightarrow \neg A(a_1) \wedge \neg A(a_2) \wedge \ldots \wedge \neg A(a_n)$
    $\Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$

等值式

定理 量词辖域收缩与扩张等值式(1)

- 设$A(x)$是含x自由出现的任意公式，而公式B中不含x的自由出现，则关于全称量词：

1) $\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$

2) $\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B$

3) $\forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B$

4) $\forall x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall x A(x)$

等值式

- 个体域为有限集 $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ 时
  - 验证 1) 式：

$$
\begin{aligned}
& \forall x(A(x) \vee B) \\
\Leftrightarrow\ & (A(a_1) \vee B) \wedge (A(a_2) \vee B) \wedge \ldots \wedge (A(a_n) \vee B) \\
\Leftrightarrow\ & (A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots \wedge A(a_n)) \vee B \\
\Leftrightarrow\ & \forall x A(x) \vee B
\end{aligned}
$$

  - 类似可验证 2) 式

$$\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B$$

等值式

- **3) 4)式可由1) 2)式推出**
  - **对于 3) 式:**

$$\forall x(A(x) \rightarrow B)$$

$$\Leftrightarrow \forall x\,(\neg A(x) \vee B) \qquad \text{(蕴含等值式)}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \neg A(x) \vee B \qquad \text{(量词辖域收缩)}$$

$$\Leftrightarrow \neg \exists x A(x) \vee B \qquad \text{(量词否定等值式)}$$

$$\Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B \qquad \text{(蕴含等值式)}$$

等值式

- 3) 4)式可由1) 2)式推出
  - 对于 4) 式:

$$\forall x(B \to A(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x(\neg B \vee A(x)) \quad \text{(蕴含等值式)}$$

$$\Leftrightarrow \neg B \vee \forall x A(x) \quad \text{(量词辖域收缩)}$$

$$\Leftrightarrow B \to \forall x A(x) \quad \text{(蕴含等值式)}$$

等值式

定理 量词辖域收缩与扩张等值式(2)

- 设$A(x)$是含x自由出现的任意公式，而公式B中不含x的自由出现，则关于存在量词：

1) $\exists x(A(x) \lor B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \lor B$

2) $\exists x(A(x) \land B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \land B$

3) $\exists x(A(x) \to B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \to B$

4) $\exists x(B \to A(x)) \Leftrightarrow B \to \exists x A(x)$

北京郵電大學 Beijing University of Posts and Telecommunications

定理　量词分配等值式

- 设$A(x)$、$B(x)$是含x自由出现的公式，则：

1) $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$

2) $\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$

等值式

注意：

- ∀对∨无分配律，∃对∧无分配律, 即

  1) $\forall x(A(x) \vee B(x)) \not\Leftrightarrow \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$

  2) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \not\Leftrightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$

等值式

❖ 取谓词公式$F(x)$、$G(x)$分别代替$A(x)$、$B(x)$,

1) $\forall x(F(x) \vee G(x)) \leftrightarrow \forall xF(x) \vee \forall xG(x)$

2) $\exists x(F(x) \wedge G(x)) \leftrightarrow \exists xF(x) \wedge \exists xG(x)$

❖ 取解释 I 为：个体域 D为自然数集，谓词 $F(x)$ 为 x是奇数，$G(x)$为 x是偶数. 此时$\forall x(F(x) \vee G(x))$ 为真，但$\forall xF(x) \vee \forall xG(x)$为假. 故1)式非逻辑有效式.

❖ 在解释 I 下，2)式也为假，故非逻辑有效式.

等值式

定理

- 设$A(x, y)$是含x、y自由出现的谓词公式，则：

1) $\forall x\,\forall y\,A(x, y) \Leftrightarrow \forall y\,\forall x\,A(x, y)$

2) $\exists x\,\exists y\,A(x, y) \Leftrightarrow \exists y\,\exists x\,A(x, y)$

例 将下面命题用两种形式符号化

(1) 没有不犯错误的人

(2) 不是所有的人都爱看电影

解 (1) 令$F(x)$：x是人，$G(x)$：x犯错误.

$$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$$

$$\Leftrightarrow\forall x\neg(F(x)\wedge\neg G(x))$$

$$\Leftrightarrow\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$$

(2) 令$F(x)$：x是人，$G(x)$：爱看电影.

$$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$$

$$\Leftrightarrow\exists x\neg(F(x)\rightarrow G(x))$$

$$\Leftrightarrow\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$$

前束范式

定义 前束范式

- 设 A 为一个一阶逻辑公式, 若 A 具有如下形式

$$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kB\,,$$

则称 A 为前束范式, 其中 $Q_i\,(1\le i\le k)$ 为 $\forall$ 或 $\exists$, B 为不含量词的公式.

前束范式

➢ 判断下列公式是否为前束范式:

1) $\forall x(F(x) \rightarrow \exists y(G(y) \wedge H(x,y)))$

2) $\forall x \exists y(F(x) \rightarrow (G(y) \wedge H(x,y)))$

3) $\neg \exists x(F(x) \wedge G(x))$

4) $\forall x \neg(F(x) \wedge G(x))$

前束范式

定理 前束范式存在定理

- 在一阶逻辑中，任何合式公式 A 都存在与之等值的前束范式，称这样的前束方式为公式 A 的前束范式.

- 求前束范式：使用重要等值式、置换规则、换名规则进行等值演算.

北京郵電大學 Beijing University of Posts and Telecommunications

❑ 换名规则

将一个指导变项及其在量词辖域中的所有约束出现替换成公式中未曾出现过的个体变项符号，公式中其余部分不变，则所得公式与原来的公式等值.

❖ 例如：

- $\forall xF(x) \wedge \forall xG(x) \Leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \forall tG(t)$
- $\forall x(F(x,y,z)) \rightarrow \exists yG(x,y,z))$

$$\Leftrightarrow \forall x(F(x,y,z)) \rightarrow \exists wG(x, w, z))$$

前束范式

例 求下列公式的前束范式

(1) $\neg\exists x(M(x)\wedge F(x))$

解: $\Leftrightarrow \forall x(\neg M(x)\vee\neg F(x))$ (量词否定等值式)

$\Leftrightarrow \forall x(M(x)\rightarrow\neg F(x))$

❖ 两步结果都是前束范式，前束范式不惟一.

前束范式

(2) $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

解: $\Leftrightarrow\forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$ (量词否定等值式)

$\Leftrightarrow\forall x(F(x)\wedge\neg G(x))$ (量词分配等值式)

或

$\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow\forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$ (量词否定等值式)

$\Leftrightarrow\forall xF(x)\wedge\forall y\neg G(y)$ (换名规则)

$\Leftrightarrow\forall x(F(x)\wedge\forall y\neg G(y))$ (量词辖域扩张)

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(F(x)\wedge\neg G(y))$ (量词辖域扩张)

前束范式

(3) $\forall x F(x) \to \exists x G(x)$

解: $\Leftrightarrow \forall x F(x) \to \exists y G(y)$ (换名规则)

$\Leftrightarrow \exists x(F(x) \to \exists y G(y))$ (量词辖域扩张)

$\Leftrightarrow \exists x \exists y\,(F(x) \to G(y))$ (量词辖域扩张)

或 $\forall x F(x) \to \exists x G(x)$

$\Leftrightarrow \neg \forall x F(x) \vee \exists x G(x)$

$\Leftrightarrow \exists x \neg F(x) \vee \exists x G(x)$ (量词否定等值式)

$\Leftrightarrow \exists x(\neg F(x) \vee G(x))$ (量词分配等值式)

前束范式

(4) $\forall x(F(x,y) \rightarrow \exists y(G(x,y) \wedge H(x,z)))$

解: $\Leftrightarrow \forall x(F(x,y) \rightarrow \exists u(G(x,u) \wedge H(x,z)))$ (换名规则)

$\Leftrightarrow \forall x \exists u(F(x,y) \rightarrow G(x,u) \wedge H(x,z)))$ (量词辖域扩张)

❖ 注意:

- 上式中∀与∃不能颠倒顺序
- 前束范式各指导变项应各不相同
- 原公式自由出现的变项仍为自由出现

一阶逻辑

- 证明如下推理：

  所有实数的平方都是非负的.

  π是一个实数.

  π的平方是非负的.

解：令x代表“数”，$f(x)$代表“x的平方”

$F(x)$: x是实数，$G(x)$: x是非负实数，

则推理形式化为：

- 前提：$\forall x(\, F(x) \rightarrow G(f(x))\,)$，$F(\pi)$
- 结论：$G(f(\pi))$

一阶逻辑

北京邮電大學 Beijing University of Posts and Telecommunications

- 令x代表“数”，$f(x)$代表“x的平方”

  $F(x)$: x是实数，$G(x)$: x是非负实数,

  - 前提：$\forall x(F(x) \rightarrow G(f(x)))$，$F(\pi)$
  - 结论：$G(f(\pi))$

证明：① $F(\pi)$

② $\forall x(F(x) \rightarrow G(f(x)))$

③ $F(\pi)\rightarrow G(f(\pi))$

④ $G(f(\pi))$

北京邮电大学
Beijing University of Posts and Telecommunications

- 作业
  - 2.13
  - 2.14
  - 2.15

- 提交时间：

  2018年11月16日