第五章 图的基本概念

图的矩阵表示；最短路径、关键路径和着色

郝杰

haojie@bupt.edu.cn

北京邮电大学信息安全中心

5.3 图的矩阵表示

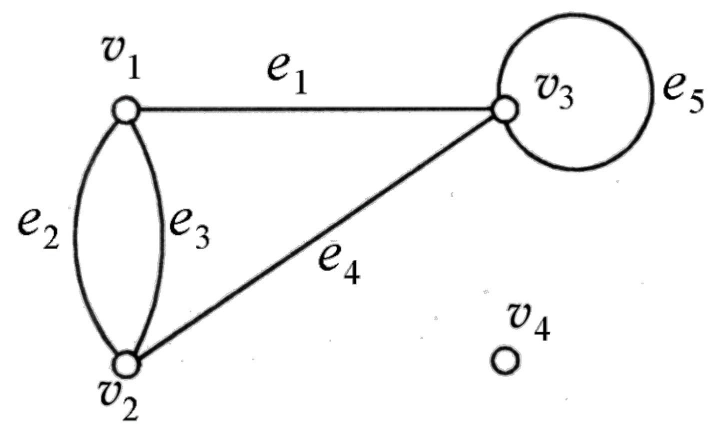
- 无向图的关联矩阵
- 有向图的关联矩阵
- 有向图的邻接矩阵
- 有向图的可达矩阵

无向图的关联矩阵

定义 设无向图 $G = \langle V, E\rangle$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令 m_{ij} 为 v_i 与 e_j 的关联次数，称 $(m_{ij})_{n\times m}$ 为 G 的关联矩阵，记为 $M(G)$.

- 例

$$M(G)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



无向图的关联矩阵

- 性质 (1) 每一列恰好有两个 1 或一个 2

  (2) $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = d(v_i) \quad (i = 1,2,\ldots,n)$

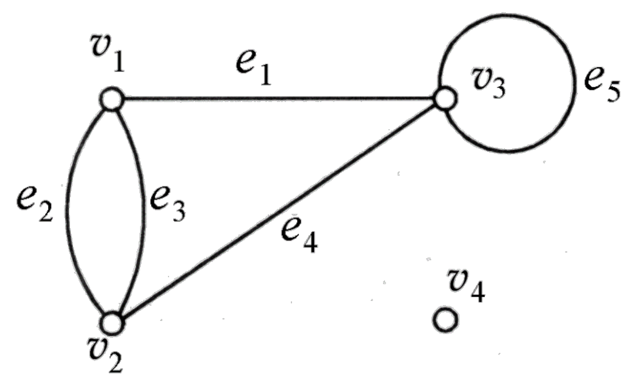
  (3) $\sum_{i,j} m_{ij} = 2m$

  (4) v_i为孤立点当且仅当第i行全为0

  (5) 平行边的列相同

- 例

$$M(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



有向图的关联矩阵

北京邮电大学 Beijing University of Posts and Telecommunications

定义 设无环有向图 $D=<V, E>$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{为}e_j\text{的始点}\\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\ -1, & v_i\text{为}e_j\text{的终点}\end{cases}$$

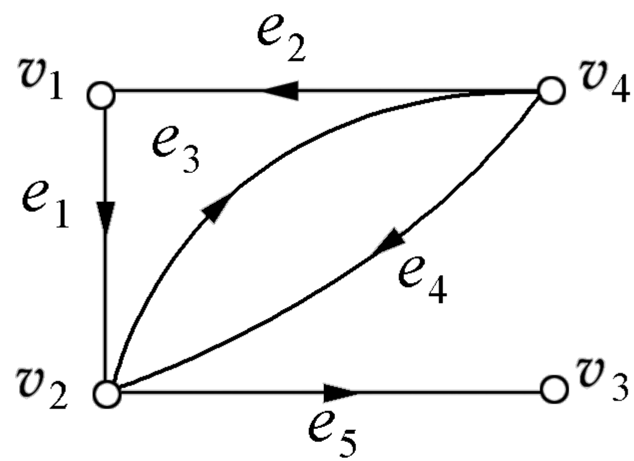
则称$(m_{ij})_{n\times m}$为 D 的关联矩阵，记为 $M(D)$.

有向图的关联矩阵

北京邮电大学 Beijing University of Posts and Telecommunications

- 例如

$$M(D)=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



- 性质

(1) 每一列恰好有一个 1 和一个 -1;

(2) 第 i 行 1 的个数等于 $d^+(v_i)$, -1 的个数等于 $d^-(v_i)$;

(3) 1 的总个数等于 -1 的总个数, 且都等于 m;

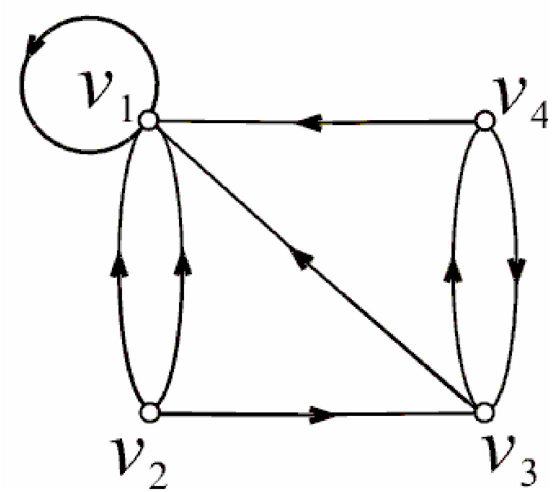
(4) 平行边对应的列相同.

有向图的邻接矩阵

定义 设有向图 $D = <V, E>$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令 $a_{ij}^{(1)}$为顶点 v_i邻接到 v_j的边的条数, 称$(a_{ij}^{(1)})_{m\times n}$为 D 的邻接矩阵, 记作 $A(D)$, 简记为 A.

■ 例

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



有向图的邻接矩阵

■ 性质 (1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^+(v_i), \quad i = 1,2,\ldots,n$

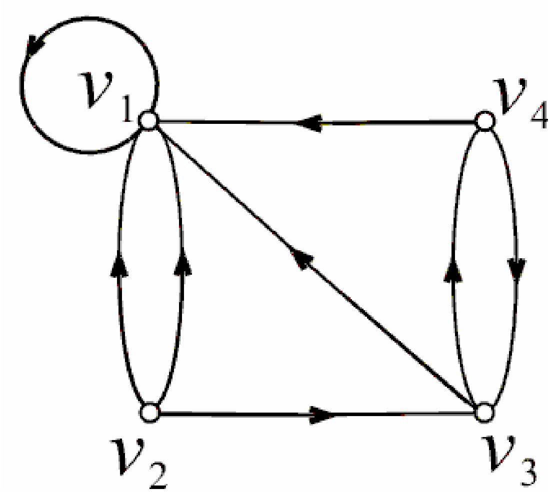
(2) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^-(v_j), \quad j = 1,2,\ldots,n$

(3) $\sum\limits_{i,j} a_{ij}^{(1)} = m$ ---D中长度为1的通路数

(4) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(1)}$ ---D中长度为1的回路数

■ 例

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



D中的通路及回路数

北京郵電大學 Beijing University of Posts and Telecommunications

定理 设 A 为 n 阶有向图 D 的邻接矩阵, 则 $A^l\,(l \geq 1)$ 中的下列元素

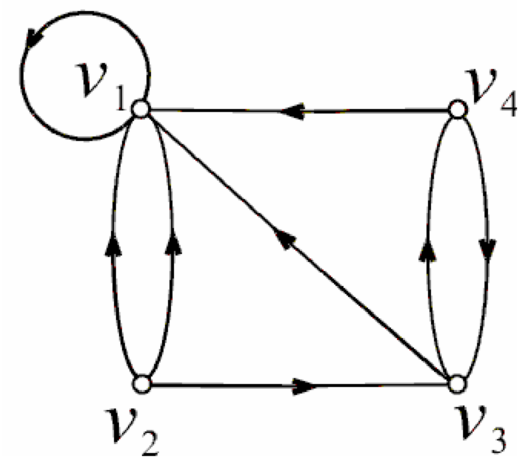
1. $a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中 v_i 到 v_j 长度为 l 的通路数;
2. $a_{ii}^{(l)}$ 为 v_i 到自身长度为 l 的回路数;
3. $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的通路总数;
4. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的回路总数.

D中的通路及回路数

推论 设 $B_l = A + A^2 + \ldots + A^l$ $(l \geq 1)$, 则 B_l中元素

1. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度小于或等于l 的通路数;
2. $\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度小于或等于l 的回路数.

■ 例 在有向图 D 中长度为1, 2, 3, 4的通路各有多少条？其中回路分别为多少条？



D中的通路及回路数

- 例

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}\quad A^2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\3&0&0&1\\2&0&1&0\\2&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\4&0&1&0\\3&0&0&1\\3&0&1&0\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\5&0&0&1\\4&0&1&0\\4&0&0&1\end{bmatrix}$$

长度	通路	回路
1	8	1
2	11	3
3	14	1
4	17	3
合计	50	8

有向图的可达矩阵

定义 设 $D=<V,E>$为有向图, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 令

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{可达}v_j,\\ 0, & v_i\text{不可达}v_j,\end{cases}\quad i,j=1,2,\ldots,n$$

称$(p_{ij})_{n\times n}$为 D **的可达矩阵**, 记作 $P(D)$, 简记为 P.

- **性质**

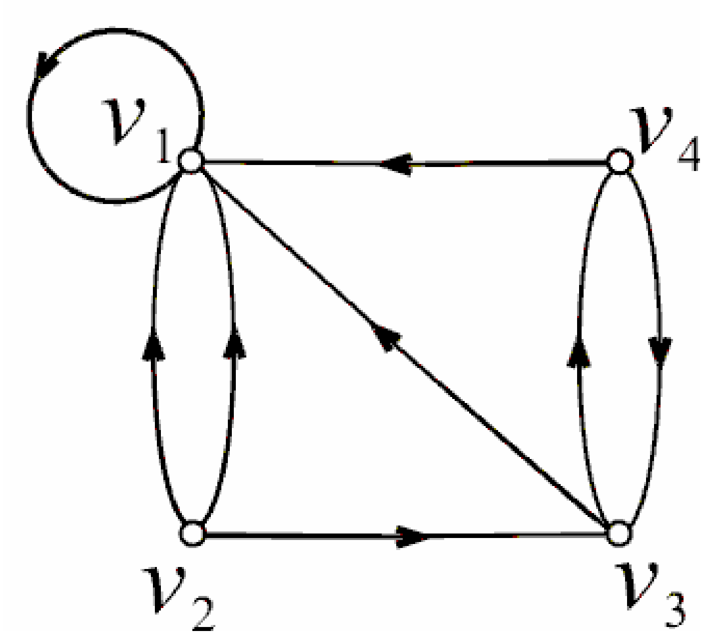
(1) $P(D)$主对角线上的元素全为1.

(2) D强连通当且仅当 $P(D)$ 的元素全为1.

有向图的可达矩阵

■ 例

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



5.4 最短路径, 关键路径与着色

- 带权图
- 最短路径与Dijkstra标号法
- 项目网络图与关键路径
- 着色问题

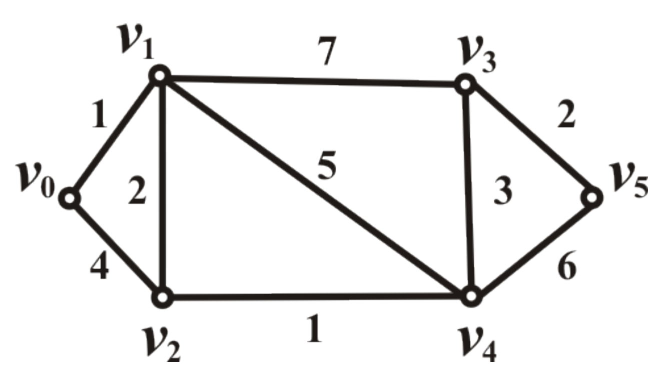
最短路径

- 带权图 $G = \langle V, E, w\rangle$, 其中 $w: E \to R$.
  - 对于 $\forall e \in E$, $w(e)$ 称作 e 的权.
  - $e=(v_i, v_j)$, 记$w(e) = w_{ij}$. 若v_i, v_j不相邻, 记$w_{ij} = \infty$.
- 通路 L 的权: L 的所有边的权之和, 记作$w(L)$.
- u 和 v 之间的最短路径: u 和 v 之间权最小的通路.

- 例

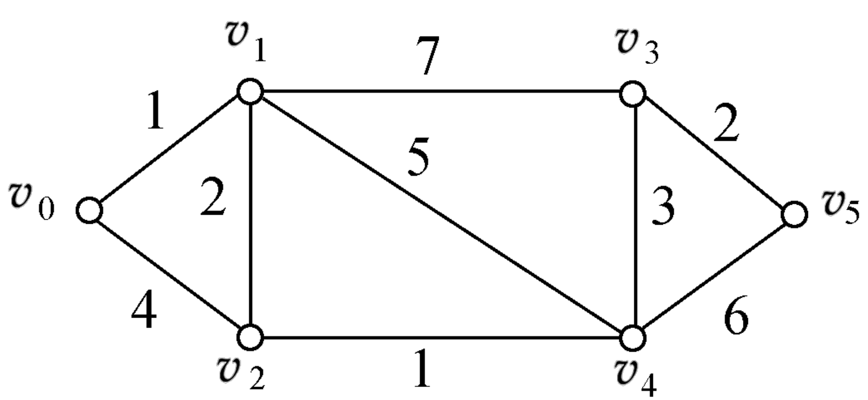
$L_1=v_0v_1v_3v_5$, $w(L_1)=10$

$L_2=v_0v_1v_4v_5$, $w(L_2)=12$



标号法 (E.W.Dijkstra, 1959)

- 设带权图 $G=<V, E, w>$, 其中 $\forall e \in E$, $w(e) \geq 0$.
  - l_j : v_1 到 v_j 的最短距离;
  - p_j : v_1 到 v_j 最短路径上 v_j 的前一个顶点;
  - P : 已求得最短路径的顶点;
  - $T = V - P$: 还未求得最短路径的顶点.



标号法 (E.W.Dijkstra, 1959)

北京郵電大學 Beijing University of Posts and Telecommunications

- 设带权图 $G=<V, E, w>$, 其中 $\forall e \in E$, $w(e) \geq 0$.

➢ 设 $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 求$v_1$到其余各顶点的最短路径

1. 令 $l_1 \leftarrow 0$, $p_1 \leftarrow \lambda$, $l_j \leftarrow +\infty$, $p_j \leftarrow \lambda$, $j = 2, 3, \ldots, n$,
   $P = \{v_1\}$, $T = V - \{v_1\}$, $k \leftarrow 1$, $t \leftarrow 1$.　　// λ表示空
2. 对所有的 $v_j \in T$ 且 $(v_k, v_j) \in E$
   令 $l \leftarrow \min\{l_j, l_k + w_{kj}\}$,
   若 $l = l_k + w_{kj}$, 则令 $l_j \leftarrow l$, $p_j \leftarrow v_k$.
3. 求 $l_i = \min\{l_j \mid v_j \in T_t\}$.
   令 $P \leftarrow P \cup \{v_i\}$, $T \leftarrow T - \{v_i\}$, $k \leftarrow i$.
4. 令 $t \leftarrow t + 1$,
   若 $t < n$, 则转 2.

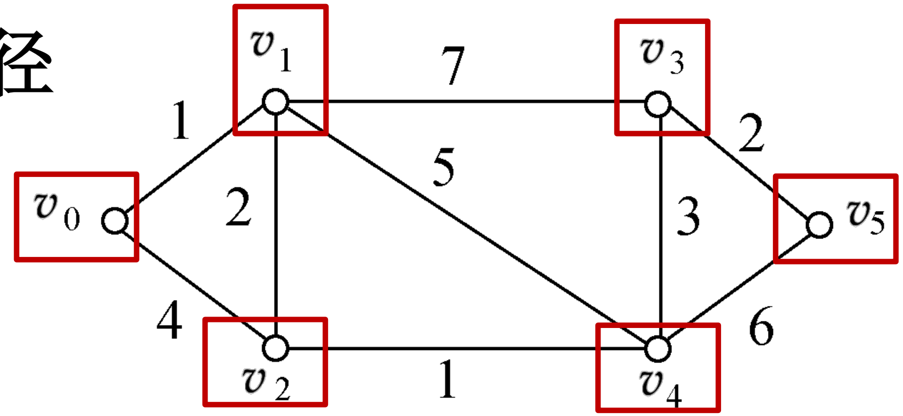
标号法 (E.W.Dijkstra, 1959)

北京邮电大学 Beijing University of Posts and Telecommunications

■ 例 求v_0到v_5的最短路径

解：v_0到v_5的最短路径为：

- ➢ $v_0v_1v_2v_4v_3v_5$
- ➢ $d(v_0,v_5)=9$



t	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
1	$(0, \lambda)^*$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$
2		$(1,v_0)^*$	$(4,v_0)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$
3			$(3,v_1)^*$	$(8,v_1)$	$(6,v_1)$	$(+\infty, \lambda)$
4				$(8,v_1)$	$(4,v_2)^*$	$(+\infty, \lambda)$
5				$(7,v_4)^*$		$(10,v_4)$
6						$(9,v_3)^*$

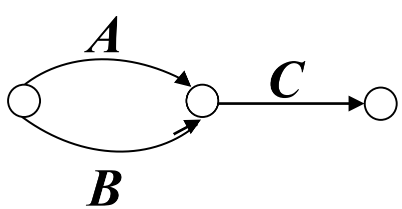
项目网络图

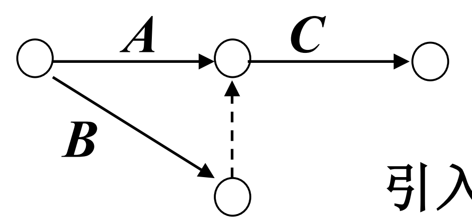
- 项目网络图：表示项目的活动之间的前后顺序的**带权有向图**．边表示活动，边的权是活动的完成时间, 顶点表示事项(项目的开始和结束、活动的开始和结束).

- **要求:**

(1) 有一个始点 (入度为 0) 和一个终点 (出度为 0).

(2) 任意两点之间只能有一条边.





引入虚活动

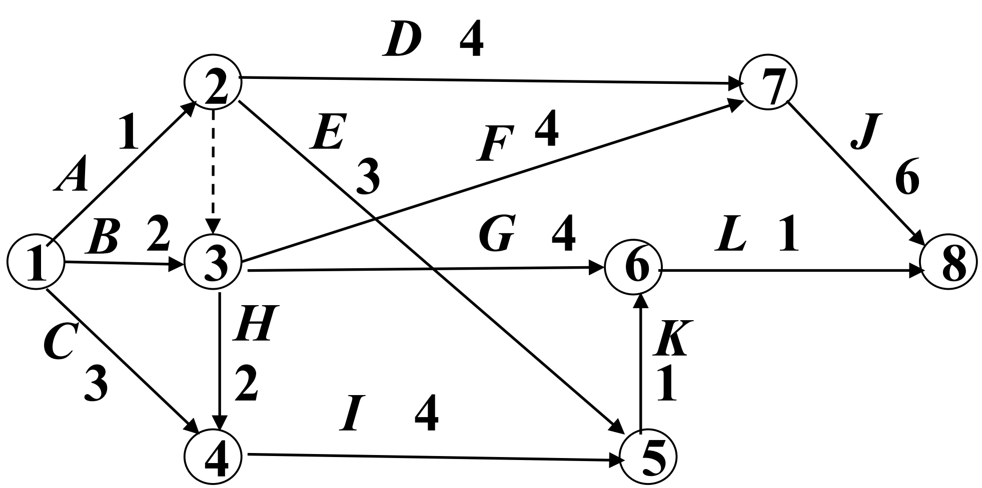
(3) 没有回路.

(4) 每一条边始点的编号小于终点的编号.

项目网络图

■ 实例

活动	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*
紧前活动	–	–	–	*A*	*A*	*A,B*	*A,B*	*A,B*	*C,H*	*D,F*	*E,I*	*G,K*
时间(天)	1	2	3	4	3	4	4	2	4	6	1	1



关键路径

- 关键路径: 项目网络图中从始点到终点的最长路径.
- 关键活动: 关键路径上的活动.
- 设$D = \langle V, E, W\rangle$, $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, 1是始点, n是终点.

(1)事项 i 的最早完成时间 $ES(v_i)$: i 最早可能开始的时间,

即从始点到 i 的最长路径的长度.

$$ES(1) = 0;$$

$$ES(i) = \max\{ES(j) + w_{ji} \mid \langle j, i\rangle \in E\}, \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

(2)事项 i 的最晚完成时间 $LF(i)$: 在不影响项目工期的条件下,

事项 i 最晚必须完成的时间.

$$LF(n) = ES(n)$$

$$LF(i) = \min\{LF(j) - w_{ij} \mid \langle i, j\rangle \in E\}, \quad i = n\text{-}1, n\text{-}2, \ldots, 1.$$

关键路径

(3) 活动$<i, j>$的最早开始时间 $ES(i, j)$: $<i, j>$最早可能开始时间.

(4) 活动$<i, j>$的最早完成时间 $EF(i, j)$: $<i, j>$最早可能完成时间.

(5) 活动$<i, j>$的最晚开始时间 $LS(i, j)$: 在不影响项目工期的条件下, $<i, j>$最晚必须开始的时间.

(6) 活动$<i, j>$的最晚完成时间 $LF(i, j)$: 在不影响项目工期的条件下, $<i, j>$最晚必须完成的时间.

(7) 活动$<i, j>$的缓冲时间 $SL(i,j)$:

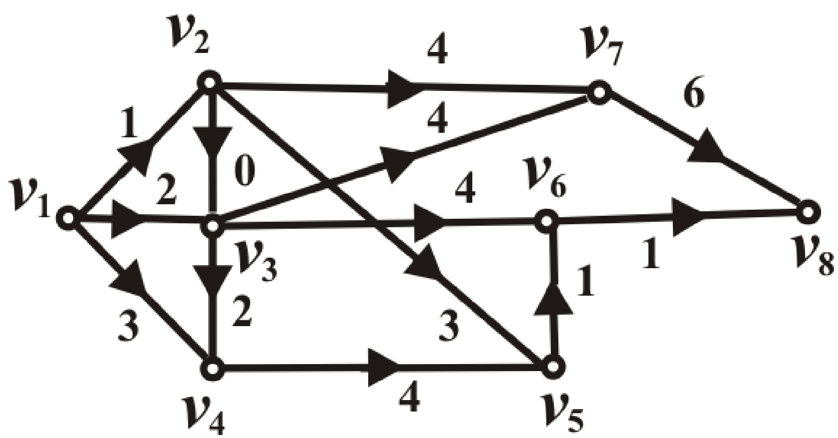
$$SL(i,j) = LS(i, j) - ES(i, j) = LF(i, j) - EF(i, j).$$

显然, $ES(i, j) = ES(i), \quad EF(i, j) = ES(i) + w_{ij},$

$$LF(i,j) = LF(j), \quad LS(i, j) = LF(j) - w_{ij}.$$

关键路径

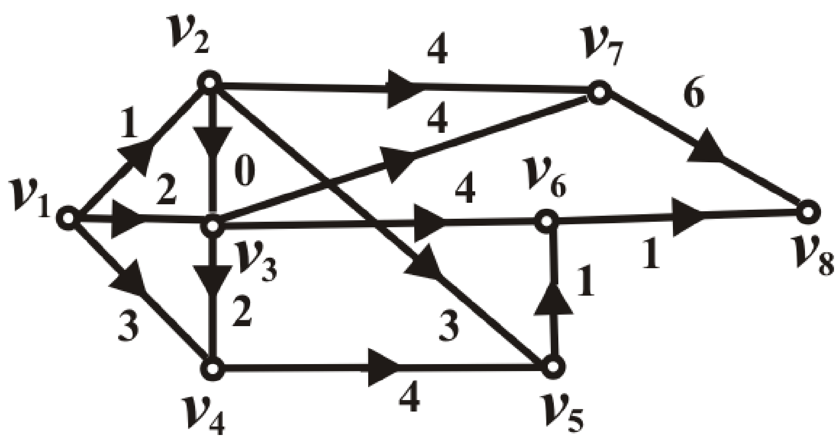
- 例 各事项的最早开始时间:



1. $ES(1) = 0$
2. $ES(2) = \max\{0+1\} = 1$
3. $ES(3) = \max\{0+2, 1+0\} = 2$
4. $ES(4) = \max\{0+3, 2+2\} = 4$
5. $ES(5) = \max\{1+3, 4+4\} = 8$
6. $ES(6) = \max\{2+4, 8+1\} = 9$
7. $ES(7) = \max\{1+4, 2+4\} = 6$
8. $ES(8) = \max\{9+1, 6+6\} = 12$

关键路径

- 例 各事项的最晚完成时间:

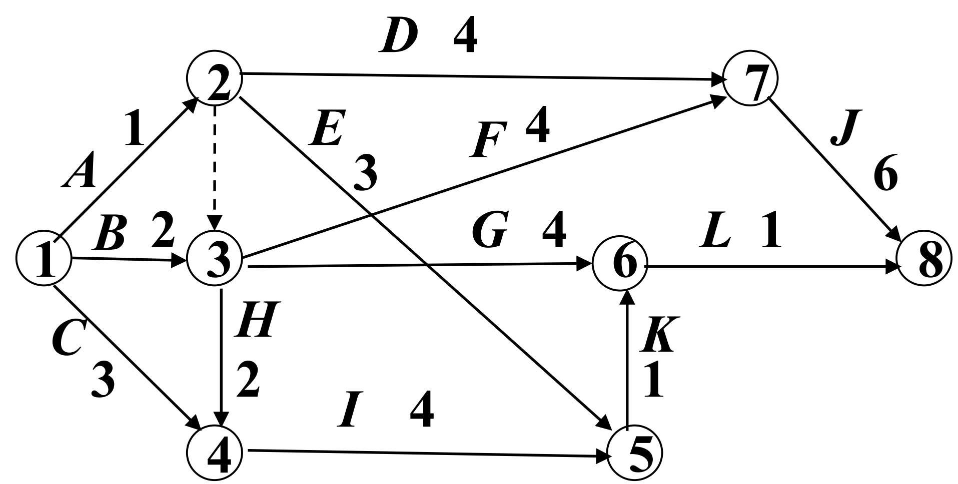


1. $LF(8) = 12$
2. $LF(7) = \min\{12\text{-}6\}=6$
3. $LF(6) = \min\{12\text{-}1\}=11$
4. $LF(5) = \min\{11\text{-}1\}=10$
5. $LF(4)=\min\{10\text{-}4\}=6$
6. $LF(3)=\min\{6\text{-}2,11\text{-}4,6\text{-}4\}=2$
7. $LF(2)=\min\{2\text{-}0,10\text{-}3,6\text{-}4\}=2$
8. $LF(1)=\min\{2\text{-}1,2\text{-}2,6\text{-}3\}=0$

关键路径

活动	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*
ES	0	0	0	1	1	2	2	2	4	6	8	9
EF	1	2	3	5	4	6	6	4	8	12	9	10
LS	1	0	3	2	7	2	7	4	6	6	10	11
LF	2	2	6	6	10	6	11	6	10	12	11	12
SL	1	0	3	1	6	0	5	2	2	0	2	2

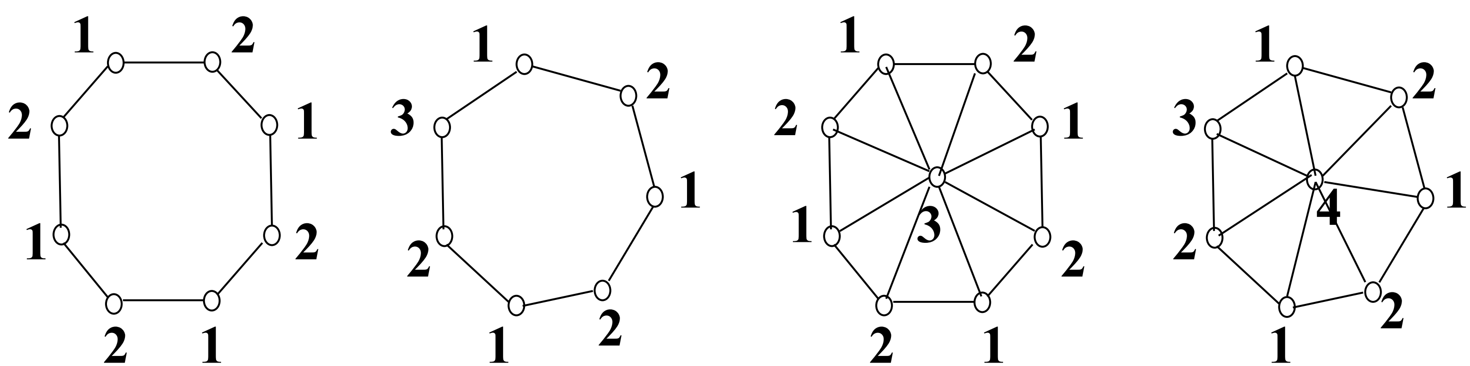
- 总工期: 12天
- 关键路径: $v_1v_3v_7v_8$
- 关键活动: *B*, *F*, *J*



着色

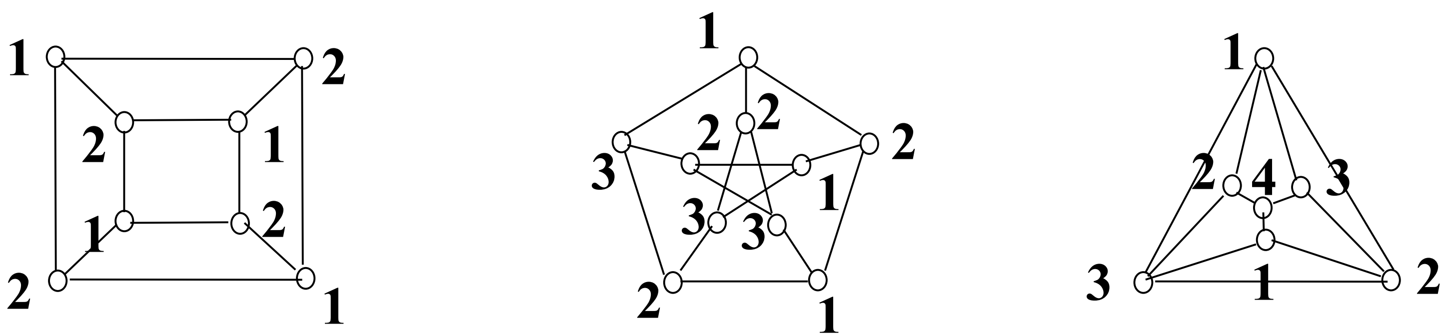
- 定义 设无向图 G 无环, 对 G 的每个顶点涂一种颜色，使相邻的顶点涂不同的颜色，称为图 G 的一种点着色，简称着色．若能用k种颜色给G的顶点着色，则称G是k-可着色的.
- 图的着色问题: 用尽可能少的颜色给图着色.

■ 例如



着色

■ 实例

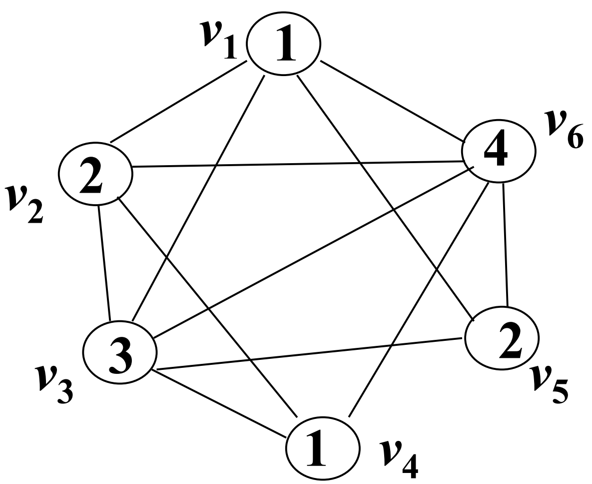


着色

- 例 学生会下设 6 个委员会:

  第一委员会={张, 李, 王}, 第二委员会={李, 赵, 刘},
  第三委员会={张, 刘, 王}, 第四委员会={赵, 刘, 孙},
  第五委员会={张, 王}, 第六委员会={李, 刘, 王}.

  每个月每个委员会都要开一次会, 为确保每个人都能参加所在委员会会议, 6个会议至少排在几个不同时间段?



解: 至少要4个时段

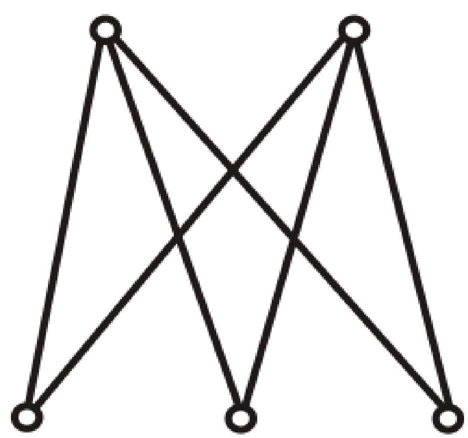
- 第 1 时段: 一, 四;
- 第 2 时段: 二, 五;
- 第 3 时段: 三;
- 第 4 时段: 六.

特殊的图

- 6.1 二部图
- 6.2 欧拉图
- 6.3 哈密顿图
- 6.4 平面图

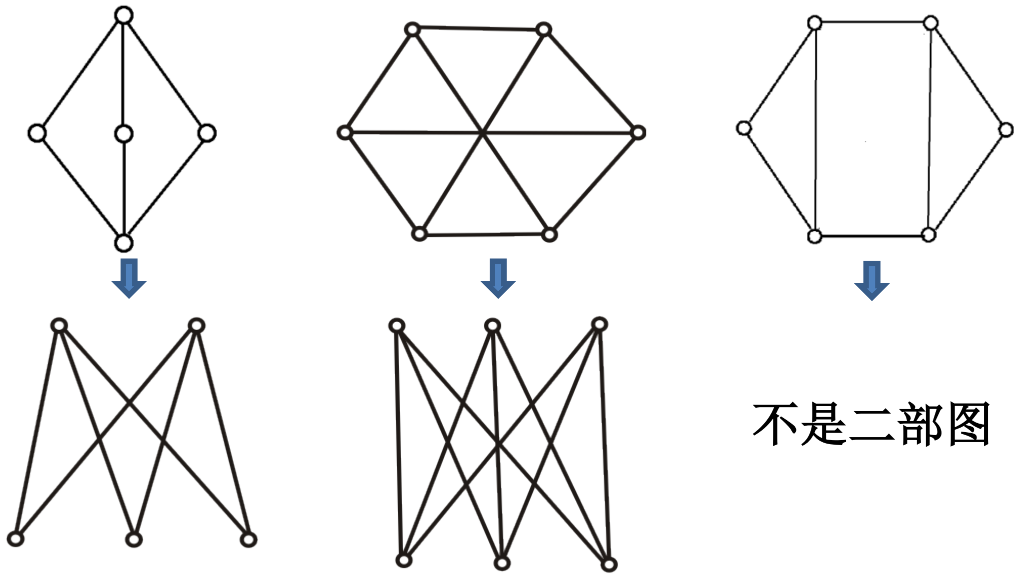
二部图

- **定义** 设无向图 $G=\langle V, E\rangle$, 若能将 V 划分成 V_1 和 V_2，且 $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, 并且对于 G 中的每条边，两个端点一个属于 V_1, 另一个属于 V_2, 则称 G 为二部图, 记为 $\langle V_1, V_2, E\rangle$.



二部图

■ 例 下述各图是否是二部图?



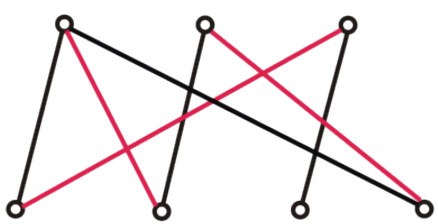
□定理

无向图 $G = \langle V, E\rangle$是二部图当且仅当G 中无长度为奇数的回路.

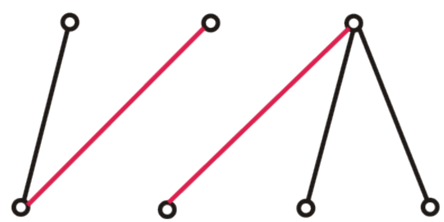
二部图

- 匹配 (边独立集) : 任 2 条边均不相邻的边子集.
- 极大匹配、最大匹配、完备匹配、完美匹配.

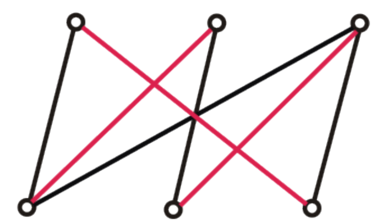
- 例



完备,不完美



不完备

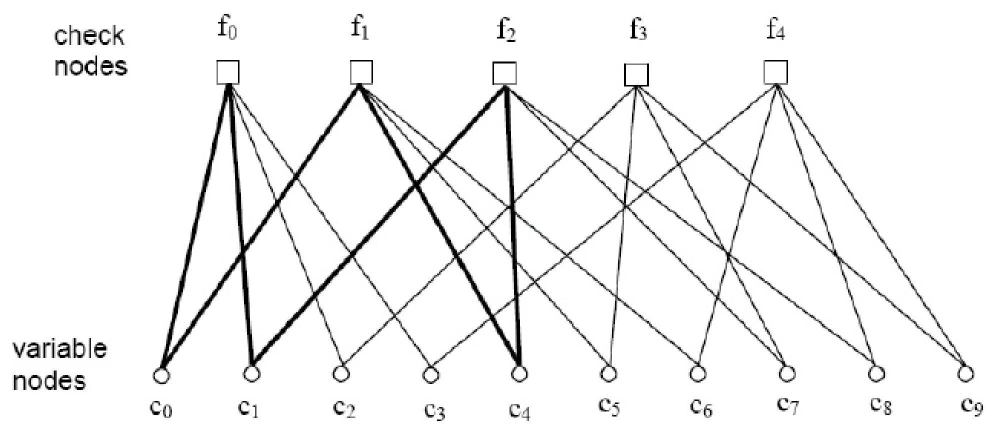


完美

二部图应用

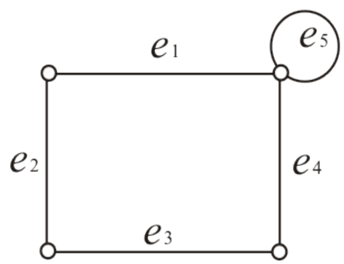
- 低密度校验 (Low-density Parity-check, LDPC) 码是一类线性码，可以由校验矩阵 H 定义，广泛应用于通信、存储等领域.
- 例如：2元 [10, 5] LDPC 码

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

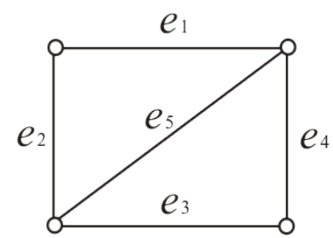


欧拉图

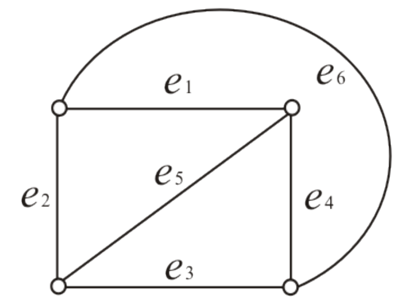
- 欧拉回路(通路): 图中行遍所有顶点且恰好经过每条边一次的回路(通路).
- 欧拉图: 有欧拉回路的图.
- 半欧拉图: 有欧拉通路,但无欧拉回路的图.



欧拉图



半欧拉图

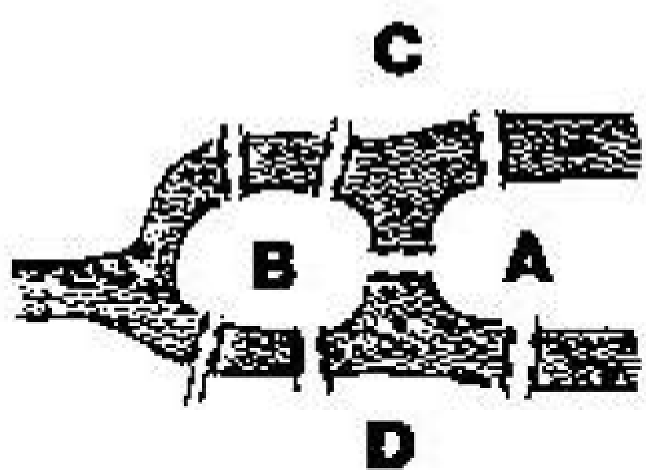


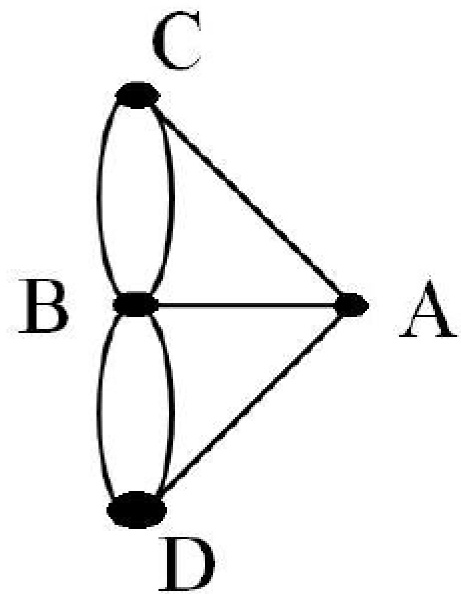
不是

- 定理 无向图 G 为欧拉图当且仅当 G 连通且无奇度顶点. G是半欧拉图当且仅当 G 连通且恰有两个奇度顶点.

欧拉图

- 例 哥尼斯堡七桥问题





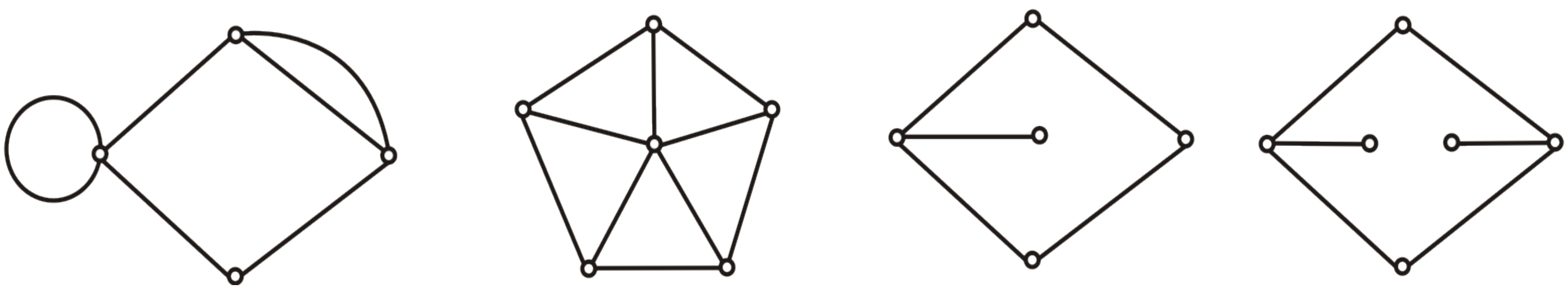
◆ 解：**4个奇度顶点**

➢ 不存在欧拉通路;

➢ 更不存在欧拉回路.

哈密顿图

- 哈密顿路(通路): 图中行遍所有顶点一次且仅一次的回路(通路).
- 哈密顿图: 有哈密顿回路的图.
- 半哈密顿图: 有哈密顿通路, 但无哈密顿回路的图.

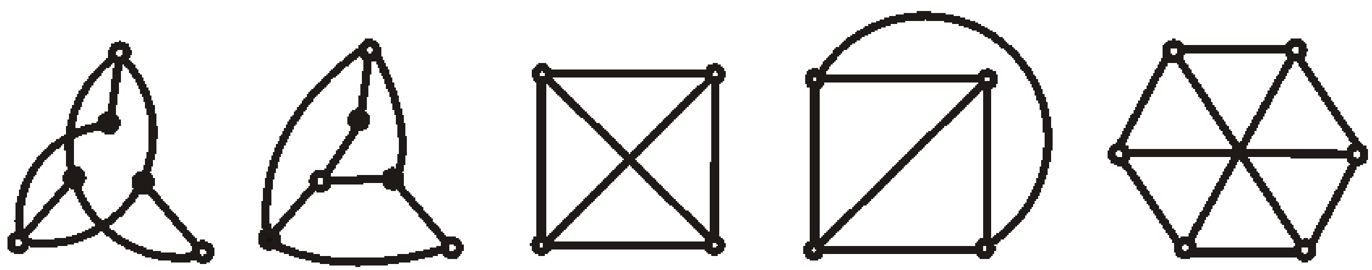


哈密顿图　　哈密顿图　　半哈密顿图　　不是

平面图

- 定义 如果能将图G除顶点外边不相交地画在平面上, 则称 G 是平面图. 这个画出的无边相交的图称作 G 的平面嵌入. 没有平面嵌入的图称作非平面图.

- 例如 下图中(1)~(4)是平面图, (2)是(1)的平面嵌入，(4)是(3)的平面嵌入. (5)是非平面图.



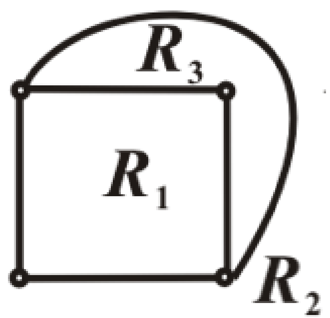
(1) (2) (3) (4) (5)

平面图

■ 定理 (欧拉公式)

设 G 为 n 阶 m 条边 r 个面的连通平面图, 则

$$n - m + r = 2.$$



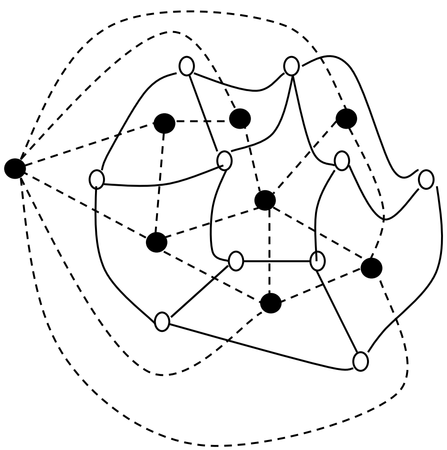
■ 推论

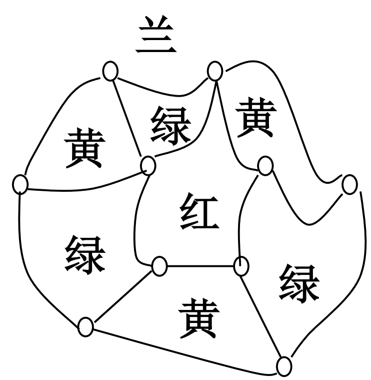
设 G 是有 p ($p \geq 2$) 个连通分支的平面图, 则

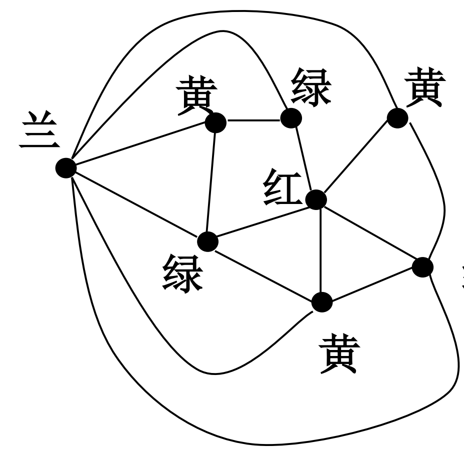
$$n - m + r = p + 1$$

平面图

- 地图着色：地图对应平面图的每一个面是一个国家.若两个国家有公共边界,则称它们是相邻的. 对每个国家涂一种颜色，使相邻的国家涂不同的颜色，要求用尽可能少的颜色给地图着色.







- 四色定理: 任何地图都可以用4种颜色着色, 即任何平面图都是4-可着色的.

❑ 作业

- **5.19**
- **5.20**
- **5.22**