

Cours de méthodes numériques¹

L1 Informatique

Nicolas COUELLAN

Sophie JAN²

Youchun QIU³

Janvier 2018

1. Ce texte est essentiellement tiré du cours écrit par Jean-Paul Calvi au profit de précédentes promotions d'étudiants. Y figurent aussi des morceaux d'un manuscrit de François de Thélin. Qu'ils soient ici grandement remerciés !!!

2. sophie.jan@math.univ-toulouse.fr

3. youchun.qiu@math.univ-toulouse.fr

Table des matières

1	Recherche de racines d'une fonction	3
1.1	Localisation des racines : méthode de dichotomie	3
1.2	Méthode de Newton	4
2	Interpolation polynomiale	9
2.1	Motivations	9
2.2	Existence de l'interpolant	10
2.3	Forme de Lagrange	11
2.3.1	Définition	11
2.3.2	Propriétés algébriques et linéarité	12
2.3.3	Algorithme	13
2.3.4	Étude de l'erreur	14
2.3.5	Choix des points d'interpolation	15
2.4	Forme de Newton : construction pratique de l'interpolant	15
2.4.1	Autre expression de l'interpolant : forme de Newton	16
2.4.2	Algorithme	17
3	Intégration numérique	19
3.1	Formules élémentaires	19
3.1.1	Principe de la méthode	19
3.1.2	Méthode du point milieu	20
3.1.3	Méthode des trapèzes	21
3.1.4	Méthode de Simpson	21
3.2	Étude de l'erreur pour les formules élémentaires	22
3.2.1	Méthode du rectangle au point milieu	22
3.2.2	Méthode du trapèze	23
3.2.3	Méthode de Simpson	24
3.2.4	Des formules d'erreur plus précises	24
3.3	Formules composites des trois exemples classiques	24
3.3.1	Méthode des rectangles aux points milieux	25
3.3.2	Méthode des trapèzes	25
3.3.3	Méthode de Simpson	25
3.4	Étude de l'erreur pour les formules composites	26
3.4.1	Méthode des rectangles aux points milieux	26
3.4.2	Méthode des trapèzes	26
3.4.3	Méthode de Simpson	27

Chapitre 1

Recherche de racines d'une fonction

Dans tout ce chapitre, on considère f une fonction continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On cherche à déterminer numériquement

$$r \in [a, b] \text{ tel que } f(r) = 0.$$

Théorème 1 (Théorème des Valeurs Intermédiaires). *Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.*

1.1 Localisation des racines : méthode de dichotomie

On suppose que f possède une unique racine dans l'intervalle $[a, b]$ et que $f(a)f(b) < 0$.

1. On pose alors $m = \frac{a+b}{2}$ et on évalue $f(m)$.
2. Si $f(m) = 0$, le processus s'arrête : on a trouvé la racine.
3. Si $f(m) \neq 0$, on évalue $f(a)f(m)$.
 - (a) Si $f(a)f(m) < 0$, alors d'après le TVI la racine se trouve dans $]a, m[$ et on reprend en 1 avec $[a, b] = [a, m]$.
 - (b) Sinon (on a $f(m)f(b) < 0$), alors toujours d'après le TVI la racine se trouve dans $]m, b[$ et on reprend en 1 avec $[a, b] = [m, b]$.

Plus précisément, l'algorithme de dichotomie construit 3 suites (a_n) , (b_n) et (c_n) de la manière suivante.

Algorithme 1. 1. $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ et $n = 0$.

2. Tant que (critère d'arrêt) violé faire

(a) Si $f(c_n) = 0$, alors STOP (c_n est la racine de f entre a et b),

(b) sinon

i. Si $f(a_n)f(c_n) < 0$, alors $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$,

ii. sinon $a_{n+1} = c_n$, $b_{n+1} = b_n$.

(c) $n = n + 1$ et $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$.

Fin du faire

Théorème 2. Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On suppose que $f(a)f(b) < 0$ et que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution r sur $[a, b]$. Si l'algorithme de dichotomie parvient jusqu'à l'étape n (c'est-à-dire $c_i \neq r$ pour tous les entiers i entre 0 et $n-1$), alors on a l'estimation

$$|r - c_n| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}}.$$

Preuve : Comme r se trouve entre a_n et c_n ou bien entre c_n et b_n , on a

$$|r - c_n| \leq \frac{b_n - a_n}{2}.$$

Or, par construction,

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2} = \frac{b_{n-3} - a_{n-3}}{2^3} = \dots = \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{b - a}{2^n}.$$

On en déduit que $|r - c_n| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}}$. □

Cet algorithme converge très lentement en pratique. Son intérêt principal est donc d'aider à localiser sommairement la racine r . On se sert ensuite de méthodes qui convergent plus rapidement telles que la méthode de Newton décrite ci-dessous ou d'autres méthodes non développées ici : la méthode de la sécante ou les méthodes de point fixe.

Remarque 1. Le critère d'arrêt qui intervient dans l'algorithme peut être du type

$$\frac{b_n - a_n}{2} < \varepsilon.$$

L'algorithme de dichotomie s'arrêtera alors avec une valeur approchée c_n de r à ε près et cette valeur approchée pourra servir de bon point de départ pour la méthode de Newton.

Exemple : Appliquons la méthode de dichotomie à $f(x) = \cos(x) - x$.

La fonction f est continue sur \mathbb{R} , $f(0) = 1 > 0$, $f(\pi/2) = -\pi/2 < 0$. On en déduit, par le théorème des valeurs intermédiaires, que f admet au moins une racine dans $[0, \pi/2]$.

De plus, comme $f'(x) = -\sin(x) - 1$, on a pour tout $x \in [0, \pi/2]$, $f'(x) \leq -1 < 0$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $[0, \pi/2]$. On en déduit que f admet une unique racine r dans $[0, \pi/2]$.

$$f(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{2} - \pi}{4} < 0, \text{ donc } r \in [0, \pi/4].$$

$$f(\pi/8) > 0, \text{ donc } r \in [\pi/8, \pi/4].$$

1.2 Méthode de Newton

Notation 1. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. On note $C^p([a, b])$ l'ensemble des fonctions définies sur $[a, b]$, p fois dérivables et dont la p -ième dérivée est continue.

On suppose que $f \in C^1([a, b])$ et que f possède une unique racine, notée r , dans l'intervalle $[a, b]$.

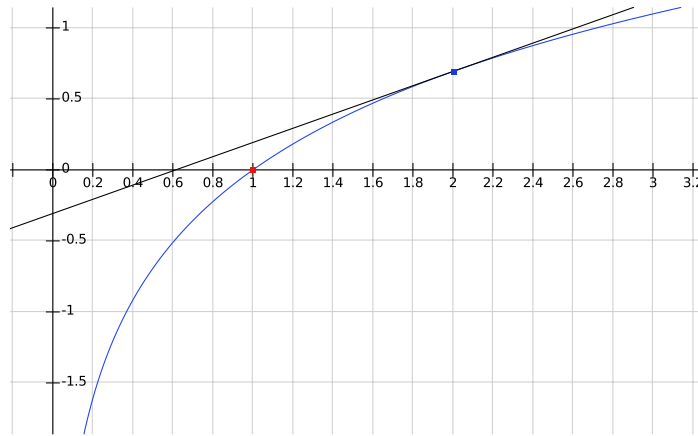
L'idée de la méthode de Newton consiste à remplacer l'équation $f(x) = 0$ par l'équation $T_0(x) = 0$ de la tangente à la courbe représentative de f en un point x_0 bien choisi :

$$T_0(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

L'équation $T_0(x) = 0$ admet alors pour racine

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

On espère que $x_1 \approx r$.

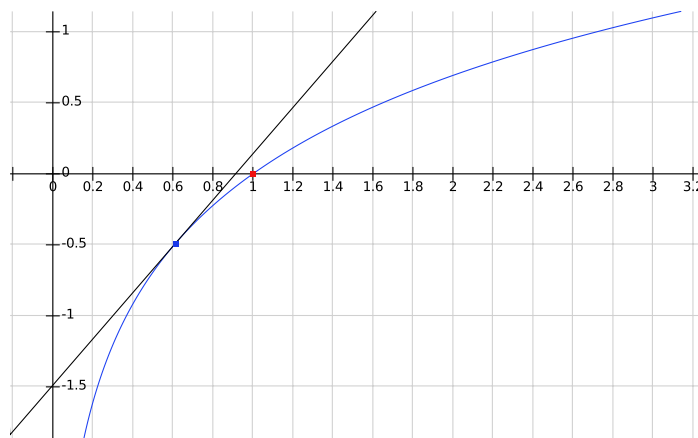


Si $x_1 \in [a, b]$, on peut itérer le procédé en remplaçant $f(x) = 0$ par $T_1(x) = 0$ avec

$$T_1(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1).$$

La racine de cette dernière équation est

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$



On construit ainsi, par récurrence, **sous réserve que** $x_n \in [a, b]$, la **suite de Newton**,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (1.1)$$

Remarque 2. 1. La suite de Newton n'est définie que si f est dérivable et si

$$\forall n \in \mathbb{N}, f'(x_n) \neq 0.$$

2. Le choix du point initial de la récurrence définie en (1.1) est important. Il doit être fait de telle sorte que chaque itéré x_n soit dans $[a, b]$.

Définition 1. On dit qu'une suite (x_n) converge quadratiquement vers r si on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = r \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x_{n+1} - r|}{|x_n - r|^2} = C > 0.$$

Théorème 3. On suppose que $r \in [a, b]$ et que $f \in C^2([a, b])$ vérifie $f(r) = 0$ et

$$\forall x \in [a, b], |f'(x)| \geq m_1 > 0 \text{ et } |f''(x)| \leq M_2. \quad (1.2)$$

Si de plus $x_0 \in]r - \varepsilon, r + \varepsilon[\subset [a, b]$ avec $\varepsilon < \frac{2m_1}{M_2}$, on a

1. pour tout entier n , il existe z_n entre x_n et r tel que

$$|x_{n+1} - r| = \frac{|f''(z_n)|}{2|f'(x_n)|} |x_n - r|^2; \quad (1.3)$$

2. tous les itérés $x_n \in]r - \varepsilon, r + \varepsilon[$;

3. pour tout entier $n \geq 1$, la formule d'erreur suivante

$$|x_n - r| \leq \left(\frac{M_2}{2m_1} \right)^{2^n - 1} |x_0 - r|^{2^n}; \quad (1.4)$$

4. la suite (x_n) converge vers r

5. et la convergence est quadratique.

Preuve :

1. Ce point est admis. Il repose sur l'application de la formule de Taylor, que vous pouvez trouver dans tous les bons livres d'analyse de niveau L1.
2. Les hypothèses (1.2) permettent de déduire aisément de (1.3) que

$$|x_{n+1} - r| = \frac{|f''(z_n)|}{2|f'(x_n)|} |x_n - r|^2 \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_n - r|^2. \quad (1.5)$$

Comme $\varepsilon < \frac{2m_1}{M_2}$, si $|x_n - r| < \varepsilon$, on a $|x_{n+1} - r| \leq \frac{M_2}{2m_1} \varepsilon^2 = \frac{M_2 \varepsilon}{2m_1} \varepsilon < \varepsilon$ et par récurrence, tous les itérés sont dans $]r - \varepsilon, r + \varepsilon[$.

3. On procède par récurrence.

— Initialisation : (1.5) avec $n = 0$ fournit la formule (1.4) pour $n = 1$.

— Hérédité : on suppose que (1.4) est vraie au rang n et on veut montrer qu'elle est vraie au rang $n + 1$.

On a, par (1.5),

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - r| &\leq \frac{M_2}{2m_1} |x_n - r|^2 \\ &\leq \frac{M_2}{2m_1} \left(\left(\frac{M_2}{2m_1} \right)^{2^n - 1} |x_0 - r|^{2^n} \right)^2 \text{ en utilisant l'hypothèse de récurrence} \\ &= \left(\frac{M_2}{2m_1} \right)^{1 + (2^n - 1)2} |x_0 - r|^{2^{n+1}} \\ &= \left(\frac{M_2}{2m_1} \right)^{2^{n+1} - 1} |x_0 - r|^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

4. De (1.4), comme $|x_0 - r| < \varepsilon$, on déduit que

$$|x_n - r| \leq |x_0 - r| \left(\frac{\varepsilon M_2}{2m_1} \right)^{2^n - 1}.$$

Or $\frac{\varepsilon M_2}{2m_1} < 1$, donc par le théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = r$.

5. Comme la suite (x_n) converge vers r , la suite (z_n) converge aussi vers r . Ainsi, la formule (1.3) montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x_{n+1} - r|}{|x_n - r|^2} = \frac{|f''(r)|}{2|f'(r)|} \geq 0.$$

La convergence est donc bien au moins d'ordre 2.

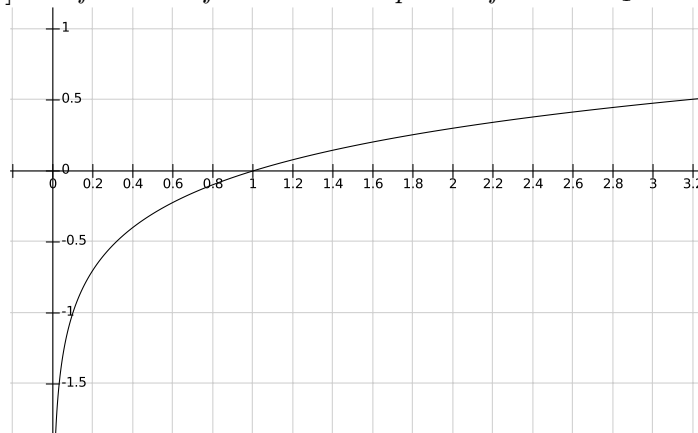
□

Remarque 3. *Attention au choix du point de départ ...*

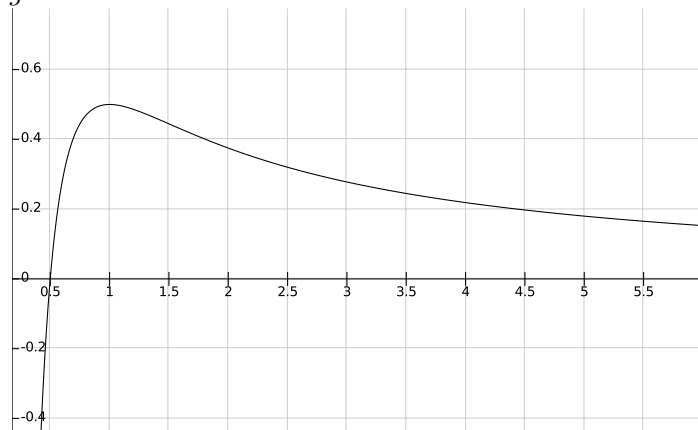
— Si par exemple $f = \ln$, $[a, b] = [0.5, 3]$ et $x_0 = e$, alors

$$x_1 = x_0 - \frac{\ln(x_0)}{\frac{1}{x_0}} = e - e = 0$$

et ... $x_1 \notin [a, b]$. La fonction f n'est même plus définie en x_1 .



— Si par exemple $f(x) = \frac{2x-1}{2x^2}$, $[a, b] = [0.25, 10]$ et $x_0 = 2$, alors la suite est bien définie, mais elle diverge.



Exemple : Méthode du Héron d'Alexandrie (1er siècle après JC)

Il utilisait la méthode suivante pour approcher la racine carrée du nombre $a > 0$:

$$\begin{cases} x_0 > 0 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right). \end{cases}$$

En fait, la méthode de Héron est un cas particulier de la méthode de Newton. En effet, si on applique la méthode de Newton à la fonction f définie par

$$f(x) = x^2 - a,$$

on obtient

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right).$$

Exemple : Appliquons la méthode de Newton à $f(x) = \cos(x) - x$. On a vu que f admet une unique racine r dans $[\pi/8, \pi/4]$.

Comme pour tout $x \in [\pi/8, \pi/4]$

$$f'(x) = -\sin(x) - 1 < 0 \text{ et } f''(x) = -\cos(x) < 0,$$

on part d'un x_0 tel que $f(x_0) < 0$. Prenons $x_0 = \pi/4$. La suite est ensuite construite à l'aide de la formule

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos(x_n) - x_n}{-\sin(x_n) - 1} = x_n + \frac{\cos(x_n) - x_n}{\sin(x_n) + 1} = \frac{x_n \sin(x_n) + \cos(x_n)}{\sin(x_n) + 1}.$$

On obtient alors successivement

$$\begin{array}{rcl} x_0 & \approx & 0.785398163 \\ x_1 & \approx & 0.739536133 \\ x_2 & \approx & 0.739085178 \\ x_3 & \approx & 0.739085133 \end{array}$$

En regardant ce tableau, il semble que 7390851 soit les 7 premières décimales de la racine de f . On le contrôle en vérifiant que le produit

$$f(0.7390851)f(0.7390852) \approx (5.56 \cdot 10^{-8})(-1.1175 \cdot 10^{-7}) < 0.$$

Chapitre 2

Interpolation polynomiale

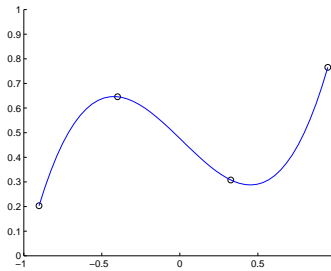
2.1 Motivations

En analyse numérique, une fonction f **inconnue explicitement** est souvent

- connue seulement en certains points x_0, x_1, \dots, x_d ;
- ou évaluable uniquement au moyen de l'appel à un code coûteux.

Mais dans de nombreux cas, on a besoin d'effectuer des opérations (dérivation, intégration, ...) sur la fonction f .

On cherche donc à reconstruire f par une autre fonction f_r simple et facile à évaluer à partir des données discrètes de f . On espère que le modèle f_r ne sera pas trop éloigné de la fonction f aux autres points.



On s'intéresse dans ce cours à la reconstruction de f par des polynômes.

Pourquoi les polynômes ?

1. Théorème d'approximation de Weierstrass : pour toute fonction f définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme p tel que

$$\forall x \in [a, b], |f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

Plus ε est petit, plus le degré du polynôme est grand.

2. La simplicité de l'évaluation d'un polynôme par le schéma de Hörner :

$$\sum_{j=0}^n c_j x^j = \left(\dots \left((c_n x + c_{n-1}) x + c_{n-2} \right) x + \dots c_1 \right) x + c_0.$$

Plus précisément, étant donnés $d+1$ points d'abscisses distinctes $M_i = (a_i, f_i), i = 0, 1, \dots, d$ dans le plan, le problème de l'**interpolation polynomiale** consiste à trouver un polynôme de degré inférieur ou égal à m dont le graphe passe par les $d+1$ points M_i , c'est-à-dire

$$\text{trouver } p \in \mathcal{P}_m \text{ tel que } p(a_i) = f_i, \quad \forall i = 0, 1, \dots, d. \quad (2.1)$$

Définition 2. On note \mathcal{P}_m l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à m .

2.2 Existence de l'interpolant

2 points : $d = 1$

Naturellement, le problème de trouver un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 dont le graphe passe par 2 points $M_0 = (a_0, f_0)$ et $M_1 = (a_1, f_1)$ d'abscisses différentes $a_0 \neq a_1$ est très facile : il suffit de choisir l'unique polynôme dont le graphe est la droite (M_0M_1) .

3 points : $d = 2$

Lorsqu'on dispose de 3 points d'abscisses deux à deux distinctes et que l'on cherche un polynôme de \mathcal{P}_2 , le problème est à peine plus difficile. Le graphe du polynôme cherché est généralement une parabole (correspondant à un polynôme de degré 2). Mais dans le cas où les 3 points sont alignés, le graphe du polynôme cherché est une droite comme dans le cas $d = 1$.

Cas général

Dans le cas général, le problème (2.1) peut n'avoir aucune solution ou bien en avoir une infinité.

Il paraît assez clair que pour que le problème (2.1) ait une unique solution il faut établir une relation entre m et d . Pour déterminer $p \in \mathcal{P}_m$, on doit trouver tous ses coefficients et ils sont au nombre de $m + 1$. On dispose pour ce faire des $d + 1$ relations $p(a_i) = f_i$, $i = 0, 1, \dots, d$. Il est donc assez évident que pour espérer une solution unique au problème (2.1), on doit supposer que $m = d$.

Théorème 4 (admis). *Soit $A = \{a_0, a_1, \dots, a_d\}$ un ensemble de $d + 1$ réels distincts. Quels que soient les $d + 1$ réels f_0, f_1, \dots, f_d , il existe un et un seul polynôme $p \in \mathcal{P}_d$ tel que $p(a_i) = f_i$, $\forall i = 0, 1, \dots, d$.*

Exemples :

1. Prenons $d = 1$ et considérons 4 réels a_0, a_1, f_0 et f_1 . Cherchons un polynôme p de degré au plus 1 tel que

$$p(a_0) = f_0 \text{ et } p(a_1) = f_1.$$

Le polynôme p peut se mettre sous la forme $p(x) = \alpha x + \beta$ et il s'agit de déterminer α et β . Il suffit de résoudre le système linéaire

$$\alpha a_0 + \beta = f_0 \tag{2.2}$$

$$\alpha a_1 + \beta = f_1. \tag{2.3}$$

En remplaçant la seconde équation par (2.3)-(2.2), on obtient le système équivalent suivant :

$$\alpha a_0 + \beta = f_0 \tag{2.4}$$

$$\alpha(a_1 - a_0) = f_1 - f_0 \tag{2.5}$$

qui permet d'obtenir **si a_1 et a_0 sont distincts**

$$\alpha = \frac{f_1 - f_0}{a_1 - a_0}, \quad \beta = f_0 - \alpha a_0, \quad p(x) = \frac{f_1 - f_0}{a_1 - a_0}(x - a_0) + f_0.$$

2. Prenons $d = 2$ et considérons 6 réels a_0, a_1, a_2, f_0, f_1 et f_2 . Cherchons un polynôme p de degré au plus 2 tel que

$$p(a_0) = f_0, p(a_1) = f_1 \text{ et } p(a_2) = f_2.$$

Le polynôme p peut se mettre sous la forme $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ et il s'agit de déterminer α, β et γ . Il suffit de résoudre le système linéaire

$$\alpha a_0^2 + \beta a_0 + \gamma = f_0 \quad (2.6)$$

$$\alpha a_1^2 + \beta a_1 + \gamma = f_1 \quad (2.7)$$

$$\alpha a_2^2 + \beta a_2 + \gamma = f_2. \quad (2.8)$$

Ce système linéaire admet une unique solution si et seulement si a_0, a_1 et a_2 sont deux à deux distincts. Sous ces conditions, on obtient

$$\alpha = \frac{1}{a_2 - a_1} \left(\frac{f_2 - f_0}{a_2 - a_0} - \frac{f_1 - f_0}{a_1 - a_0} \right), \quad \beta = \frac{f_1 - f_0}{a_1 - a_0} - \alpha(a_1 + a_0), \quad \gamma = f_0 - \alpha a_0^2 - \beta a_0.$$

COURS 3 - 1h

2.3 Forme de Lagrange

2.3.1 Définition

Soit $A = \{a_0, a_1, \dots, a_d\}$ un ensemble de $d + 1$ réels distincts.

On définit, pour $j = 0, 1, \dots, d$,

$$l_{j,d}(x) = \frac{(x - a_0)(x - a_1) \dots (x - a_{j-1})(x - a_{j+1}) \dots (x - a_d)}{(a_j - a_0)(a_j - a_1) \dots (a_j - a_{j-1})(a_j - a_{j+1}) \dots (a_j - a_d)} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^d \frac{x - a_k}{a_j - a_k}. \quad (2.9)$$

Les polynômes définis ci-dessus sont des polynômes de degré d et on les appelle les **polynômes fondamentaux de Lagrange** associés à A ¹.

Proposition 1. *Les polynômes $l_{0,d}, l_{1,d}, \dots, l_{d,d}$ vérifient*

$$\forall i = 0, 1, \dots, d, \quad \forall j = 0, 1, \dots, d, \quad l_{j,d}(a_i) = \delta_{i,j}.$$

Preuve : Soit i et j deux entiers entre 0 et d . On a simplement

$$l_{j,d}(a_j) = \frac{(a_j - a_0)(a_j - a_1) \dots (a_j - a_{j-1})(a_j - a_{j+1}) \dots (a_j - a_d)}{(a_j - a_0)(a_j - a_1) \dots (a_j - a_{j-1})(a_j - a_{j+1}) \dots (a_j - a_d)} = 1$$

et pour $j \neq i$, on a

$$l_{j,d}(a_i) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^d \frac{a_i - a_k}{a_j - a_k} = 0,$$

parce que i sera l'un des k . □

1. En fait ces polynômes forment une base de \mathcal{P}_d . Comme il y a $d + 1$ polynômes $l_{j,d}$ et que \mathcal{P}_d est de dimension $d + 1$, il suffit de montrer que les $l_{j,d}$ forment bien une famille de polynômes linéairement indépendants.

En effet, si $\sum_{j=0}^d \alpha_j l_{j,d} = 0$, en utilisant le point précédent, on a $\forall i = 0, \dots, d, \alpha_i = \sum_{j=0}^d \alpha_j \delta_{ji} = \sum_{j=0}^d \alpha_j l_{j,d}(a_i) = 0$.

Théorème 5. Soit $A = \{a_0, a_1, \dots, a_d\}$ un ensemble de $d + 1$ réels distincts. Quels que soient les $d + 1$ réels f_0, f_1, \dots, f_d , le seul polynôme $p_f \in \mathcal{P}_d$ tel que $p_f(a_i) = f_i, \forall i = 0, 1, \dots, d$ se met sous la forme (dite de Lagrange)

$$p_f = \sum_{j=0}^d f_j l_{j,d}. \quad (2.10)$$

Preuve : L'existence et l'unicité de p_f ont déjà été établies au théorème 4. Il reste à montrer que la forme proposée de p_f satisfait bien les équations $p_f(a_i) = f_i, \forall i = 0, 1, \dots, d$. En effet, quel que soit i entier entre 0 et d , on a

$$p_f(a_i) = \sum_{j=0}^d f_j l_{j,d}(a_i) = \sum_{j=0}^d f_j \delta_{ji} = f_i,$$

en utilisant la proposition 1. □

Les nombres a_i s'appellent les **points d'interpolation** et les valeurs f_i sont les **valeurs interpolées**.

Lorsque $f_i = f(a_i)$, f est la **fonction interpolée**. L'unique polynôme $p_f \in \mathcal{P}_d$ tel que $p_f(a_i) = f(a_i), \forall i = 0, 1, \dots, d$ s'appelle alors le **polynôme d'interpolation de Lagrange** de f aux points a_i .

Attention, p_f dépend de f , mais aussi de l'ensemble des points A .

Exemple : calculer le polynôme d'interpolation de \cos aux points $\{0, \pi/2, \pi\}$.

2.3.2 Propriétés algébriques et linéarité

Remarque 4. Naturellement, si $q \in \mathcal{P}_d$, alors le polynôme d'interpolation de q relativement aux points $\{a_0, a_1, \dots, a_d\}$ est q lui-même : $p_q = q$. Attention, ceci n'est valable que si q est un polynôme de degré inférieur ou égal à d !!

Proposition 2. Quel que soit l'entier d , pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{j=0}^d l_{j,d}(x) = 1$.

Preuve : Notons e_0 le polynôme constant égal à 1. Quel que soit l'entier naturel d , $e_0 \in \mathcal{P}_d$. En tenant compte de la remarque 4, on en déduit que e_0 est son propre polynôme d'interpolation relativement aux points $\{a_0, a_1, \dots, a_d\}$: pour tout x réel,

$$\begin{aligned} 1 &= e_0(x) \\ &= p_{e_0}(x) \\ &= \sum_{j=0}^d e_0(a_j) l_{j,d}(x) \\ &= \sum_{j=0}^d l_{j,d}(x). \end{aligned}$$

.

□

Théorème 6. Soit $A = \{a_0, a_1, \dots, a_d\}$ un ensemble de $d + 1$ réels distincts. L'application qui à f définie au moins sur A fait correspondre son polynôme d'interpolation est linéaire. Notons, pour toutes fonctions f et g définies au moins sur A et pour tout réel λ , p_f (resp. $p_g, p_{f+g}, p_{\lambda f}$) le polynôme d'interpolation de f (resp. $g, f + g, \lambda f$) relativement aux points de A . La linéarité mentionnée ci-dessus signifie que pour tout x réel,

$$\begin{cases} p_{f+g}(x) &= p_f(x) + p_g(x), \\ p_{\lambda f}(x) &= \lambda p_f(x). \end{cases} \quad (2.11)$$

Preuve : En utilisant la forme de Lagrange du polynôme d'interpolation de f relativement à A , on a pour tout x réel,

$$\begin{aligned}
p_{f+g}(x) &= \sum_{j=0}^d (f+g)(a_j) l_{j,d}(x) \\
&= \sum_{j=0}^d \left(f(a_j) + g(a_j) \right) l_{j,d}(x) \\
&= \sum_{j=0}^d \left(f(a_j) l_{j,d}(x) + g(a_j) l_{j,d}(x) \right) \\
&= \sum_{j=0}^d f(a_j) l_{j,d}(x) + \sum_{j=0}^d g(a_j) l_{j,d}(x) \\
&= p_f(x) + p_g(x)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
p_{\lambda f}(x) &= \sum_{j=0}^d (\lambda f)(a_j) l_{j,d}(x) \\
&= \sum_{j=0}^d \lambda f(a_j) l_{j,d}(x) \\
&= \lambda \sum_{j=0}^d f(a_j) l_{j,d}(x) \\
&= \lambda p_f(x).
\end{aligned}$$

□

COURS 4 - 1h

2.3.3 Algorithme

Algorithme 2. *Entrées :*

- le vecteur a des $d+1$ points d'interpolation a_i , $i = 0, 1, \dots, d$,
- le vecteur f des $d+1$ valeurs d'interpolation f_i , $i = 0, 1, \dots, d$,
- le point x .

Le résultat est dans P .

1. $P := 0$;
2. Pour j de 0 à d faire
 - (a) $L := 1$
 - (b) Pour k de 0 à $j-1$ faire $L := L \times (x - a_k) / (a_j - a_k)$
Pour k de $j+1$ à d faire $L := L \times (x - a_k) / (a_j - a_k)$
 - (c) $P := P + f_j \times L$

Théorème 7. *L'algorithme 2 nécessite $2(2d+1)(d+1) \sim 4d^2$ opérations.*

Remarque 5. *Soient 2 suites $(u_d)_{d \in \mathbb{N}}$ et $(v_d)_{d \in \mathbb{N}}$ telles que tous les v_d sont non nuls. On dira que les deux suites sont équivalentes lorsque $d \rightarrow \infty$ et on notera $u_d \sim v_d$ lorsque $\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{u_d}{v_d} = 1$.*

Preuve : On décompte ici le nombre d'opérations du type $+$, $-$, \times et $/$.

L'étape 1 ne nécessite aucune opération du type précédent.

Pour chaque j de l'étape 2,

- l'étape 2b demande $j+(d-j) = d$ multiplications, autant de divisions et $2d$ soustractions
- et l'étape 2c demande 1 multiplication et 1 addition.

Au total, le nombre d'opérations réalisées par l'algorithme vaut

$$\sum_{j=0}^d \left(d(\times) + d(/) + 2d(-) + 1(\times) + 1(+) \right) = \sum_{j=0}^d (4d + 2) = (4d + 2) \sum_{j=0}^d 1 = 2(2d + 1)(d + 1).$$

Il est facile de vérifier que

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{2(2d + 1)(d + 1)}{4d^2} = \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{2d + 1}{2d} \frac{d + 1}{d} = \lim_{d \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2d} \right) \left(1 + \frac{1}{d} \right) = 1.$$

□

Dans la figure 2.1, on compare la fonction $x \mapsto x \sin(\pi x)$ (rouge) à son interpolant de Lagrange (bleu) relativement aux $d + 1$ points équidistants dans $[-1, 1]$, $a_i = -1 + 2i/d$, $i = 0, 1, \dots, d$ pour différentes valeurs de d .

On constate que l'interpolant se rapproche de plus en plus de la fonction sur $[-1, 1]$ pour d allant de 3 à 6. En revanche, l'approximation est mauvaise en dehors de cet intervalle $[-1, 1]$.

Ceci étant dit, comme la fonction considérée ici est très régulière, en augmentant encore d , par exemple pour $d = 12$, le polynôme s'approche de la fonction même en dehors de l'intervalle $[-1, 1]$.

On verra en TP que le polynôme d'interpolation de Lagrange relativement aux points équidistants ne constitue pas une bonne approximation de certaines fonctions.

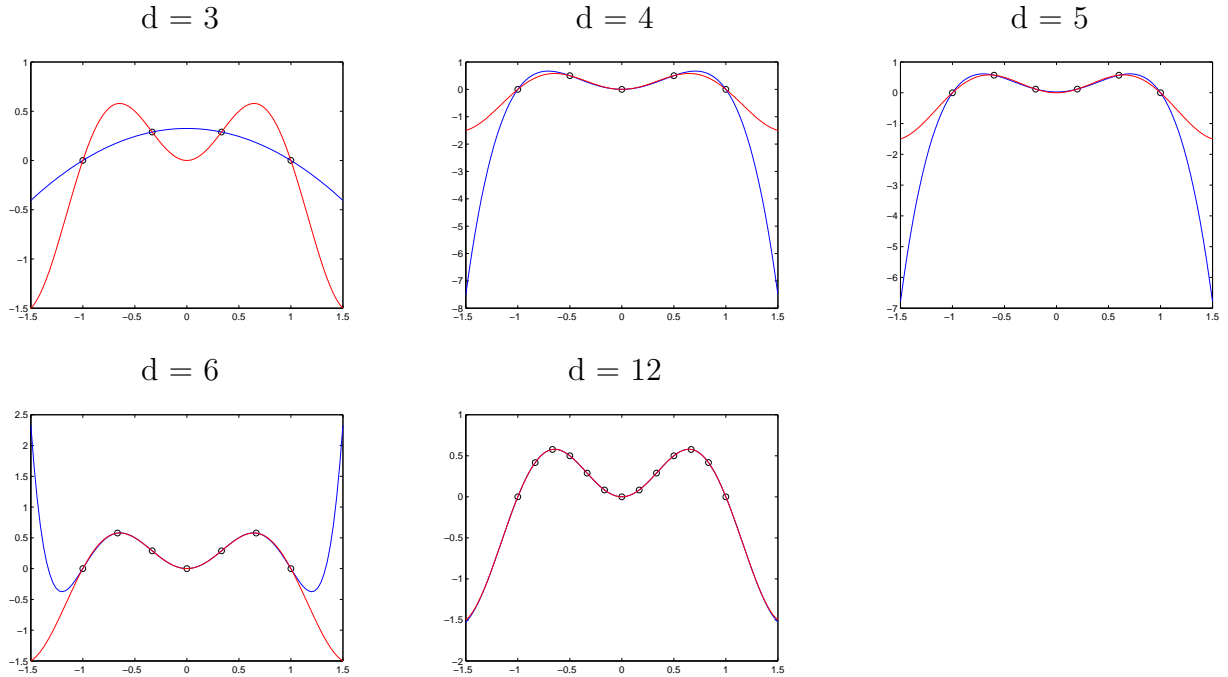


FIGURE 2.1 – Fonction $x \mapsto x \sin(\pi x)$ (en rouge) et l'interpolant de Lagrange correspondant (en bleu) relativement aux points $a_i = -1 + 2i/d$, $i = 0, 1, \dots, d$ (cercles noirs), pour différentes valeurs du degré d .

2.3.4 Étude de l'erreur

Soit $A = \{a_0, a_1, \dots, a_d\}$ un ensemble de $d + 1$ réels distincts et f une fonction à interpoler. Notons p_f le polynôme d'interpolation de f relativement aux points de A .

Comme p_f est égal à f en tous les points a_i , $i = 0, 1, \dots, d$, il est naturel d'espérer que la différence entre p_f et f soit petite en les autres points x , au moins en les points x pas trop éloignés des a_i .

Définition 3. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Pour une fonction $h \in C([a, b])$, on appelle **norme infinie de h sur l'intervalle $[a, b]$** et on note $\|h\|_{\infty, [a, b]}$ la quantité

$$\max_{t \in [a, b]} |h(t)|.$$

Théorème 8 (admis). Soient $A = \{a_0, a_1, \dots, a_d\} \subset [a, b]$ et $f \in C^{d+1}([a, b])$. On suppose que $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_d$. Alors pour tout $x \in [a, b]$,

$$|f(x) - p_f(x)| \leq \frac{\|f^{(d+1)}\|_{\infty, [a, b]}}{(d+1)!} |\Pi_A(x)|,$$

où $f^{(d+1)}$ est la $(d+1)$ -ième dérivée de f et $\Pi_A(x) = \prod_{k=0}^d (x - a_k)$. On a aussi

$$\|f - p_f\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{\|f^{(d+1)}\|_{\infty, [a, b]}}{(d+1)!} \|\Pi_A\|_{\infty, [a, b]}. \quad (2.12)$$

Exemple : On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = \sqrt{x}$. Soient $a_0 = 100$, $a_1 = 121$ et $a_2 = 144$.

1. Calculer le polynôme d'interpolation p_f de f aux points a_0 , a_1 et a_2 .
2. Montrer (sans évaluer le membre de gauche) que $|f(115) - p_f(115)| < 1.8 \cdot 10^{-3}$.

2.3.5 Choix des points d'interpolation

La majoration (2.12) montre que pour une fonction à interpoler f donnée, si nous avons le choix des points d'interpolation dans $[a, b]$, nous avons intérêt à choisir ces points de telle sorte que la quantité $\|\Pi_A(x)\|_{\infty, [a, b]}$ soit minimale. Il existe un unique ensemble de points qui minimise cette quantité. On les appelle les points de Chebyshev en hommage au mathématicien russe qui les a déterminés pour la première fois en 1874. Lorsque $[a, b] = [-1, 1]$, ces points sont donnés par la formule

$$a_i = \cos \left(\frac{(2i+1)\pi}{(d+1)2} \right), i = 0, 1, \dots, d.$$

On peut comparer la répartition des points de Chebyshev à celle des points équidistants sur l'intervalle $[-1, 1]$ pour $d = 12$ sur les graphiques de la figure 2.2. Les premiers tendent à être en nombre plus important aux extrémités de l'intervalle.

2.4 Forme de Newton : construction pratique de l'interpolant

Dans toute cette section, on note $A = \{a_0, a_1, \dots, a_d\} \subset [a, b]$ un ensemble de $d+1$ réels distincts et f la fonction à interpoler, définie au moins sur A . Notons p_f le polynôme d'interpolation de f relativement aux points de A . Dans la forme de Lagrange de p_f , ajouter un point d'interpolation dans A nécessite de recommencer tous les calculs. C'est pour éviter cela que l'on introduit la forme de Newton de p_f . Comme elle définit le polynôme d'interpolation par récurrence, ajouter un point dans A devient peu coûteux.

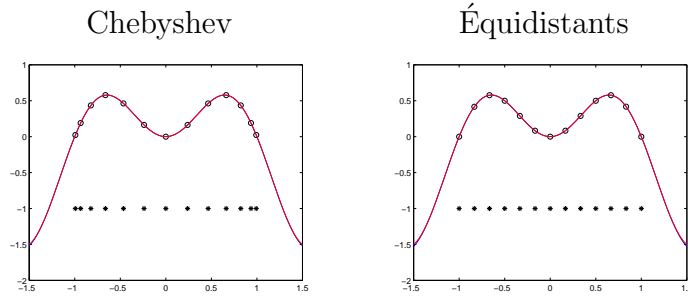


FIGURE 2.2 – Répartition des points de Chebyshev et des points équidistants (les étoiles noires) sur $[-1, 1]$ et tracé de la fonction $x \mapsto x \sin(\pi x)$ (en rouge) et de l'interpolant de Lagrange correspondant (en bleu) pour $d = 12$.

2.4.1 Autre expression de l'interpolant : forme de Newton

On peut écrire p_f de différentes manières : pour tout x réel,

$$\begin{aligned}
 p_f(x) &= \sum_{j=0}^d f_j l_{jd}(x) \\
 &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_d x^d \\
 &= f[a_0] + f[a_0, a_1](x - a_0) + f[a_0, a_1, a_2](x - a_0)(x - a_1) + \dots \\
 &\quad + f[a_0, a_1, \dots, a_d](x - a_0)(x - a_1) \dots (x - a_{d-1}) \\
 &= f[a_0] + \sum_{j=1}^d f[a_0, a_1, \dots, a_j](x - a_0)(x - a_1) \dots (x - a_{j-1}),
 \end{aligned}$$

où on a noté $f[a_0, a_1, \dots, a_d]$ le coefficient de x^d dans $p_f(x)$. Ce coefficient est aussi appelé **d -ième différence divisée de f aux points a_0, a_1, \dots, a_d** .

Exemples :

1. Si $d = 0$ et $A = \{a_0\}$, $p_f(x) = f(a_0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Le coefficient de $x^0 = 1$ est $f(a_0)$ et donc

$$f[a_0] = f(a_0).$$

2. Si $d = 1$ et $A = \{a_0, a_1\}$, $p_f(x) = f(a_0) \frac{x - a_1}{a_0 - a_1} + f(a_1) \frac{x - a_0}{a_1 - a_0}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Le coefficient de $x^1 = x$ dans ce polynôme est

$$\frac{f(a_0)}{a_0 - a_1} + \frac{f(a_1)}{a_1 - a_0},$$

donc

$$f[a_0, a_1] = \frac{f(a_1) - f(a_0)}{a_1 - a_0}.$$

3. Si $d = 2$ et $A = \{a_0, a_1, a_2\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$p_f(x) = f(a_0) \frac{(x - a_1)(x - a_2)}{(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)} + f(a_1) \frac{(x - a_0)(x - a_2)}{(a_1 - a_0)(a_1 - a_2)} + f(a_2) \frac{(x - a_0)(x - a_1)}{(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)}.$$

Le coefficient de x^2 dans ce polynôme est

$$f(a_0) \frac{1}{(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)} + f(a_1) \frac{1}{(a_1 - a_0)(a_1 - a_2)} + f(a_2) \frac{1}{(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)},$$

qui s'écrit encore

$$\frac{f(a_0)}{(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)} + \frac{f(a_1)}{(a_1 - a_0)(a_1 - a_2)} \frac{(a_2 - a_1) + (a_1 - a_0)}{a_2 - a_0} + \frac{f(a_2)}{(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)},$$

c'est à dire

$$\frac{f(a_0)}{(a_1 - a_0)(a_2 - a_0)} - \frac{f(a_1)}{(a_1 - a_0)(a_2 - a_0)} - \frac{f(a_1)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_0)} + \frac{f(a_2)}{(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)},$$

donc

$$f[a_0, a_1, a_2] = \frac{\frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} - \frac{f(a_1) - f(a_0)}{a_1 - a_0}}{a_2 - a_0} = \frac{f[a_1, a_2] - f[a_0, a_1]}{a_2 - a_0}.$$

Théorème 9 (admis). *Les différences divisées s'obtiennent par récurrence : pour tout entier $l \geq 1$,*

$$f[a_0, a_1, \dots, a_l] = \frac{f[a_1, a_2, \dots, a_l] - f[a_0, a_1, \dots, a_{l-1}]}{a_l - a_0}.$$

Exemple : En exploitant ce qui vient d'être vu, calculer le polynôme d'interpolation p de $x \mapsto x^4$ relativement aux points $\{0, 1, 2\}$.

2.4.2 Algorithme

Dans l'algorithme ci-dessous, la première étape consiste à calculer toutes les différences divisées suivantes et à les stocker dans une matrice D ,

	Numéros de colonnes	0	1	d
Numéros de lignes				
0	a_0	$f[a_0]$		
1	a_1	$f[a_1]$	\backslash — $f[a_0, a_1]$	
2	a_2	$f[a_2]$	\backslash — $f[a_1, a_2]$	\backslash — \dots
\vdots	\vdots	\vdots		
$d - 1$	a_{d-1}	$f[a_{d-1}]$		
d	a_d	$f[a_d]$	\backslash — $f[a_{d-1}, a_d]$	\backslash — \dots $f[a_0, a_1, \dots, a_d]$

puis à évaluer le polynôme d'interpolation en un point x au moyen de la forme de Newton

$$p_f(x) = f[a_0] + \sum_{j=1}^d f[a_0, a_1, \dots, a_j](x - a_0)(x - a_1) \dots (x - a_{j-1}).$$

Algorithme 3. *Entrées :*

- le vecteur a des $d + 1$ points d'interpolation a_i , $i = 0, 1, \dots, d$,
- le vecteur f des $d + 1$ valeurs d'interpolation f_i , $i = 0, 1, \dots, d$,
- le point x .

Le résultat est dans P .

1. Pour i de 0 à d faire $D_{i,0} = f(a_i)$
 Pour j de 1 à d faire
 Pour i de j à d faire $D_{i,j} = (D_{i,j-1} - D_{i-1,j-1})/(a_i - a_{i-j})$
 Fin du pour
2. $P = 0$
 $\pi = 1$
 Pour j de 0 à d faire
 $P = P + D_{j,j} \times \pi$
 $\pi = \pi \times (x - a_j)$
 Fin du pour

Exemple : En exploitant ce qui vient d'être vu, calculer

- le polynôme d'interpolation p de cos relativement aux points $\{0, \pi/2, \pi\}$;
- le polynôme d'interpolation q de cos relativement aux points $\{0, \pi/2, \pi, -\pi\}$.

Théorème 10. *L'algorithme 3 nécessite $\frac{(d+1)(3d+8)}{2} \sim \frac{3}{2}d^2$ opérations.*

Preuve : Dans l'étape 1 de calcul des différences divisées, il est réalisé le nombre suivant d'opérations

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^d \sum_{i=j}^d 2(-) + 1(/)\quad &= \sum_{j=1}^d 3(d-j+1) \\
 &= 3\left(d(d+1) - \frac{d(d+1)}{2}\right) \\
 &= \frac{3}{2}d(d+1).
 \end{aligned}$$

Dans l'étape 2 d'évaluation du polynôme, il est effectué le nombre suivant d'opérations

$$\sum_{j=0}^d 1(+) + 1(-) + 2(*) = 4(d+1).$$

Au total, cet algorithme nécessite donc $\frac{3}{2}d(d+1) + 4(d+1) = \frac{(d+1)(3d+8)}{2} \sim \frac{3}{2}d^2$ opérations. □

Chapitre 3

Intégration numérique

On s'intéresse dans ce chapitre au calcul d'intégrales du type

$$I(f, a, b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Dans la plupart des cas, on ne connaît pas de primitives de f . C'est pourquoi on étudie des méthodes de calcul approché de $I(f, a, b)$ en supposant que l'on connaît les valeurs numériques de f en certains points bien choisis.

Dans de nombreux cas de la vie réelle, on ne connaît même pas l'expression de la fonction f . On dispose seulement de tableaux de mesures.

Dans toute la suite de ce chapitre,

- on considère une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue,
- on pose $I(f, a, b) = \int_a^b f(x)dx$,
- on se donne une subdivision $a \leq a_0 < a_1 < \dots < a_d \leq b$ de $[a, b]$,
- on note $A = \{a_0, a_1, \dots, a_d\}$
- et on appelle p_f le polynôme d'interpolation de f relativement aux abscisses de A .

3.1 Formules élémentaires

3.1.1 Principe de la méthode

L'idée est de chercher une approximation de $I(f, a, b)$ de la forme $I(g, a, b)$ en choisissant g de telle sorte que

- ce soit une bonne approximation de f
- et qu'elle admette des primitives simples pour que $I(g, a, b)$ soit facile à calculer.

Un choix naturel est de prendre $g = p_f$. De cette manière, les deux points précédents sont satisfaits.

D'après le chapitre précédent, $g = p_f$ est donc définie pour tout réel x par

$$g(x) = \sum_{j=0}^d f(a_j)l_{j,d}(x),$$

où les $l_{j,d}$ sont les polynômes fondamentaux de Lagrange.

On a ainsi

$$I(g, a, b) = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b p_f(x)dx = \int_a^b \sum_{j=0}^d f(a_j)l_{j,d}(x)dx = \sum_{j=0}^d f(a_j) \int_a^b l_{j,d}(x)dx.$$

On notera

$$Q_A(f, a, b) = \int_a^b p_f(x)dx = \sum_{j=0}^d f(a_j) \int_a^b l_{j,d}(x)dx.$$

Définition 4. On dit que $Q_A(., a, b)$ est exacte sur \mathcal{P}_l si on a

$$\forall p \in \mathcal{P}_l, \quad Q_A(p, a, b) = I(p, a, b).$$

Proposition 3. Si $A = \{a_0, a_1, \dots, a_d\}$, alors $Q_A(., a, b)$ est exacte sur \mathcal{P}_d .

Preuve : On doit montrer que

$$\forall p \in \mathcal{P}_d, \quad Q_A(p, a, b) = I(p, a, b).$$

Soit donc $p \in \mathcal{P}_d$. D'après le chapitre sur l'interpolation polynomiale, on sait qu'alors $p = p_p$ et donc

$$Q_A(p, a, b) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_a^b p_p(x)dx = \int_a^b p(x)dx = I(p, a, b).$$

□

Exercice 1. On note $I(f, a, b) = \int_{-1}^1 f(x)dx$, $A = \{t_1, t_2\}$ et $Q_A(f, a, b) = f(t_1) + f(t_2)$. Montrer qu'il existe un unique ensemble $A = \{t_1, t_2\}$ tel que $Q_A(., a, b)$ soit exacte sur \mathcal{P}_2 .

Dans la pratique, grâce au procédé de composition qui sera détaillé plus loin, on obtient souvent de bons résultats en utilisant des méthodes d'ordre $d \leq 2$.

3.1.2 Méthode du point milieu

Elle consiste à approcher f par son polynôme d'interpolation de Lagrange relativement au seul point $a_0 = \frac{a+b}{2}$. Dans ce cas là, $p_f(x) = f(a_0)$ et on a donc

$$I(f, a, b) \approx I(p_f, a, b) = \int_a^b f(a_0)dx = (b-a)f(a_0).$$

On aboutit à la formule d'intégration numérique suivante :

$$J_m(f, a, b) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right). \quad (3.1)$$

Elle est appelée **formule d'intégration du rectangle au point milieu**. En effet, utiliser la formule du point milieu revient à approcher $I(f, a, b)$ (c'est-à-dire l'aire comprise sous le graphe de f pour $x \in [a, b]$, si f est positive) par l'aire du rectangle de côtés $[a, b]$ et $[0, f(a_0)]$.

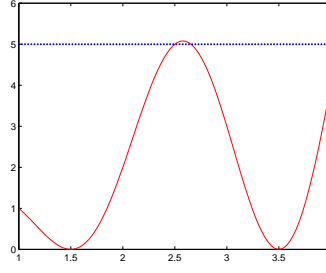


FIGURE 3.1 – L'aire du rectangle sous les pointillés représente $J_m(f, a, b)$ pour la fonction f tracée en trait plein

3.1.3 Méthode des trapèzes

On approche f par son polynôme d'interpolation de Lagrange relativement aux deux points $a_0 = a$ et $a_1 = b$, qui s'écrit :

$$p_f(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}$$

et on a

$$\begin{aligned} I(f, a, b) \approx I(p_f, a, b) &= f(a) \int_a^b \frac{x-b}{a-b} dx + f(b) \int_a^b \frac{x-a}{b-a} dx \\ &= \frac{f(a)}{a-b} \left[\frac{(x-b)^2}{2} \right]_a^b + \frac{f(b)}{b-a} \left[\frac{(x-a)^2}{2} \right]_a^b \\ &= \frac{f(a)}{b-a} \frac{(a-b)^2}{2} + \frac{f(b)}{b-a} \frac{(b-a)^2}{2} \\ &= (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}. \end{aligned}$$

On aboutit à la formule d'intégration numérique suivante :

$$J_t(f, a, b) = (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}, \quad (3.2)$$

qui est appelée **formule du trapèze**.

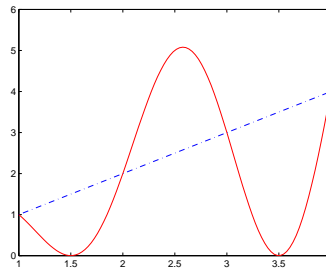


FIGURE 3.2 – L'aire du trapèze sous les pointillés représente $J_t(f, a, b)$ pour la fonction f tracée en trait plein

3.1.4 Méthode de Simpson

Cette fois, on approche f par son polynôme d'interpolation p_f relativement aux trois points $a_0 = a$, $a_1 = \frac{a+b}{2}$ et $a_2 = b$.

On aboutit à la formule, dite de Simpson, suivante :

$$J_s(f, a, b) = (b - a) \frac{f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)}{6}. \quad (3.3)$$

Le lecteur doit savoir faire ...

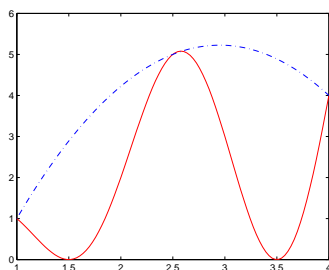


FIGURE 3.3 – L'aire comprise entre la courbe en pointillés et l'axe des abscisses représente $J_s(f, a, b)$ pour la fonction f tracée en trait plein

Remarque 6.

$$J_s(f, a, b, n) = \frac{1}{3}J_t(f, a, b, n) + \frac{2}{3}J_m(f, a, b, n).$$

COURS 7 - 1h

3.2 Étude de l'erreur pour les formules élémentaires

Proposition 4. Soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$. On a $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Preuve : Pour tout x réel, on a $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.

Par la propriété de conservation de l'ordre (proposition 4 du CM 8 des mathématiques du semestre 1), on peut écrire

$$-\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b -|f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

□

3.2.1 Méthode du rectangle au point milieu

Théorème 11. Si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, on a

$$|I(f, a, b) - J_m(f, a, b)| \leq \frac{(b-a)^2}{4} \|f'\|_{\infty, [a, b]}. \quad (3.4)$$

Preuve : Par construction, $J_m(f, a, b) = \int_a^b p_f(x)dx$. On a donc

$$\begin{aligned} |I(f, a, b) - J_m(f, a, b)| &= \left| \int_a^b (f(x) - p_f(x)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - p_f(x)| dx. \end{aligned}$$

En utilisant la formule d'erreur établie dans le cours sur l'interpolation polynomiale, on en déduit que

$$\begin{aligned} |I(f, a, b) - J_m(f, a, b)| &\leq \int_a^b \frac{\|f'\|_{\infty, [a, b]}}{1!} |(x - a_0)| dx \\ &= \|f'\|_{\infty, [a, b]} \int_a^b |x - a_0| dx \\ &= \|f'\|_{\infty, [a, b]} \left(\int_a^{a_0} |x - a_0| dx + \int_{a_0}^b |x - a_0| dx \right) \\ &= \|f'\|_{\infty, [a, b]} \left(- \int_a^{a_0} (x - a_0) dx + \int_{a_0}^b (x - a_0) dx \right) \\ &= \|f'\|_{\infty, [a, b]} \left(- \left[\frac{(x - a_0)^2}{2} \right]_a^{a_0} + \left[\frac{(x - a_0)^2}{2} \right]_{a_0}^b \right) \\ &= \|f'\|_{\infty, [a, b]} \left(\frac{(a - a_0)^2}{2} + \frac{(b - a_0)^2}{2} \right) \\ &= \|f'\|_{\infty, [a, b]} \left(\frac{\left(-\frac{b - a}{2} \right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{b - a}{2} \right)^2}{2} \right) \\ &= \|f'\|_{\infty, [a, b]} \left(\frac{(b - a)^2}{2} \right) \\ &= \|f'\|_{\infty, [a, b]} \frac{(b - a)^2}{4}. \end{aligned}$$

□

3.2.2 Méthode du trapèze

Théorème 12. Si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, on a

$$|I(f, a, b) - J_t(f, a, b)| \leq \frac{(b - a)^3}{12} \|f''\|_{\infty, [a, b]}. \quad (3.5)$$

Preuve : Par construction, $J_t(f, a, b) = \int_a^b p_f(x)dx$. On a donc

$$\begin{aligned} |I(f, a, b) - J_t(f, a, b)| &= \left| \int_a^b (f(x) - p_f(x)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - p_f(x)| dx. \end{aligned}$$

En utilisant la formule d'erreur établie dans le cours sur l'interpolation polynomiale, on en déduit que

$$\begin{aligned}
|I(f, a, b) - J_t(f, a, b)| &\leq \int_a^b \frac{\|f''\|_{\infty, [a, b]}}{2!} |(x-a)(x-b)| dx \\
&= \frac{\|f''\|_{\infty, [a, b]}}{2} \int_a^b (x-a)(b-x) dx \\
&= \frac{\|f''\|_{\infty, [a, b]}}{2} \left\{ - \int_a^b \frac{(x-a)^2}{2} (-1) dx + \left[\frac{(x-a)^2}{2} (b-x) \right]_a^b \right\} \text{ par IPP} \\
&= \frac{\|f''\|_{\infty, [a, b]}}{2} \left\{ \left[\frac{(x-a)^3}{6} \right]_a^b + 0 \right\} \\
&= \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_{\infty, [a, b]}.
\end{aligned}$$

□

3.2.3 Méthode de Simpson

Théorème 13. (admis) Si $f \in \mathcal{C}^3([a, b])$, on a

$$|I(f, a, b) - J_s(f, a, b)| \leq \frac{(b-a)^4}{192} \|f^{(3)}\|_{\infty, [a, b]}. \quad (3.6)$$

3.2.4 Des formules d'erreur plus précises ...

En utilisant d'autres outils mathématiques (formule de Taylor et inégalité de la moyenne), on peut obtenir des estimations d'erreur plus précises pour certaines des formules d'intégration numériques.

Théorème 14. (admis) Si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, on a

$$|I(f, a, b) - J_m(f, a, b)| \leq \frac{(b-a)^3}{24} \|f''\|_{\infty, [a, b]}. \quad (3.7)$$

Théorème 15. (admis) Si $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$, on a

$$|I(f, a, b) - J_s(f, a, b)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \|f^{(4)}\|_{\infty, [a, b]}. \quad (3.8)$$

Ces formules plus précises seront utilisées en TP.

3.3 Formules composites des trois exemples classiques

Ce sont les méthodes les plus couramment utilisées. On commence par découper l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles égaux :

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b \quad \text{avec} \quad a_i = a + ih \text{ et } h = \frac{b-a}{n}$$

et on applique l'une des formules élémentaires sur chacun des sous-intervalles.

3.3.1 Méthode des rectangles aux points milieux

Elle est construite de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 I(f, a, b) &= \sum_{j=0}^{n-1} I(f, a_j, a_{j+1}) && \text{par la relation de Chasles} \\
 &\approx \sum_{j=0}^{n-1} J_m(f, a_j, a_{j+1}) \\
 &= \sum_{j=0}^{n-1} (a_{j+1} - a_j) f\left(\frac{a_j + a_{j+1}}{2}\right) \\
 &= \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{a_j + a_{j+1}}{2}\right).
 \end{aligned}$$

La formule composite des rectangles aux points milieux s'écrit ainsi

$$J_m^c(f, a, b, n) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{a_j + a_{j+1}}{2}\right). \quad (3.9)$$

3.3.2 Méthode des trapèzes

On procède de la même façon :

$$\begin{aligned}
 I(f, a, b) &= \sum_{j=0}^{n-1} I(f, a_j, a_{j+1}) && \text{par la relation de Chasles} \\
 &\approx \sum_{j=0}^{n-1} J_t(f, a_j, a_{j+1}) \\
 &= \sum_{j=0}^{n-1} (a_{j+1} - a_j) \frac{f(a_j) + f(a_{j+1})}{2} \\
 &= \frac{b-a}{2n} \sum_{j=0}^{n-1} (f(a_j) + f(a_{j+1})) \\
 &= \frac{b-a}{2n} \left(\sum_{j=0}^{n-1} f(a_j) + \sum_{j=1}^n f(a_j) \right) \\
 &= \frac{b-a}{2n} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(a_j) \right).
 \end{aligned}$$

La formule composite des trapèzes s'écrit donc ainsi

$$J_t^c(f, a, b, n) = \frac{b-a}{2n} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(a_j) \right). \quad (3.10)$$

3.3.3 Méthode de Simpson

La formule composite de Simpson s'écrit

$$J_s^c(f, a, b, n) = \frac{b-a}{6n} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(a_j) + 4 \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{a_j + a_{j+1}}{2}\right) \right). \quad (3.11)$$

Le lecteur doit être capable d'établir cette formule ...

Remarque 7.

$$J_s^c(f, a, b, n) = \frac{1}{3}J_t^c(f, a, b, n) + \frac{2}{3}J_m^c(f, a, b, n).$$

3.4 Étude de l'erreur pour les formules composites

3.4.1 Méthode des rectangles aux points milieux

Théorème 16. Si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, on a

$$|I(f, a, b) - J_m^c(f, a, b, n)| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \|f''\|_{\infty, [a, b]}. \quad (3.12)$$

Remarque 8. Ce théorème montre qu'on peut avoir une approximation aussi précise que l'on veut en prenant un nombre n de sous-intervalles suffisamment grand.

Preuve : Par construction, on a

$$\begin{aligned} |I(f, a, b) - J_m^c(f, a, b, n)| &= \left| \sum_{j=0}^{n-1} \left(I(f, a_j, a_{j+1}) - J_m(f, a_j, a_{j+1}) \right) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} |I(f, a_j, a_{j+1}) - J_m(f, a_j, a_{j+1})| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(a_{j+1} - a_j)^3}{24} \|f''\|_{\infty, [a_j, a_{j+1}]} \quad \text{par (3.7)} \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)^3}{24} \|f''\|_{\infty, [a, b]} \\ &= n \frac{(b-a)^3}{24n^3} \|f''\|_{\infty, [a, b]} \\ &= \frac{(b-a)^3}{24n^2} \|f''\|_{\infty, [a, b]}. \end{aligned}$$

□

3.4.2 Méthode des trapèzes

Théorème 17. Si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, on a

$$|I(f, a, b) - J_m^c(f, a, b, n)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \|f''\|_{\infty, [a, b]}. \quad (3.13)$$

Preuve : Par construction, on a

$$\begin{aligned}
|I(f, a, b) - J_t^c(f, a, b, n)| &= \left| \sum_{j=0}^{n-1} \left(I(f, a_j, a_{j+1}) - J_t(f, a_j, a_{j+1}) \right) \right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1} |I(f, a_j, a_{j+1}) - J_t(f, a_j, a_{j+1})| \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(a_{j+1} - a_j)^3}{12} \|f''\|_{\infty, [a_j, a_{j+1}]} \quad \text{par (3.5)} \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)^3}{12} \|f''\|_{\infty, [a, b]} \\
&= n \frac{(b-a)^3}{12n^3} \|f''\|_{\infty, [a, b]} \\
&= \frac{(b-a)^3}{12n^2} \|f''\|_{\infty, [a, b]}.
\end{aligned}$$

□

3.4.3 Méthode de Simpson

Théorème 18. Si $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$, on a

$$|I(f, a, b) - J_s^c(f, a, b, n)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \|f^{(4)}\|_{\infty, [a, b]}. \quad (3.14)$$

Preuve : Le lecteur doit savoir faire ...

□

COURS 9 - 30 min
