矩阵的秩.

1. 复习: $AX=b$. Cramer: $A\in M_n(K)$

$|A|\neq 0$, $AX=b$ 有唯一解.

$|A|=0$ 无解或无穷多解.

解方程组 { 加减消元 $\longrightarrow$ Gauss 消元法.

代入消元 $\longrightarrow$ 秩.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_2+3x_3+x_4=2 \\ 3x_3+4x_4=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+2x_2+2x_3+2x_4=2 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5 \\ x_1+x_2-x_3-2x_4=4 \end{cases}$$

问: 一个线性方程组中, 当解不唯一时 总有几个变量可由其他变量唯一表示

定义: $A\in M_{m,n}(K)$ 若存在一个 r 阶子式不为零, 所有的 $(r+1)$ 阶子式均为零, 则称 A 之秩为 r

记作 $r(A)=r$ $\quad$ $\mathrm{rank}(A)=r$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 5} \qquad r(A)=3.$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a \\ \quad\ + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = b \\ \qquad\qquad 3x_3 + x_4 = c. \end{cases}$$

$A_{4\times 3}$

Note 1: $r(A) \le \min\{m, n\}$.

2: $r(A) = 0 \iff A = O$.

3. $r(A) = r$. 则 A 中比 r 高阶的子式均为0

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$r(A) = 2$ 即有一个2阶子式不为零.

所有的3阶子式均为零.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

$$= \quad =$$

$$= 0$$

Note: 矩阵的秩是非零子式的最高阶数

4. $r(A) \le s \iff A$ 的所有的 $(s+1)$ 阶子式均为零

$r(A) \ge s \iff A$ 有一个 s 阶子式不为零

5. $r(A) = r(A^T)$

6. $A \in M_n(\mathbb{R})$ $\quad A$ 可逆 $\iff |A| \ne 0 \iff r(A) = n$

A可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow AX=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow r(A)=n$

Note: 定义: $A \in M_{m;n}(\mathbb{R})$. 若 $r(A)=m$

则称 A 行满秩

若 $r(A)=n$, 则称 A 列满秩

2. 秩之求法:

① 阶梯型矩阵之秩.

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{matrix}} & \begin{matrix} 4 & 0 \\ 7 & 0 \\ 9 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \quad r=3.$$

阶梯型矩阵之秩

= 非零行之行数 = 主元个数

② 定理: 初等变换不改变矩阵的秩.

证明: 设 A 经过一系列初等变换后变为矩阵 B.

只证 $r(B) \le r(A)$ 　设 $r(A)=r$

只需证经过一次初等变换后 $r(B) \le r(A)$

对 A 分块. $A=[\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n]$ 　$A \in M_{m;n}(K)$

$\alpha_i \cdots \alpha_n \in \mathbb{R}^m$.

① $A \to B = [\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{i-1}, \lambda\alpha_i, \cdots \alpha_n)$ 　$\lambda \neq 0$.

设 M 为 B 之一个 $(r+1)$ 阶子式 　当 M 不包含第 i 列时

M也是A之一个(r+1)阶子式

若M包含第i列时，则 $\frac{M}{\lambda}$ 是A之一个(r+1)阶子式.

由于 $r(A)=r$. 故 $M=0$

即B中所有之(r+1)阶子式均为零

故 $r(B)\leq r=r(A)$

② $A\longrightarrow B=[\alpha_1\cdots\alpha_j\cdots\alpha_i\cdots\alpha_n]$

$r(B)\leq r=r(A)$

③ $A\longrightarrow B=[\alpha_1\cdots\alpha_i,\cdots,\boxed{\alpha_j+\lambda\alpha_i}\cdots\alpha_n]$

若M是B之一个(r+1)阶子式.

M不包含第j列. M也是A之一个(r+1)阶子式

当M包含第j列时：M可以写成两行列式之和.

有一个一定是A之一个(r+1)阶子式

另一个将λ提出后适当调整列之次序

它也是一个A之(r+1)阶子式

即经过一次初等列变换 A变为B. $r(B)\leq r(A)$

又由于初等列变换可逆 同理 $r(A)\leq r(B)$

故 $r(A)=r(B)$ 即初等列变换不改变矩阵

秩一 又由于 $r(A)=r(A^T)$

• 初等变换不改变矩阵的秩

例：$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$，$r(A)=3$. 求 a, b.

解：$A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 1 & a-2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 1 & a-2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{bmatrix}$ $\begin{cases} a=1 \\ b\neq 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a\neq 1 \\ b=2 \end{cases}$ 时 $r(A)=3$.

• 3. 矩阵之秩之进一步性质：

① $A\in M_{m,n}(K)$　$P\in M_m(K)$.　$Q\in M_n(K)$

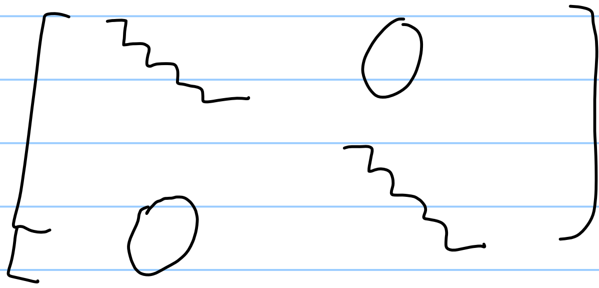
P, Q 可逆 则 $r(PAQ)=r(A)$

②. A, B 相抵 $\Longleftrightarrow$ $r(A)=r(B)$

$A\sim\begin{bmatrix} I_r & \\ & 0 \end{bmatrix}\sim B$

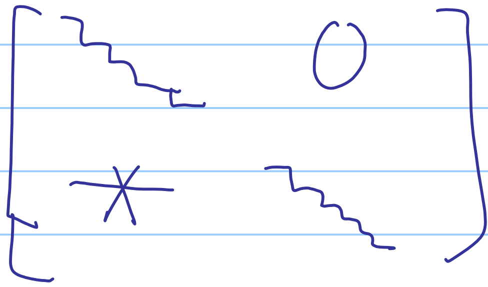
③ $r\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = r(A) + r(B)$

证明：A经过初等变换，B经过初等变换 分别化为阶梯形

$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \longrightarrow$ 

$r(A)=r \quad r(B)=s$

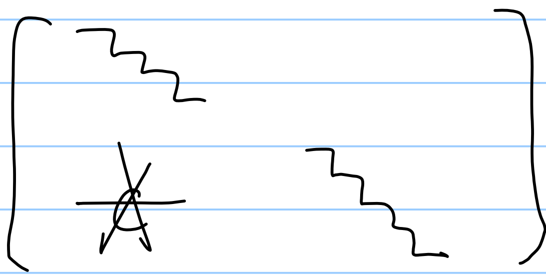
④ $r\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix} \geq r(A) + r(B)$

证：$\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix} \longrightarrow$ 

$r(A)=r \quad r(B)=s$ $\quad \begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}$ 有一个 $r+s$ 阶子式不为零，

$r\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix} \geq r(A) + r(B)$

Note: $r\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}$ 何时等于 $r(A)+r(B)$

$\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix} \longrightarrow$ 

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

⑤ $A \in M_{m,n}(K)$. $B \in M_{k,n}(K)$.

$$\underline{\underline{r(A)}}, \underline{\underline{r(B)}} \le r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \le r(A) + r(B)$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \xrightarrow{行}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

例: 证明: $r(A+B) \le r(A) + r(B)$

证: $\underline{\underline{r(A+B)}} \le r\begin{bmatrix} A+B \\ B \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \le r(A) + r(B)$.

我有3种语言:
① 矩阵语言 ✓
② 向量组语言 ✓
③ 方程组语言 ✓

⑥ $A \in M_{m,n}(K)$ $B \in M_{n,s}(K)$

$$r(A)+r(B)-n \le r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$$

证明：设 $r(A)=r$，∃可逆矩阵 P, Q. $P \in M_m(K)$

$Q \in M_n(K)$

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r(AB) = r(PAB) = r(\underline{\underline{PAQ}}\,Q^{-1}B)$$

$$= r\left(\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}B\right) = r\left(\begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = r(C_1) \le r = r(A)$$

$$PAB = \underline{\underline{PAQ}}\;\underline{\underline{Q^{-1}B}} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow r\text{行} \\ \rightarrow n-r\text{行} \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r(AB) \le r(A)$$

$$r(AB) = r(B^T A^T) \le r(B^T) = r(B)$$

另一方面: $r(AB) = r\begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix} = r(C_1)$

$$r\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\overset{r(B)}{\overset{\|}{r(Q^{-1}B)}}}} \le r(C_1) + r(C_2)$$

$$\le r(C_1) + n - r$$

即 $r(B) \le r(C_1) + n - r(A)$

即 $r(C_1) \geq r(A) + r(B) - n$

即 $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$

$$r(A) + r(B) - n \le r(AB) \le r(A),\ r(B)$$

应用: 若 $r(A) = n$ 则 $\underline{r(AB) = r(B)}$

若 $r(B) = n$ 则 $\overline{r(AB) = r(A)}$

从而: $AX = 0$ $\quad \underset{\sim\sim\sim}{r(A) = n}$

则 $r(X) = r(AX) = r(0) = 0$

$X = 0$.

$AB = AC$ 若 $r(A) = n$

$\Rightarrow B = C$

$A(B-C) = 0 \quad r(A) = n$

$r(B-C) = r(A(B-C)) = r(0) = 0$

$\Rightarrow B-C = 0 \Rightarrow B = C$