Note Title 2017/12/20

① 秩的3种语言 $\begin{cases} \text{矩阵语言.} \\ \text{向量组语言} \\ \text{方程组.} \end{cases}$

例1: 证明: $A \in M_{m,n}(K)$ $B \in M_{n,s}(K)$

$AB = 0$ 则 $r(A) + r(B) \le n$

证1: $r(A)+r(B)-n \le r(AB) \le r(A), r(B)$

当 $AB=0$ 时 $r(AB)=0 \ge \Rightarrow r(A)+r(B) \le n$

证2:

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 0 & -AB \\ I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & B \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{列}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

$$r\begin{bmatrix} A & 0 \\ I & B \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} = n$$

$\ge r(A) + r(B)$

$r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = r(A) + r(B)$

$r\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix} \ge r(A) + r(B)$

$\to \begin{bmatrix} \ddots & \\ * & \ddots \end{bmatrix}$

$r(A) + r(B) \le n$

证3: $$AB = 0$$

$$A[\beta_1 \ \beta_2 \cdots \ \beta_s] = [0, 0, \cdots, 0]$$

$$A\beta_1 = 0 \quad A\beta_2 = 0, \ \cdots, \ A\beta_s = 0$$

$\beta_1 \ \beta_2 \cdots \ \beta_s$ 均为 $AX=0$ 的解

$\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_s$ 可由 $AX=0$ 基础解系 $\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_{n-r(A)}$ 表出

$\beta_1 \cdots \beta_s$ 极大无关组 可由 $\eta_1 \cdots \eta_{n-r(A)}$ 表出.

所以 $\quad r(\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_s) \leq n - r(A)$

即 $\quad r(B) \leq n - r(A)$

$$r(A) + r(B) \leq n.$$

例2: 证明: $r(AB) \leq r(A), r(B)$

证: $\quad BX = 0 \Longrightarrow ABX = A0 = 0$

即 $BX=0$ 的解 均为 $ABX=0$ 的解

$BX=0$ 之解 均可由 $ABX=0$ 之基础解系表出

从而 $BX=0$ 基础解系 可由 $ABX=0$ 基础解系表出

故 $\quad s - r(B) \leq s - r(AB)$

$$r(AB) \leq r(B).$$

法2: 矩阵语言 (看笔记) 第10讲 Page 8

法3: 向量组语言.

记 $C = AB \quad$ C 的每一列可由 A 之列向量组表出.

C 之列向量组由 A 列向量组表出

C列向量组之极大无关组由A列向量之极大无关组表出

$$r(C) \leq r(A)$$

即 $r(AB) \leq r(A)$.

向量空间 $\mathbb{R}^n$.　空间：具有一定结构之集合

① 基．坐标．

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

1) $e_1 \cdots e_n$ 线性无关

2) $e_1 \cdots e_n \in \mathbb{R}^n$.　$\forall \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

$$\beta = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \cdots + b_n e_n$$

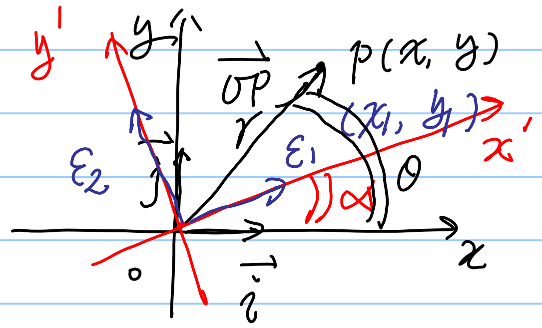
$e_1\ e_2 \cdots e_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 一组基向量.

Note：有限向量：
极大无关组
个数：秩
元素个向量：基.
维数

$\dim \mathbb{R}^n = n$　称 $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ 为 β 在 $e_1 . e_2 \cdots e_n$ 下之坐标.

1. * 基变换公式 与 坐标变换公式:

坐标轴之旋转公式:



$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} = [\vec{i}, \vec{j}]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

问: (x, y) 与 (x_1, y_1)

ε_1. ε_2 单位向量.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = r\cos(\theta-\alpha) \\ y_1 = r\sin(\theta-\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = r(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha) = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y_1 = r(\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha) = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y_1 = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

旋转矩阵.

$$\overrightarrow{OP} \overset{\text{旧坐标}}{=} x\vec{i} + y\vec{j} = [\vec{i}, \vec{j}]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{新坐标}}{=} x_1\vec{\varepsilon_1} + y_1\vec{\varepsilon_2} = [\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}]\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}]\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = [\vec{i}, \vec{j}]$$

$\mathbb{R}^n$ 中有2组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n$. $\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_n$

则 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 与 $\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_n$ 等价的.

$$[\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n] = [\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_n] A_n$$

$$[\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_n] = [\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n] B_n$$

$$\Rightarrow [\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n] = [\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n] B A$$

$$[\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n](I - BA) = 0$$

由于 $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$ 线性无关 $\Rightarrow BA = I$. 同理 $AB = I$

故 A 可逆, $A^{-1} = B$.

定义: 若 $[\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n] = [\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_n] A$

称 A 为 $\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_n$ 到 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n$ 的过渡矩阵

Note: ① 过渡矩阵是可逆矩阵

② $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n$ 到 $\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_n$ 的过渡矩阵 A^{-1}.

② 坐标变换: 从 $\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_n$ 到 $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$ 过渡矩阵 ~~为~~ A

$\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$. α 在 $\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_n$ 下坐标为 X

α 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n$ 下坐标为 Y

$$[\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n] = [\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_n] A$$

$$\alpha = [\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_n] X$$

$$\alpha = [\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n] Y$$

$$= [\eta_1 \ \eta_2 \cdots \eta_n] A Y$$

故 $X = AY \qquad Y = A^{-1} X$

例：$\mathbb{R}^3$ 中. $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\alpha_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\beta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\beta_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

求：① $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 之过渡矩阵

③ γ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ 求 γ

在 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下之坐标.

解：$[\beta_1, \beta_2, \beta_3] = \underline{[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] A}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

增阵：$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & -4 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & -4 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & -4 & -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\beta_1 . \beta_2 . \beta_3] = [\alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3] A.$$

$$V = [\alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = [\beta_1 . \beta_2 . \beta_3] A^{-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

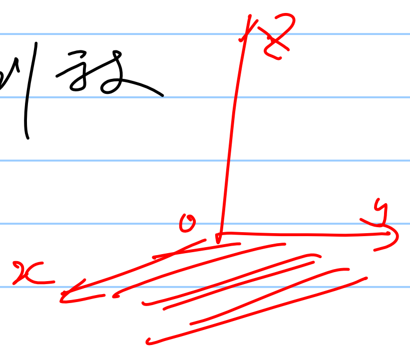
即 V 在 $[\beta_1 . \beta_2 . \beta_3]$ 下的坐标为 $A^{-1}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$

2. 子空间:

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ 是一个向量空间 $W \subseteq \mathbb{R}^n$

$(W, +, \cdot)$ 仍构成一个向量空间. 则称

W 为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间



例如：$\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R}\right\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 子空间.

Note：为何研究子空间：当线性空间 V 维数很大时，通过研究子空间起到"降维"作用.

定义：$W \subseteq \mathbb{R}^n$，W 为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间

$\iff$ W 对 $\mathbb{R}^n$ 中的加法与数乘封闭.

例：$A \in M_{m,n}(K)$　　$r(A) < n$

$AX=0$ 有非零解

$N(A) = \{ X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0 \}$

$X_1, X_2 \in N(A)$　　$AX_1 = 0$　　$AX_2 = 0$

$\Rightarrow A(X_1 + X_2) = 0$

$A(kX_1) = 0$

$X_1 + X_2 \in N(A)$

$kX_1 \in N(A)$

即 $N(A) = \{ X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0 \}$ 对加法数乘封闭. $N(A)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间

称 $N(A)$ 为 $AX=0$ 之解空间，也叫 A 之

(化)零空间　　$N(A)$ 之一组基为 $AX=0$ 基础解系

$$\dim N(A) = n - r(A)$$

解集

例2：$\{X\in\mathbb{R}^n \mid AX=b\}$ $b\neq 0$，不是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间

$X_1, X_2 \in \{X\in\mathbb{R}^n \mid AX=b\}$

$AX_1=b$，$AX_2=b \Rightarrow A(X_1+X_2)=2b$

对加法不封闭

* 生成子空间：$\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_s \in \mathbb{R}^n$.

称 $\{k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s \mid k_1\cdots k_s\in\mathbb{R}\}$ 为

$\beta_1, \beta_2\cdots\beta_s$ 之生成子空间，记作

$$\mathcal{L}(\beta_1, \beta_2\cdots\beta_s)$$

Note

$\mathcal{L}(\beta_1, \beta_2\cdots\beta_s)$ 一组基为 $\beta_1, \beta_2\cdots\beta_s$ 之极大无关组，

$$\dim \mathcal{L}(\beta_1, \beta_2\cdots\beta_s) = r(\beta_1, \beta_2\cdots\beta_s)$$