FILTROS PASSIVOS
Parte I: Realização de Funções de Acesso

Síntese de Circuitos – ENGC46

Professor: Maicon D. Pereira

Departamento de Engenharia Elétrica

Universidade Federal da Bahia

(Material original de autoria da Profª Ana Isabela Cunha)

UFBA
UNIVERSIDADE NOVA

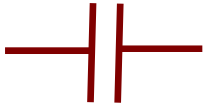
Resumo

- Generalidades
- Métodos de realização de filtros passivos
- Funções de rede
- Propriedades de funções de acesso
- Síntese de funções de acesso: formas de Foster e de Cauer

Generalidades

Filtros passivos são constituídos de:

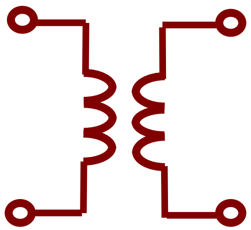
- capacitores



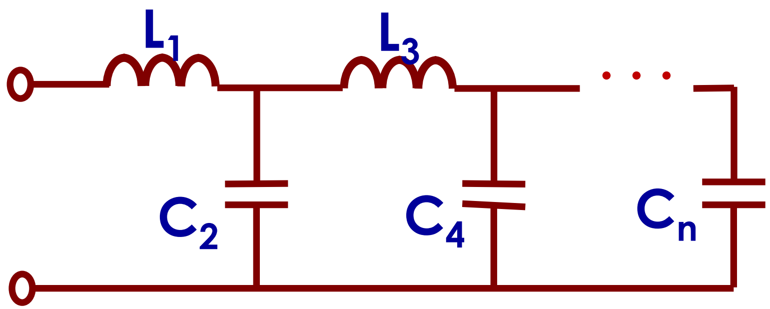
- indutores

- resistores

- transformadores



Exemplo: Filtro LC



Generalidades

Comparação entre filtros ativos e filtros passivos

Filtros ativos

- T(s) praticamente não depende da carga e fonte ☺
- Componentes de fácil realização ☺
- Possibilidade de ganhos de potência ☺
- Necessitam de alimentação ☹
- Excursão limitada ☹
- Operação limitada em frequência ☹
- Sensibilidade alta ☹

Filtros passivos

- T(s) depende da carga e fonte ☹
- Dificuldade para realização de indutores ☹
- Sem ganhos de potência ☹
- Prescindem de alimentação ☺
- Excursão sem limite ☺
- Operação em banda muito larga ☺
- Sensibilidade baixa ☺

Métodos de realização de filtros passivos

- Serão analisadas apenas redes LC acrescidas de resistência de fonte e de carga.
- Técnicas:
  - Síntese por inspeção de associações série ou paralelo dos componentes → adequada apenas para T(s) simples.
  - Uso de tabelas de valores normalizados de componentes elétricos (capacitores e indutores), específicas para determinadas funções de aproximação → método de síntese limitado.
  - Síntese de funções de acesso (ou funções de imitância) por expansão em frações parciais → técnica que será apresentada.

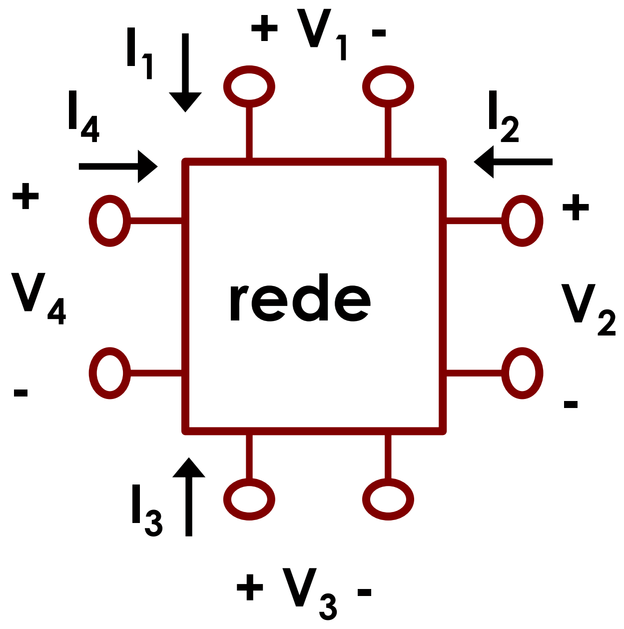
Funções de rede

Funções de rede são relações entre variáveis elétricas (tensões ou correntes) lidas em pares de terminais (em inglês: "ports") de uma rede elétrica. Tipos:

(i) Funções de transferência: pares de terminais (portas) diferentes: V_1/V_2, V_2/I_3, I_4/I_2, I_3/V_1.

(ii) Funções de acesso: mesmo par de terminais. São sempre IMITÂNCIAS:

- Impedâncias (Z): V_1/I_1, V_2/I_2, V_4/I_4, V_3/I_3.
- Admitâncias (Y): I_1/V_1, I_2/V_2, I_4/V_4, I_3/V_3.



Propriedades de funções de acesso

Propriedades gerais de funções de acesso lineares, realizáveis e estáveis:

(i) São funções racionais em s com coeficientes reais (determinados pelos valores dos componentes).

(ii) Não possuem pólos no semiplano lateral direito (estabilidade).

(iii) Não possuem pólos múltiplos no eixo $j\omega$ (estabilidade). Atenção: pólos múltiplos são diferentes de um par complexo conjugado.

(iv) A inversa de uma FA (função de acesso) é uma FA, desta forma, não possuem zeros no semiplano lateral direito e não possuem zeros múltiplos no eixo $j\omega$.

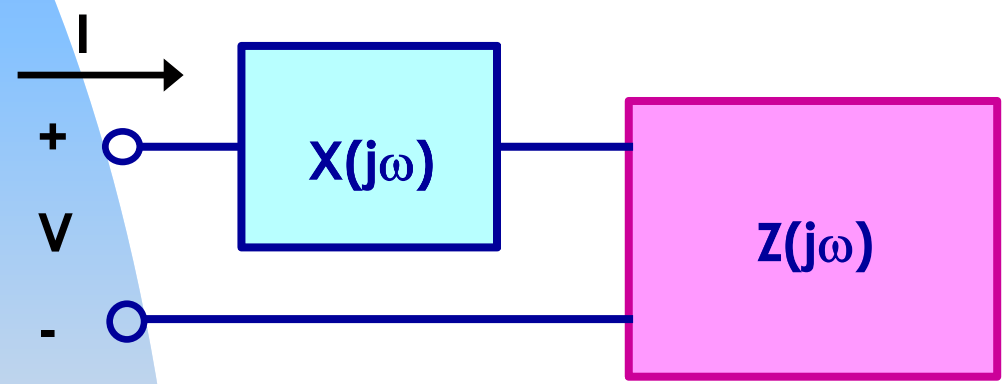
(v) O grau do numerador difere do grau do denominador por <u>uma unidade</u> (podendo ser maior ou menor), conforme (iii), pois só pode haver UM zero ou UM pólo no eixo $j\omega$ no infinito

Propriedades de funções de acesso

Na FA (função de acesso) de uma rede passiva:

(vi) A parte real da FA deve ser maior ou igual a zero.

Função de acesso Z(s):



Se na frequência ω_A, $X(j\omega_A) = -\mathscr{Im}\{Z(j\omega_A)\}$:

$V(j\omega_A)/I(j\omega_A) = \mathscr{Re}\{Z(j\omega_A)\}$

$V(j\omega_A)/I(j\omega_A)$ é uma **FA**

$\Rightarrow$ $\mathscr{Re}\{V(j\omega_A)/I(j\omega_A)\} \geq 0$

Propriedades de funções de acesso

UFBA
UNIVERSIDADE NOVA

Na FA (função de acesso) de uma <u>rede LC</u>:

(vii) Os pólos e zeros estão sobre o eixo jω.

Resposta ao impulso para pólos complexos $p = \alpha \pm j\beta$:

$$h(t) = e^{\alpha t}.\cos(\omega t)$$

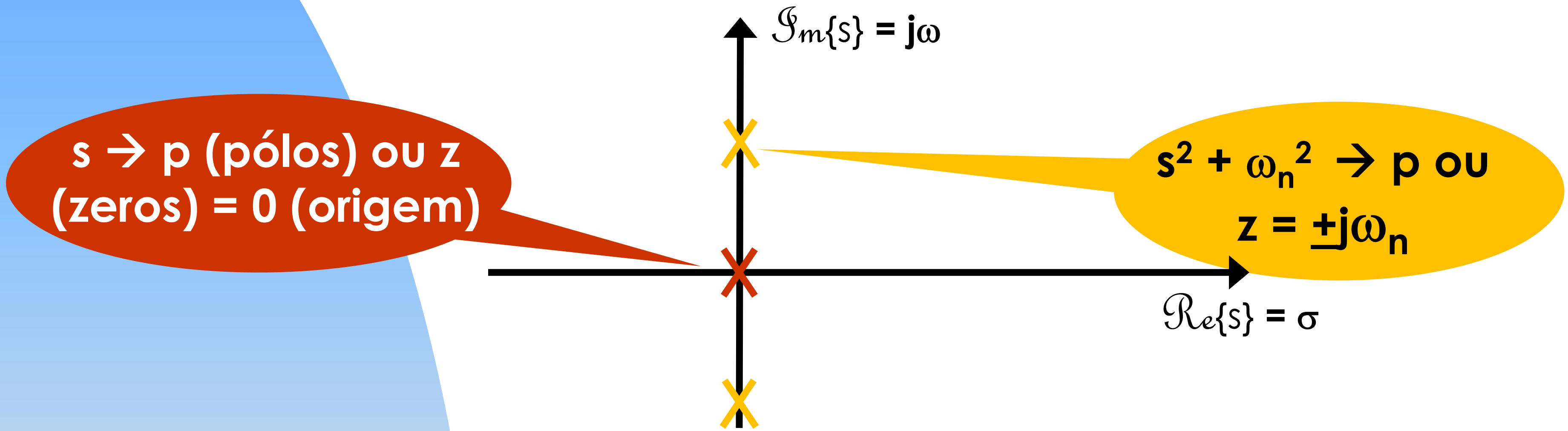
$\alpha < 0$ (s.p.l.e): amortecimento

Redes LC puras não têm perdas ⇒ $\alpha = 0$ ⇒ $p = \pm j\beta$

Redes LC estão no limite da estabilidade: perdas vêm das resistências de fonte e de carga.

Propriedades de funções de acesso

(viii) o numerador ou denominador da FA só tem fatores do tipo **s** ou ($s^2 + \omega_n^2$):



(viii) é resultado de iii, iv e vii:

- (iii) - Não possuem pólos múltiplos no eixo $j\omega$;
- (iv) - A inversa de uma FA (função de acesso) é uma FA;
- (vii) - Os pólos e zeros estão sobre o eixo $j\omega$.

Propriedades de funções de acesso

Como consequência das propriedades (i-viii), a FA de uma <u>rede LC</u> tem uma das seguintes formas:

$$Z(s) \text{ ou } Y(s) = \frac{s\left(s^2+\omega_{z1}^2\right)\left(s^2+\omega_{z2}^2\right)\ldots\left(s^2+\omega_{zm}^2\right)}{\left(s^2+\omega_{p1}^2\right)\left(s^2+\omega_{p2}^2\right)\ldots\left(s^2+\omega_{pn}^2\right)}$$

$$Z(s) \text{ ou } Y(s) = \frac{\left(s^2+\omega_{z1}^2\right)\left(s^2+\omega_{z2}^2\right)\ldots\left(s^2+\omega_{zm}^2\right)}{s\left(s^2+\omega_{p1}^2\right)\left(s^2+\omega_{p2}^2\right)\ldots\left(s^2+\omega_{pn}^2\right)}$$

Aqui n e m são, respectivamente, o número de pólos e zeros imaginários <u>não nulos e finitos</u> (elementos $s^2 + \omega_n^2$) da FA.

Propriedades de funções de acesso

(ix) Sempre ou um pólo ou um zero está no <u>infinito</u>: consequência das ordens do numerador e do denominador diferirem por apenas um.

(x) Sempre ou um pólo ou um zero está na <u>origem</u>: consequência da existência de pólos ou zeros apenas simples e apenas sobre o eixo $j\omega$.

(xi) A forma da FA apresenta sempre grau ímpar/par ou par/ímpar para numerador/denominador.

Propriedades de funções de acesso

Como consequência das propriedades (ix) - (xi):

FA com um
zero na origem

Se $n = m \Rightarrow$ pólo no infinito. Ex.: $Z(s)$ ou $Y(s) = \dfrac{s\left(s^2+\omega_{z1}^2\right)}{\left(s^2+\omega_{p1}^2\right)}$ **Ímpar/par**

Se $n = m + 1 \Rightarrow$ zero no infinito. Ex.: $Z(s)$ ou $Y(s) = \dfrac{s\left(s^2+\omega_{z1}^2\right)}{\left(s^2+\omega_{p1}^2\right)\left(s^2+\omega_{p2}^2\right)}$

Aqui n e m são, respectivamente, o número de pólos e zeros imaginários <u>não nulos e finitos</u> (elementos $s^2 + \omega_n^2$) da FA.

Propriedades de funções de acesso

Como consequência das propriedades (ix) - (xi):

FA com um
<u>pólo na origem</u>

Se n = m ⇒ zero no infinito. Ex.: $Z(s)\ \text{ou}\ Y(s) = \dfrac{\left(s^2+\omega_{z1}^2\right)}{s\left(s^2+\omega_{p1}^2\right)}$ **= Par/ímpar**

Se m = n + 1 ⇒ pólo no infinito. Ex.: $Z(s)\ \text{ou}\ Y(s) = \dfrac{\left(s^2+\omega_{z1}^2\right)\left(s^2+\omega_{z2}^2\right)}{s\left(s^2+\omega_{p1}^2\right)}$

Aqui n e m são, respectivamente, o número de pólos e zeros imaginários <u>não nulos e finitos</u> (elementos $s^2 + \omega_n^2$) da FA.

Propriedades de funções de acesso

Como consequência das propriedades (ix) - (xi):

Expandindo uma FA em frações parciais, Z(s) ou Y(s) podem ser escritos na seguinte forma geral:

$$Z(s) \text{ ou } Y(s) = \frac{K_0}{s} + K_\infty s + \sum_i \frac{K_i s}{\left(s^2 + \omega_{pi}^2\right)}$$

Existência deste termo implica em pólo na origem, ou seja:

Z(s): capacitor série

Y(s): indutor paralelo

Existência deste termo implica em pólo no infinito, ou seja:

Z(s): indutor série

Y(s): capacitor paralelo

- Todos os termos da soma são ligados em série na representação de circuitos de Z(s) e em paralelo para Y(s).

Propriedades de funções de acesso

Expandindo uma FA em frações parciais, Z(s) ou Y(s) podem ser escritos na seguinte forma geral:

$$Z(s) \text{ ou } Y(s) = \frac{K_0}{s} + K_\infty s + \sum_i \frac{K_i s}{\left(s^2 + \omega_{pi}^2\right)}$$

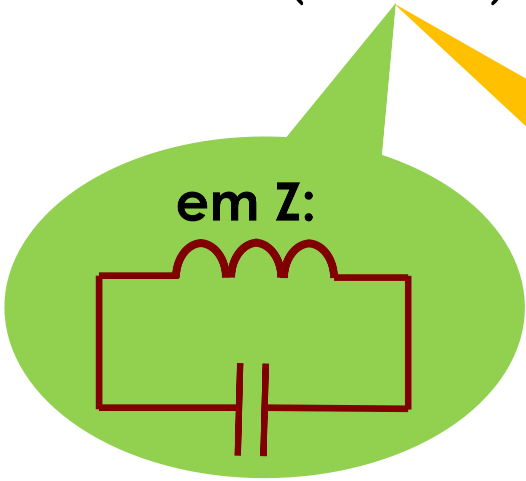
- Z(s): K_0, tem unidade de inverso de capacitância e K_∞ unidade de indutância.
- Y(s): K_0, tem unidade de inverso de indutência e K_∞ unidade de capacitância.

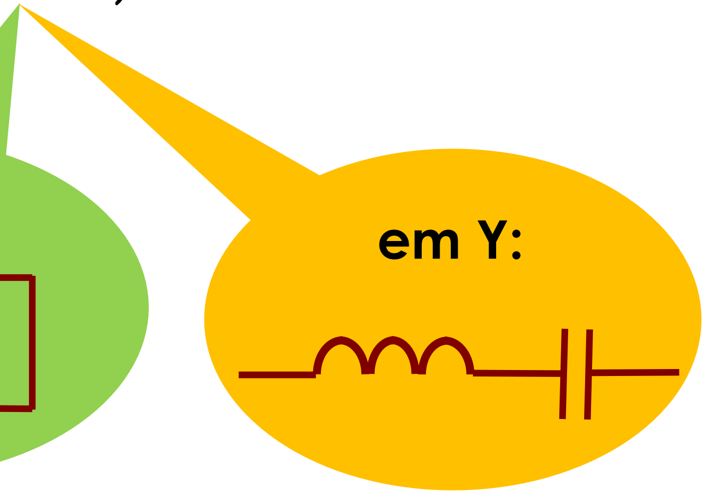
Propriedades de funções de acesso

Expandindo uma FA em frações parciais, Z(s) ou Y(s) podem ser escritos na seguinte forma geral:

$$Z(s) \text{ ou } Y(s) = \frac{K_0}{s} + K_\infty s + \sum_i \frac{K_i s}{\left(s^2 + \omega_{pi}^2\right)}$$

Cada par de <u>pólos</u> imaginários não nulos e finitos na expansão em frações parciais dá origem a um termo que pode ser representado pela associação em paralelo (Z) ou série (Y) de um indutor com um capacitor.

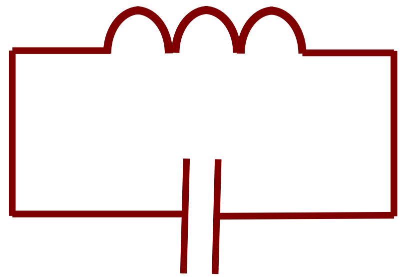




Propriedades de funções de acesso

$$\frac{K_i s}{\left(s^2 + \omega_{pi}^2\right)}$$

em Z:

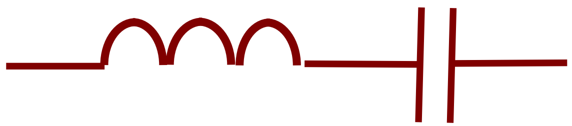


$$Z_i(s) = \frac{1}{sC_i + \frac{1}{sL_i}} = \frac{s/C_i}{s^2 + \frac{1}{L_iC_i}} = \frac{K_i s}{\left(s^2 + \omega_{pi}^2\right)}$$

$K_i = 1/C_i$ $\omega_{pi}{}^2 = 1/(L_iC_i)$

$$\frac{K_i s}{\left(s^2 + \omega_{pi}^2\right)}$$

em Y:



$$Y_i(s) = \frac{1}{sL_i + \frac{1}{sC_i}} = \frac{s/L_i}{s^2 + \frac{1}{L_iC_i}} = \frac{K_i s}{\left(s^2 + \omega_{pi}^2\right)}$$

$K_i = 1/L_i$ $\omega_{pi}{}^2 = 1/(L_iC_i)$

Propriedades de funções de acesso

As constantes K_0 (se houver), K_∞ (se houver) e K_i permitirão encontrar os componentes do circuito e podem ser obtidas da FA da seguinte forma:

$$FA(s) = Z(s) \text{ ou } Y(s) = \frac{K_0}{s} + K_\infty s + \sum_i \frac{K_i s}{\left(s^2 + \omega_{pi}^2\right)}$$

$$K_0 = s.FA(s)\Big|_{s=0}$$

$$K_\infty = \left.\frac{FA(s)}{s}\right|_{s\to\infty}$$

$$K_i = \left.\frac{\left(s^2 + \omega_{pi}^2\right)}{s} FA(s)\right|_{s^2=-\omega_{pi}^2}$$

Propriedades de funções de acesso

(xii) Os pólos e zeros são alternados sobre o eixo jω → monotonicidade.

$$Z(s) = \frac{K_0}{s} + K_\infty s + \sum_i \frac{K_i s}{\left(s^2 + \omega_{pi}^2\right)}$$

$$Z(j\omega) = jX\left(\omega\right) = \frac{K_0}{j\omega} + K_\infty j\omega + \sum_i \frac{K_i j\omega}{\left(\omega_{pi}^2 - \omega^2\right)}$$

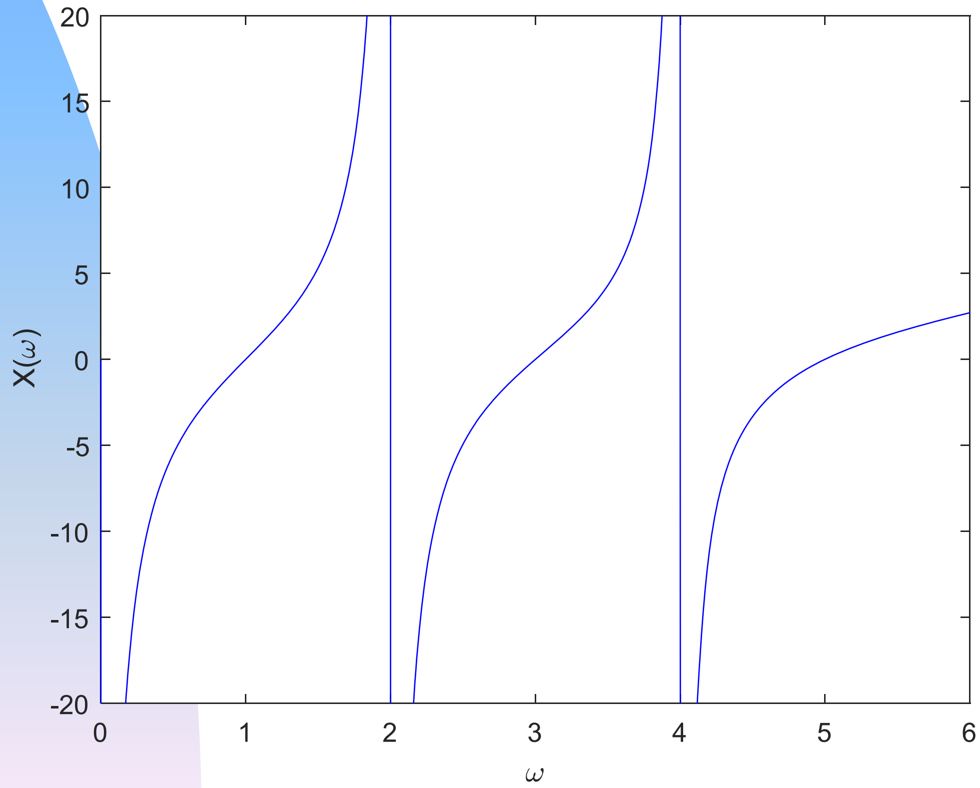
Derivando X(ω) para K_0, K_∞ e $K_i \geq 0$:

$$\frac{dX\left(\omega\right)}{d\omega} = \frac{K_0}{\omega^2} + K_\infty + \sum_i \frac{K_i\left(\omega_{pi}^2 + \omega^2\right)}{\left(\omega_{pi}^2 - \omega^2\right)^2} > 0$$

X(ω) é monotônica crescente: característica possível apenas para pólos e zeros alternados. O mesmo acontece com a susceptância, pois B(ω).

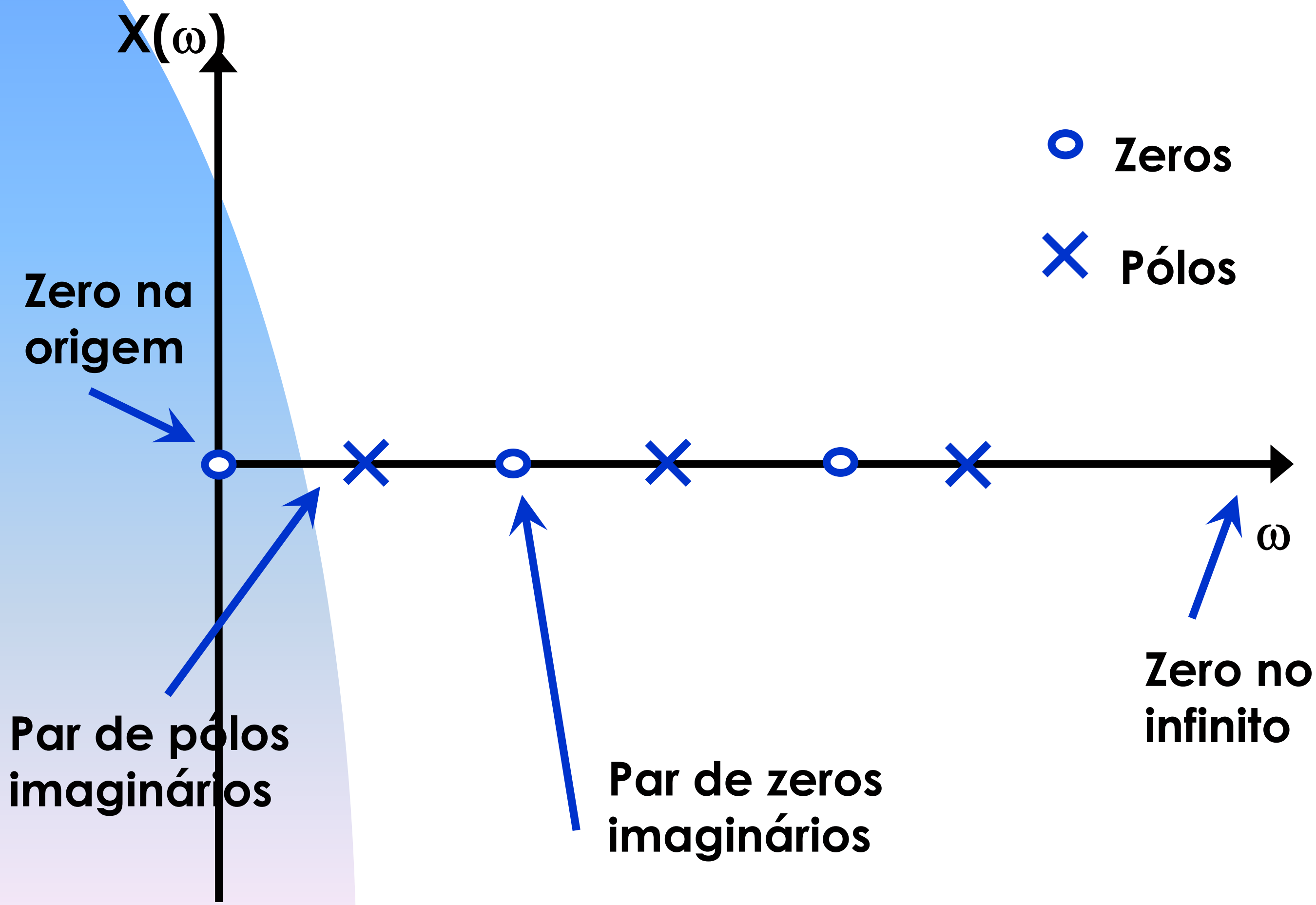
Exemplo: Plotar X(ω) para a função de acesso abaixo.

$$Z(s)=\frac{(s^2+1)(s^2+9)(s^2+25)}{s(s^2+4)(s^2+16)}$$

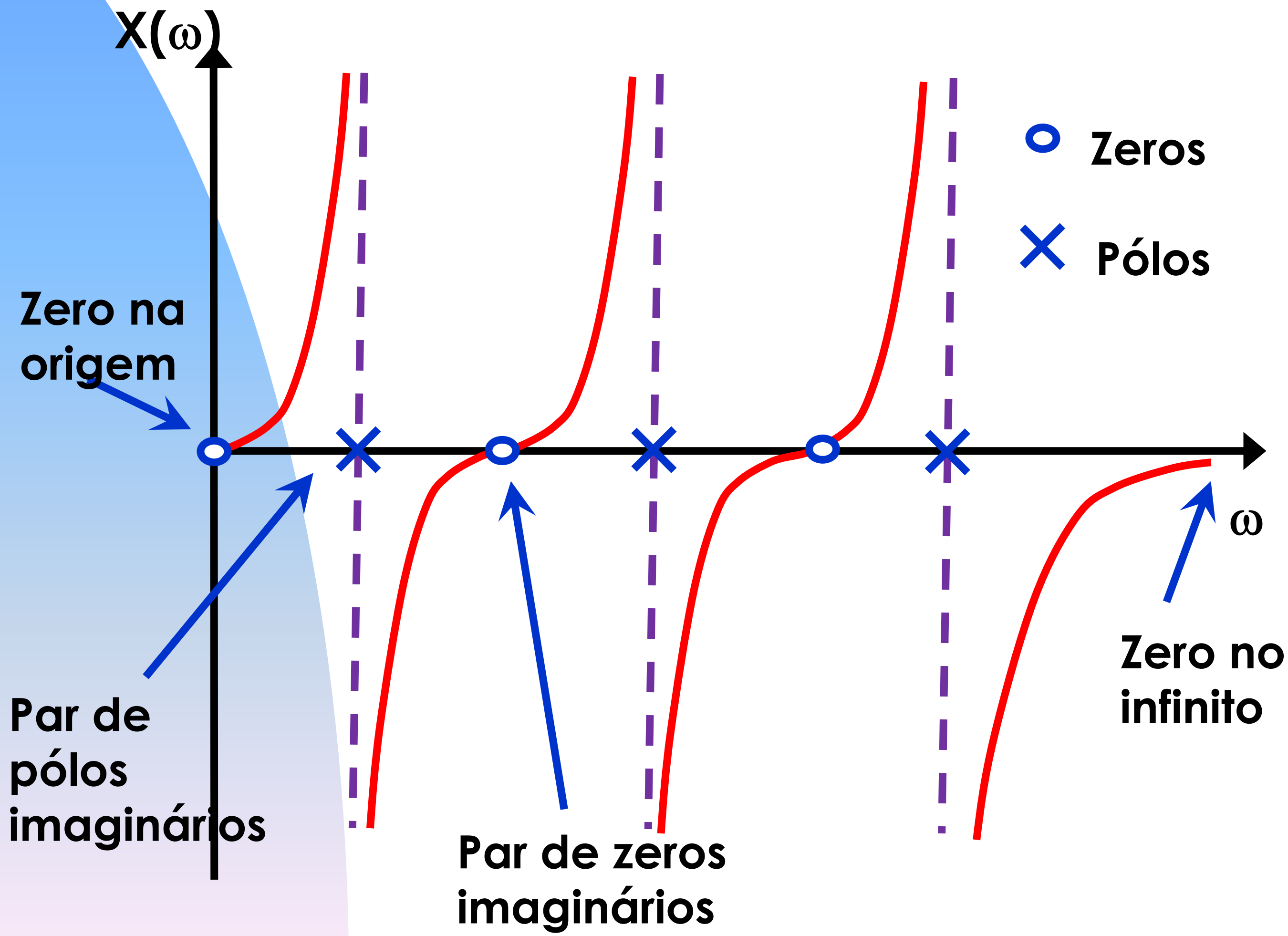


Exemplo: Escrever a expressão para Z(s) e esboçar a curva de reatância de uma função de acesso com:

- 6 zeros: um na origem, 2 pares imaginários e um no infinito.
- 6 pólos: 3 pares imaginários.



$$Z(s)=\frac{s\left(s^2+\omega_{z1}^2\right)\left(s^2+\omega_{z2}^2\right)}{\left(s^2+\omega_{p1}^2\right)\left(s^2+\omega_{p2}^2\right)\left(s^2+\omega_{p3}^2\right)}$$



Realização de funções de acesso

Técnicas para realização de funções de acesso de redes LC: formas de Foster e de Cauer.

- **Formas de Foster: baseiam-se na expansão da impedância ou da admitância em frações parciais para identificação dos componentes.**
- **Formas de Cauer: baseiam-se na expansão continuada em frações e no comportamento da função de acesso (impedância ou admitância) no infinito ou na origem para extrair da FA cada elemento.**

Formas de Foster

1ª Forma de Foster

Baseia-se na expansão da impedância em frações parciais:

$$Z(s) = \frac{1}{sC_0} + sL_\infty + \sum_i \frac{s/C_i}{\left(s^2 + \omega_{pi}^2\right)}$$

Os componentes que realizam cada termo de Z(s) são associados em série.

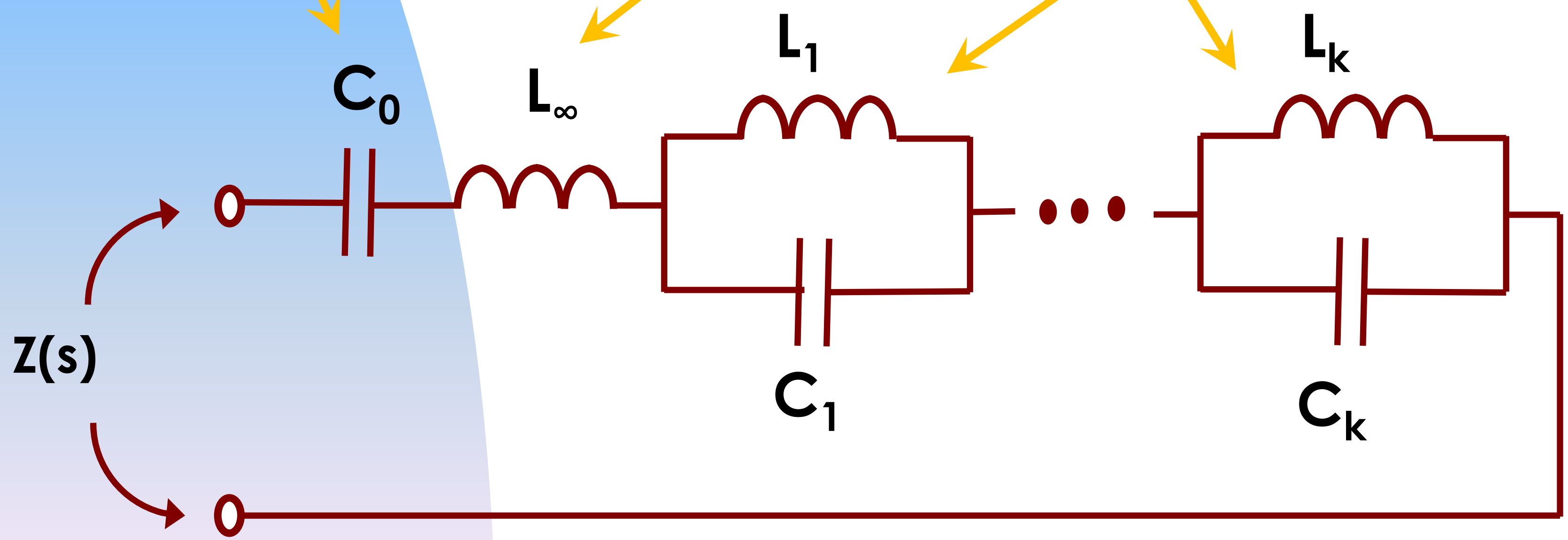
Formas de Foster

$$Z(s) = \frac{1}{sC_0} + sL_\infty + \sum_i \frac{s/C_i}{\left(s^2 + \omega_{pi}^2\right)}$$

Pólo na origem

Pólo no infinito

Associações LC paralelo: freq. de cada <u>par de pólos</u> $\omega_{pi}^{\ 2} = 1/(L_iC_i)$



Formas de Foster

O componentes podem ser obtidos da FA da seguinte forma:

$$Z(s) = \frac{1}{sC_0} + sL_\infty + \sum_i \frac{s/C_i}{\left(s^2 + \omega_{pi}^2\right)}$$

$$\frac{1}{C_0} = s.Z(s)\Big|_{s=0}$$

$$L_\infty = \frac{Z(s)}{s}\Bigg|_{s\to\infty}$$

$$\frac{1}{C_i} = \left(\frac{\left(s^2 + \omega_{pi}^2\right)}{s} Z(s)\right)\Bigg|_{s^2=-\omega_{pi}^2} \qquad \omega_{pi}^2 = \frac{1}{L_i C_i}$$

Formas de Foster

Exercício:

Realize a impedância ímpar-par de sexta ordem aqui apresentada

$$Z(s) = \frac{s\left(s^2+5\right)\left(s^2+9\right)}{\left(s^2+2\right)\left(s^2+8\right)\left(s^2+11\right)}$$

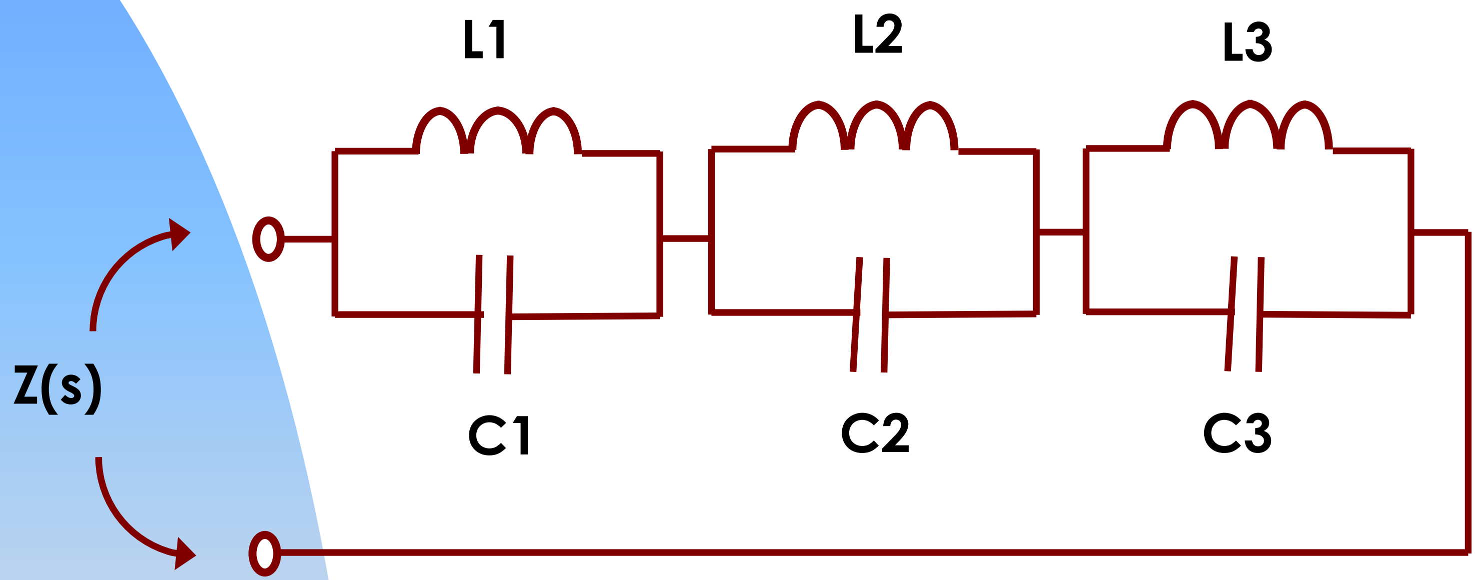
6 zeros:	1 na origem
	2 pares imaginários
	1 no infinito
6 pólos:	3 pares imaginários

- Não existem pólo no infinito (L_∞) e nem pólo na origem (C_0)
- Três pólos finitos → três associações LC paralelo.
- Expressão final de Z(s):

$$Z(s) = \sum_{i=1..3} \frac{s/C_i}{\left(s^2+\omega_{pi}^2\right)}$$

Formas de Foster

Circuito a ser realizado para garantir os três pólos finitos de Z(s):



$$Z(s) = \sum_i \frac{s/C_i}{\left(s^2 + \omega_{pi}^2\right)}$$

$$\frac{1}{C_i} = \left(\frac{\left(s^2 + \omega_{pi}^2\right)}{s} Z(s)\right)\Bigg|_{s^2 = -\omega_{pi}^2} \qquad \omega_{pi}^2 = \frac{1}{L_i C_i}$$

Formas de Foster

$$\omega_{p1}^2 = 2 \rightarrow \frac{1}{C_1} = \left.\left(\frac{\left(s^2+2\right)}{s} Z(s)\right)\right|_{s^2=-2}$$

$$\frac{1}{C_1} = \left.\left(\frac{\left(s^2+2\right)}{s} \frac{s\left(s^2+5\right)\left(s^2+9\right)}{\left(s^2+2\right)\left(s^2+8\right)\left(s^2+11\right)}\right)\right|_{s^2=-2}$$

$$\frac{1}{C_1} = \left.\left(\frac{\left(s^2+5\right)\left(s^2+9\right)}{\left(s^2+8\right)\left(s^2+11\right)}\right)\right|_{s^2=-2} \rightarrow C_1 = \frac{18}{7}\ \text{F}$$

$$\omega_{p1}^2 = \frac{1}{L_1 C_1} \rightarrow L_1 = \frac{7}{36}\ \text{H}$$

Técnicas de Foster

$$\omega_{p2}^2 = 8 \rightarrow \frac{1}{C_2} = \left(\frac{\left(s^2+8\right)}{s} Z(s)\right)\Bigg|_{s^2=-8}$$

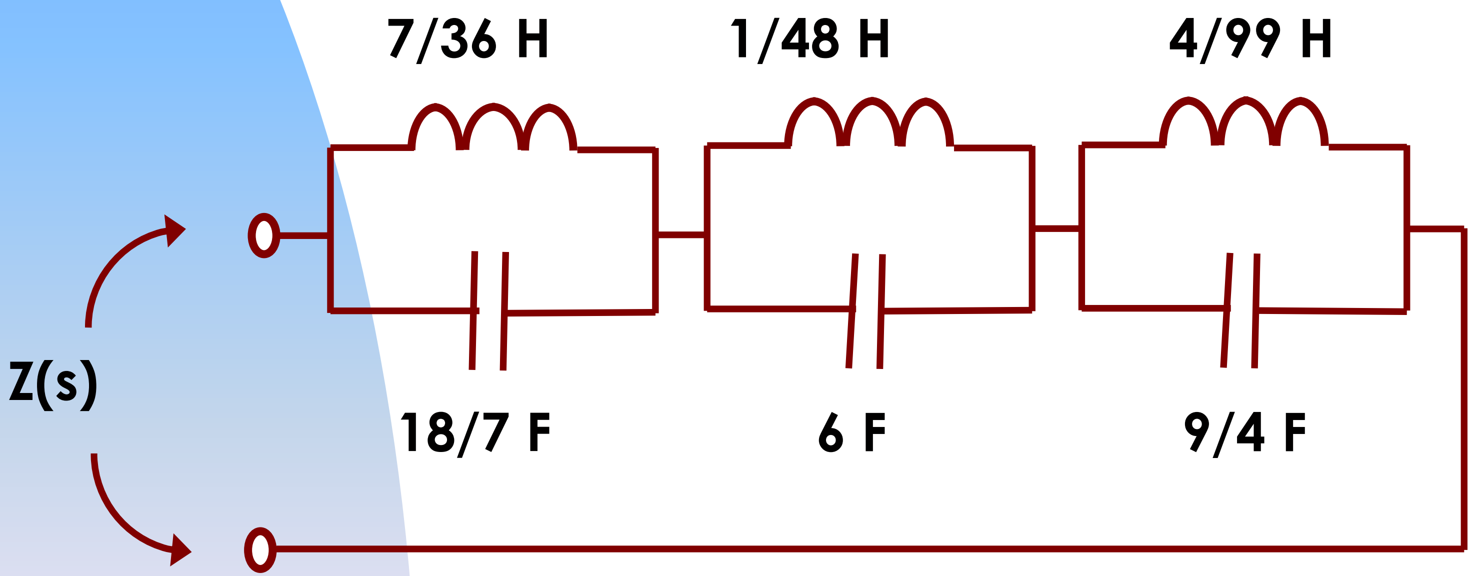
$$C_2 = 6 \text{ F} \qquad \omega_{p2}^2 = \frac{1}{L_2 C_2} \rightarrow L_2 = \frac{1}{48} \text{ H}$$

$$\omega_{p3}^2 = 11 \rightarrow \frac{1}{C_3} = \left(\frac{\left(s^2+11\right)}{s} Z(s)\right)\Bigg|_{s^2=-11}$$

$$C_3 = \frac{9}{4} \text{ F} \qquad \omega_{p3}^2 = \frac{1}{L_3 C_3} \rightarrow L_3 = \frac{4}{99} \text{ H}$$

Formas de Foster

$$Z(s) = \frac{s\left(s^2+5\right)\left(s^2+9\right)}{\left(s^2+2\right)\left(s^2+8\right)\left(s^2+11\right)}$$



Formas de Foster

2ª Forma de Foster

Baseia-se na expansão da admitância em frações parciais:

$$Y(s) = \frac{1}{sL_0} + sC_\infty + \sum_i \frac{s/L_i}{\left(s^2 + \omega_{pi}^2\right)}$$

Os componentes que realizam cada termo de Y(s) são associados em paralelo.

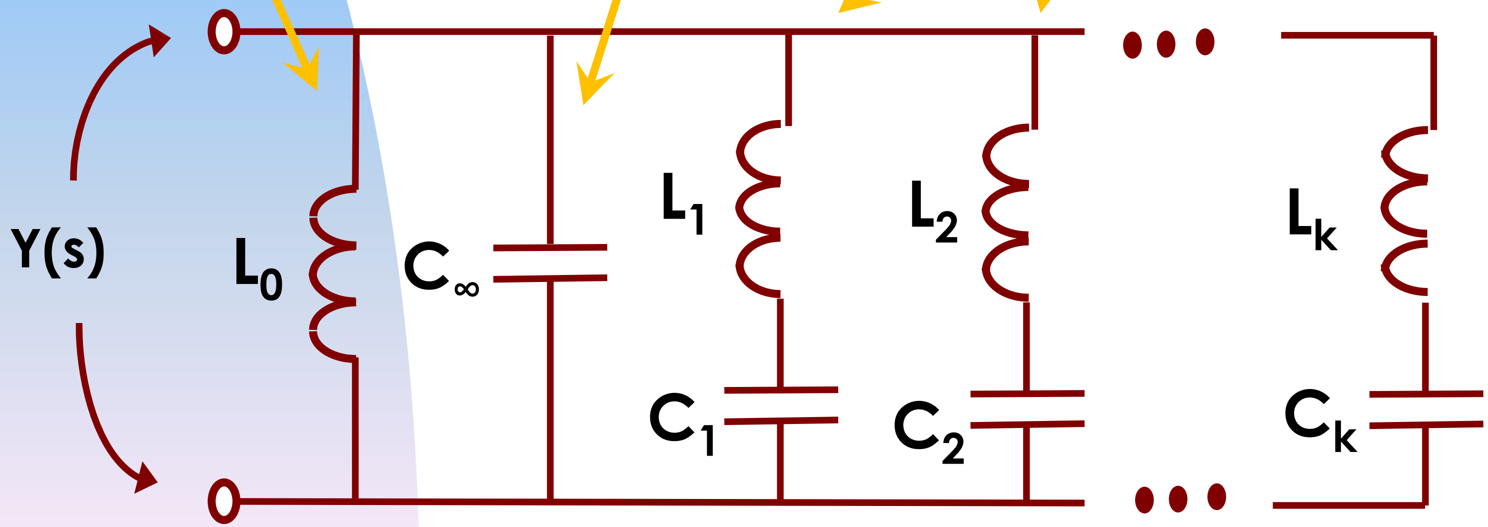
Formas de Foster

$$Y(s) = \frac{1}{sL_0} + sC_\infty + \sum_i \frac{s/L_i}{\left(s^2 + \omega_{pi}^2\right)}$$

Pólo na origem

Pólo no infinito

Associações LC série: freq. de cada par de pólos $\omega_{pi}^2 = 1/(L_iC_i)$



Formas de Foster

O componentes podem ser obtidos da FA da seguinte forma:

$$Y(s) = \frac{1}{sL_0} + sC_\infty + \sum_i \frac{s/L_i}{\left(s^2 + \omega_{pi}^2\right)}$$

$$\frac{1}{L_0} = s.Y(s)\Big|_{s=0}$$

$$C_\infty = \frac{Y(s)}{s}\Bigg|_{s\to\infty}$$

$$\frac{1}{L_i} = \frac{\left(s^2 + \omega_{pi}^2\right)}{s} Y(s)\Bigg|_{s^2=-\omega_{pi}^2} \qquad \omega_{pi}^2 = \frac{1}{L_i C_i}$$

Formas de Foster

Exercício:

Realize a admitância par-ímpar de sexta ordem aqui apresentada (mesma impedância do exercício anterior).

$$Y(s) = \frac{(s^2+2)(s^2+8)(s^2+11)}{s(s^2+5)(s^2+9)}$$

6 zeros:	**3 pares imaginários**
6 pólos:	**1 na origem**
	2 pares imaginários
	1 no infinito

- **Existem pólo no infinito (C_∞) e pólo na origem (L_0).**
- **Dois pólos finitos → duas associações LC série.**
- **Expressão final para Y(s):**

$$Y(s) = \frac{1}{sL_0} + sC_\infty + \sum_{i=1..2} \frac{s/L_i}{(s^2+\omega_{pi}^2)}$$

Formas de Foster

$$\frac{1}{L_0} = s.Y(s)\Big|_{s=0} = s\frac{\left(s^2+2\right)\left(s^2+8\right)\left(s^2+11\right)}{s\left(s^2+5\right)\left(s^2+9\right)}\Bigg|_{s=0} \rightarrow L_0 = \frac{45}{176}\ \text{H}$$

$$C_\infty = \frac{Y(s)}{s}\Big|_{s\to\infty} = \frac{\left(s^2+2\right)\left(s^2+8\right)\left(s^2+11\right)}{s^2\left(s^2+5\right)\left(s^2+9\right)}\Bigg|_{s\to\infty} \rightarrow C_\infty = 1\ \text{F}$$

Formas de Foster

$$\omega_{p1}^2 = \frac{1}{L_1C_1} = 5 \rightarrow \frac{1}{L_1} = \frac{\left(s^2+5\right)}{s}Y(s)\bigg|_{s^2=-5}$$

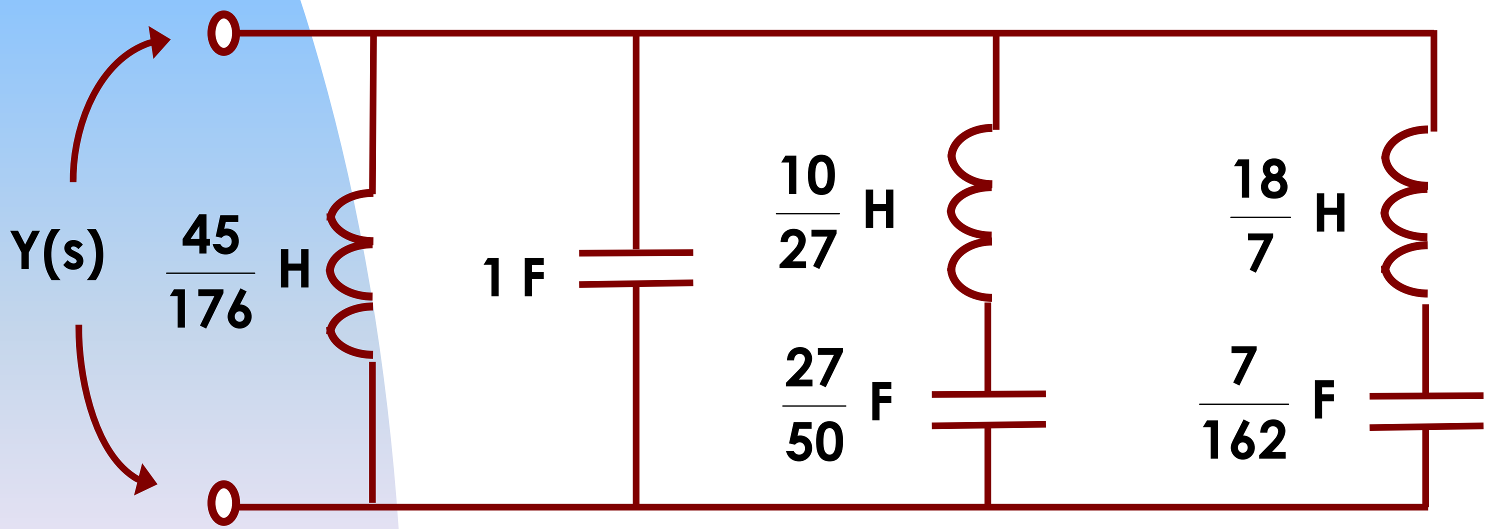
$$L_1 = \frac{10}{27}\ \text{H} \qquad C_1 = \frac{27}{50}\ \text{F}$$

$$\omega_{p2}^2 = \frac{1}{L_2C_2} = 9 \rightarrow \frac{1}{L_2} = \frac{\left(s^2+9\right)}{s}Y(s)\bigg|_{s^2=-9}$$

$$L_2 = \frac{18}{7}\ \text{H} \qquad C_2 = \frac{7}{162}\ \text{F}$$

Formas de Foster

$$Y(s)=\frac{(s^2+2)(s^2+8)(s^2+11)}{s(s^2+5)(s^2+9)}$$



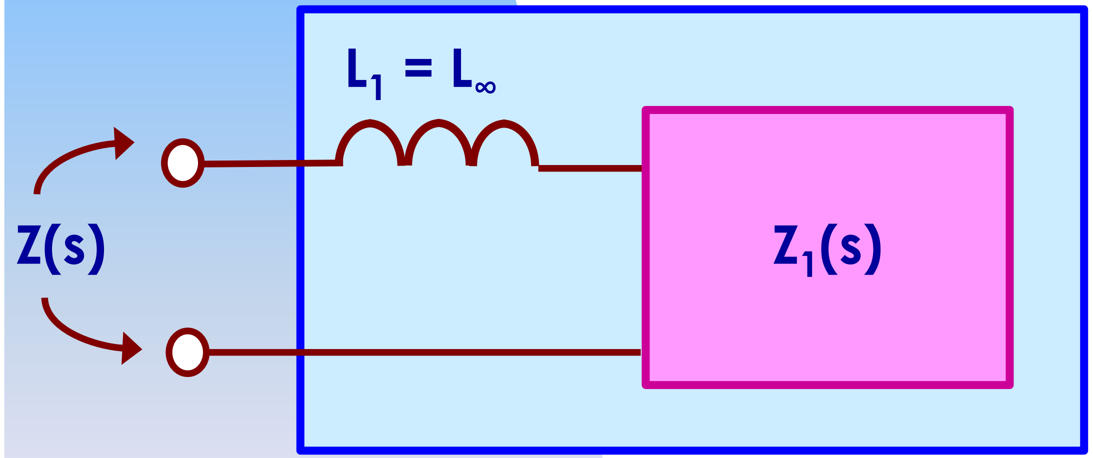
Formas de Cauer

1ª Forma de Cauer

- Baseia-se no comportamento da função de acesso (impedância ou admitância) no infinito.
- Consiste em extrair da FA cada elemento que sintetiza um pólo no infinito.
- FA de rede LC: ou a impedância ou a admitância possuirá um um pólo no infinito.

1ª Forma de Cauer

Se a impedância tem pólo no infinito é extraída uma indutância em série: L_∞



Determinação de $L_1 = L_\infty$:

$$L_1 = \left.\frac{Z(s)}{s}\right|_{s\to\infty}$$

Impedância remanescente $Z_1(s)$:

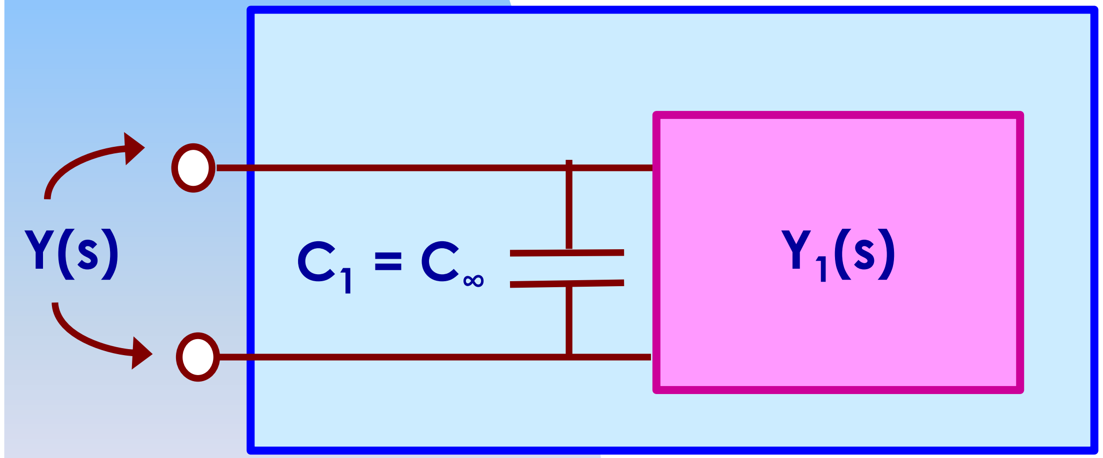
$$Z(s) = sL_1 + Z_1(s)$$

$$Z_1(s) = Z(s) - sL_1$$

Realização de funções de acesso

1ª Forma de Cauer

Se a admitância tem pólo no infinito é extraída uma capacitância em paralelo: C_∞



Determinação de $C_1 = C_\infty$:

$$C_1 = \left.\frac{Y(s)}{s}\right|_{s\to\infty}$$

Impedância remanescente $Y_1(s)$:

$$Y(s) = sC_1 + Y_1(s)$$

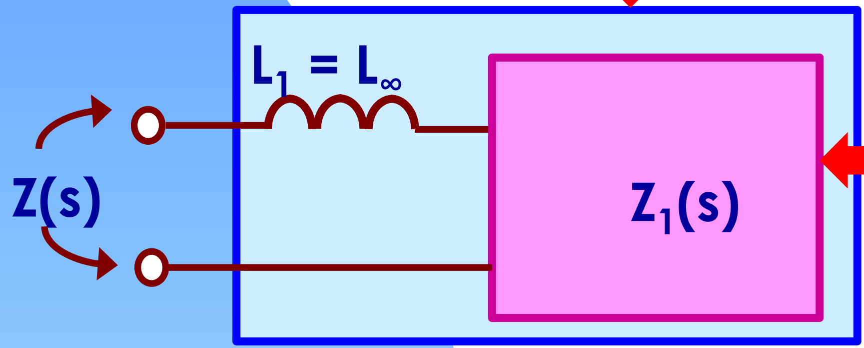
$$Y_1(s) = Y(s) - sC_1$$

Realização de funções de acesso

Após a extração do elemento que realiza um pólo no infinito:

- **A FA remanescente passa a ter um zero no infinito.**
- **A inversa da FA remanescente, $1/Z_1(s)$ ou $1/Y_1(s)$, tem um pólo no infinito.**
- **O próximo elemento é extraído da inversa da FA remanescente.**

Z(s) tem pólo no infinito

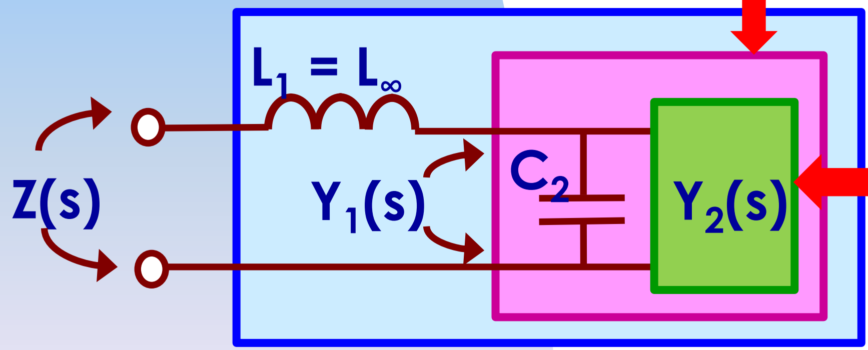


$Z_1(s)$ tem zero no infinito

$$L_1 = \left.\frac{Z(s)}{s}\right|_{s\to\infty}$$

$$Z_1(s) = Z(s) - sL_1$$

$Y_1(s)$ tem pólo no infinito



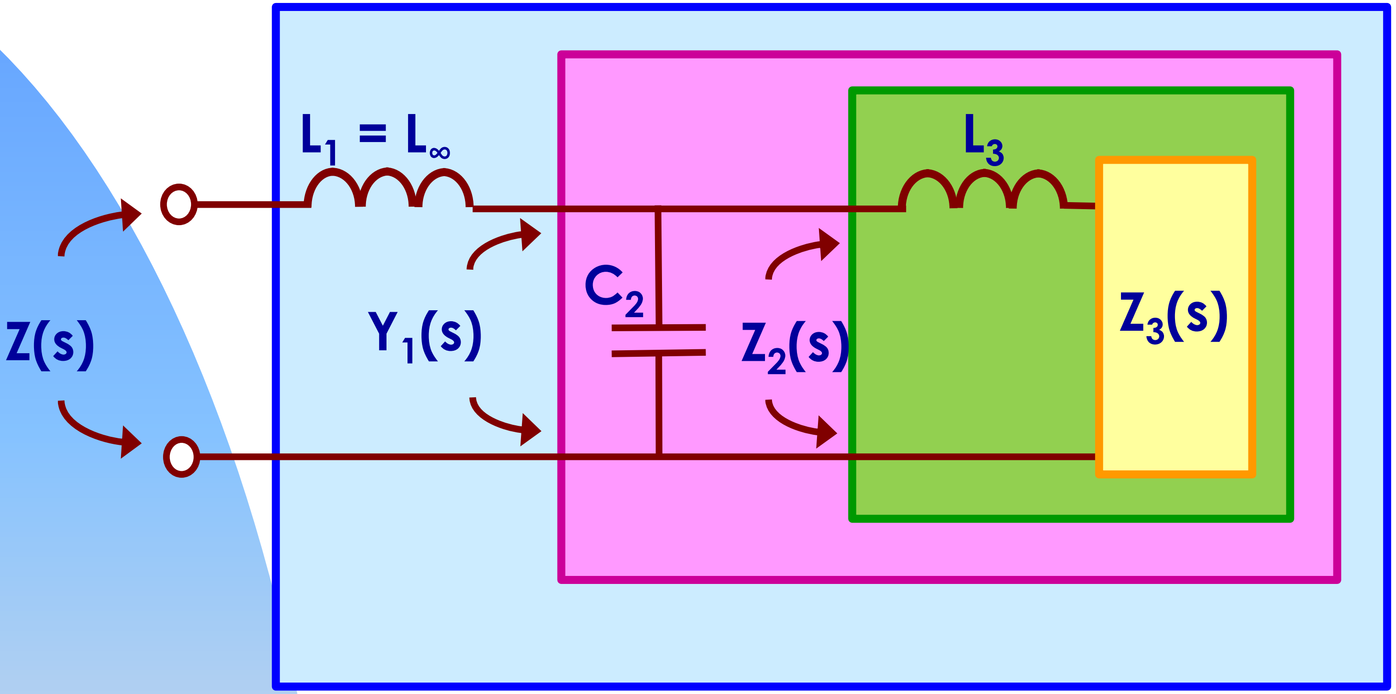
$Y_2(s)$ tem zero no infinito

$$Y_1(s) = \frac{1}{Z_1(s)}$$

$$C_2 = \left.\frac{Y_1(s)}{s}\right|_{s\to\infty}$$

$$Y_2(s) = Y_1(s) - sC_2$$

$Y_2(s)$ tem zero no infinito ⟺ $Z_2(s)$ tem pólo no infinito



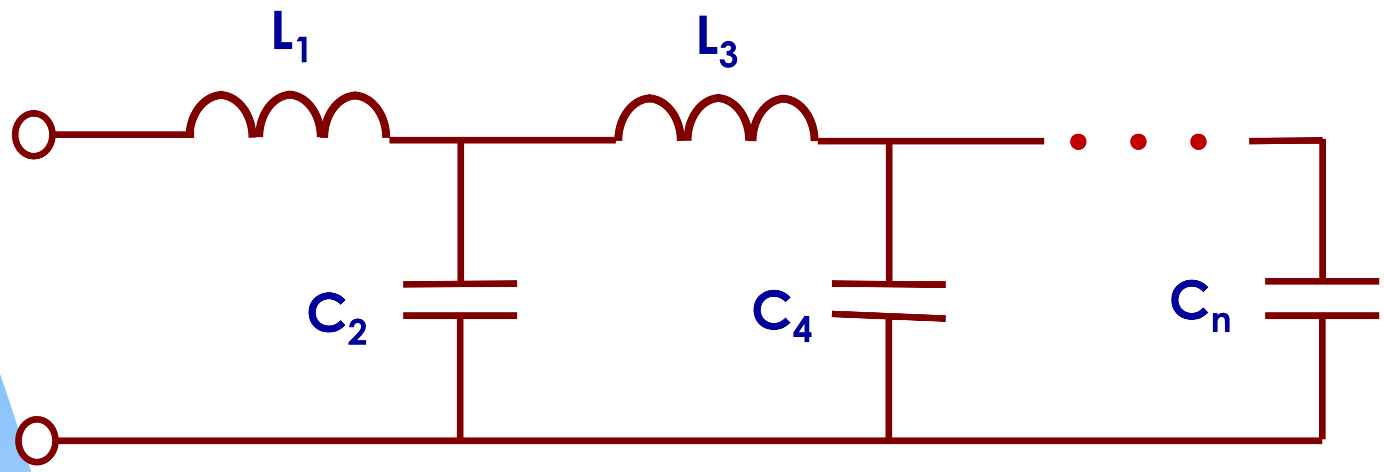
$$Z_2 = \frac{1}{Y_2} \qquad L_3 = \left.\frac{Z_2(s)}{s}\right|_{s\to\infty} \qquad Z_3(s) = Z_2(s) - sL_3$$

O procedimento deve se repetir, alternando-se indutor em série com capacitor em paralelo, extraídos respectivamente de uma impedância com pólo no infinito e de uma admitância com pólo no infinito, até que não haja mais elementos para serem extraídos.

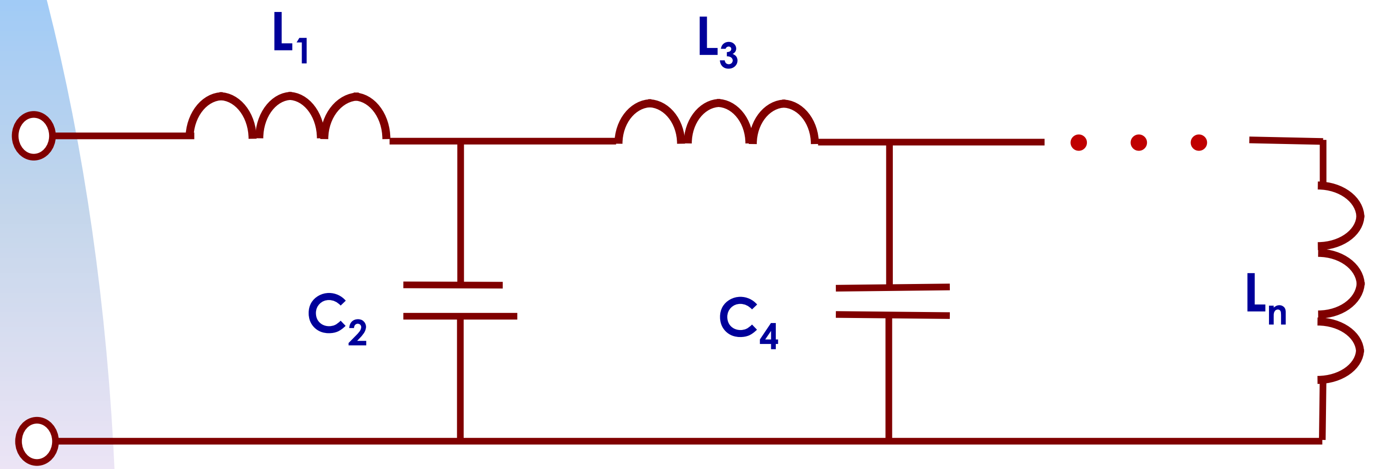
Possíveis aspectos da 1ª forma de Cauer

Z(s) tem pólo no infinito

Z(s) tem n par: rede começa com um indutor e termina com um capacitor.



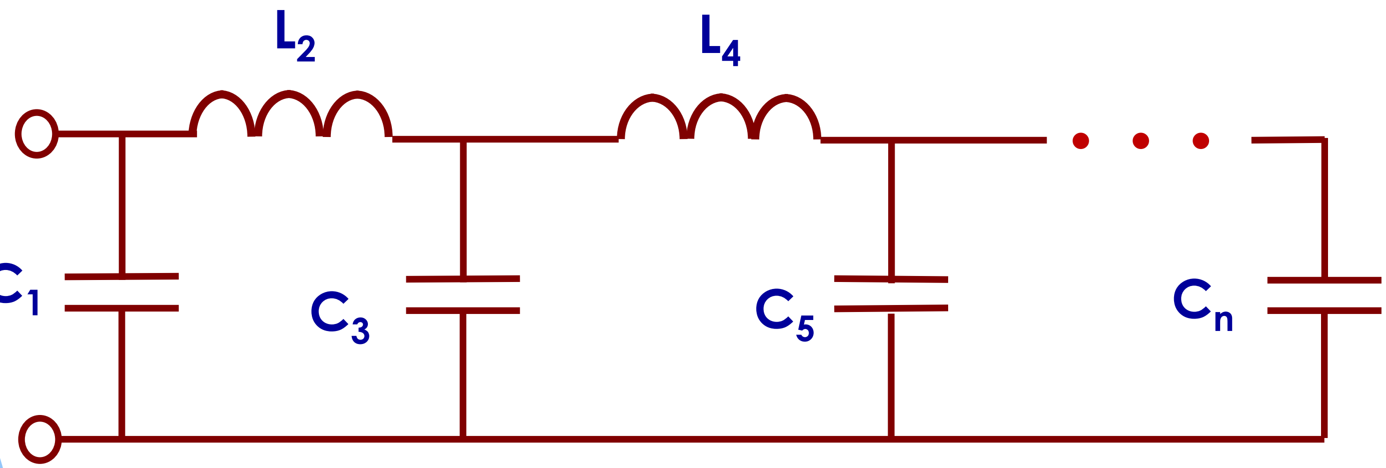
Z(s) tem n ímpar: rede começa com um indutor e termina com outro indutor.



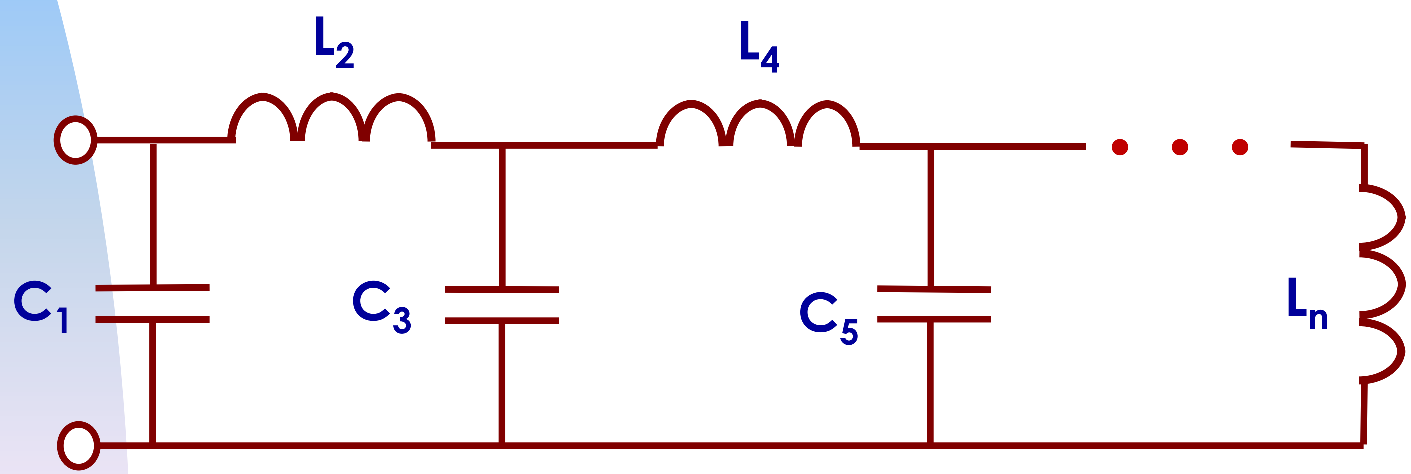
Possíveis aspectos da 1ª forma de Cauer

Y(s) tem pólo no infinito

Y(s) tem n ímpar: rede começa com um capacitor e termina com um capacitor.



Y(s) tem n par: rede começa com um capacitor e termina com um indutor.



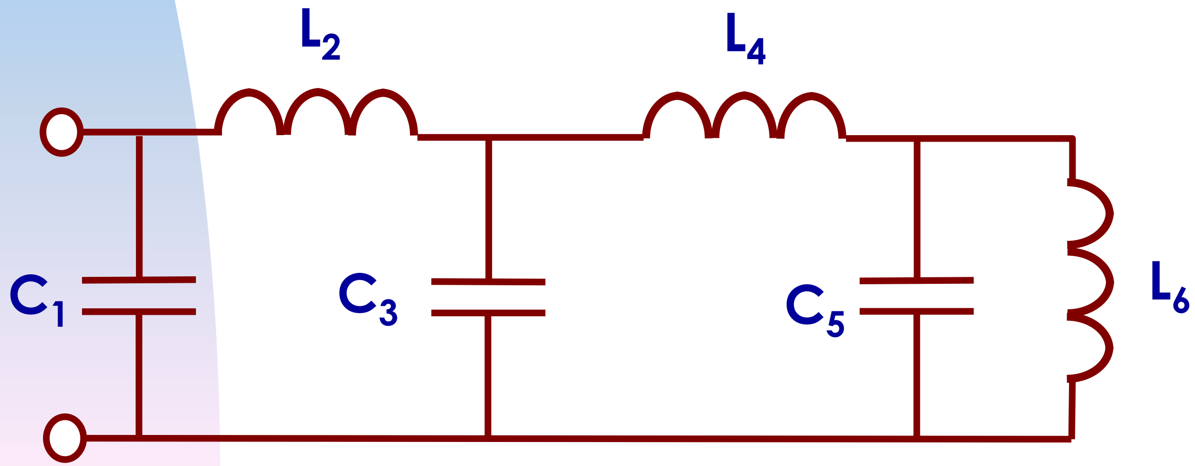
Realização de funções de acesso

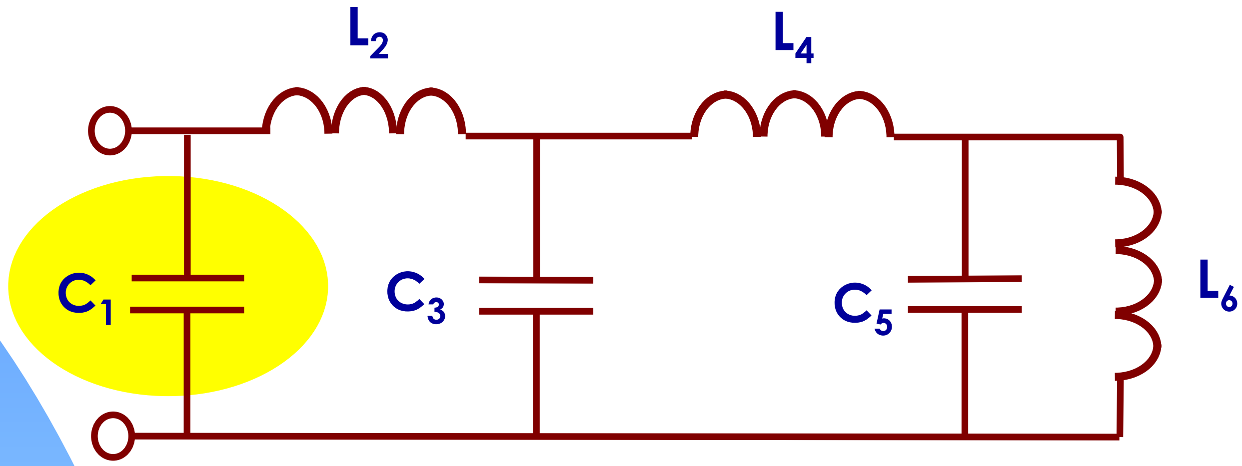
Exercício:

Realize a admitância par-ímpar de sexta ordem aqui apresentada utilizando a primeira forma de Cauer.

$$Y(s) = \frac{(s^2+2)(s^2+8)(s^2+11)}{s(s^2+5)(s^2+9)}$$

Y(s) tem pólo no infinito e n é par: a rede começa com um capacitor e termina com um indutor.





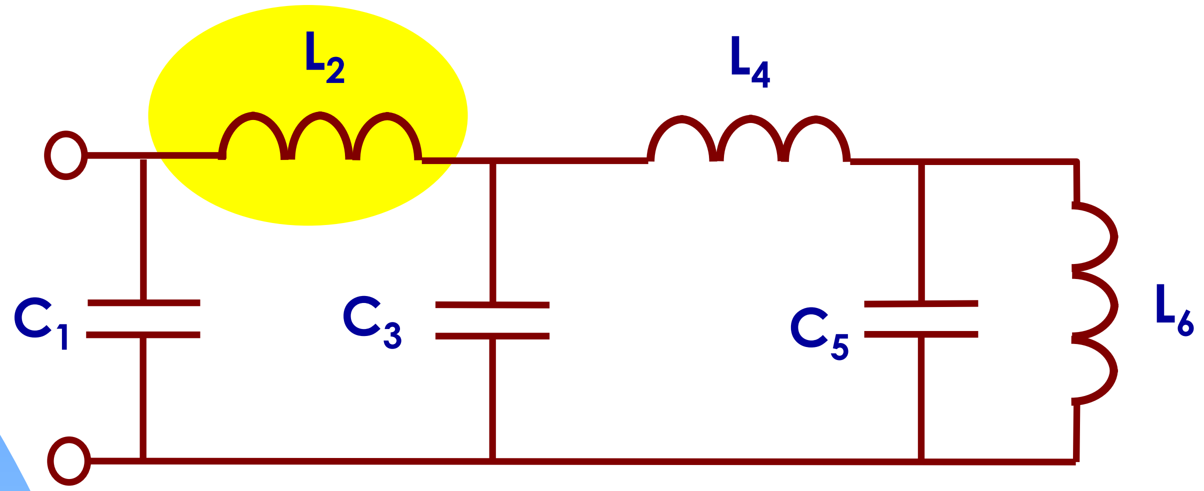
$$C_1 = \left.\frac{Y(s)}{s}\right|_{s\to\infty} = \left.\frac{s^6 + 21s^4 + 126s^2 + 176}{s^6 + 14s^4 + 45s^2}\right|_{s\to\infty} = 1\,\mathrm{F}$$

$$Y_1(s) = Y(s) - sC_1 = \frac{s^6 + 21s^4 + 126s^2 + 176}{s^5 + 14s^3 + 45s} - s = \frac{7s^4 + 81s^2 + 176}{s^5 + 14s^3 + 45s}$$

tem zero
no infinito

$$Z_1(s) = \frac{1}{Y_1(s)} = \frac{s^5 + 14s^3 + 45s}{7s^4 + 81s^2 + 176}$$

tem pólo
no infinito

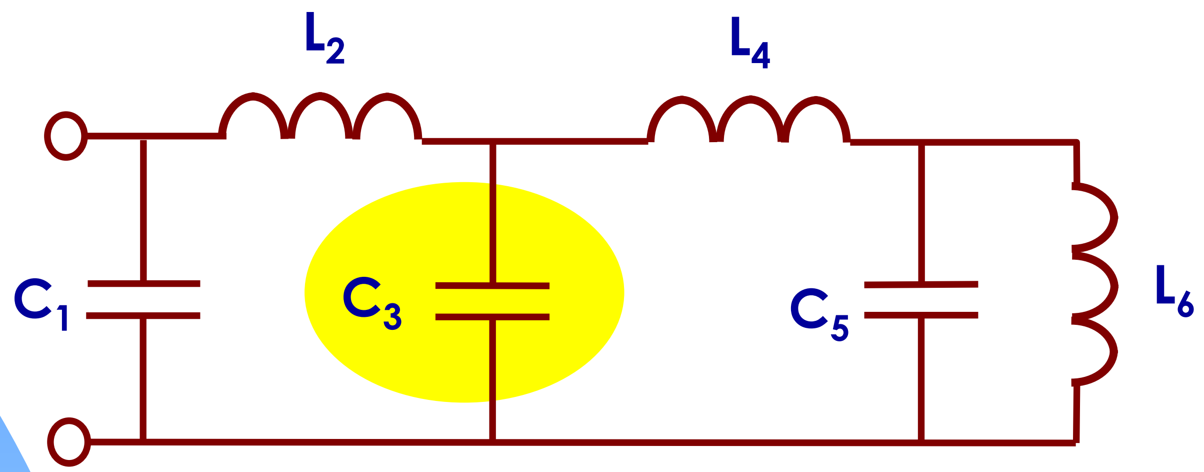


$$L_2 = \left.\frac{Z_1(s)}{s}\right|_{s\to\infty} = \left.\frac{s^5 + 14s^3 + 45s}{7s^5 + 81s^3 + 176s}\right|_{s\to\infty} = \frac{1}{7}\,\mathrm{H}$$

$$Z_2(s) = Z_1(s) - sL_2 = \frac{s^5 + 14s^3 + 45s}{7s^4 + 81s^2 + 176} - \frac{s}{7} = \frac{17s^3 + 139s}{49s^4 + 567s^3 + 1232s}$$

$$Y_2(s) = \frac{1}{Z_2(s)} = \frac{49s^4 + 567s^2 + 1232}{17s^3 + 139s}$$

tem pólo no infinito

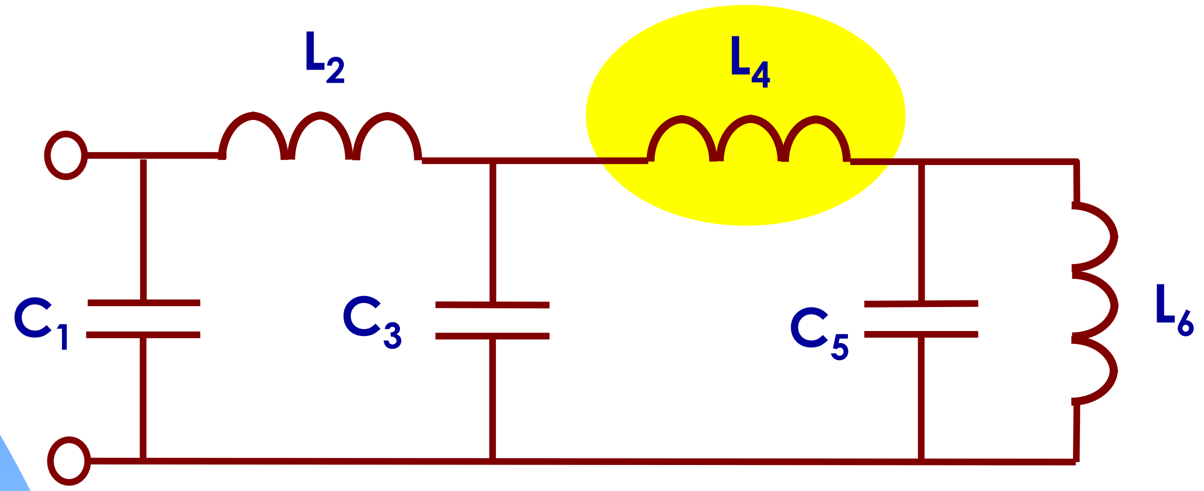


$$C_3 = \left.\frac{Y_2(s)}{s}\right|_{s\to\infty} = \left.\frac{49\,s^4 + 567\,s^2 + 1232}{17s^4 + 139\,s^2}\right|_{s\to\infty} = \frac{49}{17}\ \mathrm{F}$$

$$Y_3(s) = Y_2(s) - sC_3 = \frac{49s^4 + 567\,s^2 + 1232}{17s^3 + 139\,s} - \frac{49s}{17} = \frac{2828\,s^2 + 20944}{289s^3 + 2363\,s}$$

$$Z_3(s) = \frac{1}{Y_3(s)} = \frac{289\,s^3 + 2363\,s}{2828\,s^2 + 20944}$$

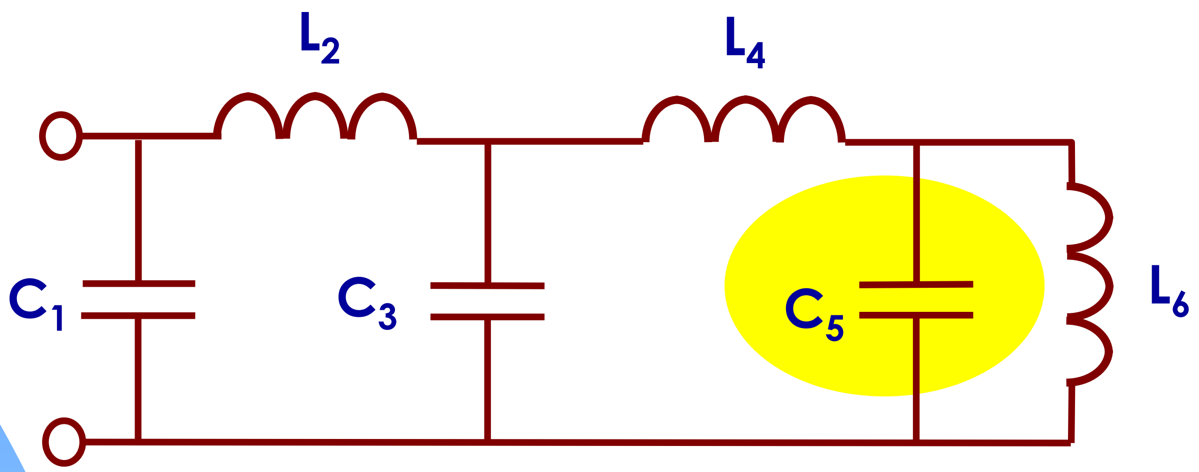
tem pólo no infinito



$$L_4 = \left.\frac{Z_3(s)}{s}\right|_{s\to\infty} = \left.\frac{289\,s^3 + 2363\,s}{2828\,s^3 + 20944\,s}\right|_{s\to\infty} = \frac{289}{2828}\,\mathrm{H}$$

$$Z_4(s) = Z_3(s) - sL_4 = \frac{289\,s^3 + 2363\,s}{2828\,s^2 + 20944} - \frac{289s}{2828} = \frac{629748\,s}{7997584s^2 + 59229632}$$

$$Y_4(s) = \frac{1}{Z_4(s)} = \frac{7997584\,s^2 + 59229632}{629748\,s}$$ tem pólo no infinito

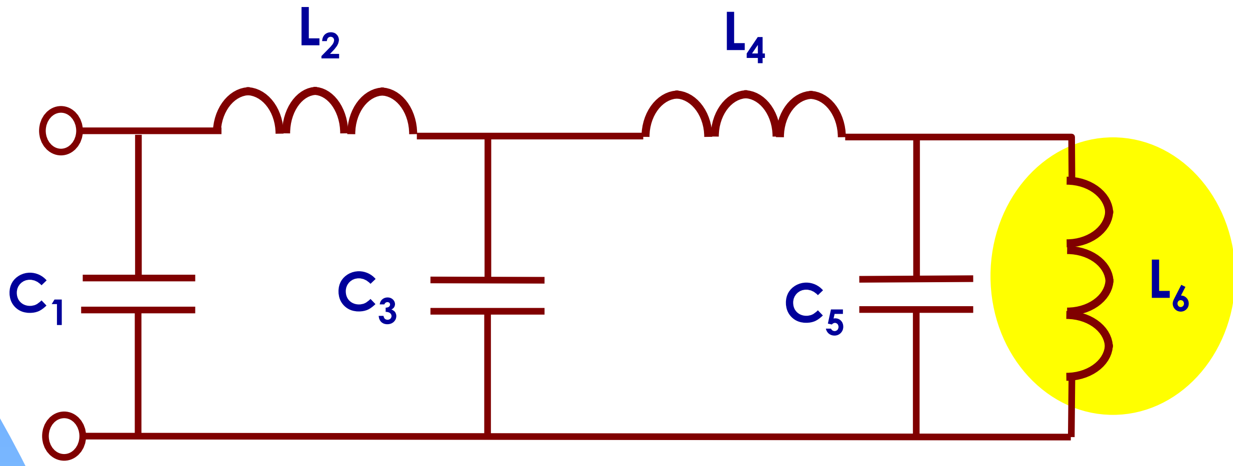


$$C_5 = \left.\frac{Y_4(s)}{s}\right|_{s\to\infty} = \left.\frac{7997584\,s^2 + 59229632}{629748\,s^2}\right|_{s\to\infty} = \frac{7997584}{629748}\ \mathrm{F}$$

$$Y_5(s) = Y_4(s) - sC_5 = \frac{7997584\,s^2 + 59229632}{629748\,s} - \frac{7997584\,s}{629748} = \frac{59229632}{629748\,s}$$

$$Z_5(s) = \frac{1}{Y_5(s)} = \frac{629748\,s}{59229632}$$

tem pólo no infinito



$$L_6 = \left.\frac{Z_5(s)}{s}\right|_{s\to\infty} = \left.\frac{629748\,s}{59229632s}\right|_{s\to\infty} = \frac{629748}{59229632}\,\mathrm{H}$$

Verificação do término do processo

$$Z_6(s) = Z_5(s) - sL_6 = \frac{629748\,s}{59229632} - s\frac{629748}{59229632} = 0$$

Observação: após a extração de C3, a rede toma a 1ª forma de Foster e a impedância Z3 poderia, alternativamente, ser sintetizada diretamente por esta técnica.

Realização de funções de acesso

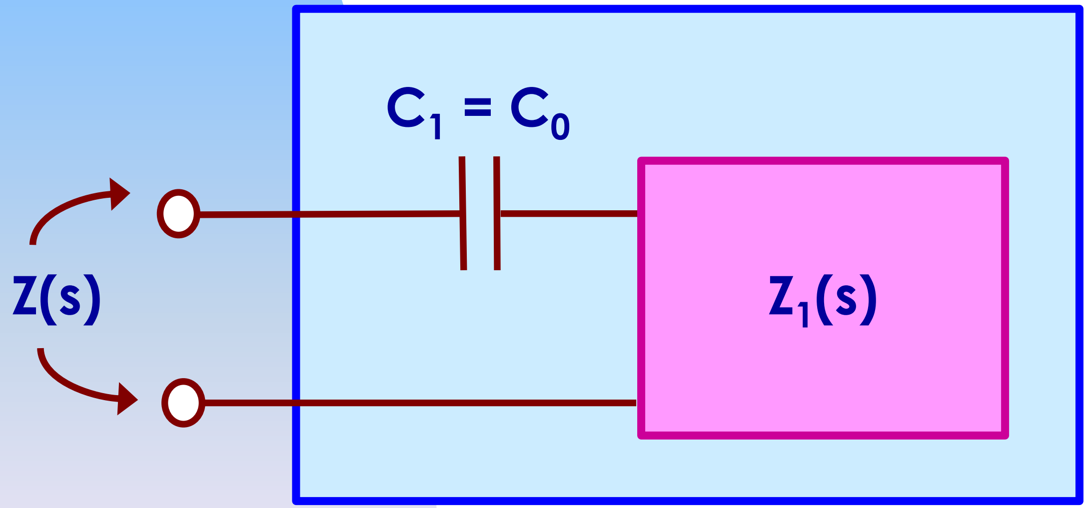
2ª Forma de Cauer

- Baseia-se no comportamento da função de acesso (impedância ou admitância) na origem.
- Consiste em extrair da FA cada elemento que sintetiza um pólo na origem.
- FA de rede LC: ou a impedância ou a admitância possui um um pólo na origem.

Realização de funções de acesso

2ª Forma de Cauer

Se a impedância tem pólo na origem é extraída uma capacitância em série: C_0



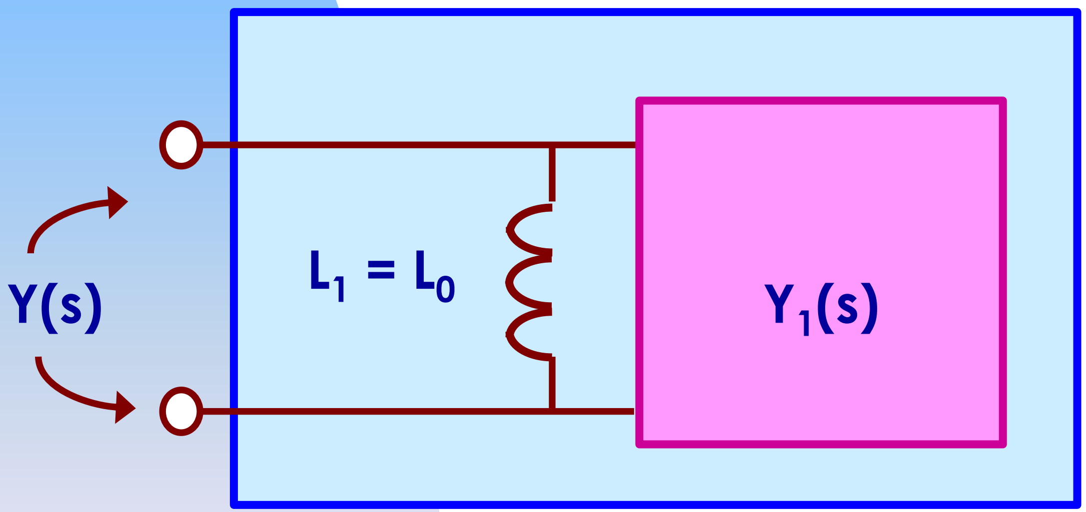
$$\frac{1}{C_1} = sZ(s)\Big|_{s=0}$$

$$Z_1(s) = Z(s) - \frac{1}{sC_1}$$

Realização de funções de acesso

2ª Forma de Cauer

Se a admitância tem pólo na origem é extraída uma indutância em paralelo: L_0



$$\frac{1}{L_1} = sY(s)\Big|_{s=0}$$

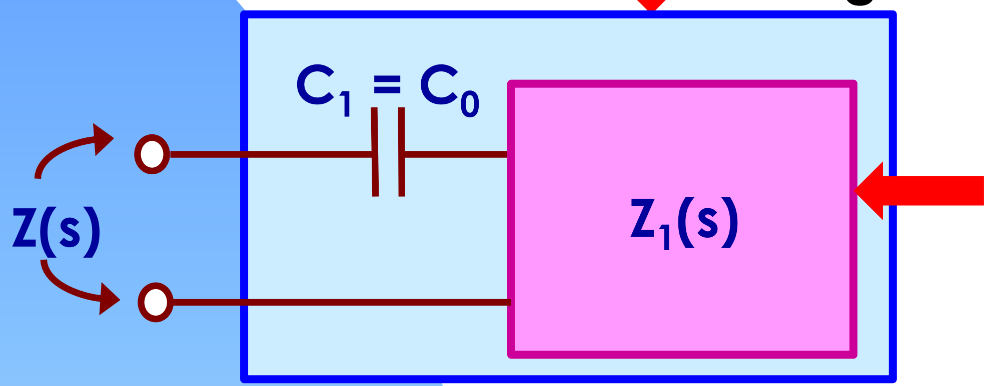
$$Y_1(s) = Y(s) - \frac{1}{sL_1}$$

Realização de funções de acesso

Após a extração do elemento que realiza um pólo na origem:

- A FA remanescente terá um zero na origem.
- A inversa da FA remanescente tem um pólo na origem.
- O próximo elemento é extraído da inversa da FA remanescente.

Z(s) tem pólo a origem

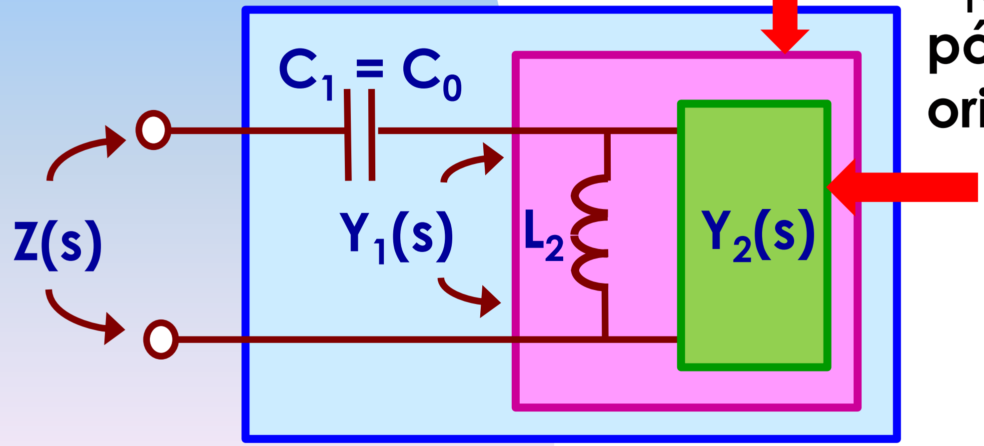


$Z_1(s)$ tem zero na origem

$$\frac{1}{C_1} = sZ(s)\Big|_{s=0}$$

$$Z_1(s) = Z(s) - \frac{1}{sC_1}$$

$Y_1(s)$ tem pólo na origem



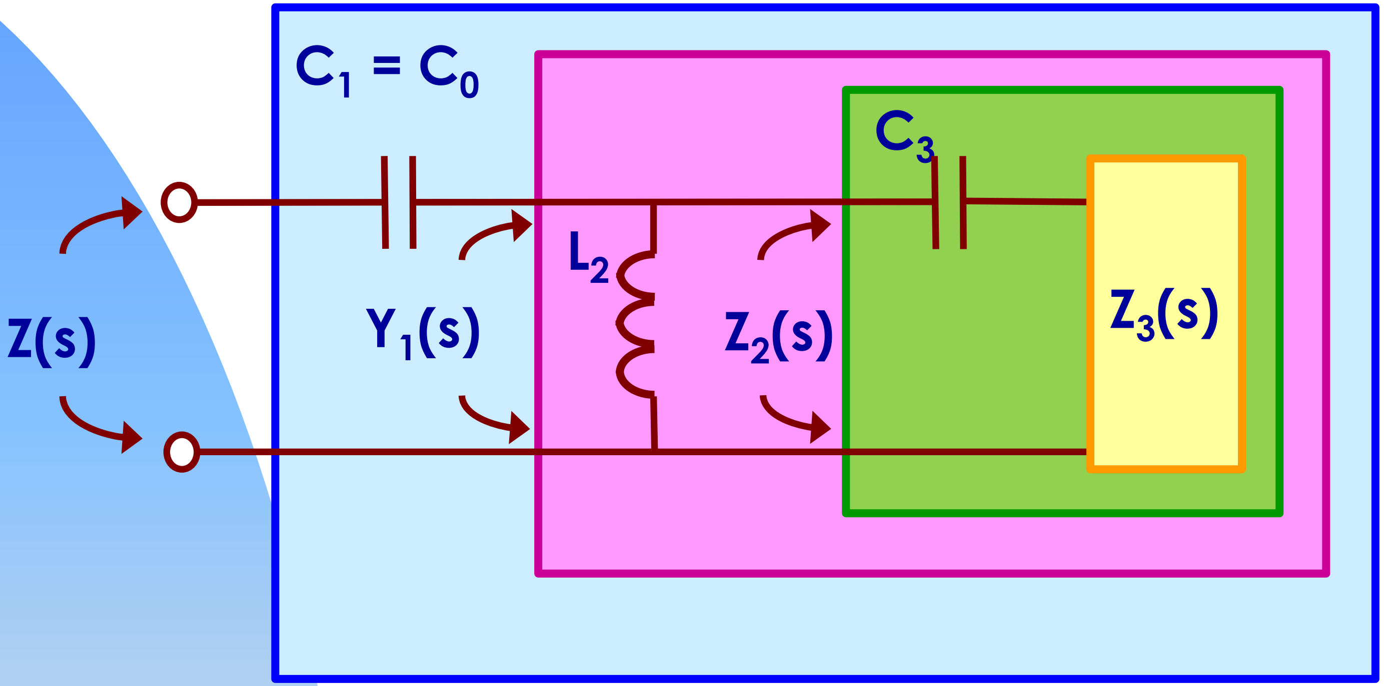
$Y_2(s)$ tem zero na origem

$$Y_1(s) = \frac{1}{Z_1(s)}$$

$$\frac{1}{L_2} = sY_1(s)\Big|_{s=0}$$

$$Y_2(s) = Y_1(s) - \frac{1}{sL_2}$$

$Y_2(s)$ tem zero na origem ⟺ $Z_2(s)$ tem pólo na origem

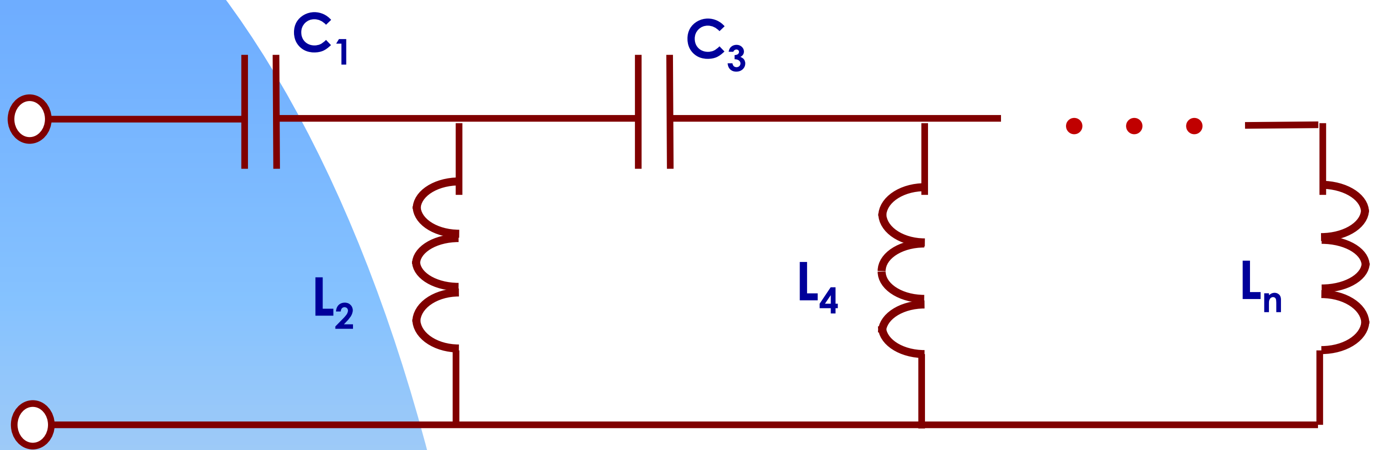


$$Z_2(s) = \frac{1}{Y_2(s)} \qquad \frac{1}{C_3} = sZ_2(s)\Big|_{s=0} \qquad Z_3(s) = Z_2(s) - \frac{1}{sC_3}$$

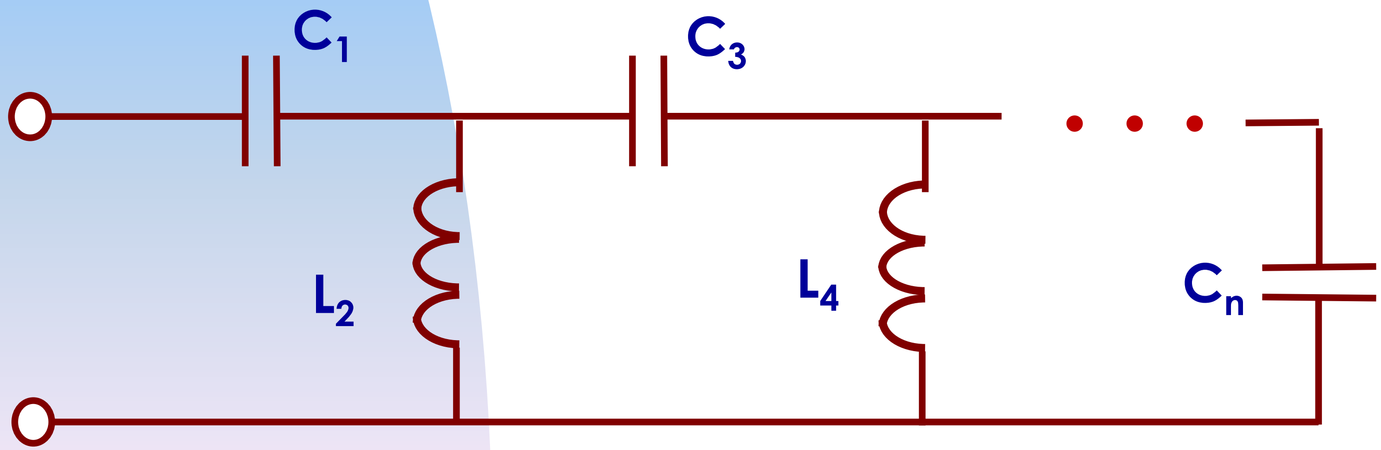
E assim por diante até se extrair o último elemento!

Possíveis aspectos da 2ª forma de Cauer

Z(s) tem pólo na origem



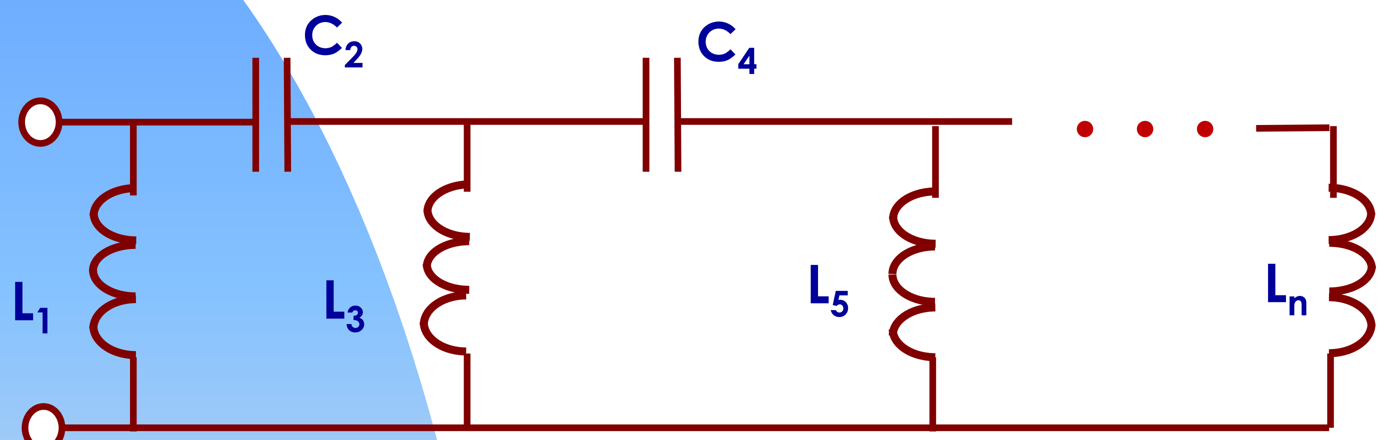
Z(s) tem n par: rede começa com um capacitor e termina com um indutor



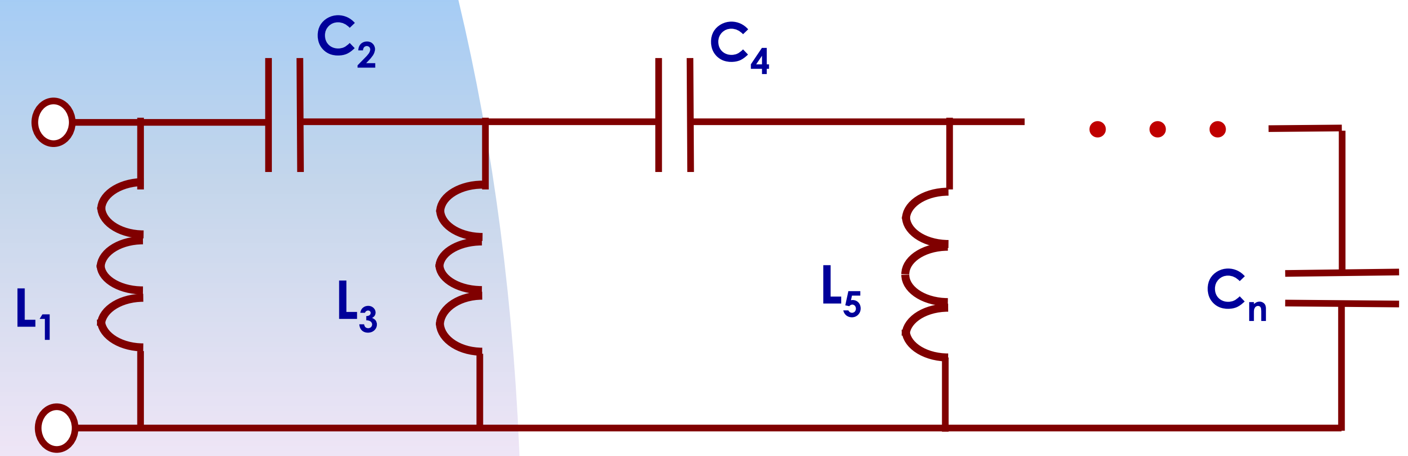
Z(s) tem n ímpar: rede começa com um capacitor e termina com outro capacitor

Possíveis aspectos da 2ª forma de Cauer

Y(s) tem pólo na origem



Y(s) tem n ímpar: a rede começa com um indutor e termina com outro indutor



Y(s) tem n par: rede começa com um indutor e termina com um capacitor

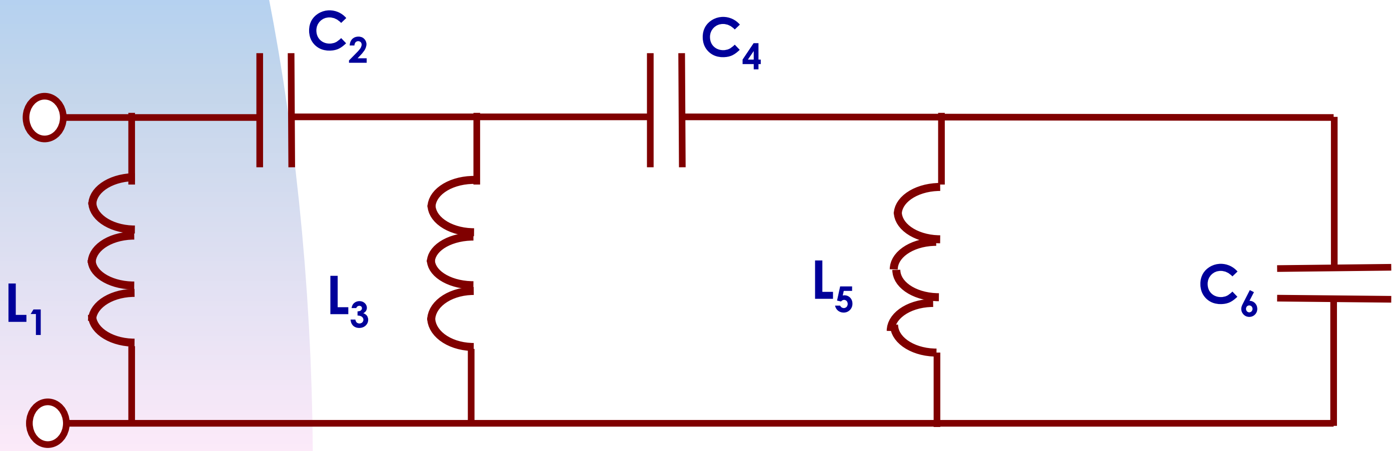
Realização de funções de acesso

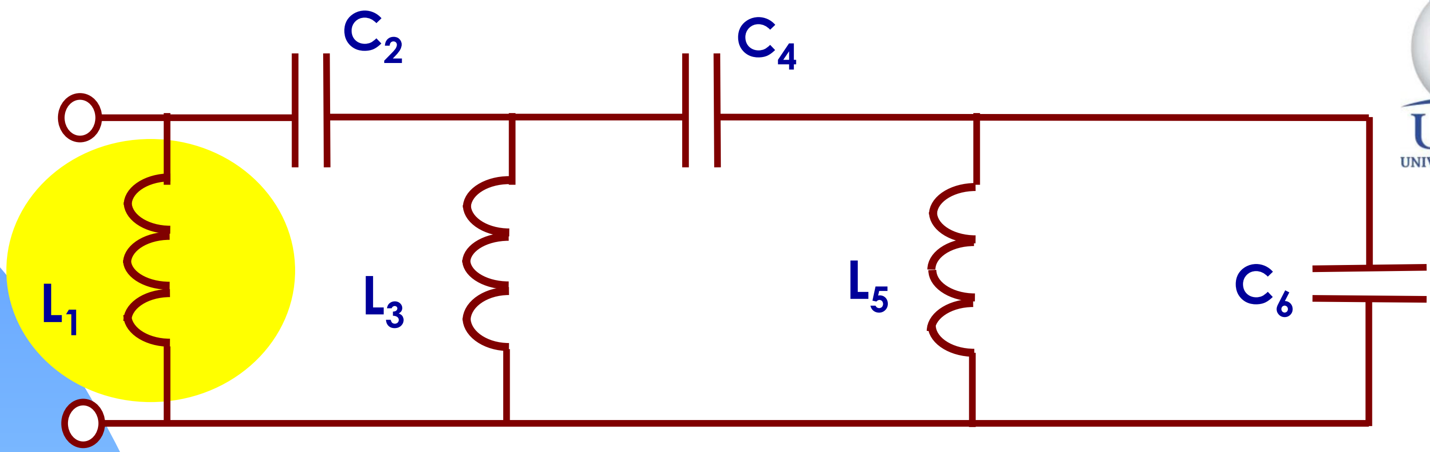
Exercício:

Realize a admitância par-ímpar de sexta ordem aqui apresentada utilizando a segunda forma de Cauer.

$$Y(s) = \frac{(s^2+2)(s^2+8)(s^2+11)}{s(s^2+5)(s^2+9)}$$

Y(s) tem pólo na origem e n par: rede começa com um indutor e termina com um capacitor.





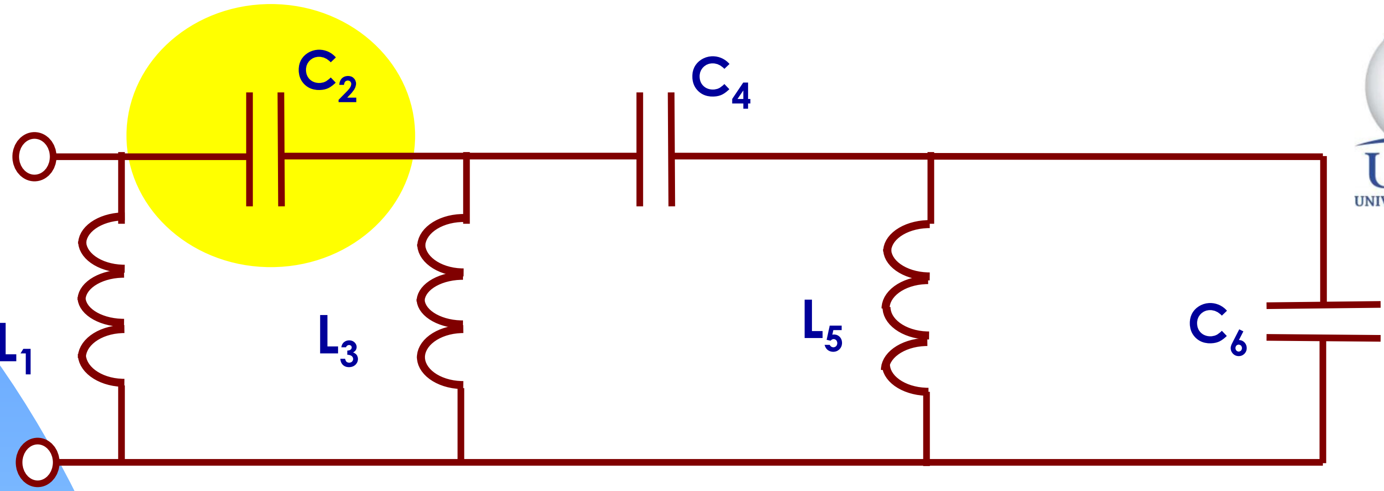
$$\frac{1}{L_1} = sY(s)\Big|_{s=0} = \left.\frac{s^6 + 21s^4 + 126s^2 + 176}{s^4 + 14s^2 + 45}\right|_{s=0} = \frac{176}{45} \qquad L_1 = \frac{45}{176}\,\text{H}$$

$$Y_1(s) = Y(s) - \frac{1}{sL_1} = \frac{s^6 + 21s^4 + 126s^2 + 176}{s^5 + 14s^3 + 45s} - \frac{176}{45\,s} = \frac{45s^5 + 769s^3 + 3206\,s}{45\,s^4 + 630s^2 + 2025}$$

$$Z_1(s) = \frac{1}{Y_1(s)} = \frac{45\,s^4 + 630s^2 + 2025}{45s^5 + 769s^3 + 3206\,s}$$

tem pólo
na origem

tem zero
no origem



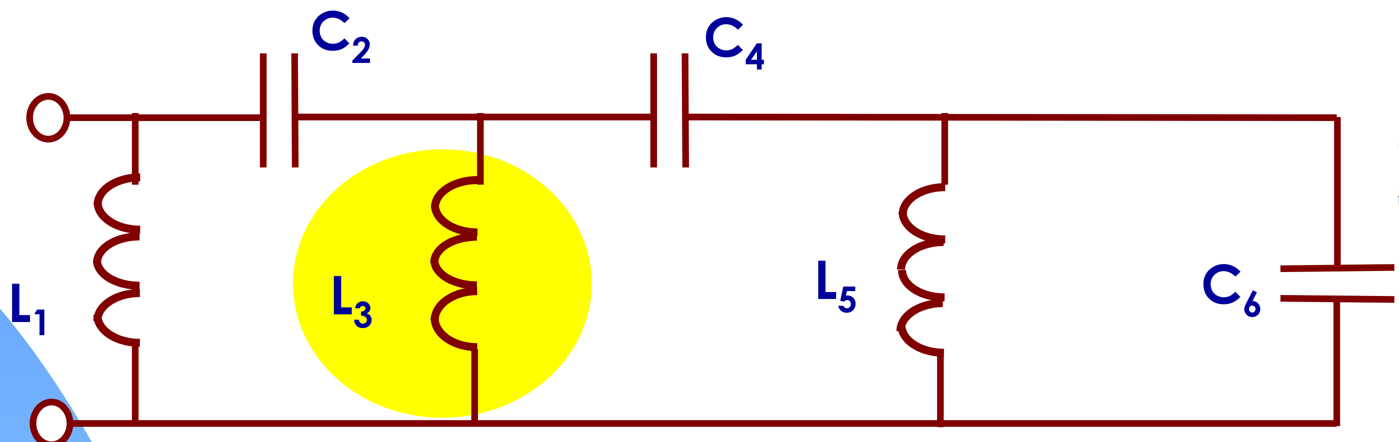
$$\frac{1}{C_2} = sZ_1(s)\Big|_{s=0} = \left.\frac{45s^4 + 630\,s^2 + 2025}{45s^4 + 769\,s^2 + 3206}\right|_{s=0} = \frac{2025}{3206} \qquad C_2 = \frac{3206}{2025}\,\mathrm{F}$$

$$Z_2(s) = Z_1(s) - \frac{1}{sC_2} = \frac{45\,s^4 + 630\,s^2 + 2025}{45\,s^5 + 769\,s^3 + 3206\,s} - \frac{2025}{3206\,s}$$

$$Z_2(s) = \frac{53145\,s^3 + 462555\,s}{144270\,s^4 + 2465414\,s^2 + 10278436}$$

$$Y_2(s) = \frac{144270\,s^4 + 2465414\,s^2 + 10278436}{53145\,s^3 + 462555\,s}$$

tem pólo na origem



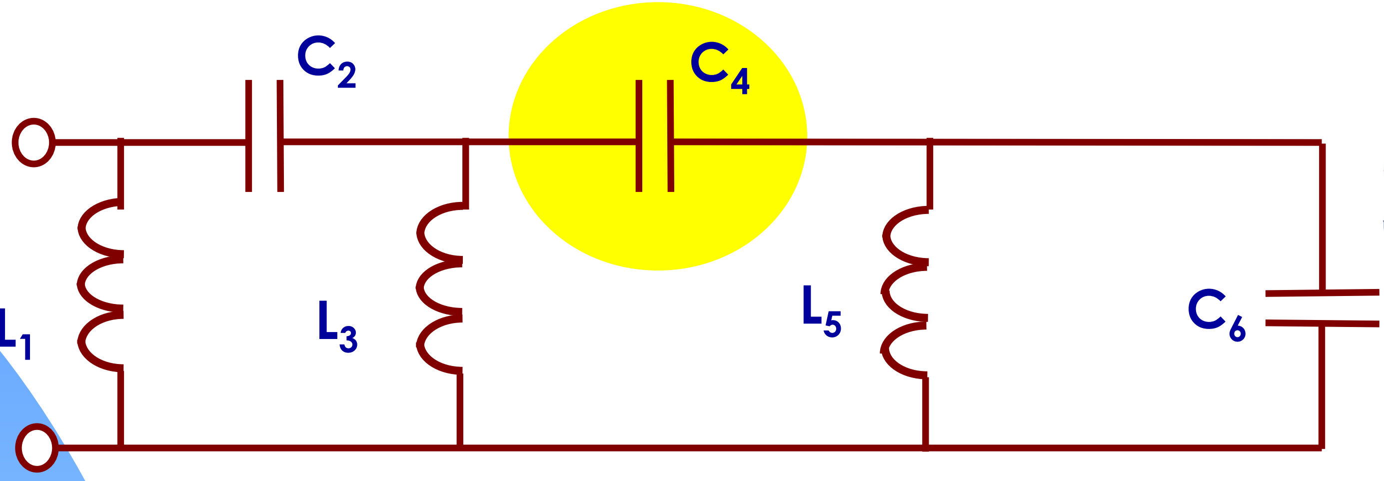
$$\frac{1}{L_3} = sY_2(s)\big|_{s=0} = \left.\frac{144270\,s^4 + 2465414\,s^2 + 10278436}{53145\,s^2 + 462555}\right|_{s=0} = \frac{10278436}{462555}$$

$$L_3 = \frac{462555}{10278436}\,\mathrm{H}$$

$$Y_3(s) = Y_2(s) - \frac{1}{sL_3} = \frac{144270\,s^4 + 2465414\,s^2 + 10278436}{53145\,s^3 + 462555\,s} - \frac{10278436}{462555\,s}$$

$$Y_3(s) = \frac{66732809850\,s^3 + 594142091550\,s}{24582485475\,s^2 + 213957128025}$$

$Z_3(s) = 1/Y_3(s)$ ➡ **tem pólo na origem**



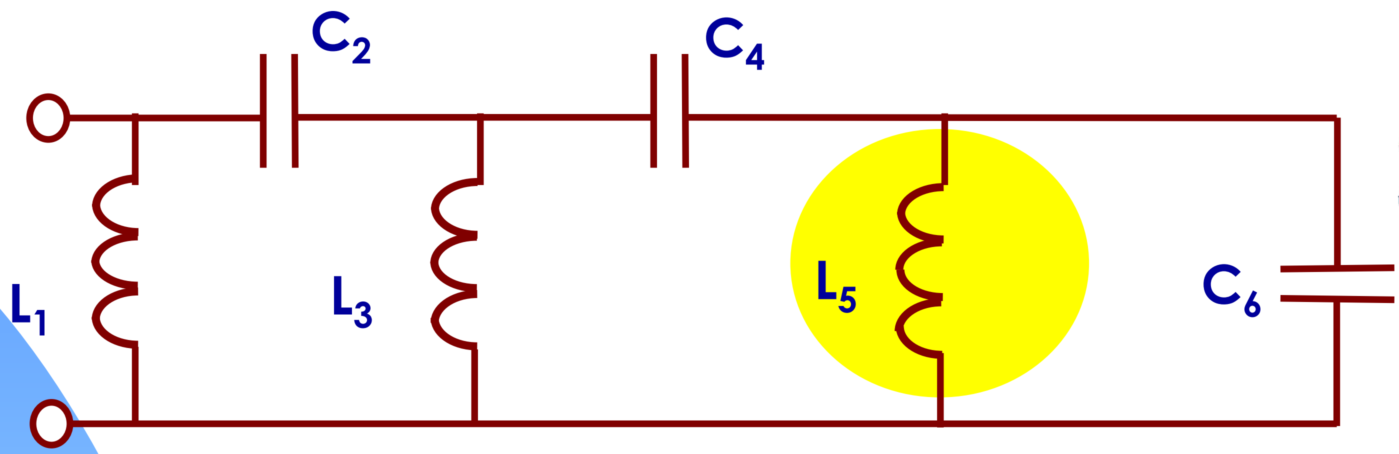
$$\frac{1}{C_4} = sZ_3(s)\Big|_{s=0} = \left.\frac{24582485475\,s^2 + 213957128025}{66732809850\,s^2 + 594142091550}\right|_{s=0} = \frac{213957128025}{594142091550}$$

$$C_4 = \frac{594142091550}{213957128025}\ \mathrm{F}$$

$$Z_4(s) = Z_3(s) - \frac{1}{sC_4} = \frac{24582485475\,s^2 + 213957128025}{66732809850\,s^3 + 594142091550\,s} - \frac{213957128025}{594142091550\,s}$$

$$Z_4(s) = \frac{3275289950695641900000\,s}{3964881407727215726750 0\,s^2 + 353004824951408581402500}$$

$Y_4(s) = 1/Z_4(s)$ ➡ **tem pólo na origem**

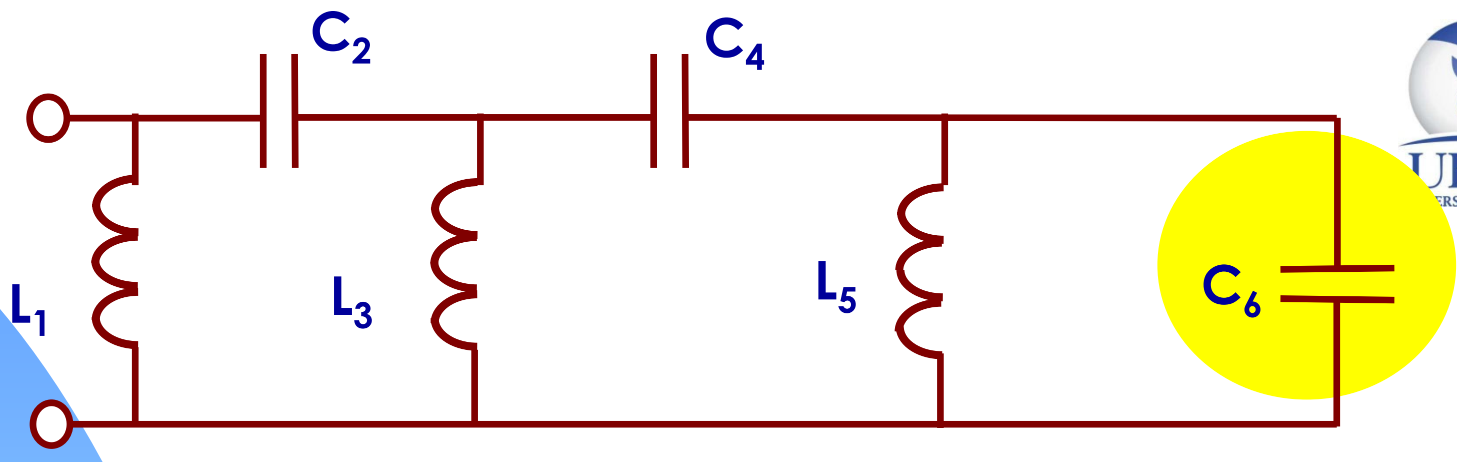


$$\frac{1}{L_5} = sY_4(s)\Big|_{s=0} = \frac{3530048249514085814025000}{327528995069564190000}$$

$$L_5 = \frac{327528995069564190000}{3530048249514085814025000}\,\mathrm{H}$$

$$Y_5(s) = Y_4(s) - \frac{1}{sL_5} = \frac{396488140777272157267500\,s}{327528995069564190000}$$

$$Z_5(s) = \frac{1}{Y_4(s)}$$ ➡ tem pólo na origem



$$Z_5(s) = \frac{32752899506956419000\,0}{39648814077727215726750\,0\,s}$$

$$\frac{1}{C_6} = sZ_5(s)\Big|_{s=0} = \frac{32752899506956419000\,0}{39648814077727215726750\,0}$$

$$C_6 = \frac{39648814077727215726750\,0}{32752899506956419000\,0}\ \mathrm{F}$$

Observação: após a extração de L3, a rede toma a 1ª forma de Foster e a impedância Z3 poderia, alternativamente, ser sintetizada diretamente por esta técnica.

Referências e leituras recomendadas

Seções 2.1 a 2.3 e 6.2, Daryanani, Gobind, "Principles of Active Network Synthesis and Design," John Wiley & Sons, New York.

Capítulo 4, Noceti-Filho, Sidnei, "Filtros Seletores de Sinais," Editora da UFSC, Florianópolis, 2003.

Van Valkenburg, "Analog Filter Design," Oxford, New York.