Note Title 2017/11/3

分块矩阵：当处理矩阵阶数较大时常需要分块。

1. $A = \left[\begin{array}{c|c|c}
a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots a_{mn}
\end{array}\right] = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n] = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$

α_i 为 $m\times 1$ 之矩阵

β_j 为 $1\times n$ 之矩阵.

$= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$

2. 运算：① A、B 为同型矩阵，用相同之划分方法分块

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rs} \end{bmatrix}$$

A_{ij} 与 B_{ij} 为同型矩阵

$$A+B = \begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1s}+B_{1s} \\ A_{21}+B_{21} & \cdots & A_{2s}+B_{2s} \\ \vdots & & \\ A_{r1}+B_{r1} & \cdots & A_{rs}+B_{rs} \end{bmatrix}$$

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1s} \\ \vdots & & \\ \lambda A_{r1} & \cdots & \lambda A_{rs} \end{bmatrix}$$

转置 $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix}$

$$A^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{r1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & & A_{r2}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1s}^T & A_{2s}^T & & A_{rs}^T \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right]$$

$$A^T = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ \hline 3 & 6 & 9 \end{array}\right]$$

乘法：

$2\times 1 \quad 1\times 3$

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

求 AB

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & O_{2\times 2} \\ A_{21} & I_2 \end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix} B_{11} & O \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$A_{11}B_{11} + O B_{21}$$

$$(2\times 1)(1\times 2) + (2\times 2)*(2\times 2)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + O\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & 1 & 3 & 1 \\ \cdots & \cdots & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & & \\ B_{s1} & \cdots & B_{st} \end{bmatrix}$$

A的列分法与B的行分法相同。

$$C = AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1t} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rt} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{is}B_{sj}$$

$\alpha_i : n \times 1$

例2: $A_{m\times n}$ $B_{n\times s}$, $B = [\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_s]$

$$AB = [A\alpha_1, A\alpha_2 \cdots A\alpha_s]$$

$\underset{m\times n}{A}\,\underset{n\times s}{B} = O_{m\times s}$ $[A\alpha_1, A\alpha_2 \cdots A\alpha_s] = O_{m\times s}$.

从而 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_s$ 为 $AX=0$ 的解。

即 $AB = O \Rightarrow B$ 的每一列均为 $AX=0$ 的解

例: $A_{m\times n} B_{n\times s} = O_{m\times s}$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} B_{n\times s} = O_{m\times s}$$ $\beta_i : 1\times n$ 的矩阵

$$\begin{bmatrix} \beta_1 B \\ \beta_2 B \\ \vdots \\ \beta_m B \end{bmatrix} = O_{m\times s}$$

$\underbrace{\beta_1 B = 0}$

$\beta_2 B = 0$

$\vdots$

$\beta_m B = 0$

$B^T\beta_1^T = O_{s\times 1}$ $B^T\beta_2^T = O_{s\times 1}$ $\cdots$ $B^T\beta_m^T = O_{s\times 1}$

即 $A_{m\times n} B_{n\times s} = O_{m\times s}$. A的每一行的转置

均为 $B^T X = 0$ 的解.

定义：准上三角形

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & A_{ss} \end{bmatrix}$$

A_{ij} 为矩阵

且 A_{ii} 为方阵

例如：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

不是上三角形

但可看成准上三角

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s \end{bmatrix} = diag(\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_s)$$

准对角形

$$\begin{bmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{ss} \end{bmatrix}$$

A_{ii} 为方阵

$$= diag(A_{11}, A_{12} \cdots A_{ss})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & 3 & & \\ & 4 & 5 & & \\ & & & 6 & 7 \\ & & & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

- 分块矩阵求逆

例： $A = \begin{bmatrix} B & D \\ 0 & C \end{bmatrix}$ B，C 均为可逆方阵.

证明：A 可逆，并求 A^{-1}

证明：设 $\begin{bmatrix} X & Z \\ W & Y \end{bmatrix}$ 满足

$$\begin{bmatrix} B_n & D_{n\times m} \\ \underset{m\times n}{0} & C_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_n & Z_{n\times m} \\ \underset{m\times n}{W} & Y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & \\ & I_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} BX + DW = I \\ BZ + DY = 0 \\ CW = 0 \Rightarrow C^{-1}CW = C^{-1}0 \quad W = 0 \\ CY = I \Rightarrow Y = C^{-1}. \end{cases}$$

$$BZ = -DY = -DC^{-1} \Rightarrow Z = -B^{-1}DC^{-1}.$$

$$X = B^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} B & D \\ 0 & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix}$$

分块矩阵之初等变换：

$$M=\begin{bmatrix} A_s & B \\ C & D_t \end{bmatrix}$$ A、D为方阵

① 用可逆矩阵P左乘M之某一子行

② 用矩阵Q左乘M之某一子行加到另一子行

③ 交换M之两个子行

$$\left[\begin{array}{c|c} P_s & 0 \\ \hline 0 & I_t \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} A_s & B \\ \hline C & D_t \end{array}\right]=\begin{bmatrix} PA & PB \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ Q_{t\times s} & I_t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_s & B_{s\times t} \\ \underline{\underline{C_{t\times s}}} & D_t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ QA+C & QB+D \end{bmatrix}$$

第一子行左乘 $Q_{t\times s}$ 加到第二子行.

$$\left[\begin{array}{cc} 0 & I_t \\ \hline I_s & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} A_s & B \\ C & D_t \end{array}\right]=\begin{bmatrix} C & D \\ A & B \end{bmatrix}$$

例1： $A=\begin{bmatrix} B & D \\ 0 & C \end{bmatrix}$ B、C为可逆方阵

求 A^{-1}

解： $[A \,\vdots\, I]=\left[\begin{array}{cc|cc} B_n & D & I_n & 0 \\ 0 & C_m & 0 & I_m \end{array}\right]$

第一子行左乘 B^{-1} →
第二子行左乘 C^{-1}

$$\left[\begin{array}{cc|cc} I_n & B^{-1}D & B^{-1} & 0 \\ 0 & I_m & 0 & \underline{C^{-1}} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{加到第一行}]{\text{第二行左乘 } -B^{-1}D} \left[\begin{array}{cc|cc} I_n & 0 & B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ 0 & I_m & 0 & C^{-1} \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix}$$

例2: $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ A可逆方阵 且 D为方阵.

① 求 $|M|$ ② 给出 M 可逆的条件，并求出 M^{-1}

解: $$[M \mid I] = \left[\begin{array}{cc|cc} A_n & B_{n\times m} & I_n & 0 \\ C_{m\times n} & D_m & 0 & I_m \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{第一行左乘 } A^{-1}} \left[\begin{array}{cc|cc} I_n & A^{-1}B & A^{-1} & 0 \\ C & D & 0 & I_m \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{加到第二行}]{\text{第一行左乘}(-C)} \left[\begin{array}{cc|cc} I & A^{-1}B & A^{-1} & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B & -CA^{-1} & I_m \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & \\ & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

两边取行列式

$$\begin{vmatrix} I & 0 \\ -C & I \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A^{-1} & \\ & I \end{vmatrix} |M| = \begin{vmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{vmatrix}$$

$$1\cdot|A^{-1}|\cdot 1\ \ |M| = |D-CA^{-1}B|$$

$$|M| = |A|\cdot|D-CA^{-1}B|$$

② $|M|\neq 0$ 时 M 可逆. 从而

M 可逆 $\Longleftrightarrow$ $D-CA^{-1}B$ 是可逆的

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -C & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{-1} & \\ & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

当 M 可逆时:

$$M = \begin{bmatrix} A^{-1} & \\ & I \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} I & 0 \\ -C & I \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} \Longrightarrow \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} I & 0 \\ -C & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{-1} & \\ & I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ -C & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{-1} & \\ & I \end{bmatrix}$$

看例1

- $\begin{vmatrix} A_m & B \\ 0 & C_n \end{vmatrix} = |A|\cdot|C|$

- $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq |A||D| - |B||C|$

例3：$|A|=2$，$|B|=3$。A是n阶方阵，B是m阶方阵。

求 $\begin{vmatrix} 0 & A_n \\ B_m & * \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$

$= 6(-1)^{mn}$.

例4：构造 $M = \begin{bmatrix} A_n & 0 \\ -I & B_n \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ -I & B \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{第二行左乘A加到第一行}]{\text{行}} \begin{bmatrix} 0 & AB \\ -I & B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ -I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & AB \\ -I & B \end{bmatrix}$$

两边取行列式 $\begin{vmatrix} A & 0 \\ -I & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & AB \\ -I & B \end{vmatrix}$

$$|A||B| = (-1)^{n^2}\begin{vmatrix} AB & 0 \\ B & -I \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n^2}|AB|\cdot|-I| = (-1)^{n^2}|AB|(-1)^{n}$$

$$= (-1)^{n^2+n}|AB|$$

$$= \underbrace{\cancel{(-1)^{n(n+1)}}}_{=1}|AB|$$

又一次证明了 $|AB| = |A|\cdot|B|$

例: $M=\begin{bmatrix} & & A_1 \\ & A_2 & \\ \cdots & & \\ A_s & & \end{bmatrix}$ A_i 可逆 求 M^{-1}

$$[M \vdots I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} & & & A_1 & I_1 & & & \\ & & A_2 & & & I_2 & & \\ & \cdots & & & & & \ddots & \\ A_s & & & & & & & I_s \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} A_s & & & & & & & I_s \\ & A_{s-1} & & & & & I_{s-1} & \\ & & \ddots & & & \cdots & & \\ & & & A_1 & I_1 & & & \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} I_s & & & & & & & A_s^{-1} \\ & I_{s-1} & & & & & A_{s-1}^{-1} & \\ & & \ddots & & & \cdots & & \\ & & & I_1 & A_1^{-1} & & & \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_s & & & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & A_{s-1}^{-1} & \\ & \iddots & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$$

特别的 $$\begin{bmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & \frac{1}{\lambda_n} \\ & & \frac{1}{\lambda_{n-1}} & \\ & \iddots & & \\ \frac{1}{\lambda_1} & & & \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 \cdots \lambda_n \neq 0$$

例: $A \in M_{m,n}$ $B \in M_{n,m}$

则 $|I_m - AB| = |I_n - BA|$.