Suken Math Contest 024

Kuniko Suken 2025

2026 年 2 月 18 日

注意

- e はネイピア数 (自然対数の底) とする。
- $\log x$ は自然対数とする。
- 最終的な答えを二重根号の含まれない形に変形できる場合は含まれない形で答えること。
- 角度で'°' を付けない場合は弧度法とする。
- 最大・最小問題では等号が成立することを証明すること。
- 末尾に公式集を設けたので必要ならば参照せよ。

禁止事項

- 第三者との情報共有
- 書籍・論文・Web ページなどの資料の閲覧
- 計算機の使用およびプログラミングによる計算
- AI の使用

2 月 15 日に配点を変更しました。

表 1　問題構成

問題番号	問題名	配点
1	Minimization 1	40
2	Minimization 2	90
3	Nonexistence	90
4	Gaussian Function	140

1 Minimization 1

実数 x, y, z が $x + 2y + 3z = 1$ を満たすとき, $x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2$ の最小値を求めよ。

2 Minimization 2

x を実数とする。$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}$ の最小値を求めよ。

3 Nonexisistence

(1)以下の恒等式を示せ。ただし, n は **2 以上の整数**とする。

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

(2)任意の正の整数 m と 3 以上の整数 n に対して, 次の等式を満たす正の整数の組 (a, b) は存在しないことを示せ。ただし, フェルマーの最終定理を用いる場合はその証明を要求する。

$$2^m + a^n = b^n$$

4 Gaussian Function

$f(x) = e^{-x^2}$ (x は実数) とする。無限数列 $\{a_n\}(n = 1, 2, \cdots)$ を $a_1 = c$ (c は実数の定数), $a_{n+1} = f(a_n)$ で定義する。以下の問いに答えよ。

(1) $f(x) = x$ を満たす実数がただ一つ存在し, そのような x は $\dfrac{1}{2} < x < 1$ を満たすことを, 中間値の定理を用いて示せ。

(2) (1) で求めた解を α とする。任意の **2 以上の整数** n に対して, $|a_{n+1} - \alpha| \leqq \sqrt{\dfrac{2}{e}}|a_n - \alpha|$ が成り立つことを示せ。

(3) 定数 c の値によらず, $\{a_n\}$ は α に収束することを示せ。

公式集

以下の関数はすべて実関数であるものとする。ここに書かれていることはすべて解答中で証明なしに用いてよい。特に断りのない限り数列は第 1 項から始まるものとする。
<暫定的なものなのでコンテスト終了後は教科書を参照すること>

無限数列

項がどこまでも限りなく続く数列を, **無限数列** という。

極限 (数列)

無限数列 $\{a_n\}$ に対して, n を限りなく大きくすると a_n が限りなくある値 α に近づく*とき, α を $\{a_n\}$ の極限値といい, $n \to \infty$ のとき $a_n \to \alpha$ または $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と表す。また, このとき $\{a_n\}$ は α に収束するという。より厳密には, *は以下のように定義される。

任意の正の実数 ϵ に対して, ある正の整数 N が存在して, $n \geqq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon$ が成り立つ。

無限数列 $\{a_n\}$ に対して, n を限りなく大きくすると a_n が限りなく大きくなる**とき, $\{a_n\}$ は正の無限大に発散するといい, $n \to \infty$ のとき $a_n \to \infty$ または $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ と表す。より厳密には, **は以下のように定義される。

任意の正の実数 K に対して, ある正の整数 N が存在して, $n \geqq N \Rightarrow a_n > K$ が成り立つ。

無限数列 $\{a_n\}$ に対して, n を限りなく大きくすると a_n が限りなく小さくなる***とき, $\{a_n\}$ は負の無限大に発散するといい, $n \to \infty$ のとき $a_n \to -\infty$ または $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ と表す。より厳密には, ***は以下のように定義される。

任意の負の実数 K に対して, ある正の整数 N が存在して, $n \geqq N \Rightarrow a_n < K$ が成り立つ。

極限値の性質

無限数列 $\{a_n\}$ が α に, 無限数列 $\{b_n\}$ が β に収束するとき,

1. $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$ (ただし, k は定数)
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$ (複合同順)
3. $\lim_{n\to\infty}(ka_n + lb_n) = k\alpha + l\beta$ (ただし, k, l は定数)
4. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$
5. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ (ただし, $\beta \neq 0$)

無限等比数列

無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限は,
$r > 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$
$r = 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} r^n = 1$
$0 \leqq r < 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$
$r < 0$ のとき 極限はない

はさみうちの原理 (数列)

無限数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ において, 任意の正の整数 n について $a_n \leqq b_n \leqq c_n$ が成り立ち, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ のとき, $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$

区間

集合 $\{x \mid a \leqq x \leqq b\}$ を (閉) 区間 $[a, b]$,
集合 $\{x \mid a < x \leqq b\}$ を (半開) 区間 $(a, b]$,
集合 $\{x \mid a \leqq x < b\}$ を (半開) 区間 $[a, b)$,
集合 $\{x \mid a < x < b\}$ を (開) 区間 (a, b)
と表す。

極限 (関数)

関数 $f(x)$ に対して, x を $x > \alpha$ を満たしながら限りなく α に近づけたときの $f(x)$ の近づく値を $\lim_{x\to\alpha+0} f(x)$, $x < \alpha$ を満たしながら限りなく α に近づけたときの $f(x)$ の近づく値を $\lim_{x\to\alpha-0} f(x)$ と表す ($\alpha = 0$ のとき単に $+0$ や -0 と表す)。これらが等しいとき, その極限値を $\lim_{x\to\alpha} f(x)$ と表す。

連続関数

関数 $f(x)$ が $x = \alpha$ で連続であるとは, $f(\alpha)$ および極限値 $\lim_{x\to\alpha} f(x)$(ただし定義域の上端では左側極限, 下端では右側極限) が存在し, それらが等しいことを指す。$f(x)$ が区間 I に含まれる任意の値で連続であるとき, $f(x)$ は区間 I で連続であるという。$f(x)$ が定義域全体で連続であるとき, $f(x)$ は連続関数であるという。
連続関数どうしの和・差・積・商および合成した関数は連続関数である。
以下の関数はすべて連続関数である。

定数関数, x^r(r は実数), 指数関数, 対数関数, $\sin x, \cos x, \tan x$

中間値の定理

関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続で, $f(a) \neq f(b)$ ならば, $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対して

$$f(c) = k$$

を満たす実数 c が, a と b の間に少なくとも一つある。

ネイピア数 (自然対数の底)

$$\lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

$$2 < e < 3$$

微分 1

$f(x), g(x)$ は定義域全体で微分可能であるとする。また, 複合同順とする。

$$\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

微分 2

r が実数のとき,

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$