第四章 二元关系和函数

关系的性质、关系的闭包

郝杰

haojie@bupt.edu.cn

北京邮电大学信息安全中心

关系的性质

- 自反性 (reflexive)
- 反自反性 (irreflexive)
- 对称性 (symmetric)
- 反对称性 (antisymmetric)
- 传递性 (transitive)

自反性与反自反性

定义

- 设 R 为 A 上的关系

  1) 若$\forall x(x \in A \rightarrow \langle x, x\rangle \in R)$, 则称 R 在 A 上是自反的.

  2) 若$\forall x(x \in A \rightarrow \langle x, x\rangle \notin R)$, 则称 R 在 A 上是反自反的.

- 实例:
  - 自反关系：A上的全域关系 E_A, 恒等关系 I_A

    小于等于关系 L_A, 整除关系 D_A
  - 反自反关系：实数集上的小于关系

    幂集上的真包含关系

自反性与反自反性

例如：$A = \{1, 2, 3\}$, R_1, R_2, R_3 是A上的关系, 其中

$R_1 = \{<1, 1>, <2, 2>\}$

$R_2 = \{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <1, 2>\}$

$R_3 = \{<1, 3>\}$

R_2自反,

R_3反自反,

R_1既不是自反也不是反自反的.

对称性与反对称性

北京邮电大学 Beijing University of Posts and Telecommunications

定义

- 设 R 为 A 上的关系

1) 若$\forall x\forall y(x, y\in A\land <x, y>\in R \rightarrow <y, x>\in R)$，则称 R 为 A上对称的关系.

2) 若$\forall x\forall y(x, y\in A\land <x, y>\in R\land <y, x>\in R \rightarrow x = y)$，则称 R 为 A 上的反对称关系.

- 实例：
  - 对称关系：全域关系 E_A, 恒等关系 I_A和空关系 $\varnothing$.
  - 反对称关系：恒等关系 I_A，空关系$\varnothing$.

对称性与反对称性

例如：$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3和R_4都是A上的关系，

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$，　$R_2=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>\}$

$R_3=\{<1,2>,<1,3>\}$，　$R_4=\{<1,2>,<2,1>,<1,3>\}$

R_1 对称、反对称.

R_2 对称，不反对称.

R_3 反对称，不对称.

R_4 不对称、也不反对称.

传递性

定义

- 设 R 为 A 上的关系，若

$$\forall x \forall y \forall z\,(\,x, y, z \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R \rightarrow \langle x, z\rangle \in R\,),$$

则称 R 是 A 上的传递关系.

- 实例：

A上的全域关系 E_A，恒等关系 I_A 和空关系 $\varnothing$.

小于等于关系, 小于关系，整除关系，包含关系，真包含关系

传递性

例如：$A=\{1, 2, 3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$R_1=\{<1, 1>,<2, 2>\}$

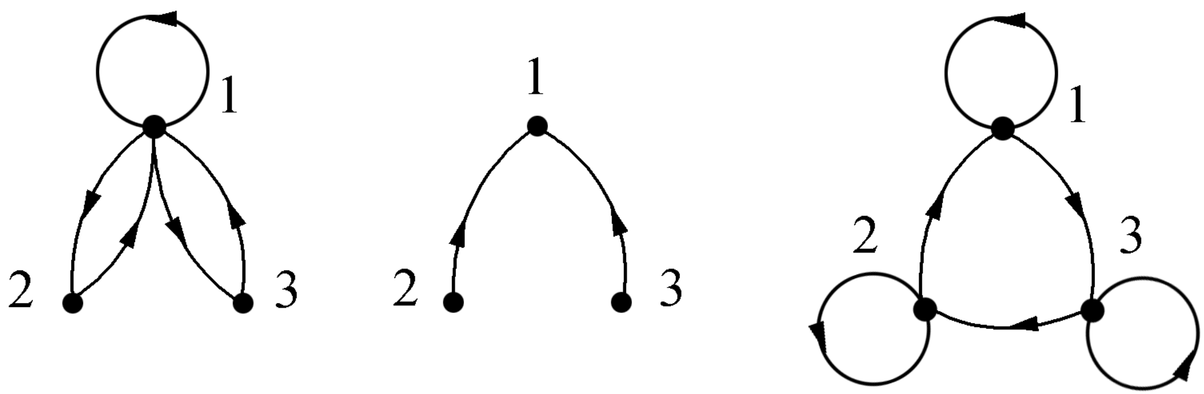
$R_2=\{<1, 2>,<2, 3>\}$

$R_3=\{<1,3>\}$

R_1 和 R_3 是A上的传递关系

R_2不是A上的传递关系

■ 例：判断下图中关系的性质, 并说明理由.



(a) (b) (c)

(a) 不自反也不反自反；对称, 不反对称；不传递.

(b) 反自反，不是自反的；反对称，不是对称的；是传递的.

(c) 自反，不反自反；反对称，不是对称；不传递.

□ 关系性质的充要条件

- 设 R 为 A上的关系, 则

1) R 在 A 上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

2) R 在 A 上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$

3) R 在 A 上对称当且仅当 $R = R^{-1}$

4) R 在 A 上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

5) R 在 A 上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

- R 在 A 上传递当且仅当 $R\circ R \subseteq R$

> 证明：

- 若 R 在 A 上传递，则 $R\circ R \subseteq R$.

> 任取 $<x, y>$,有

$$<x, y>\in R\circ R \Rightarrow \exists t\,(<x, t>\in R \wedge < t, y>\in R) \Rightarrow <x, y>\in R$$

所以 $R\circ R \subseteq R$.

- 若 $R\circ R \subseteq R$，则 R 在 A 上传递.

> 任取 $<x,y>$, $<y, z> \in R$,有

$$<x, y>\in R \wedge <y, z>\in R \Rightarrow <x, z>\in R\circ R \Rightarrow <x, z>\in R$$

所以 R 在 A 上是传递的.

□ 关系性质判别

	自反	反自反	对称	反对称	传递
表达式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若$r_{ij}=1$, 且$i \neq j$, 则$r_{ji}=0$	对M^2中1所在位置, M中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边, 是一对方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边, 是一条有向边(无双向边)	如果顶点x_i到x_j有边, x_j到x_k有边, 则从x_i到x_k有边

关系性质的运算封闭性

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

闭包的定义

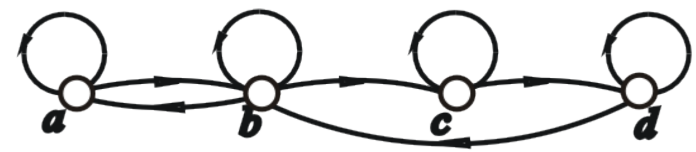
定义

- 设 R 为非空集合 A 上的关系, R 的自反（对称或传递）闭包是 A 上的关系 R', 使得 R' 满足以下条件:
  1) R'是自反的（对称的或传递的）;
  2) $R \subseteq R'$;
  3) 对 A 上任何包含 R 的自反（对称或传递）关系 R'' 有 $R' \subseteq R''$.

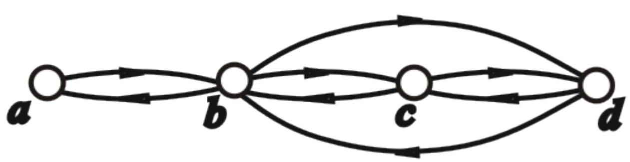
- 一般将 R 的自反闭包记作 $r(R)$, 对称闭包记作 $s(R)$, 传递闭包记作 $t(R)$.

■ 例如: 设$A = \{a, b, c, d\}$, $R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d,b\rangle\}$, R 和 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图如下图所示.

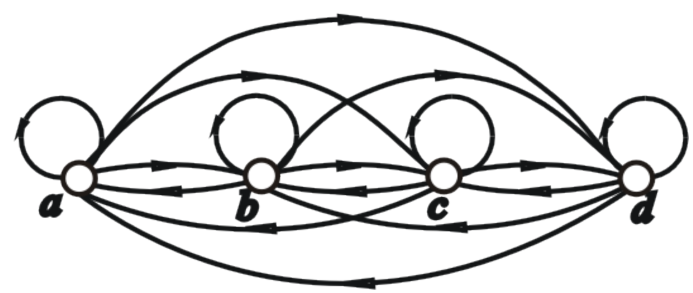
R



$r(R)$



$s(R)$



$t(R)$

闭包的构造方法

定理

- 设 R 为非空集合 A 上的关系, 则有
  1) $r(R) = R \cup R^0$;
  2) $s(R) = R \cup R^{-1}$;
  3) $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$.

- 说明
  - 对于有穷集合A ($|A| = n$), 3)中的并最多不超过 R^n.
  - 若R是自反的, 则 $r(R)=R$; 若R是对称的, 则$s(R)=R$; 若R是传递的, 则 $t(R)=R$.

- 传递闭包：**Warshall算法**

闭包的构造方法

□ 关系矩阵

- 关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$分别对应M, M_r, M_s和 M_t, 则

  1) $M_r = M + E$

  2) $M_s = M + M^{\mathrm{T}}$

  3) $M_t = M + M^2 + M^3 + \ldots$

  上式中:

  - E 是和 M 同阶的单位矩阵;
  - M^{T}是 M 的转置矩阵;
  - 矩阵的元素相加时使用逻辑加.

闭包的构造方法

☐ 关系图

- 关系 R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图记为G, G_r, G_s, G_t , 则 G_r , G_s, G_t 的顶点集与 G 的顶点集相等. 除了G 的边以外:

  1) 考察 G 的每个顶点, 如果没有环就加上一个环，最终得到 G_r .

  2) 考察G的每条边, 如果有一条 x_i 到 x_j 的单向边, 且$i\neq j$, 则在 G 中加一条 x_j 到 x_i 的反方向边，最终得到G_s.

  3)考察G的每个顶点 x_i, 找从 x_i 出发的每一条路径, 如果从 x_i 到路径中任何结点 x_j 没有边，就加上这条边.当检查完所有的顶点后就得到图G_t .

❑ 作业

- ➢ **4.12**
- ➢ **4.14**