Exercices de méthodes numériques [1]
L1 Informatique

Nicolas COUELLAN   Sophie JAN [2]   Youchun QIU [3]

Janvier 2017

1. La plupart des exercices qui suivent sont tirés des dossiers d'exercices réalisés par Jean-Paul Calvi les années passées

2. sophie.jan@math.univ-toulouse.fr
3. youchun.qiu@math.univ-toulouse.fr

Chapitre 1

Recherche de zéros

1.1 Exercices à traiter impérativement en TD

1. (a) Montrer que l'équation $x^4 + x^3 - 1 = 0$ admet une et une seule solution dans $[0, 1]$.
   (b) Trouver une valeur approchée avec une décimale exacte en utilisant l'algorithme de dichotomie.

SOLUTION.

(a) Notons $f(x) = x^4 + x^3 - 1$.
Existence : comme f est une fonction continue et que $f(0) = -1$ est de signe opposé à $f(1) = 1$, par le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule nécessairement sur l'intervalle $]0, 1[$.
L'unicité de la racine vient de la stricte croissance de f sur $]0, 1[$:

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 = x^2(4x + 3) > 0 \quad \text{et donc} \quad f'(x) > 0,\ \forall x > 0.$$

(b) On démarre avec

$$\begin{array}{rcl|rcl|rcl} a_0 & = & 0 & c_0 & = & \dfrac{1}{2} & b_0 & = & 1 \\ f(a_0) & = & -1 < 0 & f(c_0) & = & \dfrac{-13}{16} < 0 & f(b_0) & = & 1 > 0 \end{array}$$

On en déduit que la racine est dans l'intervalle $]c_0, b_0[$ et on poursuit l'algorithme de dichotomie comme suit :

$$\begin{array}{rcl|rcl|rcl} a_1 & = & \dfrac{1}{2} & c_1 & = & \dfrac{3}{4} & b_1 & = & 1 \\ f(a_1) & = & \dfrac{-13}{16} < 0 & f(c_1) & = & \dfrac{-67}{256} < 0 & f(b_1) & = & 1 > 0 \end{array}$$

On en déduit que la racine est dans l'intervalle $]c_1, b_1[$ et on poursuit l'algorithme de dichotomie comme suit :

$$\begin{array}{rcl|rcl|rcl} a_2 & = & \dfrac{3}{4} & c_2 & = & \dfrac{7}{8} = 0.875 & b_2 & = & 1 \end{array}$$

On vérifie que $f(0.8) < 0$ et $f(0.9) > 0$, ainsi on garantit que la racine de f est dans $]0.8, 0.9[$ et que sa première décimale est certainement 8.

2. (a) Montrer que l'équation $\cos(x) + \dfrac{1}{10} = x$ admet une unique solution r dans $\left[0, \dfrac{3\pi}{8}\right]$.

   (b) Déterminer les 3 premières décimales exactes de r en utilisant la méthode de Newton.

   Solution.

   (a) Notons $f(x) = \cos(x) + \dfrac{1}{10} - x$.
   Comme $\pi > 3$, on a

$$f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \frac{1}{10} - \frac{3\pi}{8} < 1 + \frac{1}{10} - \frac{3\pi}{8} = \frac{88-30\pi}{80} < \frac{88-90}{80} < 0$$

   Existence : comme f est continue et $f(0) = 1+\dfrac{1}{10} > 0$ est de signe opposé à $f\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$, par le TVI, il existe bien un $r \in \left[0, \dfrac{3\pi}{8}\right]$ tel que $f(r) = 0$.
   L'unicité vient de la stricte décroissance de f sur $\left[0, \dfrac{3\pi}{8}\right]$:

$$f'(x) = -\sin(x) - 1 \quad \text{et donc} \quad f'(x) \leq -1 < 0,\ \forall x \in \left[0, \frac{3\pi}{8}\right].$$

   (b) La suite de Newton est définie ici par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\cos(x_n) + \frac{1}{10} - x_n}{-\sin(x_n) - 1} = \frac{x_n \sin(x_n) + \cos(x_n) + \frac{1}{10}}{\sin(x_n) + 1}.$$

   Partons de $x_0 = 0$. On obtient

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 + \frac{1}{10} = \frac{11}{10} = 1.1 \\ x_2 & \simeq & 0.811081983862 \\ x_3 & \simeq & 0.798115493201 \\ x_4 & \simeq & 0.798081601631 \end{array}$$

   On vérifie que $f(0.798) > 0$ et $f(0.799) < 0$, ainsi on garantit que la racine de f est dans $]0.798, 0.799[$ et que ses trois premières décimales sont certainement 798.

3. On considère l'équation

$$x^4 + 2x^2 - 1 = 0. \tag{1.1}$$

   (a) Montrer que l'équation (1.1) admet une unique solution r dans $[0, 1]$.

   (b) Montrer en utilisant la méthode de dichotomie que $r \in]0.5, 0.75[$.

   (c) On cherche maintenant à affiner l'approximation de r en utilisant la méthode de Newton. On note (x_n) la suite de Newton. Calculer x_1 et x_2.

SOLUTION.

(a) Notons $f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = -1$ est de signe opposé à $f(1) = 2$. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, on déduit donc qu'il existe $r \in]0, 1[$ tel que $f(r) = 0$.

De plus, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 4x^3 + 4x = 4x(x^2 + 1)$. Il est donc clair que f' est strictement positive sur $]0, 1[$ et donc que f est strictement croissante sur $]0, 1[$. On en déduit l'unicité de r.

(b) On applique l'algorithme de dichotomie sur $[0, 1]$:

$$\begin{array}{rcl|rcl|rcl} a_0 & = & 0 & c_0 & = & \dfrac{1}{2} & b_0 & = & 1 \\ f(a_0) & = & -1 < 0 & f(c_0) & = & \dfrac{-7}{16} < 0 & f(b_0) & = & 2 > 0 \end{array}$$

on en déduit que $r \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

$$\begin{array}{rcl|rcl|rcl} a_1 & = & \dfrac{1}{2} & c_1 & = & \dfrac{3}{4} & b_1 & = & 1 \\ f(a_1) & = & \dfrac{-7}{16} < 0 & f(c_1) & = & \dfrac{81 + 288 - 256}{256} > 0 & f(b_1) & = & 2 > 0 \end{array}$$

On en déduit bien que $r \in \left]\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right[$.

(c) Comme $f''(x) = 12x^2 + 4 = 4(3x^2 + 1) > 0$, on a f strictement croissante et convexe sur $\left]\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right[$. On en déduit qu'il est plus efficace de choisir $x_0 = \dfrac{3}{4}$.

La formule de Newton est ici

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 + 2x_n^2 - 1}{4x_n(x_n^2 + 1)}$$

On a alors

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \simeq & 0.655833333333 \\ x_2 & \simeq & 0.643775873119 \\ x_3 & \simeq & 0.643594293534 \\ x_4 & \simeq & 0.643594252906 \end{array}$$

4. Dans cet exercice, on étudie une modification de la méthode de Newton : ayant obtenu x_0, x_1, ..., x_n, on construit x_{n+1} en prenant l'intersection avec l'axe des abscisses de la droite passant par le point de coordonnées $(x_n, f(x_n))$ et parallèle à la tangente au graphe de f en x_0.

(a) On suppose que la fonction f est strictement croissante et strictement convexe sur $[a, b]$ et qu'elle admet une racine dans $]a, b[$. On prend $x_0 = b$. Faire un dessin qui permet de comparer la méthode de Newton et la méthode de Newton modifiée décrite ci-dessus.

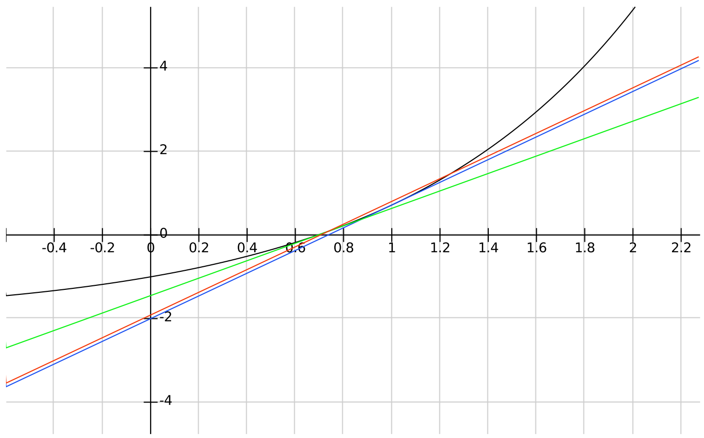
(b) Donner l'expression de x_{n+1} en fonction de x_n.

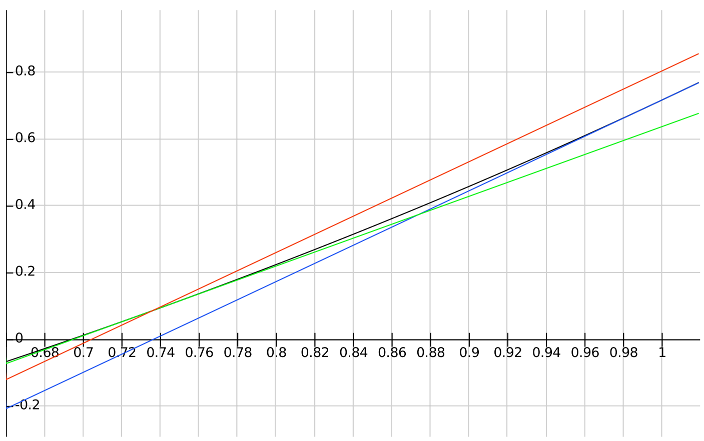
(c) Quels sont les avantages pratiques de cette modification ? et ses inconvénients ?

SOLUTION.

(a) Sur les graphiques ci-dessous (le second est un zoom du premier), on a
- — en noir la courbe représentative de la fonction f,
- — en bleu et vert les deux premiers modèles utilisés pour la méthode de Newton,
- — en bleu et rouge les deux premiers modèles utilisés pour la modification de la méthode de Newton.

On constate bien que les droites bleue et rouge sont parallèles.





(b) La droite passant par $(x_n, f(x_n))$ et parallèle à la tangente au graphe de f en x_0 a pour équation

$$y = f'(x_0)(x - x_n) + f(x_n).$$

Son intersection avec l'axe des abscisses est réalisée lorsque $0 = f'(x_0)(x-x_n)+f(x_n)$, c'est-à-dire lorsque

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}.$$

(c) Les avantages sont les suivants :
- — on n'a pas besoin de se préoccuper de l'annulation de $f'(x_n)$. Il suffit de s'assurer que $f'(x_0) \neq 0$;

— moins d'effort calculatoire.
L'inconvénient majeur : c'est visiblement plus lent que la méthode de Newton.

1.2 Exercices pour s'entrainer

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x + 1$.
   (a) Calculer f' et f''.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution r dans $]0, 1[$.
   (c) Utiliser la dichotomie pour localiser r dans un intervalle I de longueur $\leq \frac{1}{4}$.
   (d) Tracer l'allure du graphe de f sur I et donner la formule de récurrence pour la méthode de Newton appliquée dans l'intervalle I. Proposer un point de départ qui vous semble adapté.
   (e) En déduire les 3 premières décimales de r.
2. On considère l'intervalle $I = [0, 1]$ et les fonctions f et g définies par

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 7$$

   (a) Déterminer $f'(x)$ et $f"(x)$.
   (b) Montrer que f admet exactement une racine r dans I.
   (c) Montrer très soigneusement que dans l'intervalle $J = [\frac{1}{2}, 1] \subset I$
   — f s'annule exactement une fois,
   — f' ne change pas de signe et f'' non plus.
   (d) Quel point de départ de la méthode de Newton choisiriez-vous dans J et pourquoi ?
   (e) Calculer les premiers itérés nécessaires à l'obtention de 4 décimales exactes de r.
3. On souhaite trouver une valeur approchée de la solution de l'équation

$$\frac{e^{-x}}{x} = 1. \tag{1.2}$$

   On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - e^{-x}$.
   (a) Montrer que x est solution de (1.2) si et seulement si $f(x) = 0$.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution r dans $\mathbb{R}$ et qu'elle se trouve dans l'intervalle $]0, 1[$.
   (c) En étudiant les propriétés de croissance et de convexité de f, déduire le schéma adéquat pour appliquer la méthode de Newton à l'approximation de r.
   (d) Calculer les 4 premiers itérés de la suite de Newton notée (x_n).
   (e) Montrer que les 4 premières décimales de x_3 sont aussi celles de r.

   SOLUTION.

(a) On a

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-x} \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } 1 = \frac{e^{-x}}{x}.$$

(b) La fonction f est continue et $f(0) = -1$ est de signe opposé à $f(1) = 1 - \frac{1}{e}$. Il existe donc bien $r \in]0, 1[$ tel que $f(r) = 0$.
L'unicité de r vient de la stricte croissance de f : $f'(x) = 1 + e^{-x} > 0$.

(c) Comme $f''(x) = -e^{-x} < 0$, on a f croissante et concave sur $]0, 1[$. Le schéma de Newton le plus adapté est donc

$$x_0 = 0 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - e^{-x_n}}{1 + e^{-x_n}} = \frac{(x_n + 1)e^{-x_n}}{1 + e^{-x_n}}$$

(d) On a alors

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \simeq & 0.5 \\ x_2 & \simeq & 0.566311003197 \\ x_3 & \simeq & 0.567143165035 \\ x_4 & \simeq & 0.56714329041 \end{array}$$

(e) $f(0.567) \simeq -0.000224562426884 < 0$ et $f(0.568) \simeq 0.00134237861778 > 0$ sont de signes opposés. Les premières décimales de x_3 sont donc bien aussi celles de r

1.3 Pour aller plus loin

1. Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution dans $[a, b]$.

Chapitre 2

Interpolation polynomiale

2.1 Exercices à traiter impérativement en TD

1. (Séance 3) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
   (a) Calculer le polynôme p d'interpolation de f aux points 1 et 2.
   (b) Calculer le polynôme q d'interpolation de f aux points 0, 1 et 2.
   (c) Calculer le polynôme r d'interpolation de f aux points -1, 0 et 1.
   (d) Calculer le polynôme s d'interpolation de f aux points -1, 0, 1 et 2.
2. (Séance 3) **Algorithme de Hörner**
   Soit $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ et $c \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(b_k)_{k=0,...,n}$ par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} b_n & = & a_n \\ b_k & = & b_{k+1}c + a_k \quad \forall k = 0, 1, ..., n-1. \end{array} \right.$$

   (a) Montrer que $p(x) = (x - c)(b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + ... + b_2 x + b_1) + b_0$.
   (b) Décompter le nombre d'opérations nécessaires pour calculer $p(c)$.

   Solution.

   (a) Calculons $(x - c)(b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + ... + b_2 x + b_1) + b_0$:

$$\begin{aligned} &(x - c)(b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + ... + b_2 x + b_1) + b_0 \\ &\quad = (b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_2 x^2 + b_1 x) + b_0 - (b_n c x^{n-1} + b_{n-1} c x^{n-2} + ... + b_2 c x + b_1 c) \\ &\quad = b_n x^n + (b_{n-1} - b_n c)x^{n-1} + ... + (b_1 - b_2 c)x + (b_0 - b_1 c) \\ &\quad = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \\ &\quad = p(x) \end{aligned}$$

   (b) D'après la question précédente, on a $p(c) = b_0$. Aussi, le nombre d'opérations pour calculer $p(c)$ est le nombre d'opérations pour calculer b_0, soit

$$0 + \sum_{k=0}^{n-1} 2 = 2n.$$

3. (Séance 3, si possible)
   (a) Montrer qu'il existe une infinité de polynômes passant par les points $M_0 = (0,0)$ et $M_1 = (1,1)$.
   (b) Trouver 4 réels f_0, f_1, f_2, f_3 tels qu'aucun graphe de polynôme de $\mathcal{P}_2$ ne passe par les 4 points $M_0 = (-1, f_0)$, $M_1 = (0, f_1)$, $M_2 = (1, f_2)$ et $M_3 = (2, f_3)$.

   Solution.
   (a) Tous les monômes de la forme x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$ passent par M_0 et M_1.
   (b) Considérons un polynôme p quelconque de $\mathcal{P}_2$ de la forme $p(x) = A + Bx + Cx^2$. Le fait que le graphe de p passe par les 4 points s'écrit

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} A & - & B & + & C & = & f_0, \\ A & & & & & = & f_1, \\ A & + & B & + & C & = & f_2, \\ A & + & 2B & + & 4C & = & f_3. \end{array}\right.$$

   Il s'agit donc de trouver des réels f_0, f_1, f_2, f_3 tels que le système (S) ci-dessus n'ait aucune solution.
   On démarre la résolution :

$$\begin{array}{rcll} (S) & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{ccccccc} A & & & & & = & f_1, \\ & - & B & + & C & = & f_0 - f_1, \\ & + & B & + & C & = & f_2 - f_1, \\ & + & 2B & + & 4C & = & f_3 - f_1, \end{array}\right. & \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{ccccccc} A & & & & & = & f_1, \\ & - & B & + & C & = & f_0 - f_1, \\ & & & + & 2C & = & f_2 - 2f_1 + f_0, \\ & & & + & 6C & = & f_3 - 3f_1 + 2f_0, \end{array}\right. & \text{en éliminant } B \text{ des 2 dernières équations} \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{ccccccc} A & & & & & = & f_1, \\ & - & B & + & C & = & f_0 - f_1, \\ & & & + & 6C & = & 3f_2 - 6f_1 + 3f_0, \\ & & & + & 6C & = & f_3 - 3f_1 + 2f_0, \end{array}\right. & \text{en multipliant la troisième équation par 3.} \end{array}$$

   Les deux dernières équations impliquent $3f_2 - 6f_1 + 3f_0 = f_3 - 3f_1 + 2f_0$, ou encore

$$f_3 = 3f_2 - 3f_1 + f_0. \tag{2.1}$$

   Aussi, si on choisit des réels quelconques pour f_0, f_1 et f_2, mais que f_3 est choisi de telle sorte que l'équation (2.1) n'est pas satisfaite, alors le système (S) n'aura aucune solution.

4. (Séance 4) Reprendre l'exercice 1 en utilisant la formule donnée en cours, basée sur les polynômes fondamentaux de Lagrange.

5. (Séance 4) On considère trois réels deux à deux distincts a_0, a_1 et a_2.
   (a) On note $A = \{a_0, a_1\}$. Montrer que pour tout réel x, $l_{0,1}(x) + l_{1,1}(x) = 1$
   (b) Si $A = \{a_0, a_1, a_2\}$, montrer que pour tout réel x, $l_{0,2}(x) + l_{1,2}(x) + l_{2,2}(x) = 1$.

   Solution.

$$\begin{aligned} l_{0,1}(x) + l_{1,1}(x) &= \frac{x - a_1}{a_0 - a_1} + \frac{x - a_0}{a_1 - a_0} \\ &= \frac{a_1 - x}{a_1 - a_0} + \frac{x - a_0}{a_1 - a_0} \\ &= \frac{(a_1 - x) + (x - a_0)}{a_1 - a_0} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & l_{0,2}(x) + l_{1,2}(x) + l_{2,2}(x) \\ &= \frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)} + \frac{(x-a_0)(x-a_2)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)} + \frac{(x-a_0)(x-a_1)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)} \\ &= \frac{(a_1-x)(a_2-x)}{(a_1-a_0)(a_2-a_0)} + \frac{(x-a_0)(a_2-x)}{(a_1-a_0)(a_2-a_1)} + \frac{(x-a_0)(x-a_1)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)} \\ &= \frac{(a_2-x)}{(a_1-a_0)}\left(\frac{(a_1-x)}{(a_2-a_0)} + \frac{(x-a_0)}{(a_2-a_1)}\right) + \frac{(x-a_0)(x-a_1)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)} \\ &= \frac{(a_2-x)}{(a_1-a_0)}\left(\frac{(a_1-x)(a_2-a_1)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)} + \frac{(x-a_0)(a_2-a_0)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)}\right) + \frac{(x-a_0)(x-a_1)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)} \\ &= \frac{(a_2-x)}{(a_1-a_0)}\frac{(a_1-a_0)a_2 + x(a_1-a_0) - (a_1^2-a_0^2)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)} + \frac{(x-a_0)(x-a_1)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)} \\ &= \frac{(a_2-x)(a_2+x-(a_1+a_0))}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)} + \frac{(x-a_0)(x-a_1)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)} \\ &= \frac{(a_2-x)(a_2-a_0) + (a_2-x)(x-a_1) + (x-a_0)(x-a_1)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)} \\ &= \frac{(a_2-x)(a_2-a_0) + (a_2-a_0)(x-a_1)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)} \\ &= \frac{(a_2-x) + (x-a_1)}{(a_2-a_1)} = 1 \end{aligned}$$

6. (Séance 4, si possible)
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on définit $f_n(x) = x^n$ et p_n le polynôme d'interpolation de f_n aux points $\{-1, 0, 1\}$.
   (a) Déterminer p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Indication : on pourra traiter à part le cas $n = 0$, puis distinguer les cas n pair et n impair.
   (b) On considère la fonction polynomiale f définie par $f(x) = a_{2K}x^{2K} + a_{2K-1}x^{2K-1} + ... + a_1x + a_0$ avec K entier, $K \geq 1$. **Déduire de la question précédente** une formule pour le polynôme d'interpolation p de f aux points $\{-1, 0, 1\}$, en fonction des coefficients a_i, $i = 0, 1, ..., n$.

   Solution.

(a) Commençons par le cas $n = 0$. On a $f_0(x) = 1$ pour tout x et donc

$$\begin{aligned} p_0(x) &= f_0(-1)l_{0,2}(x) + f_0(0)l_{1,2}(x) + f_0(1)l_{2,2}(x) \\ &= l_{0,2}(x) + l_{1,2}(x) + l_{2,2}(x) = 1 \end{aligned}$$

par l'exercice 5.

Voyons maintenant ce qui se passe pour les n pairs : $n = 2k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} p_{2k}(x) &= f_{2k}(-1)l_{0,2}(x) + f_{2k}(0)l_{1,2}(x) + f_{2k}(1)l_{2,2}(x) \\ &= 1l_{0,2}(x) + 0l_{1,2}(x) + 1l_{2,2}(x) \\ &= \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} + \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} \\ &= \frac{x(x-1)}{2} + \frac{(x+1)x}{2} \\ &= \frac{x(x-1+x+1)}{2} = x^2. \end{aligned}$$

Il existe une méthode plus élégante, que nous appliquons dans le cas où n est impair : $n = 2k+1$ pour $k \in \mathbb{N}$. On a $f_{2k+1}(-1) = -1 = f_1(-1)$, $f_{2k+1}(0) = 0 = f_1(0)$ et $f_{2k+1}(1) = 1 = f_1(1)$. Comme de plus f_1 est bien un polynôme de degré ≤ 2, on a immédiatement $p_{2k+1} = f_1$, c'est à dire $p_{2k+1}(x) = f_1(x) = x$.

(b) On peut écrire p de la manière suivante :

$$f(x) = a_0 f_0(x) + \sum_{k=0}^{K-1} a_{2k+1} f_{2k+1}(x) + \sum_{k=1}^{K} a_{2k} f_{2k}(x),$$

et en utilisant la question précédente et la linéarité de l'application qui à f associe son polynôme d'interpolation, on obtient

$$p(x) = a_0 1 + \left(\sum_{k=0}^{K-1} a_{2k+1}\right) x + \left(\sum_{k=1}^{K} a_{2k}\right) x^2.$$

7. (Séance 5)

On note $a_0 = -1$, $a_1 = 2$, et $a_2 = 3$. Soient p, q et r les 3 polynômes définis par

$$p(x) = x^2 + 3, \quad q(x) = x^4, \quad r(x) = 3x^4 + 7x^2 + 21.$$

(a) Quel est le polynôme d'interpolation de Lagrange m_p de p relativement aux 3 points a_0, a_1 et a_2 ?

(b) Quel est le polynôme d'interpolation de Lagrange m_q de q relativement aux 3 points a_0, a_1 et a_2 ?

(c) Quel est le polynôme d'interpolation de Lagrange m_r de r relativement aux 3 points a_0, a_1 et a_2 ?

(d) Calculer $\|r'''\|_{\infty,[-1,3]}$.

(e) En déduire une majoration de $|r(0) - m_r(0)|$, **sans calculer ni** $r(0)$**, ni** $m_r(0)$.

Solution.

(a) p est un polynôme de degré 2, il est donc son propre polynôme d'interpolation aux points a_0, a_1 et a_2 : $m_p = p$.

(b) On a

$$\begin{aligned} m_q(x) &= q(-1)\frac{(x-2)(x-3)}{(-1-2)(-1-3)} + q(2)\frac{(x+1)(x-3)}{(2+1)(2-3)} + q(3)\frac{(x+1)(x-2)}{(3+1)(3-2)} \\ &= 1\frac{(x-2)(x-3)}{12} + 16\frac{(x+1)(x-3)}{-3} + 81\frac{(x+1)(x-2)}{4} \end{aligned}$$

(c) Comme $r = 3q + 7p$, par linéarité de l'application qui à f associe son polynôme d'interpolation, on a

$$\begin{aligned} m_r(x) &= 3m_q(x) + 7m_p(x) \\ &= 3\left(\frac{(x-2)(x-3)}{12} + 16\frac{(x+1)(x-3)}{-3} + 81\frac{(x+1)(x-2)}{4}\right) + 7(x^2+3) \\ &= \frac{(x-2)(x-3)}{4} - 16(x+1)(x-3) + 243\frac{(x+1)(x-2)}{4} + 7(x^2+3) \end{aligned}$$

(d) On obtient aisément que $r'''(x) = 72x$. Le graphe de r''' est une droite et il est assez simple d'en déduire que

$$\|r'''\|_{\infty,[-1,3]} = \max(|r'''(-1)|, |r'''(3)|) = \max(72, 216) = 216.$$

(e) D'après la majoration d'erreur donnée en cours, on a

$$\begin{aligned} |r(0) - m_r(0)| &\leq \frac{\|r'''\|_{\infty,[-1,3]}}{3!}|(0+1)(0-2)(0-3)| \\ &= \frac{216}{6}6 = 216. \end{aligned}$$

8. (Séance 5) On considère la fonction $f = \ln$. On note p_f le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points de $A := \{1, 2, 3\}$.

(a) Déterminer p_f.

(b) Calculer la dérivée troisième de f et sa norme infinie sur $[1, 3]$.

(c) En déduire une majoration de $|f(5/2) - p_f(5/2)|$, sans calculer ni $f(5/2)$, ni $p_f(5/2)$.

(d) A l'aide de la calculatrice, contrôler la précision de la majoration obtenue ci-dessus.

Solution.

$$\begin{aligned} p_f(x) &= \ln(1)l_{0,2}(x) + \ln(2)l_{1,2}(x) + \ln(3)l_{2,2}(x) \\ &= 0 + \ln(2)\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + \ln(3)\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} \\ &= -\ln(2)(x-1)(x-3) + \ln(3)\frac{(x-1)(x-2)}{2} \end{aligned}$$

ou encore

$$p_f(x) = (x-1)\left(-\ln(2)(x-3) + \frac{\ln(3)}{2}(x-2)\right).$$

Il est facile de calculer $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et $f'''(x) = \dfrac{2}{x^3}$.

La fonction $x \mapsto x^3$ étant croissante et positive sur $[1,3]$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ est décroissante et positive sur $[1,3]$. On en déduit que le maximum de $\left|\dfrac{1}{x^3}\right|$ est atteint en $x=1$ et vaut 1.

On obtient donc que $\|f'''\|_{\infty,[1,3]} = 2$

En utilisant le théorème 5 du cours, on obtient donc

$$|f(5/2) - p_f(5/2)| \leq \frac{\|f'''\|_{\infty,[1,3]}}{3!}\left|\left(\frac{5}{2}-1\right)\left(\frac{5}{2}-2\right)\left(\frac{5}{2}-3\right)\right| = \frac{2}{1\times 2\times 3}\left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\right| = \frac{1}{8} = 0.125.$$

On obtient donc aisément

$$\begin{aligned} p_f\left(\frac{5}{2}\right) &= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\ln(2) + \frac{\ln(3)}{4}\right) \\ &= \frac{3}{8}\left(2\ln(2) + \ln(3)\right) \simeq 0.9318 \end{aligned}$$

et $\ln\left(\dfrac{5}{2}\right) \simeq 0.9163$,

d'où

$$\left|\ln\left(\frac{5}{2}\right) - p_f\left(\frac{5}{2}\right)\right| \simeq 0.01555.$$

9. (Séance 6)

On considère la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$. Calculer la forme de Newton du polynôme d'interpolation p_f de Lagrange de f aux points $\{100, 121, 144\}$.

Solution. La forme de Newton s'écrit

$$p_f = f[100] + f[100,121](x-100) + f[100,121,144](x-100)(x-121).$$

On doit donc calculer les trois différences divisées ci-dessus. On peut le faire en remplissant le tableau ci-dessous :

$$\begin{array}{llll} a_0 = 100 & f[a_0] = 10 & & \\ a_1 = 121 & f[a_1] = 11 & f[a_0,a_1] = \dfrac{11-10}{121-100} = \dfrac{1}{21} & \\ a_2 = 144 & f[a_2] = 12 & f[a_1,a_2] = \dfrac{12-11}{144-121} = \dfrac{1}{23} & f[a_0,a_1,a_2] = \dfrac{\frac{1}{23}-\frac{1}{21}}{144-100} = \dfrac{\frac{-2}{23\times 21}}{44} \end{array}$$

On a donc obtenu, en regardant la diagonale du tableau ci-dessus,

$$f[a_0] = 10, \quad f[a_0,a_1] = \frac{1}{21}, \quad f[a_0,a_1,a_2] = \frac{-1}{23\times 22\times 21},$$

et donc

$$p_f = 10 + \frac{(x-100)}{21} - \frac{(x-100)(x-121)}{23 \times 22 \times 21}.$$

10. (séance 6) **Exercice tiré de l'examen de 2016-2017**
Considérons les abscisses $a_0 = -1, a_1 = 0, a_2 = 2$, et les réels f_0, f_1 et f_2. Notons $A = \{a_0, a_1, a_2\}$.

(a) i. Écrire tous les polynômes fondamentaux de Lagrange associés à l'ensemble A.

Solution. $l_{0,2}(x) = \dfrac{x(x-2)}{3}, \quad l_{1,2}(x) = \dfrac{(x+1)(x-2)}{-2}, \quad l_{2,2}(x) = \dfrac{(x+1)x}{6}.$

ii. Donner l'expression du polynôme p qui interpole les points M_0, M_1, M_2 de coordonnées respectives (a_0, f_0), (a_1, f_1) et (a_2, f_2).

Solution.

$$p(x) = f_0 l_{0,2}(x) + f_1 l_{1,2}(x) + f_2 l_{2,2}(x) = \frac{f_0 x(x-2)}{3} + \frac{f_1(x+1)(x-2)}{-2} + \frac{f_2(x+1)x}{6}.$$

iii. Donner $p(2)$, **en justifiant précisément**.

Solution. Par construction du polynôme d'interpolation, $p(2) = p(a_2) = f_2$.

(b) Cette question est indépendante de la précédente.
Désormais, on considère que $f_i = f(a_i)$ avec $f(x) = x^4 - x^3$.

i. Donner l'expression du polynôme p sous sa forme de Newton.

Solution. On commence par calculer les différences divisées :

$$\begin{array}{r|lllll}
-1 & 2 & & & & \\
 & & \ddots & & & \\
0 & 0 & \cdots & \dfrac{0-2}{0-(-1)} = -2 & & \\
 & & \ddots & & \ddots & \\
2 & 8 & \cdots & \dfrac{8-0}{2-0} = 4 & \cdots & \dfrac{4-(-2)}{2-(-1)} = 2.
\end{array}$$

puis on aboutit au polynôme :

$$p(x) = 2 - 2(x+1) + 2(x+1)x.$$

ii. On ajoute maintenant le point M_3 de coordonnées $(a_3, f(a_3))$ avec $a_3 = 1$. Donner l'expression du polynôme q qui interpole les points M_0, M_1, M_2 et M_3.

Solution. Il suffit d'ajouter une ligne dans le tableau des différences divisées :

$$
\begin{array}{r|lllllll}
-1 & 2 & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & \\
0 & 0 & \cdots & -2 & & & & \\
 & & \ddots & & \ddots & & & \\
2 & 8 & \cdots & 4 & \cdots & 2 & & \\
 & & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\
1 & 0 & \cdots & \dfrac{0-8}{1-2} = 8 & \cdots & \dfrac{8-4}{1-0} = 4 & \cdots & \dfrac{4-2}{1-(-1)} = 1.
\end{array}
$$

et un terme dans le polynôme :

$$q(x) = p(x) + 1(x+1)x(x-2) = 2 - 2(x+1) + 2(x+1)x + (x+1)x(x-2).$$

iii. On ajoute maintenant le point M_4 de coordonnées $(a_4, f(a_4))$ avec $a_4 = 978$. Donner l'expression du polynôme r qui interpole les 5 points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.

Solution. r doit interpoler f, un polynôme de degré 4, en 5 points, donc $r = f$.

2.2 Exercices pour s'entrainer

1. On considère le polynôme p défini par $p(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$.
   (a) Calculer $p(1)$, $p'(1)$ et $p''(1)$.
   (b) Trouver toutes les racines de p.
   (c) Factoriser p.
2. Soient a et b 2 réels. On considère le polynôme p défini par $p(x) = x^4 + ax^3 - 2x^2 + bx - 3$.
   (a) Quel est le nombre maximum de racines de p ?
   (b) On suppose que -1 et 3 sont racines de p. Quelles sont les valeurs de a et b ?
   (c) Trouver toutes les racines de p. (Indication : on pourra effectuer une division euclidienne de polynômes)
3. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction définie par $f(x) = (x+1)^4$ relativement aux points $A = \{-3, -1, 0\}$.
4. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ relativement aux points 0, 3/4, 1.

5. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x-2}$ relativement aux points $A = \{2, 6, 11\}$.
6. Trouver une condition sur le couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que la proposition suivante soit vraie : quel que soit le triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ il existe un unique $p \in \mathcal{P}_2$ tel que

$$p(a) = \alpha, \quad p(b) = \beta, \quad p(a) + p'(b) = \gamma. \tag{2.2}$$

Indication : on pourra considérer que p s'écrit $p(x) = A + Bx + Cx^2$ et résoudre le système linéaire correspondant aux équations (2.2). Au cours de la résolution apparaîtra la condition à imposer sur (a,b) pour que le système linéaire ait une solution unique.

Solution. Le système linéaire à résoudre est le suivant :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} A & + & Ba & + & Ca^2 & = & \alpha \\ A & + & Bb & + & Cb^2 & = & \beta \\ & & B & + & 2Cb & = & \gamma - \alpha \end{array} \right.$$

En éliminant A de la seconde équation, on obtient :

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} A & + & Ba & + & Ca^2 & = & \alpha \\ & + & B(b-a) & + & C(b-a)(b+a) & = & \beta - \alpha \\ & & B & + & 2Cb & = & \gamma - \alpha \end{array} \right.$$

Maintenant **si** $b - a \neq 0$, on a

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} A & + & Ba & + & Ca^2 & = & \alpha \\ & + & B & + & C(b+a) & = & \dfrac{\beta - \alpha}{b-a} \\ & & B & + & 2Cb & = & \gamma - \alpha \end{array} \right.$$

puis en éliminant B de la troisième équation, on obtient

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} A & + & Ba & + & Ca^2 & = & \alpha \\ & + & B & + & C(b+a) & = & \dfrac{\beta - \alpha}{b-a} \\ & & & + & C(b-a) & = & \gamma - \alpha - \dfrac{\beta - \alpha}{b-a} \end{array} \right.$$

Et de nouveau, **si** $b - a \neq 0$, on a

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} A & + & Ba & + & Ca^2 & = & \alpha \\ & + & B & + & C(b+a) & = & \dfrac{\beta - \alpha}{b-a} \\ & & & + & C & = & \dfrac{\gamma - \alpha}{b-a} - \dfrac{\beta - \alpha}{(b-a)^2} \end{array} \right.$$

et ce système admet une unique solution.
La condition demandée est donc $a \neq b$.

Chapitre 3

Intégration numérique

3.1 Exercices à traiter impérativement en TD

1. Supposons que l'on dispose des valeurs suivantes d'une fonction f indéfiniment dérivable sur $I = [0,1]$:

$$f(0) = 1, \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{5}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}, \quad f(1) = \frac{1}{2}.$$

Donner une approximation J de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ en utilisant les 4 valeurs connues de f.

Solution. On peut utiliser la méthode des trapèzes et on obtient

$$\begin{aligned}
J &= \frac{\left(\frac{1}{4}-0\right)\left(1+\frac{4}{5}\right)}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\right)}{2} + \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)}{2} \\
&= \frac{\frac{1}{4}\times\frac{9}{5}}{2} + \frac{\frac{1}{4}\times\frac{22}{15}}{2} + \frac{\frac{1}{2}\times\frac{7}{6}}{2} \\
&= \frac{9}{40} + \frac{11}{60} + \frac{7}{24} = \frac{54+44+70}{4\times 6\times 10} = \frac{168}{4\times 6\times 10} = \frac{42}{6\times 10} = \frac{7}{10}
\end{aligned}$$

2. On considère f une fonction continue sur $[-1,2]$. Notons p_f le polynôme d'interpolation de f relativement aux 2 abscisses $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ et $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^2 f(x)dx$.

   (a) Calculer $J(f) = \displaystyle\int_{-1}^2 p_f(x)dx$.

   (b) Illustrer graphiquement l'approximation de $I(f)$ par $J(f)$.

   (c) On note $Q(f) = \dfrac{3}{2}\left(f(0)+f(1)\right)$. Trouver le plus grand entier d pour lequel

$$Q(p) = I(p) \text{ pour tout } p \in \mathcal{P}_d.$$

SOLUTION.

(a) Commençons par calculer $p_f(x)$ en utilisant la forme de Newton :

$$\begin{aligned}
p_f(x) &= f[a_1] + f[a_1,a_2](x-a_1) \\
&= f(a_1) + \frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}(x-a_1) \\
&= f(a_1) + \frac{f(a_2)-f(a_1)}{\frac{b-a}{3}}(x-a_1) \\
&= f(a_1) + \frac{3(f(a_2)-f(a_1))}{b-a}(x-a_1).
\end{aligned}$$

On peut maintenant calculer l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_a^b p_f(x)dx &= \int_a^b \left(f(a_1) + \frac{3(f(a_2)-f(a_1))}{b-a}(x-a_1) \right) dx \\
&= f(a_1)(b-a) + \frac{3(f(a_2)-f(a_1))}{b-a} \int_a^b (x-a_1)dx \\
&= f(a_1)(b-a) + \frac{3(f(a_2)-f(a_1))}{b-a} \left[\frac{(x-a_1)^2}{2} \right]_a^b \\
&= f(a_1)(b-a) + \frac{3(f(a_2)-f(a_1))}{b-a} \left(\frac{(b-a_1)^2-(a-a_1)^2}{2} \right) \\
&= f(a_1)(b-a) + \frac{3(f(a_2)-f(a_1))}{b-a} \left(\frac{\frac{4(b-a)^2}{9} - \frac{(b-a)^2}{9}}{2} \right) \\
&= f(a_1)(b-a) + 3(f(a_2)-f(a_1))(b-a) \left(\frac{4-1}{2\times 9} \right) \\
&= (b-a) \left(f(a_1) + (f(a_2)-f(a_1)) \left(\frac{1}{2} \right) \right) \\
&= (b-a)\frac{f(a_1)+f(a_2)}{2}.
\end{aligned}$$

(b) Pour l'interprétation, il suffit de dire qu'on approche l'aire délimitée par
— **la courbe représentative de** f,
— l'axe des abscisses,
— la droite verticale d'équation $x = a$
— et la droite d'équation $x = b$
par l'aire délimitée par
— **la droite qui passe par** $(a_1, f(a_1))$ **et** $(a_2, f(a_2))$,
— l'axe des abscisses,
— la droite verticale d'équation $x = a$
— et la droite d'équation $x = b$.

(c) Commençons par tester avec $d = 0$. Tous les polynômes de $\mathcal{P}_0$ s'écrivent $p_0(x) = C$ avec C une constante. On a donc $I(p_0) = C(2-(-1)) = 3C$ et $Q(p_0) = \frac{3}{2}(C+C)) = 3C$, soit $I(p_0) = Q(p_0)$.

Testons maintenant avec les polynômes de $\mathcal{P}_1$ qui sont tous de la forme $p_1(x) = \alpha x + \beta$ avec α et β deux réels. On a alors $I(p_1) = \int_{-1}^{2} (\alpha x + \beta) dx = \left[\alpha \frac{1}{2} x^2 + \beta x\right]_{-1}^{2} = \alpha \frac{3}{2} + 3\beta$ et $Q(p_1) = \frac{3}{2}((\beta) + (\alpha + \beta)))$, soit $I(p_1) = Q(p_1)$.
Voyons maintenant ce qui se passe pour le polynôme $p_2(x) = x^2$. On a $I(p_2) = \int_{-1}^{2} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 3$ et $Q(p_2) = \frac{3}{2}(0 + 1))$, soit $I(p_2) \neq Q(p_2)$.
On a donc montré que Q est exacte sur $\mathcal{P}_1$.

3. On considère l'intégrale $I = \int_0^3 f(x) dx$ avec $f(x) = (x - 2)^3$.
   (a) Calculer I.
   (b) Quelle est la valeur de l'approximation J de I par la méthode élémentaire du trapèze.
   (c) Représenter graphiquement le graphe de f et le trapèze qui intervient dans l'approximation J de I. Hachurer ce dernier.
   (d) Que prévoyait la théorie comme majorant de $|I - J|$?

SOLUTION.

(a) On a

$$I = \int_0^3 (x - 2)^3 dx = \left[\frac{(x - 2)^4}{4}\right]_0^3 = \frac{1 - 16}{4} = \frac{-15}{4}.$$

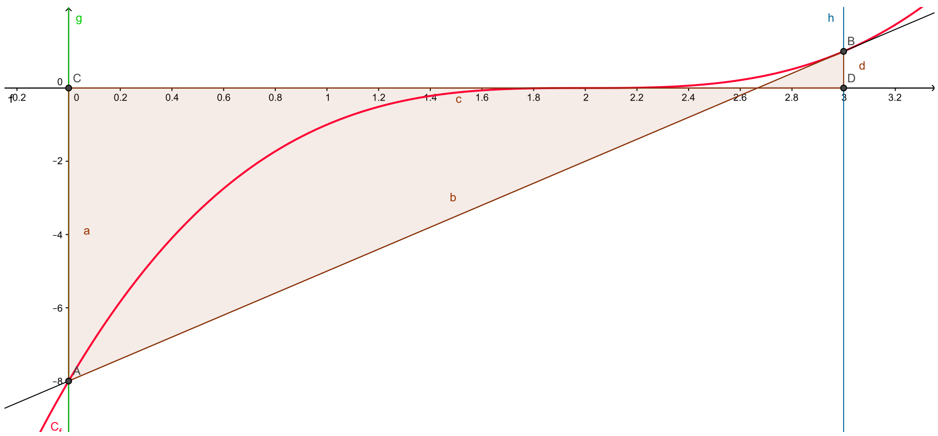
(b)

$$J = \frac{3 - 0}{2}(f(0) + f(3)) = \frac{3}{2}(-8 + 1) = \frac{-21}{2}.$$

L'erreur commise est donc de

$$\frac{42 - 15}{4} = \frac{27}{4} = 6.75.$$

(c) On obtient le graphique suivant :



(d) La théorie prévoyait

$$|I - J| \leq \frac{(3-0)^3}{12} \|f''\|_{\infty,[0,3]}.$$

Comme $f'(x) = 3(x-2)^2$ et $f''(x) = 6(x-2)$, on a $\|f''\|_{\infty,[0,3]} = 12$.
La formule d'erreur donne donc

$$|I - J| \leq \frac{3^3}{12} 12 = 27.$$

4. Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}dx$.

   (a) Donner la valeur exacte de I.

   (b) Donner une approximation de I en utilisant la méthode de Simpson avec $n = 2$ sous-intervalles.

   (c) La théorie permettait-elle de prédire l'erreur commise ?

   SOLUTION.

   (a) Comme $\sqrt{x} = x^{1/2}$, on a

$$I = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \left[\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

(b)

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{1/2} \sqrt{x}dx + \int_{1/2}^{1} \sqrt{x}dx \\
&\simeq \left(\frac{1}{2}-0\right)\frac{\sqrt{0}+4\sqrt{\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{1}{2}}}{6} + \left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}+4\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{1}}{6} \\
&= \frac{1}{2}\frac{2+2\sqrt{\frac{1}{2}}+2\sqrt{3}+1}{6} \\
&= \frac{3+\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{12}
\end{aligned}
$$

(c) L'erreur commise est

$$
\left|\frac{2}{3}-\frac{3+\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{12}\right| = \frac{5-\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{12} \simeq 0.122.
$$

La théorie vue en cours ne permettait pas de prévoir quoi que ce soit, puisque la fonction $\sqrt{.}$ n'est pas dérivable sur $[0,1]$.

5. On considère la fonction f définie sur $[-1,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{1+x}$. On souhaite calculer une valeur approchée de

$$
I = \int_0^1 f(x)dx,
$$

avec une erreur inférieure ou égale à $\varepsilon = 10^{-6}$.

(a) Pour la méthode du point milieu composite, estimer le nombre de sous-intervalles n_m nécessaire pour obtenir une approximation de I à ε près.

(b) Même question avec la méthode des trapèzes. On note n_t le nombre d'intervalles.

(c) Même question avec la méthode de Simpson. On note n_s le nombre d'intervalles.

Solution.

(a) Méthode du point milieu. On doit majorer $\|f''\|_{\infty,[0,1]}$. Or,

$$
f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \quad \text{et} \quad f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2} = -\frac{1}{4(\sqrt{1+x})^3}.
$$

On en déduit que pour tout $x \in [0,1]$, on a $\sqrt{1+x} \in [1,\sqrt{2}]$, donc $(\sqrt{1+x})^3 \in [1,(\sqrt{2})^3]$ et enfin $\dfrac{1}{(\sqrt{1+x})^3} \in \left[\dfrac{1}{(\sqrt{2})^3},1\right]$. Ainsi, $\|f''\|_{\infty,[0,1]} \leq \dfrac{1}{4}$.

La formule d'erreur pour la méthode du point milieu s'écrit

$$
|I - Q_m^c(n_m)| \leq \frac{(1-0)^3}{24n_m^2}\|f''\|_{\infty,[0,1]}.
$$

Avec la majoration obtenue pour la norme infinie de f'', on a aussi,

$$|I - Q_m^c(n_m)| \leq \frac{1}{24n_m^2}\|f''\|_{\infty,[0,1]} \leq \frac{1}{4\times 24n_m^2}.$$

Pour assurer une erreur inférieure à ε, il suffit donc de prendre n_m tel que

$$\frac{1}{4\times 24n_m^2} \leq \varepsilon,$$

c'est à dire

$$\frac{1}{2\times 2\sqrt{6}\sqrt{\varepsilon}} \leq n_m.$$

Avec $\varepsilon = 10^{-6}$, le nombre minimal d'intervalles prévu par cette formule d'erreur est $n_m = 103$.

(b) Méthodes des trapèzes On utilise la même technique que pour la méthode des points milieux composite : on doit choisir n_t tel que

$$|I - Q_t^c(n_t)| \leq \frac{1}{12n_t^2}\|f''\|_{\infty,[0,1]} \leq \frac{1}{4\times 12n_t^2} \leq \varepsilon.$$

On obtient

$$\frac{1}{2\times 2\sqrt{3}\sqrt{\varepsilon}} \leq n_t,$$

c'est à dire un nombre minimal d'intervalles prévu par cette formule d'erreur, pour $\varepsilon = 10^{-6}$, égal à $n_t = 145$.

(c) Méthodes de Simpson Pour utiliser la formule d'erreur de la méthode de Simpson composite, on doit calculer la dérivée quatrième de f :

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2} \quad \text{et} \quad f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}(1+x)^{-7/2} = -\frac{15}{16(\sqrt{1+x})^7}.$$

On déduit de cette expression que

$$\|f^{(4)}\|_{\infty,[0,1]} \leq \frac{15}{16}.$$

Comme la formule d'erreur pour la formule de Simpson composite s'écrit

$$|I - Q_s^c(n_s)| \leq \frac{(1-0)^5}{2880n_s^4}\|f^{(4)}\|_{\infty,[0,1]},$$

on a

$$|I - Q_s^c(n_s)| \leq \frac{1}{2880n_s^4}\|f^{(4)}\|_{\infty,[0,1]} \leq \frac{15}{16\times 2880n_s^4} = \frac{1}{16\times 192n_s^4}.$$

On en déduit qu'on doit choisir n_s tel que

$$\frac{1}{16\times 192n_s^4} \leq \varepsilon,$$

c'est à dire tel que

$$\frac{1}{2\times \sqrt[4]{192}\sqrt[4]{\varepsilon}} \leq n_s,$$

On en conclue que le nombre minimal d'intervalles prévu pour cette formule d'erreur, pour $\varepsilon = 10^{-6}$ est $n_s = 5$.

3.2 Exercices pour s'entrainer

1. Soit $a < b$. Déterminer tous les points $\omega \in [a, b]$ tels que l'approximation

$$\int_a^b p(x)dx \approx (b-a)p(\omega)$$

soit exacte pour tout $p \in \mathcal{P}_1$.

Solution. Tout polynôme de $\mathcal{P}_1$ s'écrit $p(x) = \alpha x + \beta$. L'approximation est exacte sur $\mathcal{P}_1$ si pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^b (\alpha x + \beta)\, dx = (b-a)\,(\alpha\omega + \beta)\,.$$

Or

$$\int_a^b (\alpha x + \beta)\, dx = \alpha\frac{b^2 - a^2}{2} + \beta(b-a) = (b-a)\left(\alpha\frac{b+a}{2} + \beta\right).$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int_a^b (\alpha x + \beta)\, dx = (b-a)\,(\alpha\omega + \beta) \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha\frac{b+a}{2} + \beta = \alpha\omega + \beta\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{b+a}{2} = \omega.\end{aligned}$$

2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et p_f son polynôme d'interpolation relativement aux abscisses $a_0 = -1$ et $a_1 = 1$.
   (a) Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{2} p_f(x)dx$.
   (b) Illustrer graphiquement l'approximation $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)dx \approx 2\Big(f(-1) + f(1)\Big)$.

Solution.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4}{1+x^2}$.
Estimer le nombre de sous-intervalles n nécessaire pour obtenir une approximation de

$$I = \int_0^1 f(x)dx$$

avec une erreur moindre que $\varepsilon = 10^{-6}$, en utilisant
   (a) la méthode du point milieu composite,
   (b) la méthode des trapèzes composite,

Solution. Notons $Q_i^c(n)$, $i \in \{m, t, s\}$, la formule de quadrature pour f avec n sous-intervalles de $[0, 1]$.

(a) Que ce soit pour la méthode du point milieu ou pour la méthode des trapèzes, l'utilisation de la formule d'erreur nécessite le calcule de la dérivée seconde de f :

$$f'(x) = \frac{-8x}{(1+x^2)^2} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{-8(1+x^2)^2 + 32x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = 8\frac{4x^2-(1+x^2)}{(1+x^2)^3} = 8\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}.$$

Essayons maintenant de calculer ou de majorer $\|f''\|_{\infty,0,1}$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $x^2 \in [0,1]$ et donc

$$1 \leq 1 + x^2 \leq 2 \quad \text{et} \quad -1 \leq 3x^2 - 1 \leq 2.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq |3x^2-1| \leq 2,$$

et donc que $\|f''\|_{\infty,0,1} \leq 16$.
La formule d'erreur donne :

$$|I - Q_m^c(n)| \leq \frac{(1-0)^3}{24n^2}\|f''\|_{\infty,0,1} \leq \frac{16}{24n^2} = \frac{2}{3n^2}.$$

Aussi pour assurer $|I - Q_m^c(n)| \leq \varepsilon$, il suffit de choisir n tel que

$$\frac{2}{3n^2} \leq \varepsilon,$$

c'est à dire

$$\frac{2}{3\varepsilon} \leq n^2,$$

ou encore

$$\sqrt{\frac{2}{3\varepsilon}} \leq n.$$

Pour $\varepsilon = 10^{-6}$, on obtient $n \geq \sqrt{\frac{2}{3}}10^3$. Le nombre minimal de sous intervalles prévus par la théorie est donc $n = 817$.

(b) La formule d'erreur pour la méthode des trapèzes donne :

$$|I - Q_t^c(n)| \leq \frac{(1-0)^3}{12n^2}\|f''\|_{\infty,0,1} \leq \frac{16}{12n^2} = \frac{4}{3n^2}.$$

Aussi pour assurer $|I - Q_t^c(n)| \leq \varepsilon$, il suffit de choisir n tel que

$$\sqrt{\frac{4}{3\varepsilon}} \leq n.$$

Pour $\varepsilon = 10^{-6}$, on obtient $n \geq \frac{2}{\sqrt{3}}10^3$. Le nombre minimal de sous intervalles prévus par la théorie est donc $n = 1155$.

4. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On note

$$I(f) = \int_{-2}^{2} f(x)dx \quad \text{et} \quad J(f) = f(r_1) + wf(0) + f(r_2).$$

(a) Trouver un triplet (r_1, r_2, w) de réels tel que J soit exacte sur $\mathcal{P}_2$.
(*Rappel : J est dite exacte sur l'ensemble $\mathcal{P}_k$ des polynômes de degré inférieur ou égal à k si pour tout $p \in \mathcal{P}_k$, $I(p) = J(p)$.*)

(b) Montrer qu'avec ce choix J est en fait exacte sur $\mathcal{P}_3$, mais pas sur $\mathcal{P}_4$.

Solution.

(a) Comme tout polynôme de $\mathcal{P}_2$ s'écrit $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, J est exacte sur $\mathcal{P}_2$ si pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{-2}^{2} \left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) dx = \left(\alpha r_1^2 + \beta r_1 + \gamma\right) + w\gamma + \left(\alpha r_2^2 + \beta r_2 + \gamma\right).$$

Or

$$\int_{-2}^{2} \left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) dx = \alpha \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} + \beta \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{2} + \gamma \left[x\right]_{-2}^{2} = \alpha \frac{16}{3} + 4\gamma.$$

L'exactitude de J sur $\mathcal{P}_2$ a donc lieu si pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on a

$$\alpha \frac{16}{3} + 4\gamma = \alpha(r_1^2 + r_2^2) + \beta(r_1 + r_2) + \gamma(2 + w),$$

c'est à dire si

$$w = 2, \quad r_2 = -r_1, \quad 2r_1^2 = \frac{16}{3}.$$

On obtient finalement

$$r_1 = \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad r_2 = -\frac{4}{\sqrt{3}}, \quad w = 2.$$

(b) Notons $M_3(x) = x^3$ et $M_4(x) = x^4$.
Comme J est déjà exacte sur $\mathcal{P}_2$, pour montrer l'exactitude de J sur $\mathcal{P}_3$, il suffit de vérifier que $I(M_3) = J(M_3)$:

$$I(M_3) = \int_{-2}^{2} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right] = 0 \quad \text{et} \quad J(M_3) = M_3\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) + 2M_3(0) + M_3\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = 0.$$

Calculons de la même manière $I(M_4)$ et $J(M_4)$:

$$I(M_4) = \int_{-2}^{2} x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right] = 2\frac{2^5}{5} \quad \text{et} \quad J(M_4) = M_4\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) + 2M_4(0) + M_4\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = 2\frac{2^8}{9}.$$

Comme $I(M_4) \neq J(M_4)$, J ne peut pas être exacte sur $\mathcal{P}_4$