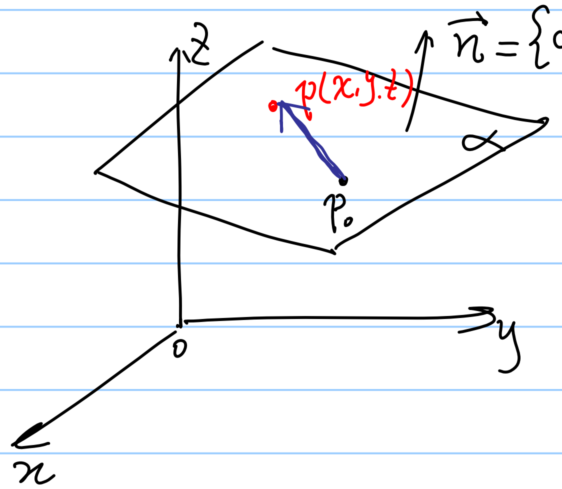
§1. 线性方程组之Gauss消元法

Note Title　　2017/9/29

例1：平面之点法式方程.



$\vec{n}=\{a.b.c\}$　$P_0(x_0,y_0,z_0)$　求α方程.

$P\in\alpha \iff \overrightarrow{P_0P}\perp\vec{n}$

$\iff \overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n}=0$

$\iff a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$

例2：讨论三个平面 $2x-y+3z=1$，$4x+2y+5z=4$，

$x+z=3$ 是否交于一点

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

解：
$$\begin{cases} 2x-y+3z=1 & ① \\ 4x+2y+5z=4 & ② \\ x+z=3. & ③ \end{cases}$$

{ 代入消元
{ 加减消元

$r_1\times(-2)+r_2$

$r_1\times(-\frac{1}{2})+r_3$　　row

①×(−2)+②
①×(−½)+③ →
$$\begin{cases} 2x-y+3z=1 & ④ \\ 4y-z=2 & ⑤ \\ \frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z=\frac{5}{2} & ⑥ \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right]$$

$⑥\times 2 \to$
$$\begin{cases} 2x-y+3z=1 & ⑦ \\ 4y-z=2 & ⑧ \\ y-z=5 & ⑨ \end{cases}$$

$\xrightarrow{r_3\times 2}$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right]$$

$⑧\iff 9 \to$
$$\begin{cases} 2x-y+3z=1 & ⑩ \\ y-z=5 & ⑪ \\ 4y-z=2 & ⑫ \end{cases}$$

$\xrightarrow{r_2\iff r_3}$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$⑪\times(-4)+⑫ \longrightarrow \begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ y-z=5 \\ 3z=-18 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{r_2\times(-4)+r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -18 \end{array}\right]$$

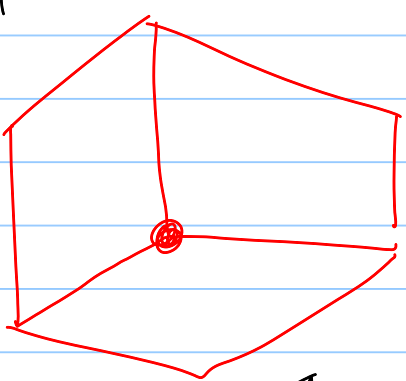
$$\xrightarrow{r_3\times\frac{1}{3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right]$$

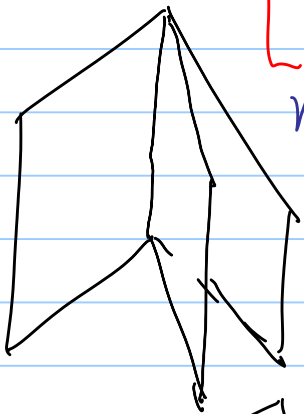
$$\xrightarrow[r_3\times(-3)+r_1]{r_3\times 1+r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right]$$

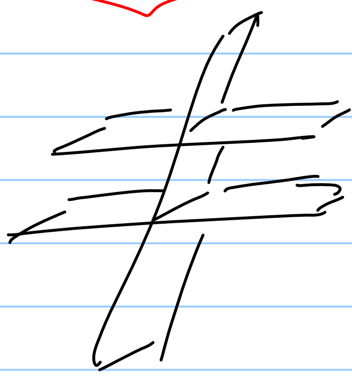
$$\xrightarrow{r_2+r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right]$$

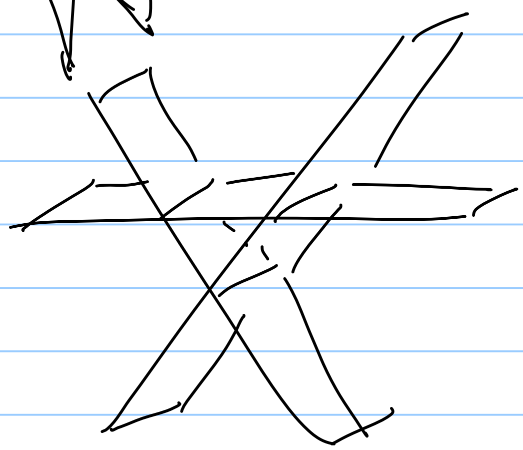
$$\Rightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=-1 \\ z=-6 \end{cases}$$

即3个平面交于一点 $(9,-1,-6)$









Note 1：解线性方程组基本思想：消元 $\begin{cases}\text{代入：丢失} \\ \text{加减：Gauss消元}\end{cases}$

2. 线性代数方程组三种变换 $\begin{cases} \text{① 交换两个方程} \\ \text{② 某方程乘以非零常数} \\ \text{③ 某方程乘以常数加到其他方程} \end{cases}$

例：

$$\begin{cases} x_1+3x_2-5x_3=-1 & ① \\ 2x_1+6x_2-3x_3=5 & ② \\ 3x_1+9x_2-10x_3=2 & ③ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[①\times(-3)+③]{①\times(-2)+②} \begin{cases} x_1+3x_2-5x_3=-1 & ④ \\ 7x_3=7 & ⑤ \\ 5x_3=5 & ⑥ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[⑤\times\frac{1}{7}]{⑤\times(-\frac{5}{7})+⑥} \begin{cases} x_1+3x_2-5x_3=-1 \\ x_3=1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1=4-3K \\ x_2=K \\ x_3=1 \end{cases}$$

K为任意常数

x_2：自由变量

x_1、x_3 主元

选法不唯一

个数是唯一。

• 抽象出一般的结构

一般形式

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

m个方程

n个未知量.

向量形式

$$x_1\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}}_{\alpha_1}+x_2\underbrace{\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}}_{\alpha_2}+\cdots+x_n\underbrace{\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}}_{\alpha_n}=\underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\beta}$$

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta.$$

矩阵形式

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\text{系数矩阵 } A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{b}$$

$$AX = b$$

研究：矩阵理论．行列式．向量组理论

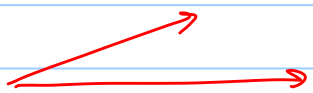
方程组理论．线性空间．线性变换

特点：讲法不唯一．

定义：若 $(c_1\ c_2 \cdots c_n)$ 使 (*) 左右两端值相等．则称其为 (*) 解．

方程组基本问题：① 存在性 ② 个数性 ③ 解之公式

④ 解法问题．⑤ 解不唯一时 解之结构



定义：$m \times n$ 个数构成之数表 称作一个 m 行 n 列之矩阵 (Matrix)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad A_{m \times n} \qquad A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

K 数域 ($\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$)

$M_{m,n}(K)$ 表示：数域 K 上全体 m 行 n 列矩阵之集合 $\quad K^{m\times n}$

$A \in M_{m,n}(K)$

当 $m=n$ 时，A 称为方阵。 $\quad M_n(K) \quad A\in\mathbb{R}^{n\times n}$

- 矩阵之 3 类行变换：① 某行乘以非零常数
  ② 交换两行
  ③ 某行乘以常数加到其他行。

定义：(*)之系数 称
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
为系数矩阵

称
$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$
为增广矩阵

- 阶梯型矩阵：① 零行若存在，在最下方。
  ② 非零行每行第一个不为 0 之元素（主元）的列标随着行标之增大而严格增大。

Note：求解方程组的过程就是将增广矩阵化为阶梯型矩阵之过程

简化行阶梯型（最简阶梯型）$\left\{\begin{array}{l} \text{① 是阶梯型} \\ \text{② 主元所在的列其他元素均为 0} \end{array}\right.$

例4 $\left\{\begin{array}{l} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_5 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 8x_5 = 2 . \end{array}\right.$

解：增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{r_1\times(-3)+r_3 \\ r_1\times(-1)+r_4}]{r_1\times(-2)+r_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2\times(-2)+r_4 \\ r_3 \Leftrightarrow r_4}]{r_2\times(-2)+r_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3\times(-\frac{1}{3})} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3\times(-2)+r_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2\times1+r_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

解为 $\begin{cases} x_1 = k_1 - 7k_2 + 1 \\ x_2 = k_1 \\ x_3 = 2 - 4k_2 \\ x_4 = 3k_2 - 1 \\ x_5 = k_2 \end{cases}$

例5: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \end{cases}$ 无解.

线性方程组 解之情况:

(*) 一般形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

解:
$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccccc|c} c_{11} & \cdots & c_{1i_2} & \cdots & c_{1i_r} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & \cdots & c_{2i_2} & \cdots & c_{2i_r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & c_{ri_r} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & 0 \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$c_{11}, c_{2i_2} \cdots c_{ri_r} \neq 0$

当 $d_{r+1} \neq 0$ 时 方程组无解

当 $d_{r+1} = 0$ 时 方程组有解

当 $r = n$ 时 有唯一解

当 $r < n$ 时 有无穷多解.

r: 阶梯型矩阵非零行行数，也是主元个数

当有无穷多解时: 主元有 r 个 自由变量有 $(n-r)$ 个

选法不唯一. 个数唯一

例: t 为何值时
$$\begin{cases} -x_1 - 4x_2 + x_3 = 1 \\ t x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + (t+1)x_3 = 0 \end{cases}$$
无解? 有唯一解? 有无穷多解

解:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & t & -3 & 3 \\ 1 & 3 & t+1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \times 1 + r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & t & -3 & 3 \\ 0 & -1 & t+2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & t+2 & 1 \\ 0 & t & -3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \times t + r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & t+2 & 1 \\ 0 & 0 & (t-1)(t+3) & t+3 \end{array}\right]$$

当 $t=1$ 时 方程组无解

当 $t\neq 1$ 且 $t \neq -3$ 时 有唯一解

当 $t=-3$ 时 有无穷多解

一般形式

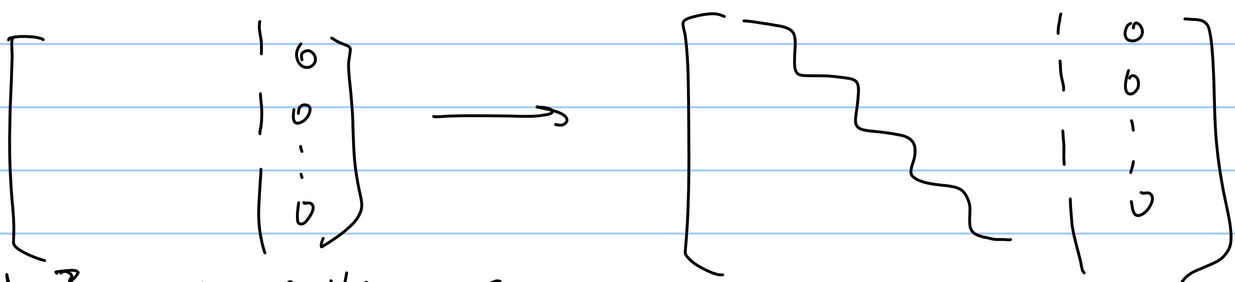
$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$(AX=0)$

在 (*) 中 当 $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ 时 称 (*) 为齐次方程组 否则 称为非齐次方程

推论: 1: 齐次方程组总有解.

2: 齐次方程组中 当 $m<n$ 时 总有无穷多解



非零行的行数 $r \leq m < n$

§2. 行列式的定义: Cauchy Leibniz.

1. (**) $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & ① \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & ② \end{cases}$ 不妨设 $a_{11} \neq 0$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \times (-\frac{a_{21}}{a_{11}}) + r_2} \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} & b_2 - b_1\frac{a_{21}}{a_{11}} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 \times a_{11}} \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & \underline{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}} & b_2 a_{11} - b_1 a_{21} \end{array}\right]$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时 有唯一解

$$\begin{cases} x = \dfrac{b_2 a_{12} - b_1 a_{22}}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}} = \dfrac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\[2ex] y = \dfrac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

定义: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\[3ex] y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{cases}$$

(**) 方程有唯一解 $\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$