第二章 一阶逻辑

一阶逻辑基本概念、合式公式及其解释

郝杰

haojie@bupt.edu.cn

北京邮电大学信息安全中心

命题逻辑的局限性

- 命题逻辑不能表达所有正确的推理. 例:

  所有实数的平方都是非负的.
  π是一个实数.

  π的平方是非负的.

- 在命题逻辑中，符号化为：$(p \wedge q) \rightarrow r$

  ——推理不正确（非重言式）

一阶逻辑（谓词逻辑）

- 命题逻辑的局限性
- 需要进一步分析推理结构
  - 上述推理中，各命题之间的关系在于简单命题的成分之间
- 需要进一步分解简单命题

一阶逻辑（谓词逻辑）

简单命题的结构

主语	谓语	宾语
↑	↑	↑
讨论对象	对象的性质或关系	讨论对象
↓	↓	↓
个体词(组)	谓词	个体词(组)

分析下列各命题中的个体词和谓词

(1) π是无理数.

(2) 张三与李四同在计算机系.

(3) x 与 y 的和等于 z (x, y, z是确定的数).

(4) π的平方是非负的.

(5) 所有实数的平方都是非负的.

(6) 有一个比2^{1000}大的素数.

(1) π 是无理数.

解:

个体：π（代表圆周率）

谓词：…是无理数，表示“π”的性质.

(2) 张三与李四同在计算机系.

解:

个体：张三与李四

谓词：…与…同在计算机系,

表示“张三”与“李四”之间的关系

个体：张三

谓词：…与李四同在计算机系,

表示“张三”的性质.

个体：李四

谓词：张三与…同在计算机系,

表示“李四”的性质.

(3) x 与 y 的和等于 z (x, y, z是确定的数).

解:

个体: x, y, z

谓词: … 与 … 的和等于 …

个体: x, z

谓词: … 与 y 的和等于 …

个体: y

谓词: x 与 … 的和等于 z

谓词可以表示单个个体的性质，也可以表示两个个体词之间的关系或性质，分别称为一元谓词和二元谓词.

表示 n 个个体之间关系或性质的谓词称为 n 元谓词.

(4) π的平方是非负的.

解:

个体：π

谓词：…的平方是非负的.

个体：π的平方

谓词：…是非负的.

“π的平方”是一个复合个体，可以再分解

个体：π

函数：…的平方

谓词：…是非负的.

(5) 所有实数的平方都是非负的.

解：

个体：每一个实数

函数：…的平方

谓词：…是非负的.

“所有”是什么？怎么表示？

量词：所有

(6) 有一个比2^{1000}大的素数.

解:

个体：一个素数

谓词：…比2^{1000}大

“有一个”是什么？怎么表示？

量词：有一个

- 谓词逻辑：
  - 区分主语、谓语，
  - 引入个体词，谓词、量词
- 可将谓词逻辑理解为

  命题逻辑 + {个体词，谓词，量词，函数}

基本概念——个体词

- 个体词是指所研究对象中可以独立存在的具体的或抽象的客体.
- 在一个命题中，个体词通常是表示讨论对象的词，又称作主词.

基本概念——个体词

- 将表示具体或特定个体的词称作**个体常项**, 用小写字母 $a, b, c,\ldots$表示.
- 将表示抽象或泛指的个体的词称作**个体变项**, 用小写字母 $x, y, z, \ldots$表示.
- 称个体变项的取值范围为**个体域或论域**，以 D 表示.
  - 有限个体域，如 $\{a, b, c\}, \{1, 2\}$
  - 无限个体域，如 N, Z, R, …
- 约定有一个特殊的个体域，它由宇宙间一切事物组成，称之为**全总个体域**.

基本概念——谓词

- 谓词是用来刻划个体词的性质或多个个体词间关系的词，如 $F(x)$, $G(x, y)$.
- 表示具体性质或关系的谓词称作谓词常项，如：$F(a)$：a是有理数.
- 表示抽象或泛指的性质或关系的谓词称作谓词变项，如 $F(x)$：x具有性质F.
- 谓词常项与谓词变项都用大写英文字母 F, G, H, R…表示，可根据上下文区分.

基本概念——谓词

- 在一个命题中，如果个体词只有一个，这时表示单个体词性质或属性的词便是一元谓词，以 $F(x)$, $G(x)$, …表示.
- 如果一个命题中的个体词多于一个，则表示这几个个体词间关系的词便是多元谓词，以 $F(x, y)$, $G(x, y, z)$, …等表示.
- 更一般地，用 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 表示含 $n(n\geq 1)$ 个个体变项 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的 n 元谓词.

基本概念——谓词

- 有时将不带个体变项的谓词称作 **0元谓词**。当此时的 0 元谓词又为谓词常项时，0 元谓词即化为命题。
- 因此，**命题逻辑中的命题均可以表示成 0 元谓词**，或认为**一个命题是没有个体变项的 0 元谓词**。

基本概念——量词

量词(Quantifier)

- 表示个体常项或变项之间数量关系的词称为量词。
- 一般将量词分为全称量词和存在量词两种。

基本概念——量词

全称量词 (Universal quantifier)

- 日常生活和数学中常用的“所有的”，“一切的”，“任意的”，“每一个”，“凡”等词可统称为全称量词.
- 将它们符号化为“$\forall$”，如 $\forall xF(x)$ 表示对个体域中所有个体都有性质F.
- 命题$(\forall x)F(x)$为真当且仅当对个体域中的所有x, $F(x)$均为真。

基本概念——量词

存在量词 (Existential quantifier)

- 日常生活和数学中常用的“存在一个”，“有一个”，“有些”，“有的”等词可统称为存在量词.
- 将它们符号化为“$\exists$”，如 $\exists xF(x)$表示在个体域中至少有一个个体具有性质F.
- 命题$(\exists x)F(x)$为真只要在个体域中有一个x 使得$F(x)$为真。

	何时为真	何时为假
$\forall xF(x)$	对个体域中的每个x，$F(x)$都为真	至少存在一个x，使$F(x)$为假
$\exists xF(x)$	个体域中至少有一个x，使$F(x)$为真	对个体域中的每个x，$F(x)$都为假

(1) π 是无理数.

解:

个体：π (代表圆周率)

谓词：…是无理数，以 F 表示.

此命题可表示为 $F(\pi)$

(2) 张三与李四同在计算机系.

解：

个体：张三与李四，分别以 a, b 表示

谓词：…与…同在计算机系：以 G_1 表示

则此命题可表示为：$G_1(a, b)$

个体：张三，以 a 表示

谓词：…与李四同在计算机系：以G_2表示

则此命题可表示为：$G_2(a)$

个体：李四：以 b 表示

谓词：张三与…同在计算机系：以G_3表示

则此命题可表示为：$G_3\ (a)$

(3) x 与 y 的和等于 z (x, y, z是确定的数).

解:

个体: x, y, z

谓词: … 与 … 的和等于 …: 以 R_1 表示

符号化: $R_1(x, y, z)$

个体: x, z

谓词: … 与 y 的和等于 …: 以 R_2 表示

符号化: $R_2(x, z)$

…

个体: x, y, z

函数: … 与 … 的和: 以 f 表示

谓词: … 等于 …: 以 R_3 表示

符号化: $R_3(f(x, y), z)$

(4)π的平方是非负的.

解:

个体：π的平方：以 a 表示

谓词：…是非负的：以 R 表示

符号化： $R(a)$

个体：π

函数：…的平方：以 f 表示

谓词：…是非负的：以 R 表示

符号化： $R(f(\pi))$

(5) 所有实数的平方都是非负的.

解：

个体：每一个实数：以 x 表示

函数：…的平方：以 f 表示

谓词：…是非负的：以 R 表示

量词：所有：以∀表示

符号化： $\forall x R(f(x))$

(6) 有一个比2^{1000}大的素数.

解：

个体：一个素数：以 y 表示

谓词：…比2^{1000}大：以 H 表示

量词：有一个：以∃表示

符号化：$(\exists y)H(y)$

北京邮电大学 Beijing University of Posts and Telecommunications

(7) 所有的人都是要死的.

解:

- 个体域D为人类集合

  符号化：$(\forall x)F(x)$，其中$F(x)$：x是要死的.

- 个体域D为全总体域

  符号化：$(\forall x)(M(x)\rightarrow F(x))$，其中$F(x)$同上,

  $M(x)$:表示 x 是人，称为特性谓词.

(8) 有的人活100岁以上.

解：

- 个体域D为人类集合

  符号化：$(\exists x)\ G(x)$，其中$G(x)$：x活100岁以上.

- 个体域D为全总体域

  符号化：$(\exists x)(M(x) \wedge G(x))$，其中$G(x)$同上,

  $M(x)$:表示 x 是人，称为**特性谓词**.

- 在不同的个体域中，命题符号化的形式可能不同；
- 如果事先没有给出个体域，都应以全总个体域为个体域；
- 引入特性谓词后，使用全称量词和存在量词符号化的形式不同
- 个体为有限集时，如 $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$,由量词的意义可知，对于任意的谓词$A(x)$，都有

$$(\forall x)A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots \wedge A(a_n)$$

$$(\exists x)A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \ldots \vee A(a_n)$$

- 多个量词出现时，不能随意颠倒顺序
  - $\forall x \exists y H(x, y)$，其中$H(x, y)$：$x + y = 5$
  - $\exists y \forall x H(x, y)$，其中$H(x, y)$：$x + y = 5$

一阶逻辑合式公式

定义 字母表

(1) 个体常项：$a, b, c, \ldots, a_i, b_i, c_i, \ldots, i \geq 1$;

(2) 个体变项：$x, y, z, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, i \geq 1$;

(3) 函数符号：$f, g, h, \ldots, f_i, g_i, h_i, \ldots, i \geq 1$;

(4) 谓词符号：$F, G, H, \ldots, F_i, G_i, H_i, \ldots, i \geq 1$;

(5) 量词符号：$\forall, \exists$;

(6) 联结词符号：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$;

(7) 括号与逗号：), (, ,

一阶逻辑合式公式

定义 项

(1) 个体常项和个体变项是项.

(2) 若$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是任意的$n$元函数，$t_1, t_2, \ldots, t_n$是任意的$n$个项，则$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是项.

(3) 有限次使用 (1), (2) 生成的字符串才是项.

项的作用在于描述“复合个体”

一阶逻辑合式公式

定义 原子公式

- 设$R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是任意的n元谓词，$t_1,t_2,\ldots, t_n$是任意的n个项，则称$R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是**原子公式**.

- 原子公式是由**项**组成的**n元谓词**.
- 如 $F(x,y)$, $F(f(x_1,x_2),g(x_3,x_4))$ 等均为原子公式 .

一阶逻辑合式公式

定义 合式公式

(1) 原子公式是合式公式.

(2) 若A是合式公式，则 $(\neg A)$也是合式公式.

(3) 若A, B是合式公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式.

(4) 若A是合式公式，则$\forall xA$, $\exists xA$也是合式公式.

(5) 只有有限次地应用(1)~(4)形成的符号串是合式公式.

合式公式又称为谓词公式，简称公式

项和公式

- 项的作用是描述“复合”个体；而公式的作用在于描述命题.
- “项”相当于“词组”，它们不表达完整的判断；“公式”代表完整的句子，表达判断.

  $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 表示 f 作用到个体$x_1, x_2, \ldots, x_n$得到的复合个体.

  $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 表示$x_1, x_2, \ldots, x_n$具有关系 F（或性质 F）.

自由出现与约束出现

定义

- 在公式$\forall xA$和$\exists xA$中，称x为指导变项，A为相应量词的辖域.
- 在$\forall x$和$\exists x$的辖域中，x的所有出现都称为约束出现，
- A中不是约束出现的其他变项均称为是自由出现.
- 不含自由出现的个体变项的公式称为闭式.

例如, 在公式 $\forall x(F(x,y)\rightarrow G(x,z))$ 中,

$A=(F(x,y)\rightarrow G(x,z))$为$\forall x$的辖域,

x为指导变项, A中x的两次出现均为约束出现,

y与z均为自由出现，故不是闭式.

公式的解释与分类

给定闭式 $A=\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

取个体域 N, $F(x)$: $x>2$, $G(x)$: $x>1$

代入得$A=\forall x(x>2\rightarrow x>1)$ 真命题

给定非闭式 $B=\forall xF(x,y)$

取个体域 N, $F(x,y)$: $x\geq y$

代入得$B=\forall x(x\geq y)$ 不是命题

令$y=1$, $B=\forall x(x\geq 1)$ 假命题

解释和赋值

定义 解释

(a) 非空个体域 D;

(b) 对每一个个体常项 a 指定一个 D 上的元素;

(c) 对每一个函数变项符号 f 指定一个 D 上的函数;

(d) 对每一个谓词变项符号 F 指定一个 D 上的谓词;

- 在给定的解释下, 闭式公式都成为命题.

解释和赋值

定义 赋值

- 给定解释I，对公式中每一个自由出现的命题变项x指定一个值$\sigma(x)\in D_I$, 称作在解释I下的赋值.

- 公式 A 在解释 I 和赋值 σ 下的含义：取个体域 D, 并将公式中出现的a、f、F 分别解释成 $\bar{a}$ 、$\bar{f}$、 $\bar{F}$, 把自由出现的x换成$\sigma(x)$后所得到的命题.
- 在给定的解释和赋值下, 任何公式都成为命题.

例 给定解释I 如下:

(a) 个体域 $D = \mathrm{N}$

(b) $\bar{a} = 2$

(c) $\bar{f}(x, y) = x + y$, $\bar{g}(x, y) = xy$

(d) 谓词 $\bar{F}(x, y): x = y$

以及赋值σ: $\sigma(x)=0$, $\sigma(y)=1$, $\sigma(z)=2$.

说明下列公式在 I 与σ下的涵义,并讨论真值

(1) $\forall xF(g(x, a), y)$

$\forall x(2x = 1)$　　　假命题

(2) $\forall x F(f(x, a), y) \to \forall y F(x, f(y, a)))$

$\forall x(x + 2 = 1) \to \forall y(0 = y + 2)$ 真命题

(3) $\exists x F(f(x, y), g(x, z))$

$\exists x(x+1 = 2x)$ 真命题

(4) $\forall x \forall y \exists z\, F(f(x, y), z)$

$\forall x \forall y \exists z\, (x+y = z)$ 真命题

(5) $\exists x \forall y \forall z\, F(f(y, z), x)$

$\exists x \forall y \forall z\, (y + z = x)$ 假命题

闭式只需要解释, 如(4),(5)

公式的分类

- 永真式(逻辑有效式):在任何解释和赋值下为真命题.
- 矛盾式(永假式):在任何解释和赋值下为假命题.
- 可满足式：存在成真的解释和赋值.

说明:

- 永真式为可满足式，但反之不真.
- 谓词公式的可满足性（永真性,永假性)是不可判定的.

代换

定义

- 设A_0是含命题变项 $p_1, p_2, \ldots, p_n$的命题公式，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是 n 个谓词公式，用 A_i 处处代替 A_0 中的 $p_i\,(1\leq i\leq n)$ ，所得公式A称为A_0的代换实例.

如 $F(x)\rightarrow G(x)$, $\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y)$是 $p\rightarrow q$ 的代换实例.

定理

- 重言式的代换实例都是永真式.
- 矛盾式的代换实例都是矛盾式.

例 判断下列公式的类型

(1) $\forall xF(x)\rightarrow\exists xF(x)$；

设I为任意的解释, 若$\forall xF(x)$为假, 则$\forall xF(x)\rightarrow\exists xF(x)$为真. 若$\forall xF(x)$为真，则$\exists xF(x)$也为真，所以$\forall xF(x)\rightarrow\exists xF(x)$也为真，故为逻辑有效式.

(2) $\forall xF(x)\rightarrow(\forall x\exists yG(x,y)\rightarrow\forall xF(x))$；

重言式 $p\rightarrow(q\rightarrow p)$ 的代换实例，是逻辑有效式.

(3) $\forall x F(x) \rightarrow (\forall x F(x) \vee \exists y G(y))$;

重言式 $p \rightarrow (p \vee q)$的代换实例，是逻辑有效式.

(4) $\neg(F(x,y) \rightarrow R(x,y)) \wedge R(x,y)$;

矛盾式$\neg(p \rightarrow q) \wedge q$的代换实例，是矛盾式.

(5) $\forall x\exists yF(x, y)\rightarrow\exists x\forall yF(x, y)$.

取解释I：个体域 N，$F(x, y)$为 $x=y$.

公式被解释为$\forall x\exists y(x=y)\rightarrow\exists x\forall y(x=y)$，其值为假.

解释I'：个体域N, $F(x,y)$为$x\le y$, 得到一个新的在I'下,

公式被解释为$\forall x\exists y(x\le y)\rightarrow\exists x\forall y(x\le y)$，其值为真.

是非逻辑有效式的可满足式.

(6) $\exists x F(x, y)$

取解释I：个体域N，$F(x, y)$为$x < y$. 赋值σ_1：σ_1(y)=1.

在 I 和 σ_1下， $\exists x(x<1)$，真命题.

取解释I：个体域N, $F(x, y)$为$x < y$. 赋值σ_2：σ_2(y)=0.

在 I 和 σ_2下， $\exists x(x<0)$， 假命题

是非逻辑有效式的可满足式.

- 作业
  - 2.1
  - 2.3
  - 2.6

- 提交时间：

  2018年11月16日