Note Title 2017/10/20

$A \in M_n(\mathbb{R})$ $\quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2 \times (-1) \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\underbrace{4 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5 \times (-1) \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 6 \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

定理. $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |A| & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

例1: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ 每个元素的代数余子式为 A_{ij}

$$4A_{11} + A_{12} + 2A_{14} = 0$$

$$A_{11} + A_{12} + 2A_{13} - A_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

求 $M_{21}-M_{22}+M_{23}+M_{24} = -A_{21}-A_{22}-A_{23}+A_{24}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Cramer法则（只能处理方程个数=未知量个数的方程组）

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

当系数矩阵 $|A|\neq 0$ 时 方程组有唯一解

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|} \quad x_2=\frac{|A_2|}{|A|} \quad \cdots \quad x_n=\frac{|A_n|}{|A|}$$

Note: 1. $|A|=0$ 时 无解或无穷多解

2. 理论结论，实际中用处很少

记: $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 增广矩阵 $\left[A \,\middle|\, \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}\right]=\tilde{A}$

$$\tilde{A} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccccc|c} c_1 & \cdots & c_{j_2} & \cdots & c_{j_r} & \cdots & c_n & d_1 \\ 0 & \cdots & c_{2j_2} & \cdots & c_{2j_r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \ddots & c_{rj_r} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \end{array}\right]$$

$c_1, c_{2j_2}\cdots c_{rj_r}\neq 0$.

$|A| = k|J| \quad k \neq 0$

若 $|A| \neq 0$ 时 必有 $|J| \neq 0$ $\quad J = \begin{bmatrix} c_{11} & & * \\ & c_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & c_{nn} \end{bmatrix}$

$c_{11}\ c_{22} \cdots c_{nn} \neq 0$ 方程组有唯一解.

当 $|A| = 0$ 时 $|J| = 0$，一定有零行. 解不唯一.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & \times A_{1j} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 & \times A_{2j} \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n & \times A_{nj} \end{cases}$$

$+$

$$|A|\, x_j = |A_j| \qquad x_j = \frac{|A_j|}{|A|}$$

第二章 矩阵.

1 由 $m \times n$ 个数排成数表 称为矩阵.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad A = (a_{ij})_{m \times n}$$

$M_{m.n}(\mathbb{R})$ 实数域上 m 行 n 列 矩阵之全体

$$A \in M_{m.n}(\mathbb{R})$$

$M_n(\mathbb{R})$ 实数域上全体 n 阶方阵之集合.

Note: $n\times 1$ 矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ 列向量

$1\times n$ 矩阵 $[b_1, b_2 \cdots b_n]$ 行向量.

零矩阵 $O_{m\times n}$. O

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq [0, 0]$

方阵 $(m=n)$

- 上三角阵 $\begin{bmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$
- 下三角阵
- 对角阵 $\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$
- 纯量矩阵 (数量矩阵 $\begin{bmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{bmatrix} = aE$.
- 单位矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = E$, I.

初等矩阵 (基本矩阵). $E_{ij} = \begin{bmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{bmatrix}$ $\rightarrow i$, $\downarrow j$

2. 矩阵运算 (相等. 加法. 数乘. 乘法. 求逆)

① 同型矩阵: 两个矩阵行数. 列数分别相等
则称它们为同型矩阵

② 矩阵相等: 两个同型矩阵. 对应位置元素相等

例 设两个矩阵相等

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & x+y \\ 1 & y+z & -1 \\ z+x & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$A=B$. 求 x, y, z.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \\ z+x=0 \end{cases}$$

③ 矩阵加法 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ $B=(b_{ij})_{m\times n}$

$C=A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$. 注意与行列式的区别!!!

④ 数乘 $cA=(ca_{ij})_{m\times n}$ · 注意与行列式的区别

Note: $A\in M_n(\mathbb{R})$, $k|A|$ k乘到A的某一行或某一列.

$|kA|=k^n|A|$.

⑤ 减法: $A-B=A+(-1)B=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$.

称 $(-1)\cdot B$ 为矩阵B的负矩阵. 记为 $-B$.

$$B+(-B)=O$$

运算 { 加法 交换律. $A+B=B+A$

结合律 $A+(B+C)=(A+B)+C$

零元: $A+O=O+A=A$

负元: $A+(-A)=O$

数乘

$$\begin{cases} 1\cdot A = A \qquad 0\cdot A = O \\ k(lA) = (kl)A \\ k(A+B) = kA + kB \\ (k+l)A = kA + lA \end{cases}$$

3. 转置 $A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n\times m}$ Transpose A'

① $(A^T)^T = A$ ② $(kA)^T = kA^T$

③ $(A+B)^T = A^T + B^T$.

Note: 1: 若 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 且 $A^T = A$ 则称 A 为对称矩阵 $(a_{ij} = a_{ji})$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

2 若 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 且 $A^T = -A$ 则称 A 为反对称矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad a_{ij} = -a_{ji}$$

例：(反)对称矩阵之和仍为(反)对称矩阵.

证：$A^T=A$. $B^T=B$

$$(A+B)^T=A^T+B^T=A+B$$

例：任何一个方阵均可写成一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和.

$$A=\frac{A+A^T}{2}+\frac{A-A^T}{2}.$$

$B=\frac{A+A^T}{2}$, $B^T=\frac{1}{2}(A^T+A)=B$. 对称

$C=\frac{A-A^T}{2}$ $C^T=\frac{1}{2}(A^T-A)=-C$ 反对称.

4、矩阵之乘法.

① 来源.

要求 $x_1\cdots x_n$.

$$\begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n=y_1 \\ b_{21}x_1+b_{22}x_2+\cdots+b_{2n}x_n=y_2 \\ \vdots \\ b_{m1}x_1+b_{m2}x_2+\cdots+b_{mn}x_n=y_m \end{cases}$$

$B=(b_{ij})_{m\times n}$ 已知

通 $y_1\cdots y_m$ 求

$$\begin{cases} a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1m}y_m=l_1 \\ a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{2m}y_m=l_2 \\ \vdots \\ a_{t1}y_1+a_{t2}y_2+\cdots a_{tm}y_m=l_t \end{cases}$$

$A=(a_{ij})_{t\times m}$ 已知

l_i 已知.

要得到第 i 方程 x_j 系数 用 A 矩阵第 i 行

乘以矩阵B之第j列对应元素再相加

② 定义：矩阵乘法：$A_{t\times m} \; B_{m\times n} = C_{t\times n}$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$$

Note: 1. 前矩阵列数 = 后矩阵行数

2. 不满足交换律

例：$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{3\times 1}$

$AB = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

例2：$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}_{2\times 1}$ $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}_{1\times 2}$

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \underline{a_1b_1 + a_2b_2}.$$

例3：$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $AB = O$.

Note! $AB=0$ 则 A、B 不一定为零矩阵

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Note: $AB \neq BA$

定义：若 $AB = BA$ 则称 A, B 可交换

例：A、B 对称，A、B 可交换

证明：AB 也是对称矩阵.