第四章 二元关系和函数

等价关系和偏序关系
函数的定义和性质、函数的复合和反函数

郝杰
haojie@bupt.edu.cn
北京邮电大学信息安全中心

4.5 等价关系和偏序关系

- 等价关系的定义与实例
- 等价类及其性质
- 商集与集合的划分
- 等价关系与划分的一一对应
- 偏序关系
- 偏序集与哈斯图
- 偏序集中的特定元素

等价关系

定义 等价关系

- 设 R 为 A 上的关系. 如果 R 是自反的、对称的和传递的, 则称 R 为 A 上的等价关系. 设 R 是一个等价关系, 若 $<x, y>\in R$, 称 x 等价于 y, 记做 $x\sim y$.

- 实例:

  设 $A=\{1, 2, \ldots, 8\}$, 如下定义 A 上的关系 R:

  $$R = \{ <x, y> \mid x, y\in A \wedge x \equiv y \ (\mathrm{mod}\ 3) \},$$

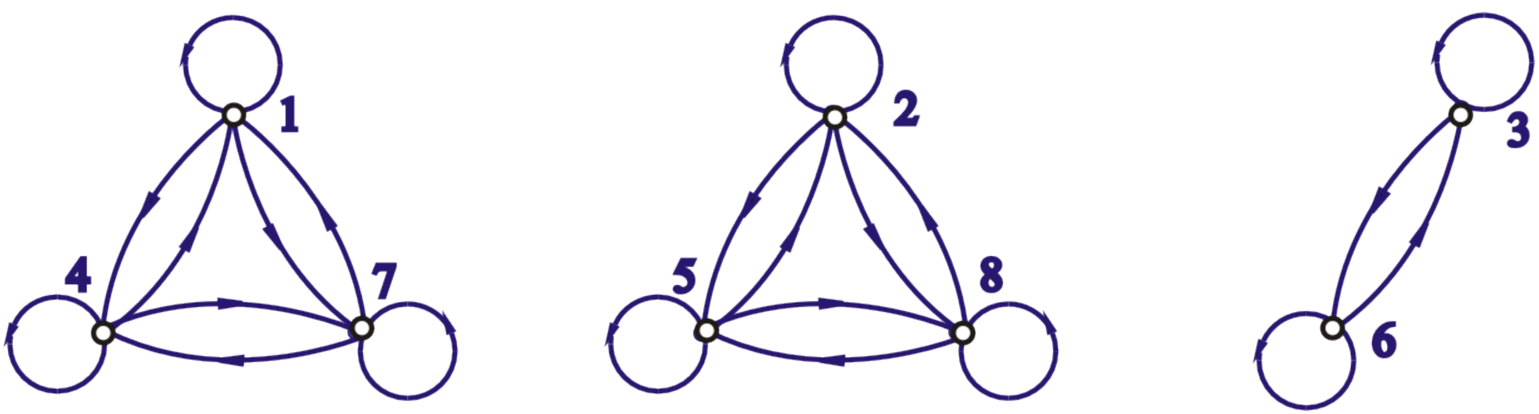
  其中 $x\equiv y \ (\mathrm{mod}\ 3)$ 叫做 x 与 y 模3相等, 即 x 除以3的余数与 y 除以3的余数相等.

等价关系

■ 集合A上模 3 等价关系的关系图

设 $A = \{1,2,\ldots,8\}$, A 上关系

$$R = \{ \langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge x \equiv y \pmod 3 \}.$$



等价关系

定义 等价类

- □ 设 R 非空集合A上的等价关系. 对于$\forall x \in A$，令

$$[x]_R = \{ y \mid y \in A \wedge xRy \}$$

称 $[x]_R$ 为 x 关于R 的等价类, 简称为 x 的等价类, 简记为$[x]$.

- ■ 实例:

集合 $A=\{1, 2, \ldots, 8\}$上模 3 等价关系的等价类:

$$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\};$$
$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\};$$
$$[3] = [6] = \{3, 6\}.$$

等价类

定理 等价类的性质

- 设 R 是非空集合 A 上的等价关系, 则

  1) $\forall x \in A$, $[x]$是 A 的非空子集.

  2) $\forall x, y \in A$, 如果 $x\,R\,y$, 则 $[x] = [y]$.

  3) $\forall x, y \in A$, 如果 $x \not R\, y$, 则 $[x]$ 与 $[y]$ 不交.

  4) $\cup\{\,[x] \mid x \in A\}=A$,即所有等价类的并集就是$A$.

等价类

■ 实例：

集合 $A=\{1, 2, \ldots, 8\}$上模 3 等价关系的等价类：

$$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\};$$
$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\};$$
$$[3] = [6] = \{3, 6\}.$$

- 以上3 类两两不交，且
- $\{1, 4, 7\} \cup \{2, 5, 8\} \cup \{3, 6\} = \{1, 2, \ldots, 8\}.$

商集

定理 商集

- 设 R 是非空集合 A 上的等价关系,以R的所有等价类作为元素的集合称为 A 关于 R 的**商集**,记做A/R,即 $A/R = \{ [x]_R \mid x \in A \}$

- 实例:

集合 A={1, 2, …, 8}上模 3 等价关系 R 的等价类为:

$$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\};$$
$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\};$$
$$[3] = [6] = \{3, 6\}.$$

等价关系R的**商集**为 $A/R = \{ \{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6\} \}$.

集合的划分

定义

- 设 A 为非空集合, 若 A 的子集族 π ($\pi \subseteq P(A)$) 满足下面条件:

  1) $\varnothing \notin \pi$;

  2) $\forall x \forall y\,(x, y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing)$;

  3) $\cup\pi = A$.

  则称 π 是 A 的一个**划分**, 称 π 中的元素为 A 的**划分块**.

集合的划分

■ 实例:

设 $A=\{a, b, c, d\}$. 给定 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$如下:

$\boxed{\pi_1=\{\{a, b, c\}, \{d\}\};}$

$\boxed{\pi_2=\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\};}$

$\pi_3=\{\{a\}, \{a, b, c, d\}\};$

$\pi_4=\{\{a, b\}, \{c\}\};$

$\pi_5=\{\varnothing, \{a, b\}, \{c, d\}\};$

$\pi_6=\{\{a, \{a\}\}, \{b, c, d\}\}.$

等价关系

等价关系与划分的一一对应

- 商集 A/R 就是 A 的一个划分 (称为由 R 导出的划分), 不同的商集对应于不同的划分.
- 任给 A 的一个划分 π, 如下定义 A 上的关系 R:

  $R = \{<x, y> \mid x, y \in A \wedge x$ 与 y 在π的同一划分块中$\}$

  则 R 为 A 上的等价关系, 且该等价关系确定的商集就是 π.

等价关系

■ 例如：设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，在 $A\times A$上定义二元关系R：

$$<<x,y>,<u,v>>\in R \Leftrightarrow x+y = u+v,$$

求 R 导出的划分.

解: $A \times A = \{<1,1>, <1,2>, <1,3>, <1,4>, <2,1>, <2,2>, <2,3>, <2,4>, <3,1>, <3,2>, <3,3>, <3,4>, <4,1>, <4,2>, <4,3>, <4,4>\}$.

根据 $<x, y>$ 的 $x + y = 2,3,4,5,6,7,8$ 将$A\times A$划分成7个等价类:

$$\begin{aligned}(A\times A)/R = \{ & \{<1,1>\}, \{<1,2>,<2,1>\}, \\ & \{<1,3>, <2,2>, <3,1>\}, \\ & \{<1,4>, <2,3>, <3,2>, <4,1>\}, \\ & \{<2,4>, <3,3>, <4,2>\}, \\ & \{<3,4>, <4,3>\}, \{<4,4>\} \ \}.\end{aligned}$$

偏序关系

定义 偏序关系

- 设 R 为 A 上的关系. 如果 R 是自反的、反对称的和传递的, 则称 R 为 A 上的偏序关系, 简称偏序, 记作≼. 设 R 是一个偏序关系, 若 $\langle x, y\rangle \in R$, 记作 $x \preccurlyeq y$, 读作 x "小于或等于" y.

- 实例:

  大于等于关系, 小于等于关系, 整除关系.

  集合上的包含关系.

偏序关系

北京邮電大學 Beijing University of Posts and Telecommunications

- 设 R 为非空集合A上的偏序关系, $x, y \in A$:
  - 如果 $x \preccurlyeq y$ 或者 $y \preccurlyeq x$, 则称 x 与 y 可比.
  - 如果 $x \preccurlyeq y$ 并且 $y \neq x$, 则称 $x \prec y$.
  - 如果 $x \prec y$且不存在 $z \in A$ 使得 $x \prec z \prec y$,
    则称 y 覆盖 x.

- 实例: 集合 $A=\{1, 2, 4, 6\}$, 考虑整除关系.

  1与 1, 2, 4, 6 都是可比的.

  4 和 6 覆盖 2.

  2 覆盖 1, 4 不覆盖 1.

偏序关系

北京邮电大学 Beijing University of Posts and Telecommunications

定义 偏序集和全序集

- 集合 A 和 A 上的偏序关系 $\preccurlyeq$ 一起叫做**偏序集**, 记作 $<A, \preccurlyeq>$.
- 设$<A, \preccurlyeq>$为偏序集, 若对于$\forall x, y \in A$, x与 y **都是可比**的, 则称 $\preccurlyeq$ 为A上的**全序关系**, 且称 $<A,\preccurlyeq>$ 为**全序集**.

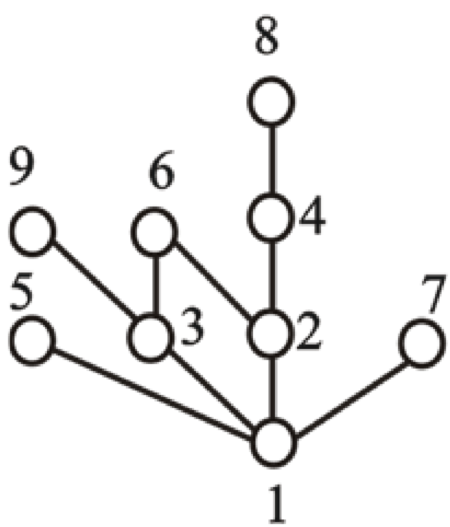
■ 实例:

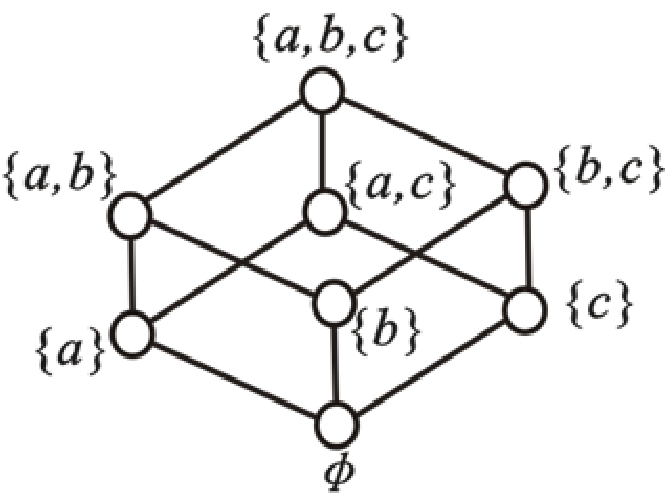
- 幂集$P(A)$和包含关系构成偏序集$<P(A), R_{\subseteq}>$.
- 正整数集合和整除关系构成偏序集$<Z,R_{整除}>$.
- 整数集和小于等于关系构成全序集$<Z, \leq>$.

哈斯图 (Hasse Diagrams)

- 利用偏序自反、反对称、传递性简化的关系图
  - 如果 y 覆盖 x, 则在结点 y 和 x 之间连一条线.
  - 结点位置按照它们在偏序中的次序从底向上排列.
- 例如：

$<\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, R_{整除}>$ $<P(\{a, b, c\}), R_{\subseteq}>$

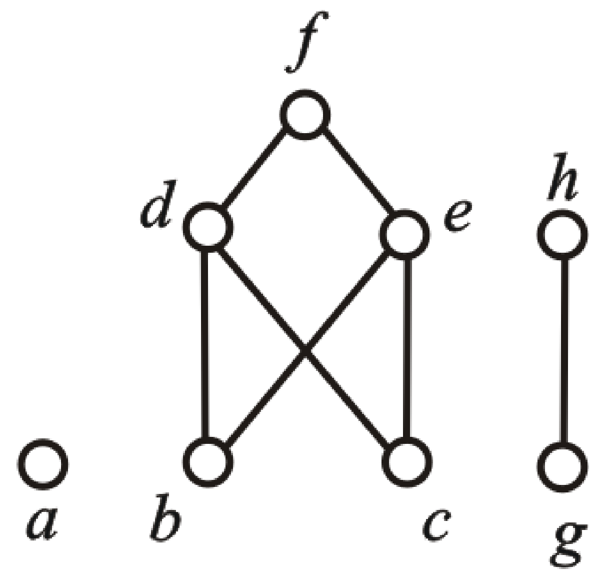




哈斯图 (Hasse Diagrams)

- 实例：

  已知偏序集$<A, R>$ 的哈斯图如右图所示, 试求出集合A和关系R的表达式.



- 解：$A=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

  $R = I_A \cup \{<b, d>, <b, e>, <b, f>, <c, d>,$

  $<c, e>, <c, f>, <d, f>, <e, f>, <g, h>\}.$

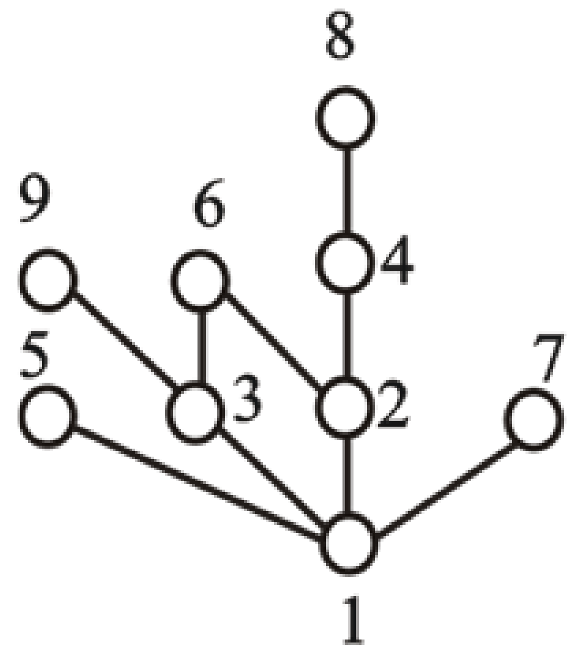
> 全序集的哈斯图？

偏序集的特定元素

定义

- 设$<A, \preccurlyeq>$为偏序集, $B \subseteq A$. 若$\exists\, y \in B$,

1) 使得$\forall x\ (x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$ 成立,
   则称 y 为 B 的最小元.
2) 使得$\forall x\ (x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$ 成立,
   则称 y 为 B 的最大元.
3) 使得$\neg \exists x\ (x \in B \wedge x \prec y)$ 成立,
   则称 y 为B的极小元.
4) 使得$\neg \exists x\ (x \in B \wedge y \prec x)$ 成立,
   则称 y 为B的极大元.

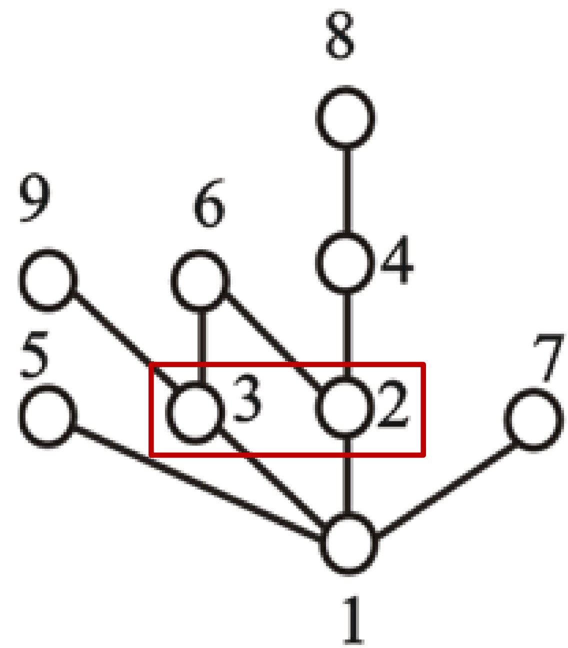


偏序集的特定元素

定义

- 设$<A, \preccurlyeq>$为偏序集, $B \subseteq A$, 若 $\exists y \in B$.

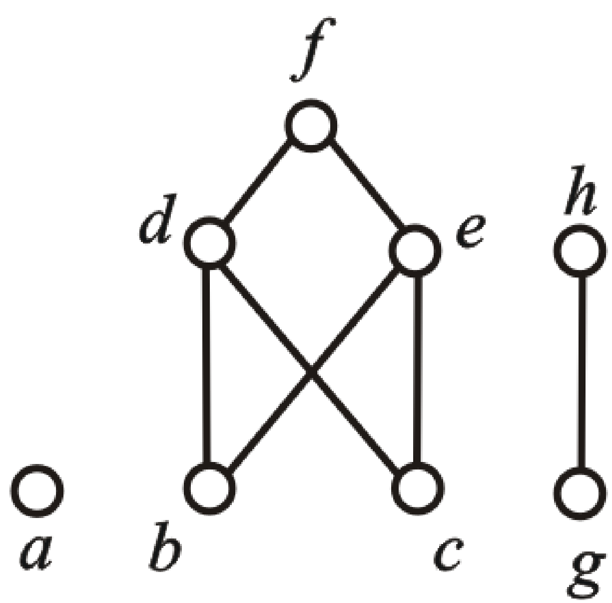
1) 使得 $\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$ 成立, 则称 y 为 B 的上界.
2) 使得 $\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$ 成立, 则称 y 为 B 的下界.
3) 使得 $C=\{y \mid y$为 B 的上界$\}$, 则称 C 的最小元为 B 的最小上界 或 上确界.
4) 使得 $D=\{y \mid y$为 B 的下界$\}$, 则称 D 的最大元为 B 的最大下界 或 下确界.



取 $B = \{2, 3\}$

偏序集的特定元素

- 实例 设偏序集<A, ≼>如下图所示，求 A 的极小元、最小元、极大元、最大元. 设 $B=\{b, c, d\}$, 求 B 的下界、上界、下确界、上确界.



极小元：a, b, c, g;

极大元：a, f, h;

没有最小元与最大元.

B 的下界和最大下界都不存在, 上界有 d 和 f, 最小上界为 d.

4.6 函数的定义与性质

- 函数的定义
  - 函数定义
  - 从A到B的函数
  - 函数的像
- 函数的性质
  - 函数的单射、满射、双射性
  - 构造双射函数

函数定义

定义

- 设 F 为二元关系, 若 $\forall x\in \mathrm{dom}F$ 都存在唯一的 $y\in \mathrm{ran}F$ 使 xFy 成立, 则称 F 为函数.
- 对于函数F, 如果有 xFy, 则记作 $y = F(x)$, 并称 y 为 F 在 x 的函数值.

- 实例: $F_1=\{<x_1, y_1>,<x_2, y_2>,<x_3, y_2>\}$.

  $F_2=\{<x_1, y_1>,<x_1, y_2>\}$.

  F_1是函数, F_2不是函数.

函数相等

- 设F, G为函数, 则

$$F = G \Leftrightarrow F \subseteq G \wedge G \subseteq F$$

- 如果两个函数 F 和 G 相等, 则:
  - $\mathrm{dom}F = \mathrm{dom}G$
  - 对于$\forall x \in \mathrm{dom}F = \mathrm{dom}G$, 有 $F(x) = G(x)$

- 实例: 如下两函数不相等, 由于$\mathrm{dom}F \subset \mathrm{dom}G$.

$$F(x)=(x^2-1)/(x+1); \qquad G(x)=x-1.$$

从 A 到 B 的函数

北京邮电大学 Beijing University of Posts and Telecommunications

定义

- 设 A, B 为集合, 如果函数 f 满足
  1. $\mathrm{dom}f = A$;
  2. $\mathrm{ran}f \subseteq B$.

  则称 f 为**从 A 到 B 的函数**, 记作 $f : A \to B$.

定义

- 所有从 A 到 B 的函数的集合记作 B^A, 读作 "B 上 A", 即

$$B^A = \{ f \mid f: A \to B \}.$$

□ 计数：$|A|=m$, $|B|=n$, 且m, $n>0$, $|B^A|=n^m$.

■ 实例：函数 f：$N\to N$, $f(x)=2x$ 是从 N 到 N 的函数.

■ 实例：设 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{a, b\}$, 求 B^A.

解: $B^A=\{f_0, f_1, \ldots, f_7\}$, 其中

$f_0=\{<1,a>,<2,a>,<3,a>\}$, $f_1=\{<1,a>,<2,a>,<3,b>\}$

$f_2=\{<1,a>,<2,b>,<3,a>\}$, $f_3=\{<1,a>,<2,b>,<3,b>\}$

$f_4=\{<1,b>,<2,a>,<3,a>\}$, $f_5=\{<1,b>,<2,a>,<3,b>\}$

$f_6=\{<1,b>,<2,b>,<3,a>\}$, $f_7=\{<1,b>,<2,b>,<3,b>\}$

函数的像

定义

- 设函数 f: $A \to B$, $A_1 \subseteq A$, 则 A_1 在 f 下的像是

$$f(A_1) = \{ f(x) \mid x \in A_1 \}.$$

当 $A_1 = A$ 时, 称$f(A_1) = f(A) = \mathrm{ran}f$ 是**函数的像**.

◆ 注意：函数值 $f(x) \in B$, 而像 $f(A_1) \subseteq B$.

■ 例如：设 f: $N \to N$, 且 $f(x) = \begin{cases} x/2 & 若x为偶数 \\ x+1 & 若x为奇数 \end{cases}$

令$A=\{0, 1\}$, $B=\{2\}$, 那么有

$f(A) = f(\{0, 1\}) = \{ f(0), f(1) \} = \{0, 2\}$.

函数的性质

定义

- 设函数 f： $A \to B$.

1) 若 $\mathrm{ran}f = B$, 则称 $f: A \to B$ 是满射的.
2) 若对于 $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 $f: A \to B$ 是单射的.
3) 若 $f: A \to B$ 既是满射又是单射的, 则称 $f: A \to B$ 是双射的.

- 注意:
  - f 满射意味着: $\forall y \in B$, 都 $\exists\, x \in A$ 使得 $f(x) = y$.
  - f 单射意味着: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

函数的性质

■ 实例

判断下面函数是否为单射, 满射, 双射的, 为什么?

1) f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = -x^2+2x-1$

2) f: $\mathbf{Z}^+\to\mathbf{R}$, $f(x) = \ln x$, $\mathbf{Z}^+$为正整数集

3) f: $\mathbf{R}\to\mathbf{Z}$, $f(x) = \lfloor x\rfloor$

4) f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = 2x+1$

5) f: $\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$, $f(x)=(x^2+1)/x$, 其中$\mathbf{R}^+$为正实数集.

函数的性质

解: 1) f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = -x^2+2x-1$

在 $x = 1$ 取得极大值 0. 既不单射也不满射.

2) f: $\mathbf{Z}^+\to\mathbf{R}$, $f(x) = \ln x$

单调上升, 是单射. 但不满射, $\mathrm{ran}f=\{\ln 1, \ln 2, \ldots\}$.

3) f: $\mathbf{R}\to\mathbf{Z}$, $f(x) = \lfloor x\rfloor$

满射, 但不单射, 例如 $f(1.5)=f(1.2)=1$.

4) f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = 2x+1$

满射、单射、双射, 因为它是单调的并且 $\mathrm{ran}f=\mathbf{R}$.

5) f: $\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$, $f(x) = (x^2+1)/x$

有极小值 $f(1) = 2$. 该函数既不单射也不满射.

4.7 函数的复合与反函数

- 函数的复合
  - 函数复合的定理
  - 函数复合的性质
- 反函数
  - 反函数存在的条件
  - 反函数的性质

函数复合

北京邮电大学 Beijing University of Posts and Telecommunications

定理

- 设F, G是函数, 则$F\circ G$也是函数, 且满足

  1) $\mathrm{dom}(F\circ G)=\{ x \mid x\in \mathrm{dom}G \wedge G(x)\in \mathrm{dom}F\}$;

  2) 对于$\forall x\in \mathrm{dom}(F\circ G)$ 有 $F\circ G(x) = F(G(x))$.

- **推论1** 设F, G, H为函数, 则 $(F\circ G)\circ H$ 和 $F\circ(G\circ H)$ 都是函数, 且 $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

- **推论2** 设 $f: B\to C$, $g: A\to B$, 则 $f\circ g : A\to C$, 且对于$\forall x\in A$ 都有 $f\circ g(x) = f(g(x))$.

函数复合运算的性质

北京邮电大学 Beijing University of Posts and Telecommunications

定理

- 设 $f:B\to C$, $g:A\to B$.

1) 如果 f,g 都是满射的,
   则 $f\circ g:A\to C$ 也是满射的.
2) 如果 f,g 都是单射的,
   则 $f\circ g:A\to C$ 也是单射的.
3) 如果 f,g 都是双射的,
   则 $f\circ g:A\to C$ 也是双射的.

函数复合运算的性质

- 证明:

1) $\forall c \in C$, 由 f: $B \to C$ 的满射性, $\exists b \in B$ 使得 $f(b)=c$. 对这个b, 由 g: $A \to B$ 的满射性，$\exists a \in A$ 使得 $g(a)=b$. 由合成定理有 $f \circ g(a)=f(g(a))=f(b)=c$.
从而证明了 $f \circ g$: $A \to C$是满射的.

2) 对于任意 $x_1, x_2 \in A$, 且$x_1 \neq x_2$.
由于 $g: A \to B$单射, 得 $g(x_1) \neq g(x_2)$, 且$g(x_1), g(x_2) \in \text{dom} f$.
再由 $f: B \to C$单射, 有 $f(g(x_1)) \neq f(g(x_2))$.
即 $f \circ g(x_1) \neq f \circ g(x_2)$. 故 $f \circ g: A \to C$是单射的.

3) 由 (1) 和 (2) 得证.

函数的逆

- 任给函数 F, 它的逆 F^{-1}是二元关系, 但不一定是函数, 例如:

  $F=\{\langle a, b\rangle, \langle c, b\rangle\}$, $F^{-1}=\{\langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle\}$.

- 任给单射函数 $f: A \to B$, 则 f^{-1}是函数, 且是从 $\mathrm{ran}f$ 到 A 的双射函数, 但不一定是从 B 到 A 的双射函数.

- 实例:

$$f: \mathbf{N} \to \mathbf{N},\ f(x) = 2x,$$
$$f^{-1}: \mathrm{ran}f \to \mathbf{N},\ f^{-1}(x) = x/2$$

函数的逆

定理

- 设 f：$A \to B$是双射的, 则 f^{-1}：$B \to A$也是双射的.

- 证明： 因为 f 是函数, 所以 f^{-1} 是关系, 且

$$\mathrm{dom}\, f^{-1} = \mathrm{ran} f = B\ ,\quad \mathrm{ran}\, f^{-1} = \mathrm{dom} f = A,$$

对于任意的 $y \in B = \mathrm{dom}\, f^{-1}$, 假设有$x_1, x_2 \in A$使得

$$<y, x_1> \in f^{-1} \land <y, x_2> \in f^{-1}$$

成立, 则由逆的定义有

$$<x_1, y> \in f \land <x_2, y> \in f$$

根据 f 的单射性可得 $x_1 = x_2$, 从而证明了f^{-1}是函数.

f^{-1}一定是满射的. 下面证明 f^{-1} 的单射性.

若存在 $y_1, y_2 \in B$ 使得$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x$, 从而有

$$<y_1, x> \in f^{-1} \land <y_2, x> \in f^{-1} \Rightarrow <x, y_1> \in f \land <x, y_2> \in f \Rightarrow y_1 = y_2.$$

反函数的定义及性质

定义

- 对于双射函数 f：$A\to B$，称 f^{-1}：$B\to A$是 f 的**反函数**.

◆ 反函数的性质

- 设 f：$A\to B$是双射的，则

$$f^{-1}\circ f=I_B,\ \ f\circ f^{-1}=I_A.$$

- 对于双射函数 f：$A\to A$，有

$$f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=I_A.$$

■ 实例: 设 f: R→R, g: R→R

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x \ge 3 \\ -2 & x < 3 \end{cases} \qquad g(x) = x + 2$$

求 $f\circ g$, $g\circ f$. 如果 f 和 g 存在反函数, 求出它们的反函数.

解: 设 $f\circ g$: R→R, $g\circ f$: R→R

$$f\circ g(x)=\begin{cases} (x+2)^2 & x \ge 1 \\ -2 & x < 1 \end{cases} \qquad g\circ f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x \ge 3 \\ 0 & x < 3 \end{cases}$$

f: R→R 不存在反函数.

g: R→R 是双射的, 它的反函数是

$$g^{-1}: \mathrm{R}\to\mathrm{R},\ g^{-1}(x) = x-2$$

- **作业**
  - **4.16**
  - **4.19**
  - **4.24**
  - **4.25**